F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

1
ANUL X
1959

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL X

1959

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F
2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirattár
125/1960

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București;
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, București;
M. ARCAN, Institutul de proiectări de construcții și materiale de costrucții, București.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE PATRU ORI PE AN

Redacția: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul X, nr. 1 1959

SUMAR

STUDII

AEROMECANICĂ

Pag.

ELIE CARAFOLI și ȘERBAN SĂNDULESCU, Caracteristicile aerodinamice ale aripioarelor avînd o mișcare oscilatorie armonică în regim supersonic . . 7

N. N. PATRAULEA, Elice tandem antagoniste 41

TIBERIU HACKER, Despre stabilitatea longitudinală a avionului în cazul perturbațiilor repetate 69

ALEXE MARINESCU, Asupra vibrațiilor consolei anticuplu la elicopterele cu un singur rotor 77

HIDRODINAMICĂ

TEODOR OROVEANU, O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii spre sonde în medii poroase neomogene 87

SIMION HÎNCU, Determinarea lungimii de stabilizare a mișcării fluidelor cu suprafață liberă în canale largi cu fund orizontal 109

UNGERE-FRECARE-UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Asupra stabilității mișcării lagărelor circulare lubrificate cu gaze 117

TEORIA MECANISMELOR

RADU C. BOGDAN și CHRISTIAN PELECUDI, Sinteza mecanismelor cu patru elemente pe baza analizei armonice 141

ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR

ST. BĂLAN, S. RĂUTU, M. ARCAN și V. PETCU, Studiul comportării construcțiilor prin încercări pe modele din masă plastică 151

Pag.

NICOLAE S. PÎRVULESCU, Influenţa lungimii bielei asupra echilibrării unităţilor de pompare 173

LIVIU LIBRESCU, Cîteva probleme ale teoriei unei clase de învelitori elastice, subţiri, neomogene 187

VASILE MANEA şi EUDOXIU PROCOPOVICI, O extindere a rezolvării problemei torsiunii unor palete de turbină 203

VIBRAŢII

MIHAIL IFRIM, Calculul direct al frecvenţelor proprii la clădirile acţionate de cutremure 211

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU, Asupra regimurilor optime de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice 219

NOTE

ADRIANA NĂSTASE, Asupra unor formule de recurenţă referitoare la calculul coeficienţilor vitezei axiale de perturbaţie pentru mişcările omogene de ordin superior 241

DAN GH. IONESCU, Sursa continuu repartizată situată într-o conductă circulară 249

PAUL IONESCU, Asupra exploatării simultane a unui sistem de strate printr-o singură sondă în regim elastic 253

MIRCEA SOARE, Asupra posibilităţii stabilirii unor formule de dimensionare la flambaj 257

FLOREA DINCĂ şi NICOLAE BOICU, Asupra torsiunii unor bare cilindrice neomogene 265

REFERATE ŞI NOTE TEHNICE

LUCIAN DUMITRESCU, Tubul de şoc pentru cercetări de aerodinamică . . . 271

ION NEDELESCU, Asupra unei suflerii supersonice cu funcţionare continuă în circuit deschis 287

MIHAI IONESCU, Determinarea eforturilor în cupole sferice din sarcini nesimetrice 303

RECENZII 311

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 321

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA „STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ"

publică :

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate şi Note tehnice *în care se expune* : *stadiul actual al unei anumite probleme, subliniidu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).

— *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 de pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ЖУРНАЛ „РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие всеобщий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки *(краткие работы) оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Рефераты и технические заметки, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения в связи с некоторыми работами по прикладной механике, описания приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Отзывы *на румынские или зарубежные книги и исследования.*

В журнале публикуются работы по следующим специальностям:

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термо-аэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

—Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета машин, автоматизация, исследование поверхностей, обработка сплошных твердых сред).

—Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным частям проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке и, если возможно, на русском, французском, английском и немецком языках. Резюме должно составлять в среднем 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, г. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ”

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том X, № 1 1959

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОДИНАМИКА Стр.

ЕЛИЕ КАРАФОЛИ и ШЕРБАН СЭНДУЛЕСКУ, Аэродинамические характеристики гармонического колебательного движения элеронов в сверхзвуковом режиме 7

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Антагонистические винты тэндем 41

ТИБЕРИУ ХАКЕР, О продольной устойчивости самолета в случае повторных возмущений 69

АЛЕКСЕ МАРИНЕСКУ, О колебаниях противовращательной консоли у вертолетов с одним несущим винтом 77

ГИДРОДИНАМИКА

ТЕОДОР ОРОВЯНУ, Приближенный метод исследования притока к скважинам в неоднородных пористых средах 87

СИМИОН ХЫНКУ, Определение длины стабилизации течения жидкостей со свободной поверхностью в широких каналах с горизонтальным дном 109

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Об устойчивости движения круглого подшипника с газовой смазкой 117

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

РАДУ К. БОГДАН и КРИСТИАН ПЕЛЕКУДИ, Синтез четырехзвенных механизмов на основе гармонического анализа 141

Стр.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ–УПРУГОСТЬ–ПЛАСТИЧНОСТЬ

Ш. БЭЛАН, С. РЭУТУ, М. АРКАН и В. ПЕТКУ, Исследование поведения конструкций путем испытаний на пластмассовых моделях . . . 151
НИКОЛАЕ С. ПЫРВУЛЕСКУ, Влияние длины шатуна на уравновешивание агрегатов 173
ЛИВИУ ЛИБРЕСКУ, Несколько задач теории класса тонких неоднородных упругих оболочек 187
ВАСИЛЕ МАНЯ и ЕУДОКСИЕ ПРОКОПОВИЧ, Расширенное решение задачи кручения турбинных лопаток 203

ВИБРАЦИИ

МИХАИЛ ИФРИМ, Прямой расчет собственных частот подверженных землетрясениям зданий 211

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Об оптимальных режимах резания металлов резцами, оснащенными минерало-керамическими пластинками или пластинками из твердых сплавов 219

ЗАМЕТКИ

АДРИАНА НЭСТАСЕ, О некоторых рекуррентных формулах расчета коэффициентов осевой скорости возмущения для однородного движения высшего порядка 241
ДАН Г. ИОНЕСКУ, Непрерывно распределенный источник в круглом трубопроводе 249
ПАУЛ ИОНЕСКУ, Об одновременной эксплуатации нескольких пластов одной скважиной при упругом режиме 253
МИРЧА СОАРЕ, О возможности установления некоторых формул расчета на продольный изгиб 257
ФЛОРЯ ДИНКЭ и НИКОЛАЕ БОЙКУ, О кручении неоднородного цилиндрического стержня 265

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

ЛУЧИАН ДУМИТРЕСКУ, Ударная труба для аэродинамических исследований 271
ИОН НЕДЕЛЕСКУ, Сверхзвуковая труба при непрерывной работе в незамкнутой цепи 287
МИХАЙ ИОНЕСКУ, Определение усилий от несимметричных нагрузок в сферических куполах 303
РЕЦЕНЗИИ 311
КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ В ПОРЯДКЕ КНИГООБМЕНА 321

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome X, nº 1 1959

SOMMAIRE

ÉTUDES

AEROMÉCANIQUE Page

ELIE CARAFOLI et ȘERBAN SĂNDULESCU, Caractéristiques aérodynamiques des ailerons ayant un mouvement oscillatoire harmonique en régime supersonique 7
N. N. PATRAULEA, Hélices en tandem antagonistes 41
TIBERIU HACKER, Sur la stabilité longitudinale de l'avion lors des perturbations répétées 69
ALEXE MARINESCU, Sur les vibrations de la console anticouple dans les hélicoptères à rotor unique 77

HYDRODYNAMIQUE

TEODOR OROVEANU, Méthode d'approximation pour l'étude de l'écoulement vers les puits de pétrole, à travers des milieux poreux non homogènes 87
SIMION HÎNCU, Détermination de la longueur de stabilisation du mouvement des fluides à surface libre dans des canaux larges, au fond horizontal . . 109

LUBRIFICATION-FROTTEMENT-USURE

V. N. CONSTANTINESCU, Sur la stabilité des paliers circulaires lubrifiés aux gaz 117

THÉORIE DES MÉCANISMES

RADU C. BOGDAN et CHRISTIAN PELECUDI, Synthesis of four bar mechanisms on the basis of harmonic analysis 141

ÉLASTICITÉ-PLASTICITÉ-RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ST. BĂLAN, S. RĂUTU, M. ARCAN et V. PETCU, Étude du comportement des constructions par des essais sur maquettes en matières plastiques . . . 151

Page

NICOLAE S. PÎRVULESCU, Influence de la bielle de longueur finie sur l'équilibrage de l'unité de pompage 173

LIVIU LIBRESCU, Quelques problèmes de la théorie d'une classe de coques élastiques minces, non homogènes 187

VASILE MANEA et EUDOXIU PROCOPOVICI, Extension de la solution du problème de la torsion des aubes de turbine 203

VIBRATIONS

MIHAIL IFRIM, Calcul direct des fréquences propres des bâtiments soumis à l'action des séismes 211

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Les régimes optimes de coupe des métaux avec des outils de coupe en céramique ou carbures métalliques 219

NOTES

ADRIANA NĂSTASE, Sur certaines formules de récurrence pour le calcul des coefficients de la vitesse axiale de perturbation, lors des mouvements homogènes d'ordre supérieur 241

DAN GH. IONESCU, Source à répartition continue située dans une conduite circulaire 249

PAUL IONESCU, Sur l'exploitation simultanée d'un système de couches, par une seule sonde, en régime élastique 253

MIRCEA SOARE, De la possibilité d'établir des formules pour déterminer les dimensions de résistance au flambage 257

FLOREA DINCĂ et NICOLAE BOICU, De la torsion des barres cylindriques non homogènes 265

RAPPORTS ET NOTES TECHNIQUES

LUCIAN DUMITRESCU, A shock-tube for aerodynamic research 271

ION NEDELESCU, Au sujet d'une soufflerie supersonique à fonctionnement continu en circuit ouvert 287

MIHAI IONESCU, Détermination des efforts dans les coupoles sphériques sous l'action de charges asymétriques 303

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 311

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION 321

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

LE PÉRIODIQUE « STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »
(« ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE »)

publie :

— *des* études originales, *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique ;*

— *des* notes *(communications brèves) à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question ;*

— *des* rapports et des notes techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau ; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée ; la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée ;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— *Aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs) ;*

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes, aménagements hydrauliques) ;*

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus) ;*

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques) ;*

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction) ;*

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultrasons et des isotopes radio-actifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution, et pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou éventuellement en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPIOARELOR AVÎND O MIŞCARE OSCILATORIE ARMONICĂ ÎN REGIM SUPERSONIC *)

DE

ELIE CARAFOLI şi ŞERBAN SĂNDULESCU

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Să considerăm un sistem de coordonate $Ox_1x_2x_3$, şi să notăm cu U_∞ viteza curentului neperturbat dirijată după axa Ox_1, a_∞ viteza sunetului, M_∞ numărul Mach respectiv, şi $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ potenţialul de mişcare care trebuie să satisfacă următoarea ecuaţie în ipoteza perturbaţiilor mici :

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2U_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial t}\right). \tag{1}$$

Vom nota cu ω pulsaţia unei mişcări periodice şi vom introduce mai departe următoarele notaţii :

$$B^2 = M_\infty^2 - 1, \qquad \lambda = \frac{\omega h}{U_\infty}, \qquad k = -\frac{\lambda}{h}\frac{1 + B^2}{B^2}, \tag{2}$$

h fiind o lungime de referinţă, spre exemplu coarda aripii.

În cazul mişcării oscilatorii armonice, potenţialul de mişcare poate fi pus sub forma [1],

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = U_\infty\, e^{i(\omega t + kx_1)}\, \Phi(x_1, x_2, x_3), \tag{3}$$

în care *potenţialul redus* $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ este independent de timp, iar derivata acestuia în raport cu x_3 este numită *viteză verticală redusă*

$$\beta = \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = \frac{1}{U_\infty}\, e^{-i(\omega t + kx_1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}. \tag{4}$$

---

*) Unele din rezultatele din lucrarea de faţă, au fost publicate în articolul nostru : *Oscillations harmoniques des ailerons de forme générale en régime supersonique*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, *6* (1958).

Calculînd derivatele parțiale ale potențialului de mișcare $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)$ și înlocuindu-le în (1), se găsește că potențialul redus satisface ecuația

$$- B^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{\lambda^2}{h^2} \frac{1 + B^2}{B^2} \Phi \approx 0, \tag{5}$$

membrul drept al acesteia putînd fi neglijat dacă ω, respectiv λ sînt mici,

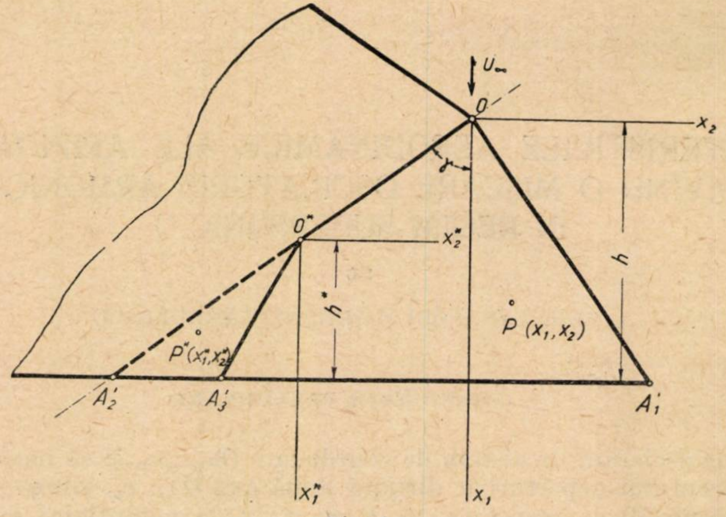


Fig. 1

ceea ce face ca determinarea lui Φ să fie redusă la o problemă de mișcare permanentă.

Să considerăm acum o aripioară de formă poligonală (fig. 1), avînd o mișcare oscilatorie de mică frecvență în jurul șarnierei $OO^\star$.

Mișcarea oscilatorie a suprafeței $OA_1'A_3'\,O^\star$ se poate obține prin suprapunerea a două mișcări avînd aceeași pulsație și aceeași fază la originea timpului [2]:

1) o mișcare oscilatorie armonică $\Omega_1 = \Omega_0 e^{i\omega t}$, a suprafeței $OA_1'A_2'$ în jurul axei OA'_2,

2) o mișcare oscilatorie armonică $\Omega_2 = - \Omega_0 e^{i\omega t}$, a suprafeței $O^\star A_3'A_2'$ în jurul axei fictive $O^\star A_2'$ care se află în prelungirea șarnierei $OO^\star$.

Descompunînd prima mișcare oscilatorie armonică în componentele sale după axele de coordonate Ox_1x_2,

$$\Theta_1 = E_1\, e^{i\omega t}, \qquad (E_1 = \Omega_0 \cos\gamma), \tag{6}$$

$$\Theta_2 = E_2\, e^{i\omega t}, \qquad (E_2 = - \Omega_0 \sin\gamma), \tag{6'}$$

și aplicînd formulele generale stabilite anterior [2], vom deduce pentru cota punctului P, de coordonate x_1, x_2, situat pe suprafața $O\,A_1'\,A_2'$, expresia

$$Z = e^{i\omega t}\,(E_1\, x_2 - E_2\, x_1) = \Theta_1\, x_2 - \Theta_2\, x_1 \tag{7}$$

şi respectiv, pentru *vitezele verticale reduse*,

$$\beta_0 = -E_2, \tag{8}$$

$$\beta_1 = i\frac{\lambda}{h}\left[E_1 x_2 - E_2 x_1 \frac{1+2B^2}{B^2}\right]. \tag{8'}$$

Procedînd în mod analog în cazul celei de-a doua mişcări oscilatorii, se obține pentru cota unui punct $P^\star$ de coordonate $x_1^\star$, $x_2^\star$, situat pe suprafața $O^\star A_3' A_2'$, expresia

$$Z^\star = -e^{i\omega t}(E_1 x_2^\star - E_2 x_1^\star) = -\Theta_1 x_2^\star + \Theta_2 x_1^\star, \tag{9}$$

iar *viteza verticală redusă* va fi dată de formulele

$$\beta_0^\star = E_2, \tag{10}$$

$$\beta_1^\star = -i\frac{\lambda}{h}\left[E_1 x_2^\star - E_2 x_1^\star \frac{1+2B^2}{B^2}\right]. \tag{10'}$$

În baza formulelor (8) şi (10), rezultă că *potențialele reduse* ale celor două mişcări oscilatorii sînt respectiv de forma

$$\Phi = \Phi_1 + i\frac{\lambda}{h}\Phi_2, \qquad \Phi^\star = \Phi_1^\star + i\frac{\lambda}{h}\Phi_2^\star, \tag{11}$$

de unde se vede că problema oscilațiilor armonice poate fi redusă la studiul a două mişcări omogene de ordinul unu şi doi, potențialele respective satisfăcînd ecuația (5).

Din ecuația presiunii unei mişcări nepermanente se obțin expresiile coeficienților de presiune

$$C_p \approx -2e^{i\omega t}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} - i\frac{\lambda}{h}\left(\frac{1}{B^2}\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1+B^2}{B^2}x_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)\right], \tag{12}$$

$$C_p^\star \approx -2e^{i\omega t}\left[\frac{\partial\Phi_1^\star}{\partial x_1^\star} - i\frac{\lambda}{h}\left(\frac{1}{B^2}\Phi_1^\star - \frac{\partial\Phi_2^\star}{\partial x_1^\star} + \frac{1+B^2}{B^2}x_1^\star\frac{\partial\Phi_1^\star}{\partial x_1^\star}\right)\right]. \tag{12'}$$

Vitezele axiale reduse,

$$u_0 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}, \quad u_1 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}, \quad u_0^\star = \frac{\partial\Phi_1^\star}{\partial x_1^\star}, \quad u_1^\star = \frac{\partial\Phi_2^\star}{\partial x_1^\star}, \tag{13}$$

pot fi uşor determinate folosind rezultatele din lucrările anterioare [4], [5].

Aplicînd pe de altă parte formulele lui Euler, pentru potențialele Φ_1 şi $\Phi_1^\star$ ale celor două mişcări, vom avea

$$\Phi_1 = x_1(u_0 + yv_0), \qquad \Phi_1^\star = x_1^\star(u_0^\star + yv_0^\star) \tag{14}$$

şi avînd în vedere legătura dintre *vitezele reduse* respective, dedusă din relațiile de compatibilitate,

$$y dv_0 = -du_0, \left(v_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right), \tag{15}$$

$$y^{\star} dv_0^{\star} = -du_0^{\star}, \left(v_0^{\star} = \frac{\partial \Phi_1^{\star}}{\partial x_2^{\star}}\right), \tag{15'}$$

unde $y = \frac{x_2}{x_1}$, respectiv $y^{\star} = \frac{x_2^{\star}}{x_1^{\star}}$, reprezintă puncte de pe aripioară în planele $x_1 = 1$ și $x_1^{\star} = 1$, putem determina ușor potențialele Φ_1 și $\Phi_1^{\star}$, dacă cunoaștem u_0, respectiv $u_0^{\star}$.

La studiul oscilațiilor armonice ale aripioarelor, vom avea de considerat mai departe, următoarele două cazuri:

— aripioară cu bord de atac subsonic,

— aripioară cu bord de atac supersonic,

șarniera putînd ocupa, după cum vom vedea, orice poziție în raport cu conul Mach.

2. ARIPIOARĂ POLIGONALĂ CU BORD DE ATAC SUBSONIC

Expresiile vitezelor axiale reduse și ale potențialelor celor două mișcări oscilatorii au fost determinate într-o lucrare anterioară [2]. Nu este deci cazul să le stabilim din nou în lucrarea de față.

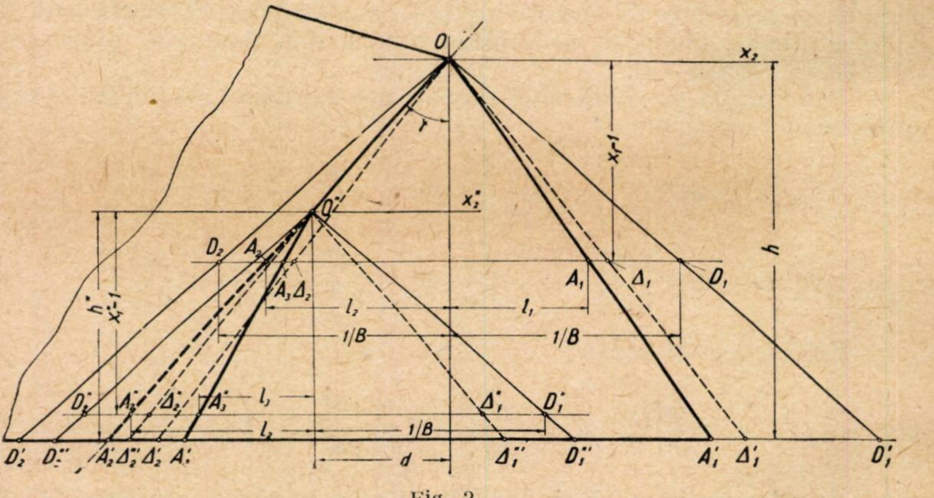

O
x_2
γ
x_1-1
$x_2^{\star}$
$O^{\star}$
h
D_2
A_2
A_1
Δ_1
D_1
$A_3\Delta_2$
$h^{\star}$
$x_1^{\star}-1$
l_2
l_1
1/B
1/B
$D_2^{\star}$
$A_2^{\star}$
$\Delta_2^{\star}$
$A_3^{\star}$
l_1
$\Delta_1^{\star}$
$D_1^{\star}$
l_2
1/B
D_2'
D_2''
A_2'
Δ_2''
Δ_2'
A_3'
d
Δ_1''
D_1''
A_1'
Δ_1'
D_1'

Fig. 2

Deoarece ele definesc coeficienții de presiune C_p și $C_p^{\star}$, care intervin mai departe în calculul coeficienților aerodinamici, vom scrie în continuare expresiile lor.

a) În cazul mișcării oscilatorii a suprafeții $O A_1' A_2'$ (fig. 2) avem de-a face cu o aripă cu un bord supersonic și un altul subsonic (OA_1'), avînd şi o muchie OA'_2, care face ca *viteza verticală redusă* să aibă un salt de la valoarea 0 pe stînga ei, la valoarea β_0 (8) pe dreapta, pentru mişcarea omogenă de ordinul unu şi respectiv de la 0 la β_1 (8′) pentru mişcarea omogenă de ordinul doi. În aceste condiţii, se găsesc expresiile

$$u_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathcal{Re}\, \frac{2E_2}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2 l_2^2}} \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-Bl_2}{1+Bl_1} \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1-Bl_2)(l_1-x)}} \right], \tag{16}$$

$$\Phi_1 = x_1\, \mathcal{Re}\, \frac{2E_2}{\pi B} \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2 l_2^2}} \left[\left(1+\frac{x}{l_2}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{(l_1+l_2)(1-Bl_2)}}{l_2(1+Bl_1)} \sqrt{(l_1-x)(1+Bx)} \right], \tag{16'}$$

pentru mişcarea omogenă de ordinul unu, şi respectiv

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = x_1\, \mathcal{Re} \left[(A_0 + A_1 x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \right.$$
$$\left. + (C_0 + C_1 x) \sqrt{\frac{1+Bx}{B(l_1-x)}} \right], \tag{17}$$

pentru mişcarea omogenă de ordinul doi.

b) La studiul mişcării oscilatorii a suprafeţei $O^\star A'_3 A'_2$ vom considera o aripă cu borduri supersonice avînd două muchii $O^\star A'_3$ şi $O^\star A'_2$, în afara acestora *viteza verticală redusă* fiind zero, iar în interiorul lor fiind β_0 (10) pentru mişcarea omogenă de ordinul unu, de unde se deduce [2],

$$u_0^\star = \frac{\partial \Phi_1^\star}{\partial x_1^\star} = \mathcal{Re}\, \frac{2E_2}{\pi B} \left[\frac{Bl_3}{\sqrt{1-B^2 l_3^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bx^\star)(1+Bl_3)}{2B(x^\star+l_3)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2 l_2^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bx^\star)(1+Bl_2)}{2B(x^\star+l_2)}} \right], \tag{18}$$

$$\Phi_1^\star = x_1^\star\, \mathcal{Re}\, \frac{2E_2}{\pi B} \left[\frac{Bl_3}{\sqrt{1-B^2 l_3^2}} \left(1+\frac{x^\star}{l_3}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_3)(1+Bx^\star)}{2B(l_3+x^\star)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{Bl_2}{\sqrt{1-B^2 l_2^2}} \left(1+\frac{x^\star}{l_2}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx^\star)}{2B(l_2+x^\star)}} \right], \tag{18'}$$

şi β_1 (10′) în cazul mişcării omogene de ordinul doi, pentru a cărui viteză axială redusă se obţine

$$u_1^\star = \frac{\partial \Phi_2^\star}{\partial x_1^\star} = x_1^\star\, \mathcal{Re} \left[(A_0^\star + A_1^\star x^\star) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bx^\star)(1+Bl_3)}{2B(x^\star+l_3)}} + \right.$$
$$\left. + (C_0^\star + C_1^\star x^\star) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bx^\star)(1+Bl_2)}{2B(x^\star+l_2)}} + D_0^\star \sqrt{1-B^2 x^{\star 2}} \right]. \tag{19}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Expresiile constantelor care intervin în formulele (17) şi (19) sînt date în tabela de constante anexată la sfîrşitul lucrării.

Calculul coeficientului de portanţă. Vom nota cu C_{z1} coeficientul de portanţă parţial, ca efect al primei mişcări oscilatorii, şi cu $C_z^\star$ coeficientul de portanţă rezultat din cea de-a doua mişcare oscilatorie.

Deoarece în ipoteza micilor perturbaţii efectele se adună, coeficientul de portanţă al aripioarei C_{za} va fi respectiv

$$C_{za} = C_{z1} + C_z^\star, \tag{20}$$

unde am pus

$$C_{z1} = -\frac{2}{S}\int_{S_1} C_{p1}\, d\sigma, \qquad C_z^\star = -\frac{2}{S}\int_{S^\star} C_p^\star\, d\sigma, \tag{21}$$

$d\sigma$ fiind o suprafaţă elementară, S_1 suprafaţa afectată de prima mişcare oscilatorie, $S^\star$ suprafaţa afectată de cea de-a doua mişcare oscilatorie, iar S suprafaţa la care se referă coeficientul aerodinamic total. În acest mod, prin reducerea la calculul unor coeficienţi parţiali, se realizează o importantă simplificare a problemei.

1) Dacă şarniera $OO^\star$ este subsonică, pentru a calcula coeficientul de portanţă referitor la întreaga suprafaţă acoperită de conul Mach avînd vîrful în O, suprafeţele la care se extind integralele din formula (21) sînt astfel delimitate

$$\begin{aligned} S = S_1 &= \text{suprafaţa } O\,A_1'D_2', \\ S^\star &= \text{suprafaţa } O^\star D_1^{\star\prime} D_2^{\star\prime}\cdot \end{aligned} \tag{22}$$

Efectuînd calculele se găsesc pentru coeficienţii parţiali de portanţă relaţiile

$$C_{z1} = \frac{4}{B}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_1}}\,\frac{Bl_1+Bl_2}{1+Bl_1}\left[\Theta_2 - \frac{\lambda}{3B^2\omega}\left(K_{11}\frac{d\Theta_1}{dt} + K_{12}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \tag{23}$$

$$C_z^\star = -\frac{4}{B}\,\frac{(Bl_2 - Bl_3)h^{\star 2}}{(1+Bl_1)h^2}\left\{\Theta_2 + \frac{\lambda h^\star}{3B^2\omega h}\left[(B^2l_2 + B^2l_3)\frac{d\Theta_1}{dt} + (2B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right]\right\}, \tag{23'}$$

expresiile constantelor fiind date în tabela de la sfîrşitul lucrării. Pentru determinarea coeficientului de portanţă al aripioarei propriu-zise se consideră suprafeţele

$$\begin{aligned} S &= \text{suprafaţa } O\,A_1'A_3'\,O^\star, \\ S_1 &= \text{suprafaţa } O\,A_1'A_2', \\ S^\star &= \text{suprafaţa } O^\star D_1^{\star\prime} A_2', \end{aligned} \tag{24}$$

și calculînd integralele respective, sîntem conduși la următoarele expresii pentru C_{z1} și $C_z^\star$:

$$
\begin{aligned}
C_{z1} = {} & \frac{8}{\pi B}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_2}}\,\frac{(l_1+l_2)h^2}{[(l_1+l_2)h^2-(l_2-l_3)h^{\star 2}]}\Biggl\{\biggl[\Theta_2-\frac{\lambda}{3B^2\omega}\biggl(K_{11}\frac{d\,\Theta_1}{dt}+\\
& +K_{12}\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\biggr]\arccos\sqrt{\frac{1-Bl_2}{1+Bl_2}}+\biggl[\frac{l_1}{l_1+l_2}\Theta_2-\frac{\lambda}{3B^2\omega}\biggl(K_{21}\frac{d\,\Theta_1}{dt}+\\
& +K_{22}\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\biggr]\frac{\sqrt{B(l_1+l_2)(1-Bl_2)}}{1+Bl_1}\Biggr\},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
C_z^\star = {} & -\frac{8}{\pi B}\,\frac{(l_2-l_3)h^{\star 2}}{[(l_1+l_2)h^2-(l_2-l_3)h^{\star 2}]}\Biggl\{\biggl[\Theta_2+\frac{\lambda h^\star}{3B^2\omega h}\biggl(R_{11}^\star\frac{d\,\Theta_1}{dt}-\\
& -R_{12}^\star\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\biggr]\arccos\sqrt{\frac{1-Bl_2}{2}}+\biggl[R_{20}^\star\,\Theta_2+\frac{\lambda h^\star}{3B^2\omega h}\biggl(R_{21}^\star\frac{d\,\Theta_1}{dt}-\\
& -R_{22}^\star\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\biggr]\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1-Bl_3)}{2B(l_2-l_3)}}+\frac{\lambda h^\star}{3B^2\omega h}\biggl(R_{31}^\star\frac{d\,\Theta_1}{dt}+R_{32}^\star\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\sqrt{1-B^2l_2^2}+\\
& +\frac{\lambda h^\star}{3B^2\omega h}\biggl(R_{41}^\star\frac{d\,\Theta_1}{dt}+R_{42}^\star\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\biggl(\frac{\pi}{2}+\arcsin Bl_2\biggr)\Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{25'}
$$

2) Dacă șarniera $OO^\star$ este supersonică (conul Mach ocupă poziția $O\,\Delta_1'\,\Delta_2'$), expresiile găsite pentru *vitezele axiale reduse* și *potențialul redus*, care intervin prin intermediul coeficienților de presiune în calculul coeficienților aerodinamici, sînt valabile în mod automat.

În această situație integralele din formulele (21) se extind la următoarele suprafețe

$$
\begin{aligned}
S = S_1 &= \text{suprafața } OA_1'A_2',\\
S^\star &= \text{suprafața } O^\star\,\Delta_1^{\star\prime}A_2',
\end{aligned}
\tag{26}
$$

iar pentru coeficienții parțiali de portanță se găsesc relații mai simple decît în cazul precedent

$$
C_{z1} = \frac{4}{B}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_2}}\,\frac{(l_1+l_2)h^2}{[(l_1+l_2)h^2-(l_2-l_3)h^{\star 2}]}\biggl[\Theta_2-\frac{\lambda}{3B^2\omega}\biggl(K_{11}\frac{d\,\Theta_1}{dt}+K_{12}\frac{d\,\Theta_2}{dt}\biggr)\biggr], \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
C_z^\star = {} & -\frac{4}{\mathrm{B}}\,\frac{(l_2-l_3)h^{\star 2}}{[(l_1+l_2)h^2-(l_2-l_3)h^{\star 2}]}\Biggl\{\Theta_2+\frac{\lambda h^\star}{3B^2\omega h}\biggl[(B^2l_2+B^2l_3)\frac{d\Theta_1}{dt}+\\
& +(2B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\biggr]\Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{27'}
$$

Calculul coeficientului de rezistență la înaintare. Să considerăm că aripa are o incidență α_0, sensul pozitiv al acesteia corespunzînd unei portanțe negative.

Vom nota mai departe cu C_{x1} şi C_x^* coeficienţii parţiali de rezistenţă la înaintare, ca efect al celor două mişcări oscilatorii pe care le studiem şi cu C_{xs} coeficientul parţial datorat forţei de succiune.

La calculul coeficientului de rezistenţă la înaintare al aripioarei este necesar să ţinem seamă de următoarele trei contribuţii :

1) contribuţia forţei totale care ia naştere pe aripioară şi eventual o parte de aripă (cazul cînd şarniera OO^* este subsonică) datorită mişcării oscilatorii a aripioarei şi care este înclinată faţă de direcţia de deplasare a aripii (datorită incidenţei acesteia) cu un unghi α_0;

2) contribuţia forţei ce acţionează numai pe suprafaţa mobilă $OA_1'A_3'O^*$ şi care capătă un unghi suplimentar de incidenţă, variabil în timp, ca efect al mişcării oscilatorii a aripioarei;

3) contribuţia forţei de succiune, care apare după cum vom vedea mai jos, numai în cazul bordurilor de atac subsonice.

Deoarece incidenţa suprafeţelor $OA_1'A_2'$ şi $O^*A_3'A_2'$, ca efect al mişcărilor oscilatorii considerate, este constantă pe suprafeţele respective, după cum rezultă uşor derivînd relaţiile (7) şi (9) în raport cu x_1 şi respectiv x_1^*, se deduce imediat

$$C_{x1} = -\frac{\partial Z}{\partial x_1} C_{z1} = \Theta_2 C_{z1}, \tag{28}$$

$$C_x^* = -\frac{\partial Z^*}{\partial x_1^*} C_z^* = -\Theta_2 C_z^*. \tag{28'}$$

În această situaţie coeficientul total de rezistenţă la înaintare are următoarea expresie generală :

$$C_{xa} = -\alpha_0 C_{za} + \frac{S_m}{S}\Theta_2(C_{z1} + C_z^*) + C_{xs}\frac{S_m}{S}, \tag{29}$$

S_m fiind aria suprafeţei mobile ($OA_1'A_3'O^*$).

Întrucît coeficientul C_{xs} se obţine din relaţia

$$C_{xs} = \frac{R_s}{\frac{\rho}{2} S_m U_\infty^2}, \tag{30}$$

unde R_s este componenta axială a forţei de succiune S_c, este necesar să reamintim pe scurt modul de calcul al acesteia.

Relaţia generală care dă forţa de succiune, normală pe bordul de atac, este de forma [3],

$$S_c = \frac{\pi\rho\sqrt{1 - M_{n1}^2}}{\sin\chi_1}\int_0^h A_c^2\, dx_1, \tag{31}$$

A_c fiind definit de formula

$$A_c = \frac{(u)_{x\to l_1}}{\cos\chi_1}\sqrt{r}, \tag{32}$$

unde r este o distanţă foarte mică de la bordul de atac indicată pe figura 3, M_{n1} este numărul Mach al curentului normal pe OA_1, iar χ_1 este unghiul dintre axa Ox_2 şi bordul de atac respectiv.

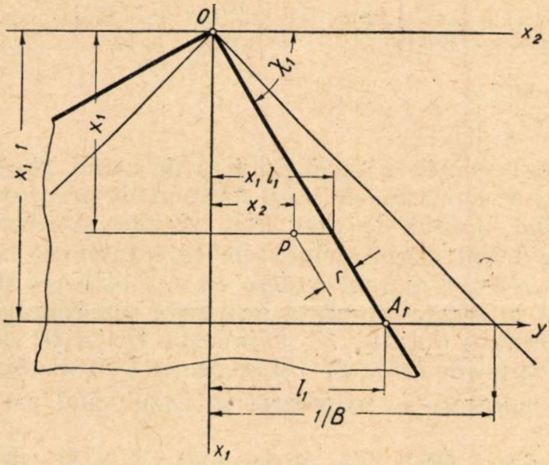


Fig. 3

Derivînd relaţia (3), se deduce pentru *viteza axială de perturbaţie* formula

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \approx U_\infty e^{i\omega t} (1 + ik\, x_1) \left[ik\, \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + i \frac{\lambda}{h} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right], \tag{33}$$

în care, înlocuind pe Φ_1, $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}$ şi $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}$ cu expresiile găsite anterior, (16), (16′) şi respectiv (17), făcînd apoi pe $x \to l_1$ şi punînd în evidenţă factorul $\sqrt{r}$, se obţine, prin neglijarea termenilor ce conţin pe λ la puteri superioare lui unu, expresia

$$\begin{aligned} (u)_{x \to l_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{x \to l_1} \approx U_\infty \, e^{i\omega t} \Bigg\{ & \frac{2E_2}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 + Bl_1}} \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{1 + Bl_2}} \sqrt{x_1 \sin \chi_1} + \\ & + \frac{i\lambda}{h} \left[(C_0 + C_1 l_1) \sqrt{\frac{1 + Bl_1}{B}} - \frac{2E_2}{\pi B^3} \frac{(1 + B^2)\, Bl_1}{\sqrt{1 + Bl_1}} \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{1 + Bl_2}} \right] \sqrt{\sin \chi_1} \; x_1^{3/2} \Bigg\} \frac{1}{\sqrt{r}} . \end{aligned} \tag{34}$$

Cu aceste elemente se poate calcula imediat, prin simplă integrare forţa de succiune S_c care este îndreptată în afara bordului de atac. Avînd apoi în vedere relaţia $R_s = - S_c \cos \chi_1$, de unde se vede că R_s este o forţă de propulsie, se găsește în baza formulei (30) următoarea expresie pentru C_{xs},

$$C_{xs} = -\frac{16\,Bl_1}{\pi B(1 + Bl_2)}\,\frac{(l_1 + l_2)\,h^2}{[(l_1 + l_2)\,h^2 - (l_2 - l_3)\,h^{\star 2}]}\sqrt{\frac{1 - Bl_1}{1 + Bl_1}}\left\{\frac{1}{2}\Theta_2^2 - \right.$$
$$- \frac{2\lambda}{9\omega}\,\frac{1}{(1 + Bl_1)(1 - B^2l_2^2)}\left[(C_{01}+C_{11})\frac{d\Theta_1}{dt} + \frac{1 + 2B^2}{B^2}(C_{02}+C_{12})\frac{d\Theta_2}{dt}\right]\Theta_2 - \tag{35}$$
$$\left. - \frac{\lambda}{3\omega}\,\frac{1 + B^2}{B^2}\,\frac{d\Theta_2^2}{dt}\right\},$$

aceeași pentru orice poziție a șarnierei față de conul Mach.

Se poate ușor constata că acest termen devine imaginar, deci își pierde sensul, cînd bordul de atac OA_1' devine supersonic ($l_1 > 1/B$).

Vom putea defini acum elementele care intervin în formula (29).

1) În acest sens, avînd în vedere că C_{za} este coeficientul de portanță referitor la întreaga suprafață acoperită de conul Mach cu vîrful în O, S este suprafața $OA_1'D_2'$, S_m suprafața $OA_1'A_3'O^\star$ și înlocuind pe C_{z1}, $C_z^\star$ și C_{xs} cu expresiile (25), (25′) și respectiv (35) se obține coeficientul de rezistență la înaintare al aripioarei în cazul cînd șarniera $OO^\star$ este subsonică.

2) Dacă șarniera $OO^\star$ este supersonică, $S = S_m$, deci raportul lor nu mai intervine în formula (29).

În această situație C_{za} este coeficientul de portanță al aripioarei avînd șarnieră supersonică, iar C_{z1}, $C_z^\star$ și C_{xs} vor fi înlocuite în (29) cu relațiile (27) (27′) și respectiv (35).

Coeficientul de moment de ruliu. Însemnînd cu C_{l1} coeficientul de moment de ruliu al primei mișcări oscilatorii luat față de axa Ox_1 și cu $C_l^\star$ coeficientul de moment de ruliu al celei de a doua mișcări oscilatorii față de axa $O^\star x_1^\star$, rezultă imediat următoarea expresie pentru coeficientul total de moment de ruliu :

$$C_{la} = C_{l1} + C_l^\star - \frac{d}{b_0}\,C_z^\star = -\frac{2}{Sb_0}\int_{S_1} C_{p1}\,x_2\,d\sigma - \frac{2}{Sb_0}\int_{S^\star} C_p^\star\,x_2^\star\,d\sigma - \frac{d}{b_0}\,C_z^\star, \tag{36}$$

unde d este distanța dintre axele Ox_1 și $O^\star x_1^\star$, iar b_0 anvergura suprafeței al cărei coeficient se calculează.

1) Dacă șarniera $OO^\star$ este subsonică, pentru determinarea coeficientului de moment de ruliu referitor la suprafața interioară conului Mach cu vîrful în O, suprafețele la care se extind integralele din formula (36) au fost indicate anterior (22), iar $b_0 = \left(l_1 + \frac{1}{B}\right)h$.

În această situație coeficienții parțiali de moment de ruliu vor fi dați de formulele

$$C_{l1} = -\frac{2}{3B}\sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}\,\frac{B(l_1 + l_2)}{(1 + Bl_1)^2}\left[K_{30}\Theta_2 + \frac{\lambda}{4B^2\omega}\left(K_{31}\frac{d\Theta_1}{dt} - K_{32}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \tag{37}$$

$$C_l^\star = \frac{4}{3B}\,\frac{(B^2l_2^2 - B^2l_3^2)\,h^{\star 3}}{(1 + Bl_1)^2\,h^3}\left[\Theta_2 + \frac{\lambda h^\star}{4\,B^2\omega h}\left(R_{51}^\star\frac{d\Theta_1}{dt} + (3B^2 - 1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \tag{37'}$$

și se vede astfel, ținînd seama de formula (23′), că expresia coeficientului de moment de ruliu al aripioarei (36) este perfect determinată.

Suprafețele de integrare fiind cele indicate de (24) iar $b_0 = [(l_1 + l_2)\, h - (l_2 - l_3)\, h^\star]$, coeficienții parțiali de moment de ruliu ai aripioarei propriu-zise vor putea fi ușor calculați :

$$C_{l1} = -\frac{4}{3\pi B^3}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_2}}\,\frac{(Bl_1+Bl_2)\,h^3}{[(l_1+l_2)\,h^2-(l_2-l_3)\,h^{\star 2}]\,[(l_1+l_2)\,h-(l_2-l_3)\,h^\star]}\Biggl\{\biggl[K_{30}\,\Theta_2 + \frac{\lambda}{4\,B^2\,\omega}\left(K_{31}\frac{d\Theta_1}{dt}-K_{32}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr]\arccos\sqrt{\frac{1-Bl_2}{1+Bl_2}} - \biggl[K_{40}\Theta_2 - \frac{\lambda}{4\,B^2\,\omega}\left(K_{41}\frac{d\Theta_1}{dt}+K_{42}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr]\frac{\sqrt{B(l_1+l_2)(1-Bl_2)}}{1+Bl_1}\Biggr\}, \tag{38}$$

$$C_l^\star = \frac{8}{3\pi\,B^3}\,\frac{(B^2\,l_2^2 - B^2\,l_3^2)\,h^{\star 3}}{[(l_1+l_2)\,h^2-(l_2-l_3)\,h^{\star 2}]\,[(l_1+l_2)\,h-(l_2-l_3)\,h^\star]}\Biggl\{\biggl[\Theta_2 + \frac{\lambda\,h^\star}{4\,B^2\,\omega\,h}\left(R^\star_{51}\frac{d\Theta_1}{dt}+(3\,B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr]\arccos\sqrt{\frac{1-Bl_2}{2}} + \biggl[R^\star_{60}\,\Theta_2 + \frac{\lambda\,h^\star}{4\,B^2\,\omega\,h}\left(R^\star_{61}\frac{d\Theta_1}{dt}-R^\star_{62}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr]\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1-Bl_3)}{2\,(Bl_2-Bl_3)}} + \biggl[R^\star_{70}\,\Theta_2 - \frac{\lambda\,h}{4\,B^2\,\omega\,h}\left(R^\star_{71}\frac{d\Theta_1}{dt}+R^\star_{72}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr]\sqrt{1-B^2\,l_2^2}\Biggr\}, \tag{38'}$$

iar pentru calculul coeficientului C_{la}, $C_z^\star$ se înlocuiește cu formula (25′).

2) Cînd șarniera $OO^\star$ este supersonică limitele de integrare sînt date de (26), iar expresiile pe care le găsim pentru C_{l1} și $C_l^\star$ după integrare, sînt mai simple decît în cazul precedent

$$C_{l1} = -\frac{2}{3B^3}\sqrt{\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_2}}\,\frac{(Bl_1+Bl_2)\,h^3}{[(l_1+l_2)\,h^2-(l_2-l_3)\,h^{\star 2}]\,[(l_1+l_2)\,h-(l_2-l_3)\,h^\star]}\biggl[K_{30}\Theta_2 + \frac{\lambda}{4\,B^2\,\omega}\left(K_{31}\frac{d\Theta_1}{dt}-K_{32}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr], \tag{39}$$

$$C_l^\star = \frac{4}{3\,B^3}\,\frac{(B^2\,l_2^2 - B^2\,l_3^2)\,h^{\star 3}}{[(l_1+l_2)\,h^2-(l_2-l_3)\,h^{\star 2}]\,[(l_1+l_2)\,h-(l_2-l_3)\,h^\star]}\biggl[\Theta_2 + \frac{\lambda\,h^\star}{4\,B^2\,\omega\,h}\left(R^\star_{51}\frac{d\Theta_1}{dt} + (3\,B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\biggr], \tag{39'}$$

pentru $C_z^\star$ fiind valabilă în această situație formula (27′).

Coeficientul de moment de tangaj. Coeficientul de moment de tangaj al aripioarei, luat față de o axă ce trece la 2/3 din coarda maximă a aripioarei, şi obţinut prin însumarea efectelor celor două mişcări oscilatorii considerate, va fi dat de expresia

$$C_{ma} = C_{m1} + C_m^{\star} - \left(1 - \frac{h^{\star}}{h}\right) C_z^{\star} \tag{40}$$

în care coeficienţii de moment de tangaj ce apar ca efect ai celor două mişcări oscilatorii, C_{m1} şi respectiv $C_m^{\star}$, sînt definiţi de relaţiile

$$C_{m1} = -\frac{2}{hS} \int_{S_1} C_{p1} \left(\frac{2}{3} h - x_1\right) d\sigma, \tag{41}$$

$$C_m^{\star} = -\frac{2}{hS} \int_{S^{\star}} C_p^{\star} \left(\frac{2}{3} h^{\star} - x_1^{\star}\right) d\sigma. \tag{41′}$$

1) În situaţia în care şarniera este subsonică, coeficientul de moment de tangaj referitor la suprafaţa interioară conului Mach cu vîrful în *O*, este definit de următoarele expresii deduse pentru C_{m1} şi $C_m^{\star}$ prin efectuarea integralelor din formulele (41) şi (41′) între limitele indicate de (22),

$$C_{m1} = \frac{\lambda}{9\, B^3\, \omega} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}\, \frac{(Bl_1 + Bl_2)}{1 + Bl_1} \left(K_{11} \frac{d\Theta_1}{dt} + K_{12} \frac{d\Theta_2}{dt}\right), \tag{42}$$

$$C_m^{\star} = -\frac{\lambda}{9\, B^3\, \omega}\, \frac{(B\, l_2 - Bl_3)\, h^{\star 4}}{(1 + Bl_1)\, h^4} \left[(B^2 l_2 + B^2 l_3) \frac{d\Theta_1}{dt} + (2\, B^2 - 1) \frac{d\Theta_2}{dt}\right]. \tag{42′}$$

Coeficienţii referitori numai la aripioara propriu-zisă, obţinuţi prin efectuarea unor calcule similare, vor fi

$$C_{m1} = \frac{2\lambda}{9\pi\, B^3\, \omega} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}\, \frac{(l_1 + l_2)\, h^2}{[(l_1 + l_2)\, h^2 - (l_2 - l_3)\, h^{\star 2}]} \left[\left(K_{11} \frac{d\Theta_1}{dt} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_{12} \frac{d\Theta_2}{dt}\right) \arccos \sqrt{\frac{1 - Bl_2}{1 + Bl_2}} + \left(K_{21} \frac{d\Theta_1}{dt} + K_{22} \frac{d\Theta_2}{dt}\right) \frac{\sqrt{B(l_1 + l_2)(1 - Bl_2)}}{1 + Bl_1}\right], \tag{43}$$

$$C_m^{\star} = -\frac{2\lambda}{9\pi\, B^3 \omega}\, \frac{(l_2 - l_3)\, h^{\star 4}}{[(l_1 + l_2)\, h^2 - (l_2 - l_3)\, h^{\star 2}]\, h^2} \left[\left(R_{11}^{\star} \frac{d\Theta_1}{dt} - R_{12}^{\star} \frac{d\Theta_2}{dt}\right) \arccos \sqrt{\frac{1 - Bl_2}{2}} + \right.$$

$$+ \left(R_{21}^{\star} \frac{d\Theta_1}{dt} - R_{22}^{\star} \frac{d\Theta_2}{dt}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 - Bl_3)}{2B(l_2 - l_3)}} + \left(R_{31}^{\star} \frac{d\Theta_1}{dt} + \right.$$

$$\left. + R_{32}^{\star} \frac{d\Theta_2}{dt}\right) \sqrt{1 - B^2 l_2^2} + \left.\left(R_{41}^{\star} \frac{d\Theta_1}{dt} + R_{42}^{\star} \frac{d\Theta_2}{dt}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin B\, l_2\right)\right]. \tag{43′}$$

2) Dacă şarniera este supersonică, avînd în vedere că limitele integralelor sînt date de (26), rezultă

$$C_{m1} = \frac{\lambda}{9\,B^3\omega}\sqrt{\frac{B\,(l_1+l_2)}{1+Bl_2}}\,\frac{(l_1+l_2)\,h^2}{[(l_1+l_2)\,h^2-(l_2-l_3)\,h^{\star 2}]}\left(K_{11}\frac{d\Theta_1}{dt}+K_{12}\frac{d\Theta_2}{dt}\right), \tag{44}$$

$$C_m^{\star} = -\frac{\lambda}{9\,B^3\omega}\,\frac{(l_2-l_3)\,h^{\star 4}}{[(l_1+l_2)\,h^2-(l_2-l_3)\,h^{\star 2}]\,h^2}\left[(B^2 l_2+B^2 l_3)\frac{d\Theta_1}{dt}+(2\,B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right], \tag{44'}$$

$C_z^{\star}$ fiind înlocuit în relaţia (40) cu expresiile corespunzătoare fiecărui caz în parte şi care au fost determinate mai înainte.

Coeficientul de moment de şarnieră. Coeficientul de moment de şarnieră al aripioarei îl vom nota cu C_{mca}.

Notînd cu C_{mc1} coeficientul de moment de şarnieră datorat primei mişcări oscilatorii şi cu $C_{mc}^{\star}$ coeficientul de moment de şarnieră rezultat din cea de-a doua mişcare oscilatorie, vom obţine

$$C_{mca} = C_{mc1} + C_{mc}^{\star}, \tag{45}$$

în care am pus

$$C_{mc1} = \left[\left(\frac{2}{3}+\frac{C_{m1}}{C_{z1}}\right)\sin\gamma+\frac{b_0 C_{l1}}{h\,C_{z1}}\cos\gamma\right]C_{z1}, \tag{46}$$

$$C_{mc}^{\star} = \left[\left(\frac{2}{3}+\frac{C_m^{\star}}{C_z^{\star}}\right)\sin\gamma+\frac{b_0 C_l^{\star}}{h\,C_z^{\star}}\cos\gamma\right]C_z^{\star}. \tag{46'}$$

Coeficienţii aerodinamici parţiali, care intervin în formulele (46) şi (46′) se referă exclusiv la suprafeţele mobile, atît în cazul cînd şarniera este subsonică, cît şi cînd este supersonică, deoarece numai forţele de pe aceste suprafeţe contribuie la momentul de şarnieră.

3. ARIPIOARĂ POLIGONALĂ CU BORD DE ATAC SUPERSONIC

În mişcarea oscilatorie a suprafeţei $OA_1'A_2'$ (fig. 4), muchia OA_2' face ca viteza verticală redusă să aibă un salt de la valoarea zero la stînga ei, la valoarea β_0 (8) pe dreapta, pentru mişcarea omogenă de ordinul unu, şi respectiv de la zero la β_1 (8′), pentru mişcarea omogenă de ordinul doi. În această situaţie, considerînd efectul muchiei OA_2' şi al bordului de atac supersonic OA_1', am găsit în lucrarea noastră anterioară [2] următoarele expresii pentru *vitezele axiale reduse* și pentru *potențialul redus* :

$$u_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathcal{R}e\, \frac{2E_2}{\pi B}\left[\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2\, B(l_1 - x)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2\, B(l_2 + x)}}\right], \tag{47}$$

$$\Phi_1 = x_1\, \mathcal{R}e\, \frac{2E_2}{\pi B}\left[\frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2\, B(l_1 - x)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{Bl_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}\left(1 + \frac{x}{l_2}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2\, B(l_2 + x)}}\right], \tag{47'}$$

pentru mișcarea omogenă de ordinul unu și respectiv,

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = x_1\, \mathcal{R}e\left[(A_0 + A_1 x) \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2\, B(l_1 - x)}} + \right.$$

$$\left. + (C_0 + C_1 x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2\, B(l_2 - x)}} + D_0 \sqrt{1 - B^2 x^2}\right], \tag{48}$$

pentru mișcarea omogenă de ordinul doi.

În ceea ce privește mișcarea oscilatoare a suprafeței $O^\star A_3' A_2'$, vitezele axiale reduse $u_0^\star$ și $u_1^\star$ și respectiv potențialul $\Phi_1^\star$ sînt definite

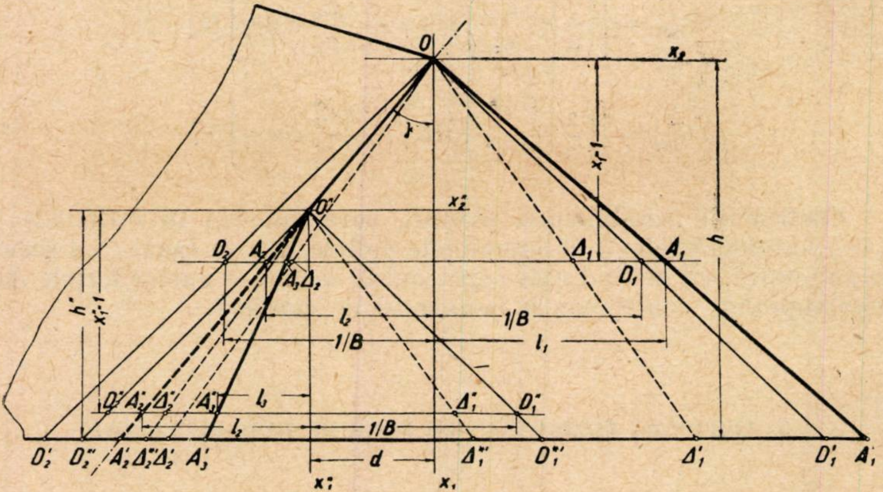


Fig. 4

tot de relațiile (18), (19) și respectiv (18′). În această situație, coeficientul de presiune $C_p^\star$ (12′) rămîne neschimbat, fapt care face ca și coeficienții aerodinamici parțiali, ca efect al mișcării oscilatorii a suprafeței $O^\star A_3' A_2'$, care au fost calculați mai înainte, să rămînă neschimbați.

Coeficientul de portanță. Ca și pentru aripioara cu bord de atac subsonic, pentru calculul coeficientului de portanță al aripioarei este valabilă relația (20).

1) Coeficientul de portanță referitor la întreaga suprafață acoperită de conul Mach, șarniera $OO^\star$ fiind subsonică, se obține înlocuind în formula (20) pe $C_z^\star$ cu expresia (23′), iar pe C_{z1} cu următoarea relație :

$$C_{z1} = \frac{4}{B}\,\frac{B(l_1+l_2)}{1+Bl_1}\left\{\Theta_2 + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\left[(B^2l_2 - B^2l_1)\frac{d\Theta_1}{dt} + (2B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right]\right\}, \tag{49}$$

la care se ajunge cînd integrala din prima formulă (21) este extinsă la suprafața indicată de (22).

Pentru aceeași integrală, suprafețele S_1 și S fiind delimitate de (24), vom obține expresia

$$\begin{aligned} C_{z1} = {} & \frac{8}{\pi B}\,\frac{(l_1+l_2)h^2}{[(l_1+l_2)\,h^2 - (l_2-l_3)\,h^{\star 2}]}\left\{\left[\Theta_2 + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\left(R_{11}\frac{d\Theta_1}{dt} - \right.\right.\right.\\ & \left.\left. - R_{12}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right]\arccos\sqrt{\frac{1-Bl_2}{2}} + \left[R_{20}\,\Theta_2 + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\left(R_{21}\frac{d\Theta_1}{dt} - \right.\right.\\ & \left.\left. - R_{22}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right]\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1+Bl_2)}{2(Bl_1+Bl_2)}} + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\left(R_{31}\frac{d\Theta_1}{dt} + \right.\\ & \left.\left. + R_{32}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\sqrt{1-B^2l_2^2} + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\left(R_{41}\frac{d\Theta_1}{dt} + R_{42}\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin Bl_2\right)\right\}, \end{aligned} \tag{50}$$

care, împreună cu relația (25) determinată anterior pentru $C_z^\star$, definește coeficientul de portanță al aripioarei propriu-zise.

2) În cazul cînd șarniera $OO^\star$ este supersonică, în baza relațiilor (21) și (26), sîntem conduși la următoarea formulă pentru C_{z1} :

$$\begin{aligned} C_{z1} = {} & \frac{4}{B}\,\frac{(l_1+l_2)h^2}{[(l_1+l_2)\,h^2 - (l_2-l_3)\,h^{\star 2}]}\left\{\Theta_2 + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\left[(B^2l_2 - B^2l_1)\frac{d\Theta_1}{dt} + \right.\right.\\ & \left.\left. + (2B^2-1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{51}$$

$C_z^\star$ fiind dat în această situație de expresia (27′).

Coeficientul de rezistență la înaintare. Cînd bordul de atac al aripioarei este supersonic nu există forță de succiune, deci formula (29) se simplifică

$$C_{xa} = -\,\alpha_0\,C_{za} + \Theta_2\,(C_{z1} + C_z^\star)\,\frac{S_m}{S}\,. \tag{52}$$

1) Dacă șarniera $OO^\star$ este subsonică, C_{za} se va înlocui cu expresia calculată pentru întreaga suprafață afectată de mișcarea oscilatorie a aripioarei, $C_z^\star$ și C_{z1} cu relațiile (25′) și respectiv (50) iar S și S_m sînt suprafețele $OA_1'D_2'$ și respectiv $OA_1'A_3'O^\star$ (fig. 4).

2) Cînd șarniera este supersonică $S = S_m$, C_{za} este coeficientul de portanță al aripioarei iar C_{z1} și $C_z^{\star}$ sînt dați de formulele (51) și respectiv (27').

Coeficientul de moment de ruliu. Coeficientul total de moment de ruliu în raport cu axa Ox_1 am văzut că este dat de formula (36).

1) Făcînd calculele respective pentru cazul cînd șarniera $OO^{\star}$ este subsonică, vom obține pentru coeficientul C_{l1} care intră în formula coeficientului de moment de ruliu referitor la suprafața $OA_1' D_2'$, relația

$$C_{l1} = \frac{4}{3B} \frac{B^2 l_1^2 - B^2 l_2^2}{(1 + Bl_1)^2} \left[\Theta_2 + \frac{\lambda}{4 B^2 \omega} \left(R_{51} \frac{d\Theta_1}{dt} + (3 B^2 - 1) \frac{d\Theta_2}{dt}\right)\right], \tag{53}$$

$C_l^{\star}$ fiind dat în această situație tot de formula (37').

Pentru calculul coeficientului de moment de ruliu al aripioarei propriu-zise, avînd în vedere limitele (24), vom găsi pentru C_{l_1} expresia,

$$\begin{aligned} C_{l1} = \frac{8}{3\pi B^3} & \frac{(B^2 l_1^2 - B^2 l_2^2) h^3}{[(l_1 + l_2) h^2 - (l_2 - l_3) h^{\star 2}] \, [(l_1 + l_2) h - (l_2 - l_3) h^{\star}]} \Bigg\{ \Bigg[\Theta_2 + \\ & + \frac{\lambda}{4 B^2 \omega} \left(R_{51} \frac{d\Theta_1}{dt} + (3 B^2 - 1) \frac{d\Theta_2}{dt}\right)\Bigg] \arccos \sqrt{\frac{1 - Bl_2}{2}} + \Bigg[R_{60} \Theta_2 + \qquad (54) \\ & + \frac{\lambda}{4 B^2 \omega} \left(R_{61} \frac{d\Theta_1}{dt} - R_{62} \frac{d\Theta_2}{dt}\right)\Bigg] \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 + Bl_2)}{2 B (l_1 + l_2)}} + \Bigg[R_{70} \Theta_2 - \\ & - \frac{\lambda}{4 B^2 \omega} \left(R_{71} \frac{d\Theta_1}{dt} + R_{72} \frac{d\Theta_2}{dt}\right)\Bigg] \sqrt{1 - B^2 l_2^2} \Bigg\}, \end{aligned}$$

pentru $C_l^{\star}$ fiind valabilă relația (38').

2) Dacă șarniera este supersonică, considerînd suprafețele indicate de (26) și procedînd în mod similar, vom ajunge la următoarea formulă pentru C_{l_1},

$$\begin{aligned} C_{l1} = \frac{4}{3B^3} & \frac{(B^2 l_1^2 - B^2 l_2^2) h^3}{[(l_1 + l_2) h^2 - (l_2 - l_3) h^{\star 2}] \, [(l_1 + l_2) h - (l_2 - l_3) h^{\star}]} \Bigg[\Theta_2 + \\ & + \frac{\lambda}{4 B^2 \omega} \left(R_{51} \frac{d\Theta_1}{dt} + (3 B^2 - 1) \frac{d\Theta_2}{dt}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{55}$$

$C_l^{\star}$ fiind dat în acest caz de (39').

Coeficientul de moment de tangaj. Formulele care definesc coeficientul total de moment de tangaj, în raport cu o axă situată la 2/3 din coardă, au fost indicate anterior, (40), (41), (41').

1) Dacă șarniera $OO^{\star}$ este subsonică se găsește pentru coeficientul parțial C_{m1}, care intervine în expresia coeficientului C_{ma} referitoare la în-

treaga suprafață afectată de mișcarea oscilatorie a aripioarei, expresia

$$C_{m1} = \frac{\lambda}{9\,B^3\omega}\,\frac{B\,(l_1 + l_2)}{1 + Bl_1}\left[(B^2 l_2 - B^2 l_1)\frac{d\Theta_1}{dt} + (2\,B^2 - 1)\frac{d\Theta_2}{dt}\right], \tag{56}$$

iar $C_m^\star$ și $C_z^\star$ fiind dați de formulele (42′) și respectiv (23′). Pentru calculul coeficientului de moment de tangaj referitor la aripioara propriu-zisă, $C_m^\star$ și $C_z^\star$, se înlocuiesc cu relațiile (43′) și (25′), iar pentru C_{m1}, integrala din formula (41) extinsă la suprafața $OA_1'A_2'$, ne conduce la relația

$$\begin{aligned} C_{m1} = \frac{2\lambda}{9\pi B^3\omega}\,\frac{(l_1 + l_2)\,h^2}{[(l_1 + l_2)\,h^2 - (l_2 - l_3)\,h^{\star 2}]}\Bigg[\left(R_{11}\frac{d\Theta_1}{dt} - R_{12}\,\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\arccos\sqrt{\frac{1 - Bl_2}{2}} + \\ + \left(R_{21}\,\frac{d\Theta_1}{dt} - R_{22}\,\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 + Bl_1)\,(1 + Bl_2)}{2\,B\,(l_1 + l_2)}} + \left(R_{31}\,\frac{d\Theta_1}{dt} + \right. \\ \left. + R_{32}\,\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\sqrt{1 - B^2\,l_2^2} + \left(R_{41}\,\frac{d\Theta_1}{dt} + R_{42}\,\frac{d\Theta_2}{dt}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin Bl_2\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{57}$$

2) Cînd șarniera este supersonică, procedînd în mod similar, găsim pentru C_{m1},

$$C_{m1} = \frac{\lambda}{9\,B^3\omega}\,\frac{(l_1 + l_2)\,h^2}{[(l_1 + l_2)\,h^2 - (l_2 - l_3)\,h^{\star 2}]}\left[(B^2 l_2 - B^2 l_1)\frac{d\Theta_1}{dt} + (2\,B^2 - 1)\frac{d\Theta_1}{dt}\right]. \tag{58}$$

Coeficientul de moment de șarnieră. Formulele care permit calculul coeficientului de moment de șarnieră au fost indicate anterior, (45), (46), (46′).

Deoarece toate elementele care intervin în aceste formule au fost calculate mai sus, nu vom insista asupra acestei probleme.

Ne vom ocupa în continuare de aripioarele de formă în plan triunghiulară, trapezoidală și dreptunghiulară care derivă din aripioara de formă poligonală (fig. 1) studiată pînă acum, și care se întîlnesc în mod curent la avioanele de mare viteză.

4. ARIPIOARE TRIUNGHIULARE

Rezultatele obținute mai sus sînt ușor aplicabile în cazul aripioarelor de formă în plan triunghiulară.

Într-adevăr, dacă muchia $O^\star A_3'$ se suprapune peste muchia $O^\star A_2'$ ($l_2 = l_3$), aripioara capătă forma triunghiulară. În această situație, problema se reduce la mișcarea oscilatorie a suprafeței $OA_1'\,A_2'$.

Expresiile deduse pentru coeficienții aerodinamici ce apar ca efect al celei de-a doua mișcări oscilatorii, se anulează cînd se face $l_2 = l_3$.

5. ARIPIOARE TRAPEZOIDALE

Dacă punctul A_2' (fig. 1) tinde către $-\infty$ şarniera OO^* devine perpendiculară pe direcţia curentului U_∞ iar aripioara capătă formă trapezoidală (fig. 5).

În această situaţie se vede din formula (6) că $E_1 = 0$, deci $\Theta_1 = 0$, iar *vitezele verticale reduse* (8′) şi (10′) ale celor două mişcări oscilatorii considerate se modifică în consecinţă.

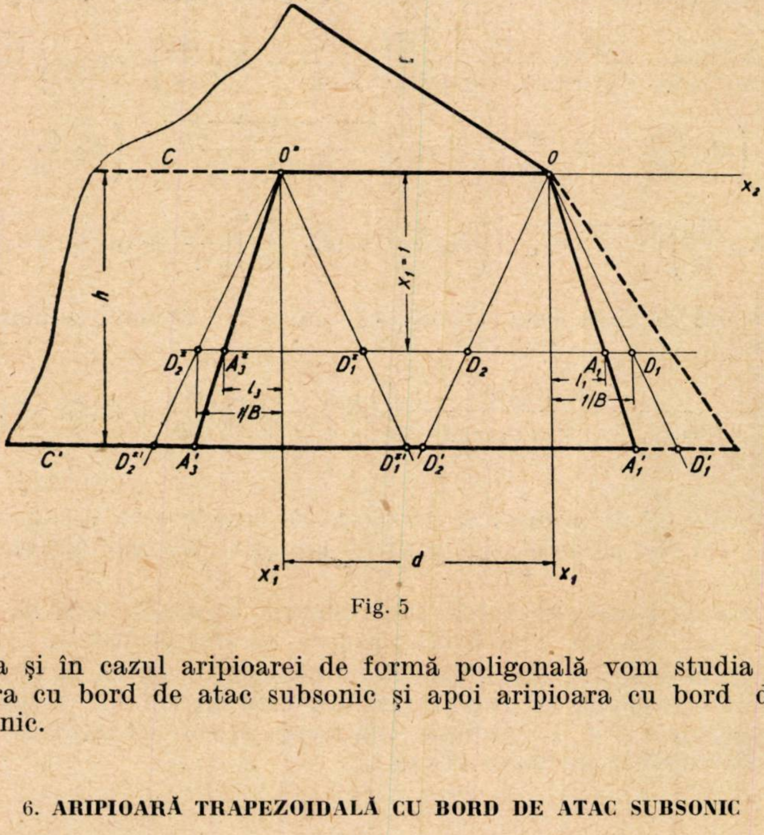


Fig. 5

Ca şi în cazul aripioarei de formă poligonală vom studia separat aripioara cu bord de atac subsonic şi apoi aripioara cu bord de atac supersonic.

6. ARIPIOARĂ TRAPEZOIDALĂ CU BORD DE ATAC SUBSONIC

Expresiile *vitezelor axiale reduse* şi ale *potenţialului redus* se deduc imediat din cele stabilite anterior pentru aripioara de formă poligonală.

Făcînd $l_2 \to \infty$ în formulele (16), (16′) şi (17) şi avînd în vedere că $E_1 = 0$, se obţin expresiile *vitezelor axiale reduse* u_0 şi u_1 şi a potenţialului redus Φ_1 pentru mişcarea oscilatorie a suprafeţei $C\,O^*\,OA_1'\,A_3'\,C'$ (fig. 5).

În acelaşi mod se procedează cu relaţiile (18), (18′) şi (19) stabilite pentru cea de-a doua mişcare oscilatorie (suprafaţa $CO^*A_3'C'$).

Deoarece suprafeţele S, S_1 şi S^*, aşa cum au fost delimitate în cazul aripioarei de formă poligonală, devin infinite cînd $l_2 \to \infty$, coeficienţii aerodinamici ai aripioarei trapezoidale nu se pot deduce din cei determinați pentru aripioara poligonală.

Pentru a calcula coeficienții aerodinamici parțiali referitori la aripioara propriu-zisă, suprafețele S, S_1 și $S^\star$ sînt astfel delimitate

$$\begin{aligned} S &= S_1 = \text{suprafața } O^\star O\, A_1'\, A_3', \\ S^\star &= \text{suprafața } O^\star\, D_1^{\star\prime}\, A_3'. \end{aligned} \tag{59}$$

Coeficienții parțiali a primei mișcări oscilatorii sînt dați în această situație de relațiile

$$\begin{aligned} C_{z1} &= \frac{2}{B^2 (l_1 + l_3 + 2d)(1 + Bl_1) h}\left[Q_1\,\Theta_2 - \frac{\lambda}{3\,B^2\omega} Q_2 \frac{d\Theta_2}{dt}\right], \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} C_{xs} = -\frac{16\,Bl_1}{\pi\, B^2}\,\frac{1}{(l_1 + l_3 + 2d)}\sqrt{\frac{1 - Bl_1}{1 + Bl_1}}&\left[\frac{1}{2}\,\Theta_2^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{9\omega}\,\frac{(B^2 - 1)}{B^2}\,\frac{d\,\Theta_2^2}{dt}\right], \end{aligned} \tag{61}$$

$$C_{m1} = \frac{1}{9\,B^2 (l_1 + l_3 + 2\,d)(1 + Bl_1)\,h}\left[12\,(1 + Bl_1)\,Bd\,\Theta_2 + \frac{\lambda h}{2\,B^2\omega} Q_3 \frac{d\Theta_2}{dt}\right], \tag{62}$$

$$C_{l_1} = \frac{1}{6\,B^3 (l_1 + l_3 + 2\,d)(l_1 + l_3 + d)(1 + Bl_1)\,h^2}\left(Q_4\,\Theta_2 - \frac{\lambda}{4\,B^2\omega} Q_5 \frac{d\Theta_2}{dt}\right), \tag{63}$$

iar pentru cea de-a doua mișcare oscilatorie se găsesc formulele

$$\begin{aligned} C_z^\star = -\frac{8}{\pi\,B^2 (l_1 + l_3 + 2d)}&\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1 - B^2\,l_3^2}\;\Theta_2 + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\,\frac{d\Theta_2}{dt}\left[M_1 \arccos\sqrt{\frac{1 - Bl_3}{2}} + \right.\right. \\ &\left.\left. + 2\,B^2\sqrt{1 - B^2 l_3^2} + M_2\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\,Bl_3\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} C_m^\star = \frac{2\lambda}{9\,\pi B^4 (l_1 + l_3 + 2\,d)\,\omega}\,\frac{d\Theta_2}{dt}&\left[M_1 \arccos\sqrt{\frac{1 - Bl_3}{2}} + \right. \\ &\left. + 2\,B^2\sqrt{1 - B^2\,l_3^2} + M_2\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\,Bl_3\right)\right], \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} C_l^\star = -\frac{4}{3\pi\,B^3 (l_1 + l_3 + 2\,d)(l_1 + l_3 + d)}&\left\{\Theta_2\left(\arccos\sqrt{\frac{1 - B\,l_3}{2}} - \right.\right. \\ &\left. - \frac{3}{2}\,Bl_3\sqrt{1 - B^2\,l_3^2}\right) - \frac{\lambda}{4\,B^2\omega}\,\frac{d\Theta_2}{dt}\left[M_3 \arccos\sqrt{\frac{1 - B^2 l_3}{2}} + \right. \\ &\left.\left. + M_4\sqrt{1 - B^2\,l_3^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{66}$$

Coeficienții aerodinamici ai aripioarei trapezoidale rezultă prin însumarea coeficienților parțiali conform formulelor (20), (29), (36), (40) și (45), stabilite mai înainte.

Dacă integralele care definesc coeficienții aerodinamici parțiali se extind la suprafețele

$$S = S_1 = \text{suprafața } O^\star O\, A_1'\, D_2', \qquad (67)$$
$$S^\star = \text{suprafața } O^\star\, D_1'\, D_2',$$

putem determina coeficienții referitori la întreaga suprafață afectată de mișcarea oscilatorie a aripioarei.

Coeficienții parțiali ai primei mișcări oscilatorii rezultă imediat din cei stabiliți în cazul precedent (60), (61), (62) și (63) dacă se face în relațiile respective (inclusiv constante) înlocuirea $l_3 = \frac{1}{B}$.

Pentru cea de-a doua mișcare oscilatorie, după efectuarea tuturor calculelor sîntem conduși la următoarele expresii :

$$C_z^\star = \frac{4}{B\,(1 + Bl_1 + 2\,Bd)} \left\{ (Bl_3 - 1)\,\Theta_2 + \frac{\lambda}{3\,B^2\omega}\,[4 + Bl_3 + B^2\,(2 + 6\,Bl_3)]\,\frac{d\Theta_2}{dt} \right\}, \qquad (68)$$

$$C_m^\star = -\frac{\lambda}{9\,B^3\,(1 + Bl_1 + 2\,Bd)\,\omega}\,[4 + Bl_3 + B^2\,(2 + 6Bl_3)]\,\frac{d\Theta_2}{dt}, \qquad (69)$$

$$C_l^\star = \frac{2}{3\,B\,(1 + Bl_1 + 2\,Bd)\,(1 + Bl_1 + Bd)} \Big[(2\,B^2\,l_3^2 - 1)\,\Theta_2 - $$
$$ - \frac{\lambda}{4\,B^2\omega}\,(1 + 3\,B^2 + 2\,B^2\,l_3^2 - 6\,B^2\,B^2\,l_3^2)\,\frac{d\Theta_2}{dt} \Big]. \qquad (70)$$

7. ARIPIOARA TRAPEZOIDALĂ CU BORD DE ATAC SUPERSONIC

Vitezele axiale reduse și potențialul redus se obțin făcînd $l_2 \to \infty$ în formulele : (47), (47′) și (48) pentru prima mișcare oscilatorie și în formulele (18), (18′) și (19) pentru mișcarea oscilatorie a suprafeței $C\,O^\star A_3'\,C'$.

Dacă suprafețele S, S_1 și $S^\star$ sînt definite de (59) coeficienții parțiali ai primei mișcări oscilatorii vor fi dați de expresiile

$$C_{z1} = \frac{4}{B^2\,(l_1 + l_3 + 2\,d)\,h} \left(N_1 \Theta_2 - \frac{\lambda N_2}{3\,B^2\omega}\,\frac{d\Theta_2}{dt} \right), \qquad (71)$$

$$C_{m1} = \frac{1}{9\,B^2\,(l_1 + l_3 + 2\,d)\,h} \left(12\,Bd\,\Theta_2 + \frac{\lambda h}{B^2\,\omega}\,N_3\,\frac{d\Theta_2}{dt} \right), \qquad (72)$$

$$C_{l1} = \frac{2}{3\,B^3\,(l_1 + l_3 + 2\,d)\,(l_1 + l_3 + d)\,h^2} \left(N_4 \Theta_2 - \frac{\lambda}{4\,B^2\omega}\,N_5\,\frac{d\Theta_2}{dt} \right), \qquad (73)$$

și dacă în aceste formule (inclusiv constante) se înlocuiește l_3 cu $1/B$ rezultă coeficienții aerodinamici parțiali referitori la suprafața $O^\star O\, A_1'\, D_2^{\star\prime}$.

Pentru cea de-a doua mișcare oscilatorie sînt valabile relațiile determinate în cazul precedent.

8. ARIPIOARE DREPTUNGHIULARE

Coeficienții aerodinamici ai aripioarei dreptunghiulare se obțin ușor din cei stabiliți pentru aripioara trapezoidală cu bord de atac subsonic.

Dacă în relațiile respective (inclusiv în formulele constantelor) se face $l_1 = l_3 = 0$ se obțin coeficienții referitori la aripioara propriu-zisă, iar dacă se fac înlocuirile $l_1 = 0$ și $l_3 = \frac{1}{B}$ rezultă coeficienții parțiali referitori la întreaga suprafață afectată de mișcarea oscilatorie a aripioarei.

În concluzie, trebuie arătat că rezultatele găsite reprezintă o generalizare a celor care se obțin în cazul bracajului aripioarelor.

Dacă în locul mișcării oscilatorii a aripioarei avem de-a face cu un bracaj de unghi α al acesteia, atunci scurgerea în jurul aripioarei este staționară și problema se reduce la studiul mișcării omogene de ordinul unu.

În această situație putem asimila vitezele verticale reduse ale celor două mișcări oscilatorii, $\beta_0 = -E_2$ (8) și respectiv $\beta_0^* = E_2$ (10), cu vitezele verticale $\alpha U_\infty \sin\gamma$ și respectiv $-\alpha U_\infty \sin\gamma$, iar β_1 și β^*_1 sînt nuli.

Mișcarea fiind permanentă, este evident că vom avea

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{d\Theta_2}{dt} = 0, \tag{74}$$

ceea ce face ca toți termenii din expresiile coeficienților aerodinamici care au ca factor pe $\frac{d\Theta_1}{dt}$ și $\frac{d\Theta_2}{dt}$, să se anuleze.

În sfîrșit, înlocuind în relațiile care dau coeficienții aerodinamici parțiali și care au fost stabilite mai sus, pe Θ_2 cu $-\alpha \sin\gamma$, se obțin tocmai coeficienții parțiali ai aripioarei bracate.

Formulele de însumare ale acestor coeficienți sînt valabile și în acest caz.

9. TABELĂ DE CONSTANTE

Aripioară poligonală cu bord de atac subsonic. Constantele care intervin în formula (17), dedusă pentru viteza axială $\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}$ a mișcării oscilatorii a suprafeței $OA_1'A_2'$, sînt date de relațiile

$$A_0 = \frac{2\,l_2}{\pi\,(1 - B^2 l_2^2)^{3/2}}\left[l_2 E_1 + (2 - B^2 l_2^2)\,\frac{1+2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \tag{75}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi\,(1 - B^2 l_2^2)^{3/2}}\left[B^2 l_2^2 .\; l_2 E_1 + \frac{1+2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \tag{75'}$$

$$C_0 = -\,\frac{2l_1}{3\,\pi\,(1 + Bl_1)^2\,(1 - B^2 l_2^2)}\sqrt{\frac{B\,(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}\left(C_{01} E_1 + \frac{1+2\,B^2}{B^2} E_2\, C_{02}\right) \tag{75''}$$

$$C_1 = -\,\frac{2}{3\,\pi\,(1 + Bl_1)^2\,(1 - B^2 l_2^2)}\sqrt{\frac{B\,(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}}\left(C_{11} E_1 + \frac{1+2\,B^2}{B^2}\,E_2\, C_{12}\right), \tag{75'''}$$

unde coeficienţii C_{01}, C_{02}, C_{11} şi C_{12} au următoarele expresii :

$$C_{01} = 2l_1 - l_2 + 4\,B^2\,l_2^2 + Bl_1\,l_2, \tag{76}$$

$$C_{02} = 3\,B^3\,l_1\,l_2^2 + 5\,B^2\,l_2^2 + 2\,B^2\,l_1\,l_2 - 2\,Bl_1 + 4\,Bl_2 - 6, \tag{76'}$$

$$C_{11} = 2\,Bl_1^2 + B^2\,l_1^2\,l_2 - 3\,B^3\,l_1^2\,l_2^2 - 2\,B^2\,l_1\,l_2^2 - Bl_1\,l_2 - 3\,Bl_2^2, \tag{76''}$$

$$C_{12} = 3 + B^2\,l_1^2 - B^3\,l_1^2\,l_2 - 2\,B^2\,l_1\,l_2 - B^3\,l_1\,l_2^2 - 3\,B^2\,l_2^2 - 3\,Bl_2. \tag{76'''}$$

Pentru coeficienţii care definesc viteza axială redusă $\dfrac{\partial\Phi_2^\star}{\partial x_1^\star}$ (19), a celei de-a doua mişcări oscilatorii, s-au găsit formulele

$$A_0^\star = \frac{2\,l_3}{\pi\,(1 - B^2 l_3^2)^{3/2}}\left[l_3\,E_1 + (2 - B^2\,l_3^2)\,\frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \tag{77}$$

$$A_1^\star = \frac{2}{\pi\,(1 - B^2 l_3^2)^{3/2}}\left[B^2\,l_3^2.\,l_3\,E_1 + \frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \tag{77'}$$

$$C_0^\star = -\,\frac{2\,l_2}{\pi\,(1 - B^2\,l_2^2)^{3/2}}\left[l_2\,E_1 + (2 - B^2\,l_2^2)\,\frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \tag{77''}$$

$$C_1^\star = -\,\frac{2}{\pi\,(1 - B^2\,l_3^2)^{3/2}}\left[B^2\,l_2^2.\,l_2\,E_1 + \frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right], \tag{77'''}$$

$$D_0^\star = \frac{1}{\pi B}\left[\left(\frac{Bl_2^2}{1 - B^2\,l_2^2} - \frac{Bl_3^2}{1 - B^2\,l_3^2}\right)E_1 - \left(\frac{Bl_3}{1 - B^2\,l_3^2} - \frac{Bl_2}{1 - B^2\,l_2^2}\right)\frac{1 + 2\,B^2}{B^2}\,E_2\right]. \tag{77^{IV}}$$

În formulele stabilite pentru coeficientul de portanţă (23), (25), (27), sau coeficientul de moment de tangaj (42), (43) şi (44) al primei mişcări oscilatorii, pentru diferitele poziţii ale şarnierei în raport cu conul Mach, intervin următoarele constante :

$$K_{11} = -\,\frac{1}{6\,(1 - B^2\,l_2^2)\,(l_1 + l_2)}\left\{12\,B^2\,l_2^2 - 3\,(1 + 2\,Bl_2 - Bl_1)\,B^3\,l_2^3 - \right.$$
$$\left. -\,\frac{B}{1 + Bl_1}\,[4\,Bl_1\,C_{01} + (3\,Bl_1 - 1)\,C_{11}]\right\}, \tag{78}$$

$$K_{12} = 3 + 2\,B^2 - \frac{1 + 2\,B^2}{6\,(1 - B^2\,l_2^2)\,B\,(l_1 + l_2)}\left\{12\,Bl_2(2 - B^2\,l_2^2) - \right. \tag{78'}$$
$$\left. -\,3\,(1 + 2\,Bl_2 - Bl_1) - \frac{1}{1 + Bl_1}\,[4\,Bl_1\,C_{02} + (3\,Bl_1 - 1)\,C_{12}]\right\},$$

$$K_{21} = -\,\frac{1 + Bl_1}{6(1 - B^2\,l_2^2)\,(l_1 + l_2)}\left\{3\,B^3\,l_2^3 - \frac{B}{(1 + B\,l_1)^2}\,[4\,Bl_1\,C_{01} + (1 - 2\,Bl_2 + 3\,Bl_1)\,C_{11}]\right\} \tag{79}$$

$$K_{22} = 1 + 2\,(1 + B^2)\,\frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{(1 + 2\,B^2)\,(1 + Bl_1)}{6(1 - B^2\,l_2^2)\,B\,(l_1 + l_2)}\left\{3 - \frac{1}{(1 + Bl_1)^2}\,[4\,Bl_1\,C_{02} + \right.$$
$$\left. +\,(1 - 2\,Bl_2 + 3\,Bl_1)\,C_{12}]\right\}. \tag{79'}$$

Constantele care apar în expresiile (37), (38), (39), găsite pentru coeficientul de moment de ruliu, au următoarele expresii :

$$K_{30} = 1 - 3\,Bl_1 + 2\,Bl_2, \tag{80}$$

$$\begin{aligned} K_{31} = &- \frac{1}{2(1 - B^2 l_2^2)(l_1 + l_2)} \biggl\{ B^3 l_2^3 (3\,B^2 l_1^2 + 8\,B^2 l_2^2 - 4\,B^2 l_1 l_2 + \\ &+ 4\,Bl_2 - 2\,Bl_1 + 3) + 6\,B^2 l_2^2 (Bl_1 - 2\,Bl_2 - 1) - \frac{B}{1 + Bl_1} [(1 - 2Bl_1 + \\ &+ 5\,B^2 l_1^2)\,C_{11} + Bl_1 (6\,Bl_1 - 2)\,C_{01}] \biggr\}, \end{aligned} \tag{80'}$$

$$\begin{aligned} K_{32} = &(4 + 3\,B^2) K_{30} + \frac{1 + 2\,B^2}{2\,(1 - B^2 l_2^2)\,B\,(l_1 + l_2)} \biggl\{ 3\,B^2 l_1^2 + 8\,B^2 l_2^2 - 4\,B^2 l_1 l_2 + \\ &+ 4\,Bl_2 - 2\,Bl_1 + 3 + 6\,Bl_2 (2 - B^2 l_2^2)(Bl_1 - 2\,Bl_2 - 1) - \frac{1}{1 + Bl_1} [(1 - \\ &- 2\,Bl_1 + 5\,B^2 l_1^2)\,C_{12} + Bl_1 (6\,Bl_1 - 2)\,C_{02}] \biggr\}, \end{aligned} \tag{80''}$$

$$K_{40} = 1 - Bl_1 + \frac{4\,B^2 l_1^2}{B\,(l_1 + l_2)}, \tag{81}$$

$$\begin{aligned} K_{41} = &- \frac{1 + Bl_1}{2\,(1 - B^2 l_2^2)(l_1 + l_2)} \biggl\{ 3\,B^3 l_2^3\,(Bl_1 - 2\,Bl_2 - 1) + 6\,B^2 l_2^2 - \\ &- \frac{B}{3\,(1 + Bl_1)^2} [(8\,B^2 l_2^2 + 4\,Bl_1 + [15\,B^2 l_1^2 - 10\,B^2 l_1 l_2 - 2\,Bl_2 - 3)\,C_{11} + \\ &+ 6\,(1 - 2\,Bl_2 + 3\,Bl_1)\,Bl_1\,C_{01}] \biggr\}, \end{aligned} \tag{81'}$$

$$\begin{aligned} K_{42} = &(1 - 4\,Bl_2 + 3\,Bl_1) + 3\,(1 + B^2)\,K_{40} - \frac{(1 + 2\,B^2)(1 + Bl_1)}{2\,(1 - B^2 l_2^2)\,B\,(l_1 + l_2)} \biggl\{ 3\,(Bl_1 - \\ &- 2\,Bl_2 - 1) + 6\,Bl_2 (2 - B^2 l_2^2) - \frac{1}{3(1 + Bl_1)^2} [6\,(1 - 2\,Bl_2 + 3\,Bl_1)\,Bl_1\,C_{02} + \\ &+ (8\,B^2 l_2^2 + 15\,B^2 l_1^2 + 4\,Bl_1 - 10\,B^2 l_1 l_2 - 2\,Bl_2 - 3)\,C_{12}] \biggr\}. \end{aligned} \tag{81''}$$

Coeficienţii de portanţă (25″) şi de moment de tangaj (43″), găsiţi pentru mişcarea oscilatorie a suprafeţei $O^{\star} A_3' A_2'$ au constantele definite de relaţiile

$$R_{11}^{\star} = \left(\frac{B^2 l_2^2 (2 - B^2 l_2^2)}{1 - B^2 l_2^2} - \frac{B^2 l_3^2 (2 - B^2 l_3^2)}{1 - B^2 l_3^2} \right) \frac{1}{l_2 - l_3}, \tag*{(82)}$$

$$R_{12}^{\star} = 1 - 2 B^2 - \frac{1 + 2 B^2}{B (l_2 - l_3)} \left(\frac{B l_2}{1 - B^2 l_2^2} - \frac{B l_3}{1 - B^2 l_3^2} \right), \tag*{82′)}$$

$$R_{20}^{\star} = - \frac{B l_3}{\sqrt{1 - B^2 l_3^2}}, \tag*{(83)}$$

$$R_{21}^{\star} = - \frac{B^3 l_3^2 (2 - B^2 l_3^2) - B^5 l_2 l_3^3}{(1 - B^2 l_3^2)^{3/2}}, \tag*{(83′)}$$

$$R_{22}^{\star} = \frac{B l_2 - B l_3}{\sqrt{1 - B^2 l_3^2}} \left(1 - \frac{1 + 2B^2}{1 - B^2 l_3^2} \right) + \frac{2 B^2 B l_3}{\sqrt{1 - B^2 l_3^2}}, \tag*{(83″)}$$

$$R_{31}^{\star} = \frac{B^3 l_3^2}{2 (1 - B^2 l_3^2)}, \tag*{(84)}$$

$$R_{32}^{\star} = \frac{1 + 2 B^2}{B l_2 - B l_3} \left[\frac{1 + B l_3 (B l_2 - B l_3)}{1 - B^2 l_3^2} \right], \tag*{(84′)}$$

$$R_{41}^{\star} = - \frac{1}{2 (l_2 - l_3)} \left(\frac{B^2 l_2^2}{1 - B^2 l_2^2} - \frac{B^2 l_3^2}{1 - B^2 l_3^2} \right), \tag*{(85)}$$

$$R_{42}^{\star} = - \frac{1 + 2 B^2}{2 (B l_2 - B l_3)} \left(\frac{B l_2}{1 - B^2 l_2^2} - \frac{B l_3}{1 - B^2 l_3^2} \right). \tag*{(85′)}$$

Pentru acelaşi caz, în coeficientul parţial de moment de ruliu (37′), (38′), (39′), intervin următoarele constante :

$$R_{51}^{\star} = \frac{2 (B^3 l_2^2 + B^3 l_2 l_3 + B^3 l_3^2)}{B (l_2 + l_3)}, \tag*{(86)}$$

$$R_{60}^{\star} = - \frac{B l_3}{\sqrt{1 - B^2 l_3^2}}, \tag*{(87)}$$

$$R_{61}^{\star} = - \frac{1}{(1 - B^2 l_3^2)^{3/2}} [3 B^3 l_3^2 - B^3 l_3^3 R_{51}^{\star}], \tag*{(87′)}$$

$$R_{62}^{\star} = (4 + 3 B^2) R_{60}^{\star} + \frac{1 + 2 B^2}{(1 - B^2 l_3^2)^{3/2}} \left[3 B l_3 (2 - B^2 l_3^2) - \frac{1}{B} R_{51}^{\star} \right], \tag*{(87″)}$$

$$R_{70}^{\star} = - \frac{1}{2 B (l_2 + l_3)}, \tag*{(88)}$$

$$R_{71}^{\star} = \frac{1}{2(B l_2^2 - B l_3^2)} \left[\frac{2 B^4 l_3^4 - 4 B^4 l_2^2 l_3^2 + B^2 l_3^2 - B^4 l_2 l_3^3}{1 - B^2 l_3^2} - B^2 l_2^2 \right], \tag*{(88′)}$$

$$R_{72}^{\star} = \frac{4 + 3 B^2}{2(B l_1 - B l_2)} - \frac{1 + 2 B^2}{2 (B^2 l_2^2 - B^2 l_3^2)} \left[\frac{3 B^3 l_3^3 + B l_2 - 4 B^3 l_2^2 l_3}{1 - B^2 l_3^2} - B l_2 \right]. \tag*{(88″)}$$

Aripioara poligonală cu bord de atac supersonic. Cele cinci constante care apar în formula (48) dedusă pentru *viteza axială redusă* a mişcării omogene de ordinul doi sînt definite de formulele

$$A_0 = \frac{2l_1}{\pi (B^2 l_1^2 - 1)^{3/2}} \left[l_1 E_1 + (B^2 l_1^2 - 2) \frac{1 + 2 B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{89}$$

$$A_1 = - \frac{2}{\pi (B^2 l_1^2 - 1)^{3/2}} \left[B^2 l_1^2 . l_1 E_1 - \frac{1 + 2 B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{89'}$$

$$C_0 = \frac{2l_2}{\pi \left(1 - B^2 l_2^2\right)^{3/2}} \left[l_2 E_1 + \left(2 - B^2 l_2^2\right) \frac{1 + 2 B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{89''}$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi \left(1 - B^2 l_2^2\right)^{3/2}} \left[B^2 l_2^2 . l_2 E_1 + \frac{1 + 2 B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{89'''}$$

$$\begin{aligned} D_0 = - \frac{1}{\pi B} \Bigg[& \left(\frac{B l_1^2}{B^2 l_1^2 - 1} + \frac{B l_2^2}{1 - B^2 l_2^2} \right) E_1 + \\ & + \left(\frac{B l_2}{1 - B^2 l_2^2} - \frac{B l_1}{B^2 l_1^2 - 1} \right) \frac{1 + 2 B^2}{B^2} E_2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{89IV}$$

Coeficienţii parţiali de portanţă (50) şi moment de tangaj (57), ca efect al primei mişcări oscilatorii, au constantele date de relaţiile:

$$R_{11} = \left(\frac{B^2 l_1^2 (2 - B^2 l_1^2)}{B^2 l_1^2 - 1} + \frac{B^2 l_2^2 (2 - B^2 l_2^2)}{1 - B^2 l_2^2} \right] \frac{1}{l_1 + l_2}, \tag{90}$$

$$R_{12} = 1 - 2 B^2 + \frac{1 + 2 B^2}{B (l_1 + l_2)} \left(\frac{B l_1}{B^2 l_1^2 - 1} - \frac{B l_2}{1 - B^2 l_2^2} \right), \tag{90'}$$

$$R_{20} = \frac{B l_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \tag{91}$$

$$R_{21} = \frac{B^3 l_1^2 (2 - B^2 l_1^2) + B^5 l_1^3 l_2}{(B^2 l_1^2 - 1)^{3/2}}, \tag{91'}$$

$$R_{22} = \frac{B (l_1 + l_2)}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}} \left(1 + \frac{1 + 2 B^2}{B^2 l_1^2 - 1} \right) - \frac{2 B^2 B l_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \tag{91''}$$

$$R_{31} = - \frac{B^3 l_1^2}{2 (B^2 l_1^2 - 1)}, \tag{92}$$

$$R_{32} = \frac{1 + 2B^2}{2B (l_1 + l_2)} \left(1 + \frac{B^2 l_1 l_2}{B^2 l_1^2 - 1} \right), \tag{92'}$$

$$R_{41} = - \frac{1}{2 (l_1 + l_2)} \left(\frac{B^2 l_1^2}{B^2 l_1^2 - 1} + \frac{B^2 l_2^2}{1 - B^2 l_2^2} \right), \tag{93}$$

$$R_{42} = \frac{1 + 2 B^2}{2B (l_1 + l_2)} \left(\frac{B l_1}{B^2 l_1^2 - 1} - \frac{B l_2}{1 - B^2 l_2^2} \right). \tag{93'}$$

În relaţiile coeficientului parţial de moment de ruliu (53), (54), (55), apar constantele

$$R_{51} = -\frac{2\left(B^3 l_1^2 - B^3 l_1 l_2 + B^3 l_2^2\right)}{Bl_1 - Bl_2}, \tag{94}$$

$$R_{60} = \frac{Bl_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \tag{95}$$

$$R_{61} = \frac{1}{\left(B^2 l_1^2 - 1\right)^{3/2}}\left[3 B^3 l_1^2 + B^3 l_1^3 R_{51}\right], \tag{95'}$$

$$R_{62} = (4 + 3 B^2) R_{60} - \frac{1 + 2 B^2}{\left(B^2 l_1^2 - 1\right)^{3/2}}\left[3 B l_1 \left(B^2 l_1^2 - 2\right) - \frac{1}{B} R_{51}\right], \tag{95''}$$

$$R_{70} = \frac{1}{2 B (l_1 - l_2)}, \tag{96}$$

$$R_{71} = \frac{1}{2\left(B l_1^2 - B l_2^2\right)}\left[\frac{2 B^4 l_1^4 - 4 B^4 l_1^2 l_2^2 + B^2 l_1^2 - B^4 l_1^3 l_2}{B^2 l_1^2 - 1} + B^2 l_2^2\right], \tag{96''}$$

$$R_{72} = \frac{4 + 3B^2}{2B(l_1 - l_2)} + \frac{1 + 2 B^2}{\left(B^2 l_1^2 - B^2 l_2^2\right)}\left[\frac{4 B^3 l_1 l_2^2 - 3 B^3 l_1^3 + B l_2}{B^2 l_1^2 - 1} + B l_2\right]. \tag{96'''}$$

Aripioara trapezoidală cu bord de atac subsonic. În formulele stabilite pentru coeficienţii aerodinamici (60), (61), (62), (63), ce apar ca efect al primei mişcări oscilatorii intervin constantele :

$$Q_1 = (1 + B l_1) \left[(3 B l_1 + 2 B l_3 - 1) h + 4 B d\right], \tag{97}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = {} & (1 - B^2) \left[(5 B^2 l_1^2 + 4 B^2 l_1 l_3 + 4 B l_1 + 4 B l_3 - 1) h + 6 B d (1 + B l_1)\right] + \\ & + (2 + B^2) \left(B^2 l_1^2 - 1\right) h + (1 - 3 B l_1) (1 + B l_1) h, \end{aligned} \tag{97'}$$

$$\begin{aligned} Q_3 = {} & (1 - B^2)\left(5 B^2 l_1^2 + 4 B^2 l_1 l_3 + 4 B l_1 + 4 B l_3 - 1\right) + (2 + B^2) \left(B^2 l_1^2 - 1\right) + \\ & + (1 - 3 B l_1) (1 + B l_1), \end{aligned} \tag{98}$$

$$Q_4 = \left[\left(15 B^2 l_1^2 - 8 B^2 l_3^2 - 6 B l_1 + 3\right) h^2 - 24 (B^2 l_3 h d + B^2 d^2)\right] (1 + B l_1), \tag{99}$$

$$\begin{aligned} Q_5 = {} & (1 - B^2) \left[\left(35 B^3 l_1^3 - 24 B^3 l_1 l_3^2 - 24 B^2 l_3^2 + 25 B^2 l_1^2 - 7 B l_1 + 3\right) h^2 - \right. \\ & \left. - 8 (1 + B l_1) (8 B^2 l_3 h d + 6 B^2 d^2)\right] - 2 \left(15 B^3 l_1^3 + 9 B^2 l_1^2 - 3 B l_1 + 3\right) h^2 + \\ & + (2 + B^2) \left(10 B^3 l_1^3 + 2 B^2 l_1^2 - 2 B l_1 + 6\right) h^2. \end{aligned} \tag{99'}$$

Constantele care definesc expresiile coeficienţilor aerodinamici parţiali, ca efect al mişcării oscilatorii a suprafeţei $C\,O^{\star}.\ A'_3\,C'$, sînt date de relaţiile următoare :

$$M_1 = -\left(B l_3 + 1 + 2 B^2 \frac{5 B l_3 - 4 B^3 l_3^3}{1 - B^2 l_3^2}\right), \tag{100}$$

$$M_2 = \frac{(1 + 2 B^2) B l_3}{2 \left(1 - B^2 l_3^2\right)}, \tag{100'}$$

$$M_3 = 3 + B^2 - 4 B^2 l_3^2, \tag{101}$$

$$M_4 = - 3 B l_3 (1 + B^2). \tag{101'}$$

Aripioara trapezoidală cu bord de atac supersonic. Coeficienții aerodinamici parțiali (71), (72), (73), ca efect al primei mișcări oscilatorii sînt definiți de următoarele constante:

$$N_1 = B\,(l_1 + l_3)\,h + 2\,B\,d, \tag{102}$$

$$N_2 = (1 - B^2)\,[2\,B\,(l_1 + l_3)\,h + 3\,B\,d] - h\,B\,l_1, \tag{102'}$$

$$N_3 = 2\,(1 - B^2)\,B\,(l_1 + l_3) - B\,l_1, \tag{103}$$

$$N_4 = \left[2\left(B^2 l_1^2 - B^2 l_3^2\right) + 1\right] h^2 - 6\,(B^2 l_3\,h\,d + B^2 d^2), \tag{104}$$

$$N_5 = (1 - B^2)\left\{\left[6\left(B^2 l_1^2 - B^2 l_3^2\right) - 1\right] h^2 - 4\,(4\,B^2 l_3\,h\,d + 3\,B^2 d^2)\right\} + \\ + 4\left(1 - B^2 l_1^2\right) h^2. \tag{104'}$$

Primită la redacție la 28 octombrie 1958.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕРОНОВ В СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется гармоническое колебательное движение элеронов вокруг шарнира в предположении сверхзвукового обтекания и малой частоты движения.

Эта задача приводится к исследованию однородных движений первого и второго порядка, причем соответствующие потенциалы удовлетворяют уравнению (5).

В качестве первого приложения рассматривается задача гармонических колебаний элерона, имеющего вид многоугольника (рис. 1).

Так как колебательное движение закрылка равносильно колебательному движению двух подходяще выбранных треугольных поверхностей (OA_1A_2 и OA'_3A_2, рис. 1), решение задачи очень просто. Затем определяются выражения коэффициентов давления для элерона с дозвуковой или сверхзвуковой передней кромкой и вычисляются частные аэродинамические коэффициенты, соответствующие двум рассматриваемым колебательным движениям. Для элерона с дозвуковой передней кромкой вычисляется также сила подсоса.

Для каждого случая, в отдельности, указаны формулы суммирования частных аэродинамических коэффициентов. Установленные для многоугольного элерона соотношения могут быть легко использованы для треугольных элеронов (§ 4).

Трапецоидальное крыло также является частным случаем рассматриваемого многоугольного элерона, а выражения частных аэродинамических коэффициентов, позволяющих вычислить полные аэродинамические коэффициенты, приведены в §§ 6 и 7.

Если принять в этих соотношениях $l_1 = 0$, получаются формулы аэродинамических коэффициентов для прямоугольного элерона.

Таким образом исследуются все виды элеронов, обычно применяемых в быстроходных самолетах.

В заключение указано, что из установленных в этой работе формул можно получить, как частный случай, выражения аэродинамических коэффициентов, соответствующих отклонению элеронов.

CARACTÉRISTIQUES AÉRODYNAMIQUES DES AILERONS AYANT UN MOUVEMENT OSCILLATOIRE HARMONIQUE EN RÉGIME SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient le mouvement oscillatoire harmonique des ailerons autour de la charnière, dans l'hypothèse d'un écoulement supersonique et d'une petite fréquence du mouvement.

Ce problème est ramené à l'étude de certains mouvements homogènes d'ordre un et deux, les potentiels correspondants satisfaisant à l'équation (5).

Le problème des oscillations harmoniques d'un aileron de forme polygonale est abordé en tant que première application. (fig. 1).

Si l'on remarque que le mouvement oscillatoire de cet aileron est équivalent au mouvement oscillatoire de deux surfaces triangulaires, convenablement choisies ($OA_1'A_2'$ et $O^{\star}A_3'A_2'$, (fig. 1) on trouve la solution du problème d'une manière simple. On écrie ensuite les expressions des coefficients de pression de l'aileron à bord d'attaque subsonique ou supersonique et l'on calcule les valeurs des coefficients aérodynamiques partiels correspondant aux deux mouvements oscillatoires considérés. Dans le cas de l'aileron à bord d'attaque subsonique, on a calculé en outre la force de succion.

On indique pour chaque cas les formules de sommation des coefficients aérodynamiques partiels.

Les relations établies pour l'aileron polygonal peuvent aisément être appliquées aux ailerons triangulaires (§ 4). De même l'aileron trapézoïdal est un cas particulier de l'aileron polygonal considéré ; les expressions des coefficients aérodynamiques partiels permettant de calculer les coefficients aérodynamiques totaux sont données dans les §§ 6 et 7.

Lorsque, dans ces relations, on pose $l_1 = 0$, on obtient les formules des coefficients aérodynamiques pour l'aileron rectangulaire.

Toutes les formes d'ailerons, couramment utilisées pour les avions à grande vitesse, ont ainsi été étudiées.

En conclusion, les auteurs montrent qu'on peut obtenir, comme un cas particulier, à partir des formules établies dans le présent travail, les expressions des coefficients aérodynamiques qui correspondent aux braquage des ailerons.

BIBLIOGRAFIE

1. JOHN W. MILES, *On Harmonic Motion on Supersonic Speeds.* Journ. Aeron. Sci., **16**, 378 (1949)
2. E. CARAFOLI, Ş. SĂNDULESCU, *Oscillations harmoniques des ailerons de forme générale en régime supersonique.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, *6* (1958).
3. E. CARAFOLI, *High-Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
4. — *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R. P. R., **II**, *9—10*, 629 (1952).
5. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *1* (1957).

AEROMECANICĂ

ELICE TANDEM ANTAGONISTE

DE

N. N. PATRAULEA

NOTAȚII

S_1,	secțiunea elicei amonte;
S_2,	secțiunea elicei aval;
δp_1,	saltul presiunii la traversarea discului elicei amonte;
δp_2,	saltul presiunii la traversarea discului elicei aval;
Σ,	suprafața tubulară de vîrtejuri care se sprijină pe S_i și S_2;
V,	viteza fluidului la infinit amonte;
γ_0,	densitatea turbionară medie pe Σ între S_1 și S_2;
γ_∞,	densitatea turbionară asimptotică în spatele ultimei elice;
$\overline{\gamma}_0$, $\overline{\gamma}_\infty$,	densități turbionare adimensionale definite prin $\frac{\overline{\gamma}_0}{V}$, respectiv $\frac{\overline{\gamma}_\infty}{V}$;
$\gamma_\infty^\star$,	$\gamma_\infty^\star = \gamma_\infty/\gamma_0$;
$V^\star$,	$V^\star = V/\gamma_0$;
v_1, v_2,	viteză axială medie pe S_1 respectiv S_2;
N,	puterea totală introdusă în vînă de sistemul elicelor S_1, S_2;
T,	tracțiunea totală care se exercită pe elicele S_1 și S_2;
η,	randamentul propulsiv al sistemului S_1S_2;
C_T,	coeficientul de tracțiune al sistemului S_1S_2;
C,	coeficient de calitate;
E_0,	debitul de energie totală în secțiunea S_0;
E_1,	debitul de energie totală în spatele discului S_1;
E_2,	debitul de energie totală în fața discului S_2;
C_S,	coeficient de suflerie;
N_∞,	debitul de energie la infinit amonte prin o secțiune egală cu S_2;
N_1, N_2,	puterea introdusă de arborele lui S_1, respectiv al lui S_2;
N_{1i}, N_{2i},	puterile pe care le introduce S_1, respectiv S_2, în absența frecării;

N_{1f}, N_{2f},	puterile pierdute prin frecare cu palele elicei S_1 respectiv S_2;
Θ_1, Θ_2,	unghiuri solide sub care se văd secțiunile S_1 respectiv S_2 dintr-un punct P, interior volumului delimitat de S_1, S_2, Σ;
ψ_1, ψ_2,	fluxul care străbate S_1 respectiv S_2 în absența frecării;
μ_0,	coeficient de reducere a debitului datorită frecării vînei cu fluidul exterior : $\mu_0 = \psi_2/\psi_1$;
ψ_{10}, ψ_{20},	fluxul care străbate S_1, respectiv S_2 datorită vîrtejurilor de pe Σ;
L,	distanța între S_1 și S_2;
ε_1,	coeficient definit de $\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi S_1}\int_{S_1}\Theta_2(P)\,ds_P$;
$\psi_{1\infty}$,	fluxul care străbate S_1 datorită inducției bobinei de vîrtejuri semiinfinite de densitate, γ_∞;
R_1, R_2,	razele elicelor S_1 și S_2;
r,	rază curentă pe discul elicei;
$c(r)$,	suma tuturor corzilor palelor elicei la raza r;
v_{ef},	viteza efectivă în raport cu un profil al palei;
c_z,	coeficient unitar de portanță;
Ω_1, Ω_2,	vitezele unghiulare ale elicelor;
δ,	coeficient unitar de rezistență la înaintare a unui profil;
φ,	unghiul făcut de viteza efectivă cu discul elicei;
η_1, η_2,	coeficienți de randament definiți prin : $\eta_1 = \frac{N_{1i}}{N_1}$; $\eta_2 = \frac{N_{2i}}{N_2}$;
η_0,	coeficient de reducere a energiei totale a vînei datorită amestecului cu fluidul exterior : $\eta_0 = \frac{E_{20}}{E_{10}}$;
T_{1f}, T_{2f},	pierderile de tracțiune a celor două elice datorită însumării forțelor de frecare aplicate de fluid structurii permeabile S_1 respectiv S_2.
f_1, f_2,	coeficienți de frecare definiți prin : $T_{1f} = \delta p_1 S_1 f_1$; $T_{2f} = -\,\delta p_2 S_2 f_2$.

1. **Introducere.** În mai multe rînduri ne-am ocupat cu studiul anumitor efecte mecanice interesante datorită interacțiunii dintre un inel de vîrtej și o suprafață permeabilă din vecinătatea sa [1] *, [2], [3], [4]. Se știe că cu ajutorul unui vîrtej inelar al cărui plan este perpendicular pe curentul de la infinit, se pot concentra sau rări liniile de curent care străbat suprafața sa. Cu alte cuvinte, debitul de fluid care străbate spira de vîrtej poate fi mai mare sau mai mic decît debitul de la infinit care străbate o secțiune egală. Pentru ca spira de vîrtej să concentreze liniile de curent, sensul vîrtejului trebuie să fie în relație dreaptă cu sensul curentului de la infinit amonte și invers.

În lucrarea [4] am indicat cîteva metode de realizare a vîrtejului inelar în scopul măririi coeficientului de calitate al unui sistem propulsiv. Un mijloc principal pe care l-am discutat acolo a fost metoda întubării elicelor. Tot în lucrarea citată am indicat o metodă originală pentru mărirea coeficientului de calitate şi anume folosirea unor pale speciale nerectilinii. Se arăta că coeficientul de calitate poate fi mai mare ca 1.

---

*) p. 18, 19, 133 și 136.

2. **Elice tandem antagoniste.** În lucrarea prezentă propunem şi studiem un nou mijloc de realizare a vîrtejului inelar constînd din două elice tandem legate cinematic, elicea amonte fiind tractivă, iar elicea aval funcţionînd în regim de moară de vînt. Energia mecanică culeasă de elicea posterioară este redată elicei anterioare prin legătura cinematică menţionată. Cea mai simplă legătură cinematică între cele două elice ar putea consta din legarea lor rigidă, printr-un ax comun (fig. 1).

În spaţiul dintre cele două elice, vitezele vor fi mai mari decît în restul spaţiului ceea ce trădează existenţa suprafeţei tubulare de vîrtejuri care se sprijină pe discul celor două elice.

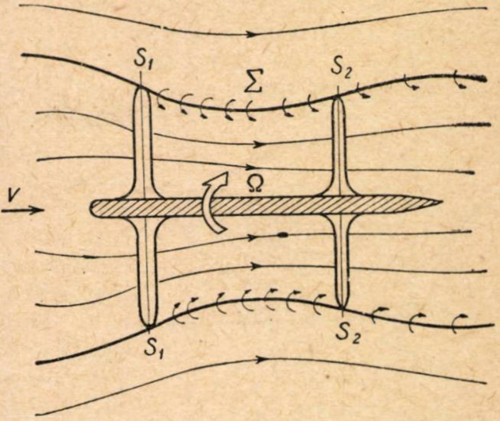


Fig. 1

2′. **Elice antagoniste ideale.** Fie mai întîi două elice tandem ideale (fără considerarea frecării), cu număr infinit de pale şi fără considerarea rotaţiei vînei. Discul S_1 al primei elice este considerat deci ca o suprafaţă permeabilă activă, iar S_2 ca o suprafaţă permeabilă pasivă [1] *). Să presupunem mai departe, că suprafaţa permeabilă, S_1, este caracterizată prin aceea că aplică fluidului care o traversează forţe unitare normale la disc şi constante pe suprafaţă discului. Această distribuţie particulară a forţelor unitare implică un salt constant, δp_1, al presiunii la traversarea discului. Acelaşi lucru vom presupune despre S_2 cu deosebirea că forţele unitare sînt de sens contrar şi deci saltul presiunii este negativ, egal însă în valoare absolută : $\delta p_2 = -\delta p_1$.

În aceste condiţii se ştie că se vor detaşa vîrtejuri libere numai din marginile suprafeţelor permeabile şi se va forma o pînză tubulară de vîrtejuri, Σ. În regiunea delimitată de S_1, S_2 şi mişcarea va fi tot irotaţională, deoarece saltul constantei lui Bernoulli la traversarea lui S_1 este legată în mod precis de saltul presiunii. La traversarea lui S_2 saltul constantei lui Bernoulli va fi egal în valoare absolută cu saltul la traversarea lui S_1 dar de semn contrar, astfel încît constanta reia valoarea pe care a avut-o la infinit amonte.

Mişcarea va fi irotaţională peste tot în afara suprafeţei Σ care este presupusă şi suprafaţă de curent. În cazul examinat aici, mişcarea va prezenta o simetrie faţă de planul median paralel cu discurile.

---

*) p. 23.

În figura 2 se arată schematic scurgerea în jurul suprafețelor permeabile antagoniste considerate. Vîrtejurile de pe suprafața Σ, cuprinsă între cele două discuri S_1 și S_2, sînt vîrtejuri libere dar ele se comportă ca și cum ar fi legate de suprafața Σ.

Energia totală pusă în joc este nulă, mișcarea fiind aceea corespunzătoare inducției vîrtejurilor inelare de pe Σ la care se poate suprapune eventual și un curent paralel cu axa elicelor.

Dacă S_2 este astfel încît $|\delta p_2| < |\delta p_1|$, atunci suprafața de vîrtejuri care se sprijină pe S_1 și pe S_2 se întinde pînă la infinit aval. Porțiunea Σ a acestei suprafețe de vîrtejuri cuprinsă între cele două discuri va avea însă o densitate medie turbionară mai mare decît porțiunea care se găsește în aval de S_2. Vîna de fluid va avea în acest caz o secțiune finită la infinit aval, chiar în funcționarea la punct fix (adică în lipsa unui curent paralel general).

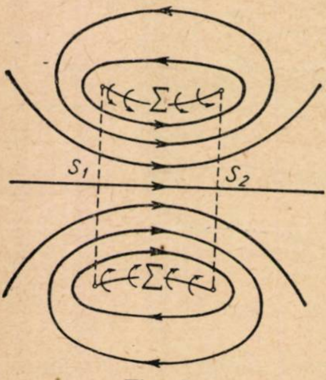


Fig. 2

Densitatea asimptotică de vîrtej este egală cu densitatea asimptotică a unei singure elice, lucrînd cu încărcarea ansamblului celor două elice, $\delta p_1 + \delta p_2$, după cum rezultă din aplicarea teoremei lui Bernoulli. Dar secțiunea de la infinit aval va fi mai mare în cazul elicelor antagoniste decît în cazul elicei izolate, care ar avea discul egal cu discul S_1, și aceeași încărcare, $\delta p_1 + \delta p_2$, deoarece debitul de fluid care intră prin elicele antagoniste este mai mare. Sporul de debit se explică prin inducția suprafeței de vîrtejuri Σ dintre cele două elice.

În sfîrșit, să examinăm pe scurt ce devine schema turbionară de mai sus în cazul unor elice cu număr finit de pale. Deosebirea nu este esențială.

În adevăr, presupunînd că cele două elice au același număr de pale, analogul primului exemplu considerat mai sus este funcționarea elicelor cu circulație constantă de-a lungul fiecărei pale, sensul circulației pe palele elicei S_1 corespunzînd unei tracțiuni iar al circulației pe palele elicei S_2 corespunzînd unei elice pasive. După cum se știe, de data aceasta se vor detașa din vîrfurile palelor „linii" de vîrtejuri în formă de spirală care sînt transportate la infinit aval de către curent. Sistemul de vîrtejuri provenind de la prima elice se întinde evident pînă la infinit aval, dar S_2 dă de asemenea naștere la un sistem de linii de vîrtejuri, a căror componente tangențiale sînt egale și de semn contrar cu acelea provenind de la S_1. Se deduce că și în cazul elicelor cu număr finit de pale, totul se petrece din punctul de vedere al vitezelor axial induse ca și cum nu ar exista decît sistemul de vîrtejuri produs de S_1, *însă numai pe porțiunea* S_1, S_2.

3. **Aplicarea teoriei liniarizate la elice antagoniste ideale.** Se poate aplica teoria mișcărilor cu dîră aproape rectilinie [5] pentru găsirea mișcării în jurul unui sistem de elice antagoniste considerate ca suprafețe

permeabile care dau naştere la salturi de presiune constante pe discurile lor.

Pentru simplificarea calculelor în scopul obţinerii unor formule care să arate tendinţa fenomenului şi a eventualelor avantaje care ar putea decurge din folosirea elicelor antagoniste, vom considera că distanţa între cele două elice este foarte mare şi că nu există frecări între aer şi palele elicei şi nici între vîna fluidă din dîră şi fluidul exterior.

Vom nota cu V viteza fluidului la infinit amonte, cu γ_0 densitatea medie turbionară pe Σ, cu γ_∞ densitatea turbionară asimptotică în spatele

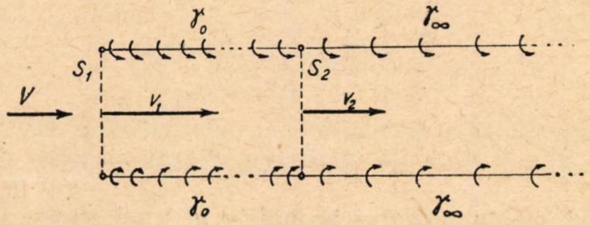


Fig. 3

elicei S_2, cu v_1 viteza axială în dreptul discului S_1 şi cu v_2 viteza axială în dreptul lui S_2 (fig. 3).

Avem relaţiile

$$v_1 = V + \frac{\gamma_0}{2}; \quad v_2 = V + \frac{\gamma_0 + \gamma_\infty}{2}, \tag{3.1}$$

$$v_\infty = V + \gamma_\infty .$$

În ceea ce priveşte salturile presiunii δp_1 şi δp_2, acestea vor fi date, conform teoremei lui Bernoulli, de următoarele relaţii

$$\delta p_1 = \frac{\rho}{2}[(V + \gamma_0)^2 - V^2] = \frac{\rho}{2}\gamma_0(\gamma_0 + 2V), \tag{3.2}$$

$$\delta p_1 + \delta p_2 = \frac{\rho}{2}[(V + \gamma_\infty)^2 - V^2], \tag{3.3}$$

de unde,

$$\delta p_2 = \frac{\rho}{2}\gamma_\infty(\gamma_\infty + 2V) - \frac{\rho}{2}\gamma_0(\gamma_0 + 2V). \tag{3.4}$$

Puterea introdusă, N, va fi

$$N = \frac{\rho}{2} S_1\left(V + \frac{\gamma_0}{2}\right)[(V + \gamma_\infty)^2 - V^2],$$

sau

$$N = \frac{\rho}{4} S_1\gamma_\infty(\gamma_\infty + 2V)(\gamma_0 + 2V). \tag{3.5}$$

Tracţiunea totală a sistemului se obţine pe baza teoremei impulsului şi are expresia

$$T = \rho S_1 \left(V + \frac{\gamma_0}{2} \right) \cdot \gamma_\infty . \tag{3.6}$$

Secţiunea S_2 a elicei aval se va deduce din relaţia de continuitate

$$\rho S_1 \left(V + \frac{\gamma_0}{2} \right) = \rho\, S_2 \left(V + \frac{\gamma_0 + \gamma_\infty}{2} \right), \tag{3.7}$$

de unde,

$$S_2 = S_1 \frac{\gamma_0 + 2\,V}{\gamma_0 + \gamma_\infty + 2\,V} . \tag{3.8}$$

Vom aplica relaţiile de mai sus la calculul unor coeficienţi ai sistemului de elice antagoniste de mare importanţă practică.

4. **Calculul randamentului propulsiv al unui sistem de elice antagoniste ideale.** Aplicînd formula de definiţie a randamentului,

$$\eta = \frac{T.\,V}{N}, \tag{4.1}$$

în care înlocuim pe T şi N prin expresiile lor (3.6) şi (3.5), se obţine

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_\infty}{2\,V}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\overline{\gamma}_\infty} . \tag{4.2}$$

După cum se vede expresia lui η este aceeaşi ca aceea corespunzătoare unei singure elice cu o viteză asimptotică în vînă, egală. Avantajul teoretic al elicelor antagoniste constă în aceea că γ_∞ pentru acelaşi S_1 şi pentru alegere suficient de mare a lui γ_0, (formula (3.6)) poate să fie făcută oricît de mică şi deci randamentul teoretic poate fi făcut să tindă către 1.

Dacă se introduce coeficientul de tracţiune C_T, definit prin

$$T = \frac{\rho}{2} S_1\, V^2\, C_T, \tag{4.3}$$

atunci din (3.6) se scoate

$$\overline{\gamma}_\infty = \frac{C_T}{2 + \overline{\gamma}_0} \tag{4.4}$$

şi înlocuind în (4.2) avem

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{C_T}{2 + \gamma_0}} . \tag{4.5}$$

Sub această formă se vede că pentru un C_T dat, $\eta \rightarrow 1$ cînd $\overline{\gamma}_0 \rightarrow \infty$. Folosirea sistemului de elice antagoniste pare indicată în special în cazul încărcărilor unitare mari, ceea ce se întîmplă de exemplu cînd viteza de la infinit este mică și în particular în funcționarea la punct fix, care va fi tratată în paragraful următor.

Pentru elicele tractive obișnuite C_T are astfel de valori încît $\eta > 0{,}75$. Creșterea lui η datorită inelului de vîrtejuri este teoretic mică. Se va putea vedea că dacă se ține seamă și de frecări, creșterea randamentului este neînsemnată sau chiar negativă.

5. **Coeficientul de calitate.** Coeficientul de calitate se definește în legătură cu tracțiunea elicelor funcționînd la punct fix, unde definiția randamentului devine lipsită de sens. Coeficientul de calitate are expresia,

$$C = \frac{T^{\frac{3}{2}}}{N\sqrt{2\,\rho\, S}}. \tag{5.1}$$

În cazul nostru, vom considera $S = S_1$ deoarece $S_1 > S_2$.

Ținînd seama de (3.6) și (3.5) în care nu facem încă $V = 0$, se obține

$$C = \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_\infty\,(2 + \bar{\gamma}_0)}}{2 + \bar{\gamma}_\infty},$$

sau

$$C = \frac{\sqrt{\dfrac{2\,V_\infty}{\gamma_\infty} + \dfrac{\gamma_0}{\gamma_\infty}}}{\dfrac{2\,V_0}{\gamma_\infty} + 1}. \tag{5.2}$$

Din această ultimă formulă se vede că C crește o dată cu raportul $\frac{\gamma_0}{\gamma_\infty}$. Pentru $V = 0$ (funcționare la punct fix), expresia coeficientului de calitate devine

$$C = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_\infty}} = \sqrt{\frac{1}{\gamma_\infty^*}}. \tag{5.3}$$

6. **Coeficient de suflerie.** Considerînd spațiul dintre cele două elice analog cu camera de experiență a unei suflerii, vom defini coeficient de suflerie raportul dintre debitul de energie din camera de experiență și puterea introdusă

$$C_s = \frac{\dfrac{\rho}{2}\, S_1 \left(V + \dfrac{\gamma_0}{2} \right) (V + \gamma_0)}{N} \tag{6.1}$$

și mai departe

$$C_s = \frac{(V + \gamma_0)^2}{\gamma_\infty\,(2V + \gamma_\infty)}. \tag{6.2}$$

În funcționarea la punct fix, expresia coeficientului de suflerie devine

$$C_{s0} = \frac{\gamma_0^2}{\gamma_\infty^2} = \frac{1}{\gamma_\infty^2}\,. \qquad (6.3)$$

După cum se vede din această formulă, coeficientul de suflerie crește cu patratul raportului $\frac{\gamma_0}{\gamma_\infty}$. Vom vedea într-unul din paragrafele viitoare, că putem obține un coeficient de suflerie destul de ridicat chiar în cazul considerării viscozității fluidului.

De fapt, se știe că nu este recomandabil să se construiască o suflerie conform schemei date pentru elicele antagoniste, deoarece nu este bine ca să se plaseze camera de experiențe în aval de elicea S_1. Se poate obține însă o bună suflerie combinînd sistemul de elice antagoniste cu un tub în care se poate dispune camera de experiențe și spre sfîrșitul căreia se va așeza elicea S_1. Vom reveni asupra acestei combinații la punctul 19.

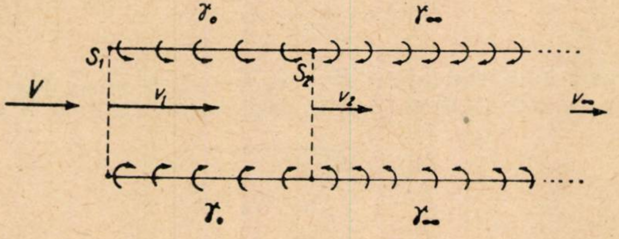


Fig. 4

Vom remarca, de asemenea, că obținerea în mod economic a unei zone de viteze mari și deci a unui coeficient de suflerie bun, nu interesează numai construcția de suflerii. La punctul 19 vom arăta și o altă aplicație importantă.

7. **Coeficientul de putere eoliană**, C_e. Avantaje teoretice ale elicelor antagoniste apar și în cazul folosirii lor ca elice eoliene. Datorită sucțiunii pe care o face elicea amonte, trece prin secțiunea eolianei energia corespunzătoare unei secțiuni mai mari de la infinit amonte decît la elicea eoliană izolată. În absența frecărilor se poate face să treacă prin o eoliană, de o secțiune dreaptă dată, un debit și deci o energie oricît de mare. Schema de funcționare este arătată de figura 4.

Deosebirea față de schemele de funcționare corespunzătoare regimurilor anterioare constă în faptul că densitatea de vîrtej γ_∞ este de semn contrar, sistemul S_1, S_2, în ansamblul lui, fiind pasiv. Rezultă de aici că viteza asimptotică în vînă este mai mică decît viteza de la infinit amonte, iar dacă se ține seama de ecuația de continuitate se deduce că secțiunea discului S_2 este mai mare de astă dată, decît aceea a discului S_1. În toate cazurile ne vom raporta deci, la secțiunea S_2.

Coeficientul de funcționare a unui sistem eolian va fi definit prin raportul

$$C_e = \frac{-N}{N\omega}, \tag{7.1}$$

dintre puterea culeasă, $-N$, și debitul de energie a unei vîne de la infinit amonte avînd ca secțiune, secțiunea discului S_2. Vom avea

$$N_\infty = \frac{\rho}{2} S_2 V^3 \tag{7.2}$$

și

$$N = \rho S_2 \left(\frac{\gamma_0 + \gamma_\infty}{2} + V\right)\left[\frac{(V + \gamma_\infty)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right],$$

sau

$$N = \frac{\rho S_2}{4} \gamma_\infty (2 + \bar{\gamma}_\infty)(2 + \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_\infty). \tag{7.3}$$

Făcînd calculele se obține

$$C_e = -\frac{1}{2} \gamma_\infty (2 + \gamma_\infty)(2 + \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_\infty) \quad (\bar{\gamma}_\infty < 0). \tag{7.4}$$

Un calcul algebric elementar arată că maximul lui C_e, pentru un $\bar{\gamma}_0$ dat corespunde la $\bar{\gamma}_\infty = 2/3$ și deci,

$$C_{e\,\max} = \frac{4}{9}\left(\bar{\gamma}_0 + \frac{4}{3}\right). \tag{7.5}$$

8. **Suprafață de vîrtejuri tubulară Σ finită.** Simplitatea rezultatelor obținute în paragrafele precedente se datoresc în mare parte considerării unei suprafețe tubulare Σ, infinite. Vitezele induse au avut în acest caz expresii foarte simple. Vom considera în acest paragraf suprafața de vîrtejuri Σ finită și vom indica calculele ce trebuie făcute în acest caz.

Vitezele induse se pot calcula pe baza teoriei date în [1]*), prin însumarea vitezelor induse de surse negative, respectiv pozitive întinse pe discurile S_1, S_2, sau pe baza inducției vîrtejurilor întinse pe suprafața laterală Σ, a vînei între S_1 și S_2, de lungime finită L. Dăm mai jos indicații asupra calculului bazat pe ultima metodă.

Viteza axială indusă de vîrtejurile Σ de densitate γ_0 într-un punct P interior domeniului S_1, S_2, este dată de formula

$$v(P) = \frac{\gamma_0}{4\pi}(4\pi - \Theta_1 - \Theta_2), \tag{8.1}$$

Θ_1 și Θ_2 fiind valorile absolute ale unghiurilor solide sub care se văd din P secțiunile S_1, respectiv S_2.

---

*) p. 64.

Fluxul care străbate S_1, datorită vitezei induse de suprafață de vîrtejuri Σ va fi

$$\psi_{10}=\frac{\gamma_0}{2}\left(S_1-\frac{1}{2\pi}\int_{S_1}\Theta_2\,ds_1\right). \tag{8.2}$$

Vom pune

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S_1}\Theta_2\,ds=S_1\,\varepsilon_1, \tag{8.3}$$

ε_1 depinzînd evident numai de raportul dintre D_1, diametrul lui S_1 și lungimea suprafeței de vîrtejuri, L.

Avem deci,

$$\psi_{10}=\frac{1-\varepsilon_1}{2}\gamma_0\cdot S_1\ ;\ \psi_{20}=\frac{1-\varepsilon_1}{2}\cdot\gamma_0\,S_2. \tag{8.4}$$

În expresia lui ψ_{20} am înlocuit ε_2 tot cu ε_1 deoarece raportul L/D_2 este apropiat de L/D_1. În orice caz $1-\varepsilon$ este aproximativ egal cu unitatea dacă $L/D \gg 1$ și chiar pentru rapoarte ușor subunitare. În ceea ce privește fluxul care trece prin S_1, datorită inducției bobinei de vîrtejuri semiinfinite de densitate γ_∞, avem

$$\psi_{1\infty}=\frac{\gamma_\infty}{4\pi}\int_{S_1}\Theta_2\,ds_1=\frac{\gamma_\infty}{2}S_1\,\varepsilon_1. \tag{8.5}$$

9. **Considerarea problemei în mișcarea plană. Punerea problemei.** Tratînd problema pe baza ipotezei mișcării plane, se poate controla teoria liniarizată folosită în paragrafele anterioare, soluționarea matematică a problemei putîndu-se face mai riguros cel puțin în problema mai simplă a distanței L infinită și funcționare la punct fix.

În adevăr, în aceste ipoteze, pe liniile de discontinuitate care mărginesc vîna fluidă, modulul vitezei ia valori constante. În tratarea unor astfel de probleme se poate recurge la teoria clasică a lui Helmholtz.

Vom presupune că S_1 este astfel încît produce la mari distanțe în aval de ea o vînă fluidă cu distribuție uniformă a vitezelor în secțiunea ei dreaptă S_0. Nu considerăm aici mișcarea fluidă de la infinit amonte pînă la secțiunea S_0, mișcare bine cunoscută din teoria elicei izolate cu număr infinit de pale. Între altele se știe că

$$S=2\,S_0. \tag{9.1}$$

Noi ne referim acum la mișcarea fluidă între secțiunea S_0 și secțiunea S_∞ de la infinit aval, după ce vîna a străbătut și discul S_2 (fig. 5).

Vom nota cu v_0, viteza în secțiunea S_0 (în problema noastră îi vom spune secțiunea de la infinit amonte) și prin v_∞, viteza de la infinit aval.

Problema care se pune este următoarea : cunoscînd S_0, v_0 și v_∞, să se determine scurgerea. În particular va fi important să se determine mărimea ariei plăcii S_2. Vom verifica astfel că pentru recuperarea energiei cinetice, secțiunea plăcii S_2, este mai mică decît a plăcii S_1, așa cum prevede și teoria liniarizată.

S_∞ și δp_2 se pot calcula de la început avînd expresiile

$$S_\infty = S_0 \frac{v_0}{v_\infty}, \tag{9.2}$$

$$\delta p_2 = \frac{\rho}{2} (v_\infty^2 - v_0^2). \tag{9.3}$$

Pentru rezolvarea matematică a problemei vom face reprezentarea conformă a domeniului de scurgere (S_0, S_∞) pe interiorul cercului unitar din planul complex auxiliar $\xi = \xi + i\eta$ (fig. 6).

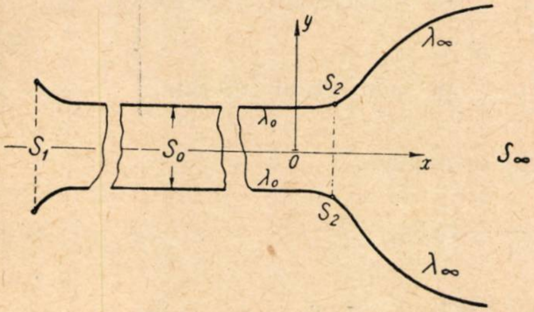


Fig. 5

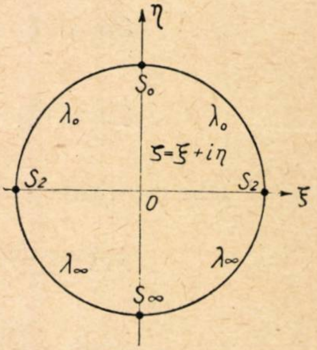


Fig. 6

Fie $f = \varphi + i\psi$, potențialul complex al mișcării și $w = df/dz$ viteza complexă în planul complex $z = x + iy$ asociat planului fizic.

Aceste funcții trebuie să satisfacă următoarele condiții

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} v_0 S_0, && \text{pe liniile } \lambda \text{ superioare} \\ \psi &= -\frac{1}{2} v_0 S_0, && \text{pe liniile } \lambda \text{ inferioare} \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

$$\left.\begin{aligned} |w| &= v_0, && \text{pe liniile } \lambda_0 \\ |w| &= v_\infty, && \text{pe liniile } \lambda_\infty \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Reprezentarea conformă, $z(\zeta)$, nu este cunoscută a priori, dar admițînd că ea există fie $f(\zeta)$ și $w(\zeta)$ funcțiile care fac corespondența între valorile potențialului complex f respectiv vitezei complexei w, în punctul $z = x + iy$ din planul fizic și punctul ζ asociat lui z prin transformarea conformă.

Vom considera deocamdată în loc de funcția $w(\zeta)$, funcția auxiliară

$$\omega(\zeta) = i \ln \frac{w(\zeta)}{v^*}, \tag{9.6}$$

unde,

$$v^* = \frac{v_0 + v_\infty}{2}. \tag{9.7}$$

Condițiile (9.4) și (9.5) devin în planul cercului, următoarele :

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \frac{1}{2} v_0 S_0, && \text{pe semicercul drept} \\ &\varphi = -\frac{1}{2} v_0 S_0, && \text{pe semicercul stîng} \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{I}m\, \omega(\zeta) = \ln \frac{v_0}{v^*}, && \text{pe semicercul superior} \\ &\mathcal{I}m\, \omega(\zeta) = \ln \frac{v_\infty}{v^*}, && \text{pe semicercul inferior} \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Din condițiile (9.8) și (9.9) se deduce,

$$f(\zeta) = \frac{v_0 S_0}{\pi} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} + v_0 S_0, \tag{9.10}$$

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{v_\infty}{v_0} \cdot \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + i \ln \frac{v_0}{v^*} - \frac{1}{2} i \ln \frac{v_\infty}{v_0}. \tag{9.11}$$

Ținînd seamă de (9.6), avem,

$$w = \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right)^{\frac{i}{\pi} \cdot \ln \frac{v_\infty}{v_0}} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_\infty}}^{\frac{3}{2}}, \tag{9.12}$$

expresie care se poate pune sub forma

$$w = \frac{v_0}{\sqrt{v_\infty}}^{\frac{3}{2}} \exp.\left\{-\frac{1}{\pi} \ln \frac{v_\infty}{v_0} \cdot \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right\} \cdot \exp.\left\{\frac{i}{\pi} \ln \frac{v_\infty}{v_0} \cdot \ln \left|\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right|\right\}. \tag{9.13}$$

Folosind acum relația

$$\frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = w(\zeta) \tag{9.14}$$

și ținînd seama de expresia (9.10) a lui $f(\zeta)$, a cărei derivată este

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{2 v_0 S_0}{\pi} \cdot \frac{i}{\zeta^2 + 1}, \tag{9.15}$$

se obține

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2\,S_0\,i}{\pi\,(\zeta^2+1)}\sqrt{\frac{v_\infty}{v_0}}\cdot\exp.\left\{\frac{1}{\pi}\ln\frac{v_\infty}{v_0}\cdot\arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right\}\cdot\exp.\left\{\frac{-i}{\pi}\ln\frac{v_\infty}{v_0}\cdot\ln\left|\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right|\right\},\tag{9.16}$$

Se regăsește în particular semilățimea plăcii permeabile, S_2, vom integra (9.16) de la $\zeta=0$ la $\zeta=1$

$$\frac{S_2}{2}=\frac{2S_0}{\pi}\int_{\xi=0}^{\xi=1}\frac{1}{1+\xi^2}\sqrt{\frac{v_0}{v_\infty}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{v_\infty}{v_0}\cdot\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)d\xi.\tag{9.17}$$

Ipotezele pe care le-am făcut ne-au condus să acceptăm o anumită comportare singulară a vitezei complexe în vecinătatea extremităților segmentului S_2.

În adevăr, din examinarea formulei (9.13) se observă că argumentul vitezei tinde către infinit cînd ne apropiem de extremități, o dată cu $\ln\left|\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right|$.

Este greu de afirmat mai dinainte dacă această comportare este acceptabilă din punct de vedere fizic, dar credem că rezultatele privitoare la valoarea vitezei complexe în alte puncte, mărimea lui S_2 și a potențialului complex pot să concorde destul de bine cu experiențele.

De fapt singularitățile amintite în vecinătatea extremităților segmentului S_2 ar putea fi evitată în felul următor: să presupunem, ceea ce pare mai real, că nu mai avem de a face cu o *suprafață* permeabilă S_2 și că forțele pe care le aplica S_2 în sensul opus mișcării fluidului și care făceau ca constanta lui Bernoulli să aibă un salt la traversarea lui S_2, sînt dispuse într-un *volum* mărginit de două suprafețe S_2', S_2'' (fig. 7).

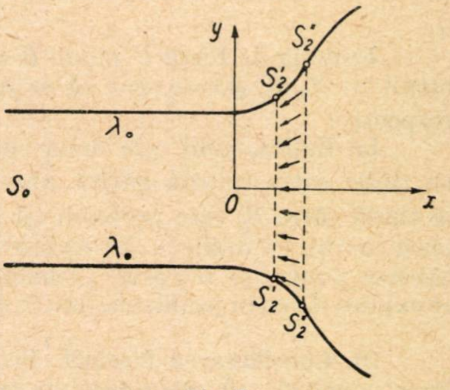


Fig. 7

Vom cere ca mișcarea să fie tot irotațională în întregul domeniu S_0, S, și vom arăta că problema este soluționabilă.

În adevăr, cu aceleași funcții definite anterior, ne putem da în planul cercului o variație continuă a modulului vitezei de la v_0 în punctele S_2' de pe cerc, în vecinătatea extremităților diametrului orizontal, la v_∞, valoare pe care o ia cu începere de la punctele S_2''. În felul acesta va rezulta o variație continuă și pentru argumentul vitezei w. Se găsește reprezentarea conformă, $z\,(\zeta)$ și se determină punctele S_2' și S în planul fizic. Suprafețele S_2' și S_2'' pot fi luate să coincidă cu suprafețele echipotențiale care pornesc din extremitățile respective și care se calculează ca elemente ale scurgerii de mai sus. Pentru ca mişcarea să fie peste tot irotaţională va trebui să aşezăm în volumul cuprins între S_2' şi S_2'', forţe derivînd dintr-un potenţial şi admiţînd S_2', S_2'' ca suprafeţe echipotenţiale.

Funcţia de forţă, U, se va determina cu ajutorul relaţiei lui Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = \rho U + C. \tag{9.18}$$

Constanta C este aceeaşi în tot domeniul de scurgere şi dacă convenim să luăm $U = 0$ pe suprafaţa echipotenţială S_2' vom avea

$$C = p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 \,. \tag{9.19}$$

Pe suprafaţa S_2'' şi în tot domeniul în aval de ea U va trebui să ia valoarea

$$U_2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_\infty^2 - \frac{C}{\rho} = \frac{1}{2} (v_\infty^2 - v_0^2). \tag{9.20}$$

Pe liniile λ cuprinse între S_2' şi S_2'', se deduce că avem

$$p_0 + \frac{\rho}{2} U^2 = \rho U + C,$$

de unde

$$U = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}. \tag{9.21}$$

Funcţia de forţă U poate fi cunoscută deci pe întregul contur al domeniului S_2', S_2'' şi este uşor să se determine o astfel de funcţie în domeniul respectiv.

La limită, cînd cele două suprafeţe S_2' şi S_2'' se confundă, soluţia va tinde către soluţia găsită anterior. Pe măsură însă ce facem pe S_2'' să tindă către S_2' este probabil (şi calculele ar putea arăta în mod precis acest lucru), ca liniile λ să prezinte forme din ce în ce mai curioase în vecinătatea punctelor S'_2 şi S''_2 tinzînd să se înfăşoare în spirală. Acest fapt ar explica de ce în problema limită direct pusă anterior $\theta \to \infty$ cînd $\zeta \to S_2$.

10. **Considerarea frecării.** Pe baza paragrafelor anterioare se poate trage concluzia că *coeficienţii de funcţionare ai sistemului de elice antagoniste pot fi îmbunătăţiţi oricît de mult dacă se neglijează frecarea.*

Pentru evaluarea influenţei frecării vom considera că L/D este suficient de mare pentru a calcula viteza indusă de către suprafaţa tubulară de vîrtejuri la fel ca la un tub de vîrtejuri de lungime infinită, că numărul de pale este infinit şi că pierderile datorită rotaţiei vînei sînt neglijabile. Această ultimă ipoteză este justificată şi pentru rotaţii destul de mari a vînei de curent dintre cele două elice, avînd în vedere că S_2 are şi rolul unui stator care tinde să anuleze rotaţia vînei, adică recuperează şi o parte din energia cinetică corespunzătoare rotației vînei produsă de elicea amonte.

Notînd cu N_{1i} şi cu N_{2i} puterea elicelor S_1 şi S_2 în absența frecărilor, acestea au expresiile

$$N_{1i} = \delta p_1 \psi_1 , \quad N_{2i} = \delta p_2 \psi_2 . \tag{10.1}$$

Pierderile prin frecare sînt în legătură cu coeficientul unitar δ de rezistență al profilelor palelor şi cu soliditatea necesară pentru producerea saltului de presiune. Noi vom pune deocamdată

$$\eta_1 = \frac{N_{1i}}{N_1} \tag{10.2}$$

şi vom admite că

$$N_1 = N_{1i} + N_{1f} . \tag{10.3}$$

În mod analog

$$\eta_2 = \frac{N_2}{N_{2i}} , \quad N_2 = N_{2i} - N_{2f} . \tag{10.4}$$

Debitul de energie a vînei în aval de S_1 va fi dat de teorema energiei

$$E_{10} - \frac{\rho}{2} \psi_1 V^2 = N_{1i} . \tag{10.5}$$

Vom nota prin E_{20} debitul de energie a vînei în fața discului S_2 şi vom defini un coeficient de pierdere a energiei vînei datorită frecării cu fluidul exterior, prin :

$$\eta_0 = \frac{E_{20}}{E_{10}} , \tag{10.6}$$

sau

$$E_{20} = \left(N_{1i} + \frac{\rho}{2} \psi_1 V^2 \right) \eta_0 . \tag{10.7}$$

Evaluarea coeficienților η_1, η_2 şi η_0 va fi făcută ulterior.

Elicea S_2 recuperează *o parte* din energia E_{20} aşa încît

$$(N_{2i}) \leqslant E_{20} , \tag{10.8}$$

inegalitate pe care noi o considerăm satisfăcută prin un δp_2 suficient de mic.

Cu acestea puterea totală introdusă în sistem va fi

$$N = N_1 + N_2 = \frac{N_{1i}}{\eta_1} + N_{2i} \eta_2 = \frac{\delta p_1 \psi_1}{\eta_1} + \delta p_2 \psi_1 \mu_0 \eta_2 .$$

În ceea ce priveşte calculul tracțiunii totale, avem

$$\begin{aligned} T_1 &= \delta p_1 S_1 - T_{1f} , \\ T_2 &= \delta p_2 S_2 - T_{2f} , \end{aligned} \tag{10.9}$$

unde prin T_{1f} şi T_{2f} am însemnat pierderile de tracțiune datorită frecării.

Vom pune

$$T_{1f} = \delta p_1 \cdot S_1 f_1, \qquad T_{2f} = -\,\delta p_2 S_2 f_2, \tag{10.10}$$

f_1 şi f_2 fiind nişte coeficienţi de frecare, după cum se vede, adimensionali. Tracţiunea totală va fi dată de $T_1 + T_2$.

Recapitulînd formulele principale, avem

$$T = \delta p_1 S_1 (1 - f_1) + \delta p_2 S_2 (1 + f_2), \tag{10.11}$$

$$N = \delta p_1 \psi_1 \frac{1}{\eta_1} + \delta p_2 \psi_1 \eta_2 \mu_0, \tag{10.12}$$

$$\delta p_1 = \frac{\rho}{2} \gamma_0 (\gamma_0 + 2V), \tag{10.13}$$

$$\delta p_2 = \frac{\rho}{2} \gamma_\infty (\gamma_\infty + 2V) - \frac{\rho}{2} \gamma_0 (\gamma_0 + 2V), \tag{10.14}$$

$$S_2 = S_1 \frac{\gamma_0 + 2V}{\gamma_0 + \gamma_\infty + 2V}, \tag{10.15}$$

$$\psi_1 = \frac{S_1}{2} (\gamma_0 + 2V). \tag{10.16}$$

Pe baza inegalităţii (10.8) se obţine şi condiţia

$$|\,\delta p_2\,| \leqslant \frac{\eta_0}{\mu_0} \left(\delta p_1 + \frac{\rho}{2} V^2 \right). \tag{10.17}$$

Cu ajutorul acestor formule vom calcula în paragrafele următoare expresiile coeficienţilor de funcţionare a sistemului de elice antagoniste cu considerarea frecării şi în ipotezele făcute.

11. **Randamentului de propulsie**. Făcînd calcule elementare se obţine

$$T = \frac{\rho}{2} S_1 (\gamma_0 + 2V) \left[\gamma_0 (1 - f_1) + (1 + f_2) \frac{\gamma_\infty (\gamma_\infty + 2V) - \gamma_0 (\gamma_0 + 2V)}{\gamma_0 + \gamma_\infty + 2V} \right], \tag{11.1}$$

$$N = \frac{\rho S_1}{4} (\gamma_0 + 2V) \left[\gamma_0 (\gamma_0 + 2V) \left(\frac{1}{\eta_1} - \mu_0 \eta_2 \right) + \gamma_\infty (\gamma_\infty + 2V)\, \mu_0 \eta_2 \right]. \tag{11.2}$$

Randamentul de propulsie va avea expresia

$$\eta = 2V \frac{\gamma_0 (1 - f_1) - \dfrac{1 + f_2}{\gamma_0 + \gamma_\infty + 2V} [\gamma_0 (\gamma_0 + 2V) - \gamma_\infty (\gamma_\infty + 2V)]}{\gamma_0 (\gamma_0 + 2V) \left(\dfrac{1}{\eta_1} - \mu_0 \eta_2 \right) + \gamma_\infty (\gamma_\infty + 2V)}, \tag{11.3}$$

sau cu parametrii adimensionali

$$\gamma^*_\infty = \gamma_\infty/\gamma_0\,; \qquad V^* = V/\gamma_0, \tag{11.4}$$

$$\eta = 2\,V^*\,\frac{1 - f_2 - \dfrac{1 + f_2}{1 + \gamma^*_\infty + 2\,V^*}\cdot\left[1 + 2\,V^* - \gamma^*_\infty\left(\gamma^*_\infty + 2\,V^*\right)\right]}{(1 + 2\,V^*)\left(\dfrac{1}{\eta_1} - \mu_0\eta_2\right) + \gamma^*_\infty\left(\gamma^*_\infty + 2\,V^*\right)}. \tag{11.5}$$

12. **Coeficientul de calitate.** Efectuînd calculele corespunzătoare definiției coeficientului de calitate, se obține

$$C = \frac{\left[(1 + f_2)\,\gamma^*_\infty - (f_1 + f_2)\right]^{\frac{3}{2}}}{\mu_0\,\eta_1\,\eta_2\,\gamma^{*2}_\infty + 1 - \mu_0\,\eta_1\,\eta_2}. \tag{12.1}$$

Vom face notația

$$m = \mu_0\,\eta_1\,\eta_2$$

și dacă considerăm că $f_1 = f_2 = f$, formula (12.1) se va scrie

$$C = \frac{(1 + f)^{\frac{3}{2}}}{m}\cdot\eta_1\cdot\frac{\left(\gamma^*_\infty - \dfrac{2f}{1 + f}\right)^{\frac{3}{2}}}{\gamma^{*2}_\infty + \dfrac{1}{m} - 1}. \tag{12.2}$$

În tabela 1 se arată rezultatele cîtorva calcule numerice. S-a presupus $f = 0{,}01$ și s-au calculat valorile raportului între valoarea coeficientului de calitate pentru un regim de funcționare γ^*_∞ și coeficientul de calitate pentru elicea izolată sau ceea ce este același lucru, pentru $\gamma^*_\infty = 1$.

Tabela 1

$$\frac{C\left(\gamma^*_\infty, m\right)}{C\,(\;\;1, m)}$$

γ^*_∞ \ m	0,8	0,85	0,9	0,95	1
1	1	1	1	1	1
0,9	1,005	1,015	1,02	1,04	1,052
0,8	0,998	1,024	1,05	1,08	1,118
0,7	0,989	1,024	1,07	1,12	1,195
0,6	0,935	0,97	1,122	1,135	1,29
0,5	0,859	0,95	1,055	1,195	1,41
0,4	0,736	0,846	0,99	1,20	1,58
0,3	0,563	0,676	0,845	1,146	1,823
0,2	0,340	0,430	0,581	0,92	2,24
0,1	0,113	0,148	0,215	0,41	3,16

Se observă că coeficientul de calitate este mult influențat de frecare, reprezentată de coeficientul *m*. Este interesant însă să remarcăm că între

$\gamma_\infty^\star = 1$ și $\gamma_\infty^\star = 0{,}3$ și pentru $m = 0{,}9$, valoare ce pare realizabilă experimental, coeficientul de calitate variază între limite destul de reduse. Poate să fie preferabilă o funcționare a sistemului la un $\gamma_\infty^\star$ mai mic, dacă din anumite motive, dorim ca viteza fluidului între cele două elice să fie mai mare. Este evident că în acest caz și elicele vor lucra în cîmpul unei viteze axiale mărite ceea ce poate să constituie un avantaj. De exemplu dacă sistemul de elice tandem antagoniste este destinat să funcționeze și în zbor de înaintare ca elice propulsive, caracteristicile sistemului vor fi mai puțin influențate de lipsa unui dispozitiv de schimbare a pasului elicelor în funcție de regimul de sbor.

13. **Coeficientul de suflerie.** Aplicînd definiția coeficientului de suflerie, $C_s = E_0/N$, se obține

$$C_s = \frac{1}{\dfrac{1}{\eta_1} - \mu_0\,\eta_2 + \gamma_\infty^\star\,\dfrac{\gamma_\infty^\star + 2\,V^\star}{1 + 2\,V^\star}\cdot\mu_0\,\eta_2}\cdot\frac{1 + \eta_0}{2}. \tag{13.1}$$

Făcînd $V^\star = 0$, se obține pentru punct fix

$$C_{s0} = \frac{1 + \eta_0}{2m}\cdot\frac{\eta_1}{\gamma_\infty^\star + \dfrac{1}{m} - 1}. \tag{13.2}$$

Se observă, după expresia obținută, că sporul de C_{s0} datorită unui regim $\gamma_\infty^\star < 1$, rămîne substanțial și în cazul considerării frecării. Nu indicăm rezultate numerice, deoarece coeficientul de suflerie este de același ordin de mărime cu coeficientul de impuls care va fi definit în paragraful următor.

14. **Coeficient de impuls,** C_i. Pentru anumite scopuri de utilizare a elicelor tandem antagoniste, interesează mărimea impulsului total între cele două elice, J_0. Avînd în vedere că impulsul se conservă în stratul limită și considerînd de data aceasta S_0 suficient de mare încît să cuprindă și stratul de aer adiacent căruia i-a fost comunicat impulsul, teorema impulsului aplicată la vîna care se sprijină pe S_1 între infinit amonte și S_0, dă

$$J_0 - \rho\psi V = \delta p_1\, S_1\,(1 - f_1). \tag{14.1}$$

Vom defini coeficientul de impuls, în mod analog coeficientului de calitate, cu deosebirea că în loc de tracțiunea totală, vom introduce în formulă mărimea J_0 care evident are aceleași dimensiuni. Efectuînd calculele, se obține

$$C_i = \eta_1\,\frac{(1 - f_1)^{\frac{3}{2}}(1 + 2V^\star)^{-\frac{1}{2}} + V^\star}{\dfrac{\gamma_\infty^\star\left(\gamma_\infty^\star + 2V^\star\right)}{1 + 2\,V^\star}\cdot m + 1 - m}. \tag{14.2}$$

La punct fix, expresia devine

$$C_{10} = \frac{(1-f)^{\frac{3}{2}}\cdot\eta_1}{\left(\gamma_\infty^{*2} + \frac{1}{m} - 1\right)\cdot m}. \qquad (14.3)$$

În tabela 2 sînt trecute valori ale raportului $\frac{C_i\left(\gamma_\infty^*,\, m\right)}{C_i\,(1,\, m)}$ pentru diferite valori date parametrilor.

Tabela 2

$$\frac{C_i\left(\gamma_\infty^*,\, m\right)}{C_i\,(1,\, m)}$$

γ^* \ m	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0,9	1,13	1,15	1,18	1,194	1,205	1,22	1,24
0,8	1,275	1,335	1,4	1,44	1,48	1,523	1,56
0,7	1,44	1,555	1,687	1,77	1,85	1,95	2,05
0,6	1,625	1,81	2,05	2,2	2,36	2,56	2,78
0,5	1,82	2,1	2,5	2,76	3,08	3,5	4
0,4	2,02	2,42	3,05	3,51	4,11	5	6,26
0,3	2,2	2,75	3,68	4,45	5,55	7,5	11,1
0,2	2,36	3,04	4,31	5,47	7,4	11,6	25
0,1	2,47	3,25	4,81	6,35	9,25	17,5	100

Din examinarea tabelei 2, se constată că acest coeficient de impuls, ca şi coeficientul de suflerie, poate să fie sporit considerabil prin scăderea lui γ_∞^*.

15. **Coeficient de putere eoliană,** C_e. Puterea culeasă de sistemul elicelor antagoniste în regim de moară de vînt, este dată de expresia

$$|N| = -\rho\frac{S_1}{4}(\gamma_0 + 2V)\left[\gamma_0(\gamma_0 + 2V)\left(\frac{1}{\eta_1} - \mu_0\eta_2\right) + \gamma_\infty(\gamma_\infty + 2\,V)\,\mu_0\,\eta_2\right]\cdot \qquad (15.1)$$

Pentru ca puterea culeasă să fie pozitivă este necesar ca γ_∞ să ia valori negative (vîrtejuri de sens contrar vîrtejurilor γ_0). Evident această condiţie nu este suficientă ; pentru ca puterea culeasă să fie pozitivă, va trebui ca

$$-\gamma_\infty(\gamma_\infty + 2V) \geqslant \gamma_0(\gamma_0 + 2V)\left(\frac{1}{\mu_0\,\eta_1\,\eta_2} - 1\right). \qquad (15.2)$$

Pe de altă parte trebuie să fie respectată şi condiţia (10.17) adică,

$$\gamma_\infty(\gamma_\infty + 2V) \geqslant \gamma_0(\gamma_0 + 2V)\left(1 - \frac{\eta_0}{\mu_0}\right) - \frac{\eta_0}{\mu_0}V^2. \qquad (15.3)$$

Ținînd seama de definiția coeficientului de putere eoliană, obținem

$$C_e = \left(1 + \frac{\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_\infty}{2}\right) [-\bar{\gamma}_\infty (\bar{\gamma}_\infty + 2)\, \mu_0 \eta_1 \eta_2 - \bar{\gamma}_0 (\bar{\gamma}_0 + 2)$$

$$(1 - \mu_0 \eta_1 \eta_2)] \frac{1}{\eta_1}, \tag{15.4}$$

cu condiția ca

$$-\bar{\gamma}_\infty (\bar{\gamma}_\infty + 2) \leqslant \bar{\gamma}_0 (\bar{\gamma}_0 + 2) \left(\frac{\eta_0}{\mu_0} - 1\right) + \frac{\eta_0}{\mu_0}. \tag{15.5}$$

În aceste formule μ_0 și η_0 depind de $\bar{\gamma}_0$. Dacă $\bar{\gamma}_0 = 0$ (nu există elice acceleratoare), evident că $\mu_0 = \eta_0 = 0$, adică nu există pierdere de energie prin frecare cu fluidul exterior vînei.

Un studiu numeric al variației coeficientului C_e se poate face după următorul program : se dă o valoare lui $\bar{\gamma}_0$ și se calculează valoarea lui $\bar{\gamma}_\infty$ care face C_e maxim. Se calculează apoi valoarea corespunzătoare pentru C_e. Se repetă calculele pentru alte valori ale lui $\bar{\gamma}_0$ și se trasează curba, $C_e(\bar{\gamma}_0)$.

Să remarcăm că punctul de funcționare care se alege în proiectare nu trebuie neapărat să corespundă valorii maxime a coeficientului C_e. Din motive legate de condițiile de utilizare a energiei culese ar putea rezulta că este mai util un punct de funcționare corespunzător unui $\bar{\gamma}_0$ mai mare, chiar dacă valoarea maximă a coeficientului de putere corespunde unei valori mai mici pentru $\bar{\gamma}_0$. În acest fel va trebui de exemplu să procedăm cînd ne interesează culegerea energiei, cu o viteză unghiulară mare a elicelor.

16. **Elice antagoniste în autorotație.** Vom spune că sistemul de elice antagoniste se află în regim de autorotație, dacă în prezența unei viteze la infinit, V, puterea totală introdusă este nulă. Este interesant de calculat în acest caz valoarea optimă $\bar{\gamma}_0$ sau $\bar{\gamma}_\infty$ pentru realizarea unei rezistențe la înaintare maxime (este vorba de înaintarea față de fluidul de la infinit).

Va fi de asemenea interesant de determinat valoarea acestor parametrii, care implică o valoare maximă pentru raportul :

$$\chi = \frac{J_0}{\rho S_1 V^2}. \tag{16.1}$$

Numărul χ, îl vom numi coeficient de amplificare a impulsului de la infinit, în autorotație, sau mai scurt, coeficient de autorotație.

Din (15.2) și (15.3), se deduce că în regimul de autorotație

$$-\bar{\gamma}_\infty (\bar{\gamma}_\infty + 2) = \bar{\gamma}_0 (\bar{\gamma}_0 + 2) \left(\frac{1}{\eta_1 \mu_0 \eta_2} - 1\right), \tag{16.2}$$

$$-\bar{\gamma}_\infty (\bar{\gamma}_\infty + 2) \leqslant \bar{\gamma}_0 (\bar{\gamma}_0 + 2) \left(\frac{\eta_0}{\mu_0} - 1\right) + \frac{\eta_0}{\mu_0}, \tag{16.3}$$

de unde,

$$\bar{\gamma}_0 (\bar{\gamma}_0 + 2) \left(\frac{1}{\eta_1 \eta_0 \eta_2} - 1\right) \leqslant 1. \tag{16.4}$$

Pe de altă parte, J_0 are expresia dată de (14.1) și deci χ este,

$$\chi = \frac{\frac{\rho}{2}\gamma_0\left(\frac{\gamma_0}{2} + V\right) \cdot S_1(1 - f_1) + \rho\psi V}{\rho S_1 V^2}$$

și mai departe

$$\chi = \left(\frac{\bar{\gamma}_0}{2} + 1\right) \cdot (1 + \gamma_0(1 - f_1)). \tag{16.5}$$

Cea mai mare valoare a coeficientului χ are loc cînd (16.4) devine egalitate. Atunci,

$$\bar{\gamma}_0(\bar{\gamma}_0 + 2) = \frac{\eta_1\eta_0\eta_2}{1 - \eta_1\eta_0\eta_2}, \tag{16.6}$$

$$-\bar{\gamma}_\infty(\bar{\gamma}_\infty + 2) = \frac{\eta_0 - \eta_1\mu_0\eta_0\eta_2}{\mu_0 - \eta_1\mu_0\eta_0\eta_2}. \tag{16.6'}$$

Cu ajutorul relației (11.1) se poate calcula tracțiunea corespunzătoare și coeficientul de tracțiune,

$$C_T = \frac{T}{\frac{\rho}{2}S_1V^2},$$

$$C_T = (\bar{\gamma}_0 + 2)\left[\bar{\gamma}_0(1 - f_1) + \frac{\bar{\gamma}_\infty(\bar{\gamma}_\infty + 2) - \bar{\gamma}_0(\bar{\gamma}_0 + 2)}{\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_\infty + 2} \cdot (1 + f_2)\right]. \tag{16.7}$$

Ținînd seama mai departe de relația (16.2), avem

$$\bar{\gamma}_\infty(\bar{\gamma}_\infty + 2) - \bar{\gamma}_0(\bar{\gamma}_0 + 2) = -\bar{\gamma}_0(\bar{\gamma}_0 + 2) \cdot \frac{1}{\eta_1\mu_0\eta_2},$$

și deci

$$C_T = \bar{\gamma}_0(\bar{\gamma}_0 + 2)\left[1 - f_1 - \frac{(\bar{\gamma}_0 + 2)(1 + f_2)}{\eta_1\mu_0\eta_2(\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_\infty + 2)}\right], \tag{16.8}$$

$\bar{\gamma}_\infty$ se va considera aici ca funcție de $\bar{\gamma}_0$ conform relației (16.2).

17. **Evaluarea coeficienților** f_1, f_2, η_1, η_2. Avem prin definiție

$$T_{1f} = \delta p_1 S_1 f_1. \tag{17.1}$$

Pe baza teoriei elicelor, avem

$$T_{1f} = \frac{\rho}{2}\int_0^R cv_{ef}^2 \cdot \delta \sin\varphi \, dr, \tag{17.2}$$

unde prin δ s-a însemnat coeficientul de rezistență la înaintare a profilului iar prin φ unghiul făcut de viteza efectivă cu planul elicei.

Pe de altă parte avem

$$\delta p_1 = \frac{\rho}{2} c v_{ef}^2 \cdot c_z \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{2\pi r}. \tag{17.3}$$

În această formulă, c, reprezintă suma corzilor palelor la raza r. Combinînd (17.2) cu (17.1), se obține

$$T_{1f} = \delta p_1 \cdot 2\pi \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \cdot \int_0^R \operatorname{tg}\varphi\, r \cdot dr, \tag{17.4}$$

sau cu $x = r/R$,

$$T_{1f} = \delta p_1 \cdot 2\pi \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \cdot R^2 \int_0^1 \operatorname{tg}\varphi \cdot x\, dx, \tag{17.5}$$

Se deduce pentru f_1 expresia

$$f_1 = 2 \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \int_0^1 \operatorname{tg}\varphi\, x\, dx. \tag{17.6}$$

Deoarece $\operatorname{tg}\varphi$ este de forma

$$\operatorname{tg}\varphi \eqsim \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot \frac{1}{x}$$

unde prin φ_0 am notat valoarea lui φ la extremitatea palei,

$$f = 2 \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \cdot \operatorname{tg}\varphi_0. \tag{17.7}$$

Pentru a avea o idee asupra ordinului de mărime a coeficientului f vom lua $\delta = 0{,}01$, $C_z = 0{,}5$ și $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0{,}25$ și obținem o valoare a lui f_1 de $0{,}01$. Este clar că în general se va putea considera $f_1 \eqsim f_2 = f$.

În ceea ce privește coeficientul η_1 avem,

$$N_f = \frac{\rho}{2} \int_0^R c v_{ef}^2\, \delta \cos\varphi\, \Omega\, r\, dr \tag{17.8}$$

și ținînd seama de (17.3),

$$N_f = \delta p_1 \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \cdot \Omega R \frac{2\pi R^2}{3} \tag{17.9}$$

și cum,

$$N_{1i} = S_1\, \delta p_1\, v_1,$$

$$N_{f1} \eqsim \frac{2}{3} N_{1i} \frac{\Omega R}{V_1} \cdot \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \tag{17.10}$$

sau,

$$N_{f1} \eqsim \frac{2}{3} N_{1i} \cdot \left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \cdot \cot\varphi_0. \tag{17.11}$$

Prin definiție am pus,

$$\eta_1 = \frac{N_1}{N_{1i} + N_{f1}}$$

și deci,

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{C_z}\right)_{\text{mediu}} \cdot \cot\varphi_0}. \tag{17.12}$$

18. **Evaluarea frecărilor cu fluidul exterior** (coeficienții μ_0, η_0). Pe baza teoriilor clasice [6] se pot calcula, aproximativ, mărimile care intervin în fenomenul de amestec dintre un curent paralel, avînd viteza v_0 și un fluid în repaus la mare distanță de suprafața de separație. Noi vom aplica acele rezultate, considerînd suprafața de amestec Σ ca o suprafață plană în această evaluare. În figura 8 este arătată variația raportului u/v_0 dintre

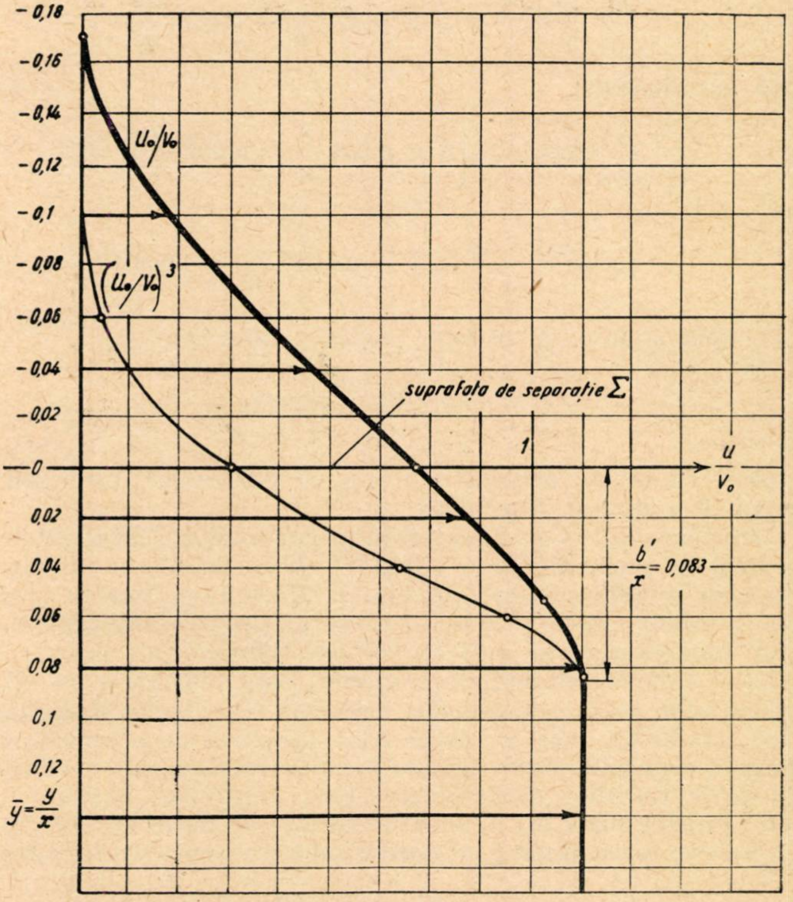


Fig. 8

viteza în un punct la distanța y de suprafața de separație și viteza neperturbată, v_0, din vînă.

R, fiind raza vînei de curent, vom nota :

$$\psi_{pot} = \pi R^2 V_0.$$

Pierderea de debit, $\Delta\psi$ raportată la debitul care ar trece prin aceeași secțiune dacă curentul ar fi neperturbat, așa cum rezultă din diagrama din figura 8, are valoarea 0,1325. Pe de altă parte raportul dintre grosimea de amestec b' a părții în care $r < R$ și secțiunea totală a vînei este,

$$\frac{R^2 - (R-b')^2}{R^2} = 2 \times 0{,}083 \frac{L}{R} - 0{,}083^2 \frac{L^2}{R^2}\cdot$$

Rezultă mai departe,

$$\frac{\psi\Delta}{\psi_{rot}} \approx 0{,}1375 \left[2 \times 0{,}083 \frac{L}{R} - 0{,}083^2 \frac{L^2}{R^2}\right]$$

și deci,

$$\mu_0 = \frac{\psi_{rot} - \Delta\psi}{\psi_{rot}} \cong 1 - 0{,}0228 \frac{L}{R} + 0{,}00095 \frac{L^2}{R^2}\cdot \qquad (18.1)$$

În mod analog, se găsește pentru coeficientul η_0,

$$\eta_0 = 1 - 0{,}0571 \frac{L}{R} + 0{,}00236 \frac{L^2}{R^2}\cdot \qquad (18.2)$$

Se înțelege că aceste evaluări sînt numai estimative, influența frecării depinzînd de numărul Reynolds.

Coeficienții μ_0, η_0 se micșorează în cazul cînd fluidul exterior vînei este animat de asemenea de o viteză $U_1 \neq 0$. Nu facem calcule de evaluare pentru această situație. calculul conducîndu-se într-un mod analog pe baza teoriilor existente privitoare la propagarea turbulenței.

Să remarcăm că în ceea ce privește pierderea de energie datorită comunicării impulsului fluidului exterior, este avantajos ca vitezele în vînă să nu aibă chiar o distribuție uniformă. În adevăr, dacă distribuția vitezelor este astfel încît în vecinătatea suprafeței de separație, $v\,(r) \to 0$ într-un mod continuu, pierderile de frecare se reduc simțitor o dată cu gradientul dv/dr. Cu alte cuvinte, nu este logic să imprimăm viteze mari cu ajutorul elicei S_1, în această vecinătate deoarece energia straturilor respective tot se distruge datorită frecării violente cu fluidul exterior.

19. **Concluzii generale.** Din calculele făcute în această lucrare, se constată că coeficientul de calitate se poate îmbunătăți în mod simțitor putînd lua valori supraunitare pentru anumite valori date parametrilor. Frecarea are o influență mare asupra fenomenului provocînd plafonarea coeficientului de calitate și apoi descreșterea lui pe măsură ce elicele devin din ce în ce mai antagoniste ($|\delta p_2| \to \delta p_1$).

O creştere foarte interesantă s-a obţinut pentru coeficientul de suflerie şi pentru coeficientul de impuls. După evaluările făcute, se constată că este posibil să se obţină cu uşurinţă coeficienţi de suflerie, $C_S \sim 4$ şi chiar valori mai mari pentru pale îngrijit construite. Elicele antagoniste ar putea fi aplicate cu succes în vederea suprimării totale sau parţiale a difuzoarelor sufleriilor. În figura 9 se arată un model de suflerie aerodinamică la care difuzorul este suprimat şi înlocuit cu elicea recuperatoare S_2. În această figură, se arată şi o combinaţie între sistemul de elice antagoniste şi tubul sufleriei.

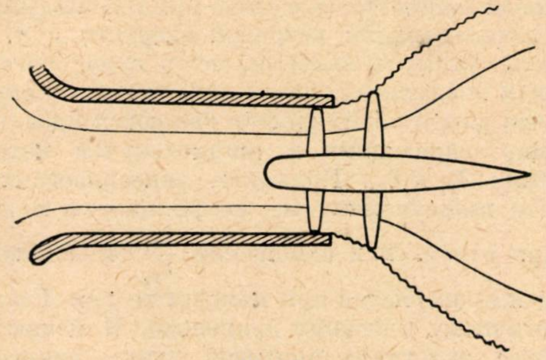


Fig. 9

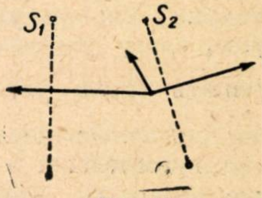


Fig. 10

Menţionăm o altă aplicaţie a sistemului de elice antagoniste la deflectarea unei vîne de curent produsă de elicea amonte, sau ceea ce este acelaşi lucru, la crearea unor forţe transversale curentului. În adevăr — datorită faptului că între cele două elice viteza curentului este mare (mai mare decît viteza care s-ar obţine în spatele unei singure elice de acelaşi diametru şi putere), forţe transversale importante pot fi aplicate vînei de fluid, cu ajutorul unor aripi obişnuite plasate între S_1 şi S_2.

O altă posibilitate de deflecţie ar putea consta şi din dispunerea neparalelă a celor două discuri ale elicelor S_1 şi S_2, astfel ca S_2 să lucreze în o oarecare măsură ca o elice de autogir situată în curentul produs de prima elice şi de curentul de la infinit (fig. 10).

După cum s-a arătat şi la paragrafele respective, îmbunătăţirea celorlalţi coeficienţi este de mai puţină importanţă.

Primită la redacţie la 4 octombrie 1958.

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ВИНТЫ ТЭНДЕМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Под антагонистическими винтами тэндем автор подразумевает систему, состоящую из двух винтов тэндем, в которой передний винт является тяговым, а задний винт работает в режиме ветровой мельницы. Винты связаны между собой кинематически посредством какого-либо механизма, или жестко на общем валу.

Показано, что при помощи антагонистических винтов получается кольцевое пространство свободных вихрей между винтами, наличие которого благоприятно влияет на улучшение некоторых коэффициентов работы системы, как например, коэффициента качества системы при висении, коэффициента полезного действия продвижения, коэффициента продувания, коэффициента ветровой мощности (в случае применения антагонистических винтов для использования ветровой энергии) и т. п.

Для того чтобы показать сущность явления, автор пренебрегает, в первом приближении, трением воздуха о лопасти винтов или об окружающую жидкость, считая, что диски обоих винтов являются идеально проницаемыми поверхностями, создающими в жидкотекучем потоке постоянные скачки уплотнения δ_{p_1} и δ_{p_2}. Применяя линеаризованную теорию, автор указывает, что вышеупомянутые коэффициенты можно улучшить сколь угодно при стремлении отношения $\frac{\delta_{p_1}}{\delta_{p_2}}$ к единице. Затем линеаризованная теория проверяется при помощи теории Гельмгольца, примененной к аналогичному плоскому движению. Намечаются также выкладки, необходимые для учета конечной длины вихревой поверхности.

В следующих параграфах рассматривается влияние трения на представленное автором явление и устанавливаются формулы для вычисления соответствующих коэффициентов. Оказывается, что и при учете трения получается существенное улучшение для коэффициента продувания и коэффициента импульса. Следовательно, выгодно пользоваться системой антагонистических винтов для создания области больших скоростей между винтами. Вниз по потоку от этой области (аналогично экспериментальной камере аэродинамической трубы) кинетическая энергия струи передается заднему винту, а струя расширяется.

Представляет также интерес использование системы антагонистических винтов для отклонения струи на некоторый угол, благодаря тому что к жидкости можно приложить значительные поперечные силы в области больших скоростей (например, при помощи крыла, расположенного в зоне больших скоростей).

Наконец, автор предусматривает возможность некоторых комбинаций между системой антагонистических винтов и методом турбинного винта, в целях улучшения коэффициента качества или других коэффициентов.

HÉLICES EN TANDEM ANTAGONISTES

RÉSUMÉ

L'auteur entend par hélices en tandem antagonistes un système de deux hélices en tandem dans lequel l'hélice antérieure est tractive et l'hélice postérieure travaille en régime de moulin à vent. Les hélices sont liées cinématiquement soit par un mécanisme quelconque, soit rigidement, ayant ainsi un axe commun.

L'auteur montre que les hélices antagonistes permettent de réaliser une surface annulaire de tourbillons libres entre les deux hélices. La présence de cette surface est favorable à l'amélioration de certains coefficients de fonctionnement, tels que : le coefficient de qualité du système fonctionnant à point fixe, le rendement de propulsion, le coefficient de soufflerie, le coefficient de puissance éolienne (lorsque ces hélices antagonistes sont employées pour recueillir une énergie éolienne), etc.

Pour mettre en évidence la tendance du phénomène, l'auteur néglige, en une première étude, le frottement de l'air avec les pales ou avec le fluide ambiant et considère les deux hélices comme des surfaces perméables idéales, appliquant au fluide qui les traverse des sauts constants de pression δp_1 et δp_2. On démontre, en appliquant la théorie ramenée à la forme linéaire, que dans ces conditions les coefficients ci-dessus peuvent être améliorés sans limite, lorsqu'on fait tendre vers l'unité le rapport $\delta p_1/\delta p_2$. On vérifie ensuite la théorie linéaire, par une théorie du type de Helmholtz, appliquée au mouvement plan analogue. On indique en outre les calculs qu'il faudrait faire pour tenir compte de la longueur finie de la surface des tourbillons.

Dans les paragraphes suivants, l'auteur étudie l'influence du frottement sur le phénomène présenté et établit des formules pour les coefficients correspondants. On constate que, même si l'on tient compte du frottement, une amélioration importante est obtenue pour le coefficient de soufflerie et pour le coefficient d'impulsion. Il est donc avantageux de se servir d'hélices antagonistes pour la création d'un domaine de grandes vitesses entre les deux hélices. En aval de ce domaine (analogue à la chambre d'expériences d'une soufflerie), l'énergie cinétique de la veine est rendue à l'hélice postérieure et la veine s'élargit.

Il serait également intéressant d'utiliser le système d'hélices antagonistes pour faire dévier la veine d'un angle quelconque, par suite de la possibilité d'appliquer au fluide des forces transversales importantes dans la zone des grandes vitesses (par exemple au moyen d'une aile située dans la zone des grandes vitesses).

L'auteur envisage, pour conclure, certaines combinaisons entre le système des hélices antagonistes et la méthode du tubage de l'hélice afin d'élever le coefficient de qualité ou les autres coefficients.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, *Aerodinamica suprafeţelor permeabile*. Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1957.
2. — *Mişcarea în jurul unui toropter cu fuzelaj cilindric*. Comunicările Acad. R. P. R., **V,** *11*, 1635 (1955).
3. — *Mişcarea axial simetrică în jurul aripilor toroidale subţiri*. Bul. ştiinţ. Secţia mat. şi fiz. **VIII,** *1*, 115 (1956).
4. — *Indicaţii asupra măririi coeficientului de calitate al elicelor propulsive*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**. *3*, 711 (1957).
5. — *Teoria mişcărilor cu dîre aproape rectilinii*. Bul. Ştiinţ. Secţia mat. şi fizică, **VII,** *1*, 139 (1955).
6. W. F. DURAND, *Aerodynamic theory*. **III,** Julius Springer, Berlin, 1935, 170.

AEROMECANICĂ

DESPRE STABILITATEA LONGITUDINALĂ A AVIONULUI ÎN CAZUL PERTURBAȚIILOR REPETATE

DE

TIBERIU HACKER

NOTAȚII

V — viteza centrului de greutate al avionului (m/s),
α — unghiul de incidență (radiani),
ϑ — unghiul de tangaj (radiani),
q — viteza unghiulară de tangaj (rad/s),
$\hat{q} = \frac{2m}{\rho S V} q$ — viteza unghiulară de tangaj sub formă adimensională,
x — deviația vitezei V, sub formă adimensională $\left(x = \frac{\Delta V}{V}\right)$,
y — deviația unghiului de incidență α,
z — deviația unghiului de tangaj ϑ,
u — deviația coeficientului adimensional al vitezei unghiulare de tangaj,
t — variabila independentă în ecuațiile mişcării perturbate, reprezentînd o mărime adimensională proporțională cu timpul de forma $t = \frac{\rho S V}{2m} t_{\text{dim}}$ (t_{dim} — timpul în secunde),
ρ — densitatea aerului $\left(\frac{\text{kg. s}^2}{\text{m}^4}\right)$,
m — masa avionului $\left(\frac{\text{kg.s}^2}{\text{m}}\right)$,
S — aria suprafeței portante (m^2),
$\hat{m} = \frac{2m}{\rho S k_B}$ — coeficientul de densitate relativă a avionului (adimensional),
k_B — raza de inerție în raport cu axa transversală (m),

$i_B = \left(\frac{k_B}{c}\right)^2$ — coeficientul adimensional al momentului de inerție în jurul axei transversale,

c — coarda medie aerodinamică (m),

c_x — coeficientul de rezistență la înaintare (adimensional),

c_z — coeficientul de portanță (adimensional),

c_m — coeficientul de moment longitudinal (adimensional),

v_h — componenta orizontală a vitezei curentului atmosferic (m/s),

v_v — componenta verticală a vitezei curentului atmosferic (m/s),

$\hat{v}_h$ — forma adimensională a componentei v_h, $\hat{v}_h = \frac{V_h}{V}$.

$\hat{v}_v$ — forma adimensională a componentei v_v, $\hat{v}_v = \frac{V_v}{V}$.

Teoria clasică a stabilității avionului consideră numai cazul perturbațiilor izolate, cercetînd mișcarea perturbată din momentul în care forța perturbatoare a încetat să se exercite. Necesitățile practicii de zbor impun însă azi studierea și a cazului perturbațiilor repetate, acționînd în timpul mișcării perturbate. Teoria, în acest din urmă caz, este încă departe de a fi pusă la punct în mod satisfăcător. În cele ce urmează, se propune un procedeu de cercetare în această problemă pentru mișcarea longitudinală a avionului. Un procedeu pentru acest caz a fost indicat într-o lucrare anterioară [1]. Pe baza lui se pot găsi limite admisibile pentru forțele perturbatoare cu acțiune continuă în funcție de mărimile admisibile ale deviațiilor parametrilor mișcării longitudinale a avionului, mărimea perturbațiilor în momentul inițial, intervalul de timp în care se cere un anumit grad de amortizare și, evident, de datele constructive ale aparatului și parametrii mișcării de bază, prin intermediul coeficienților ecuațiilor mișcării perturbate. Evaluarea obținută în felul acesta era însă strict globală, gradul de amortizare cerut referindu-se la suma modulelor deviațiilor. Procedeul care urmează să fie prezentat permite o mai bună punere în evidență a variației inegale în timp a deviațiilor diferiților parametri cinematici și dă o posibilitate mai comodă de a impune condiții diferențiate comportării acestora.

Pentru expunerea procedeului este necesară formularea matematică a problemei.

Problema stabilității în cazul considerării doar a unor perturbații izolate, acționînd în momentul luat drept inițial, se formulează astfel : deviațiile parametrilor cinematici față de valorile corespunzătoare mișcării de bază pot fi făcute în momentele ulterioare perturbației oricît de mici, dacă în momentul inițial valoarea perturbației a fost suficient de mică. O formulare echivalentă dar mai adecvată necesităților practice ar fi următoarea : cît de mici trebuie să fie perturbațiile în momentul inițial, pentru ca în nici un moment ulterior ele să nu depășească o valoare dată dinainte (de exemplu, pentru unghiul de incidență această valoare poate fi puțin inferioară celei critice). Atît într-o formulare, cît și în cealaltă avem de-a face practic cu o condiție de mărginire a valorilor inițiale.

Pentru cazul perturbațiilor repetate, necunoscîndu-se în general nici intensitatea în fiecare moment, nici frecvența acestora, este normal a se introduce o condiție suplimentară de mărginire a acestor perturbații. Problema ce trebuie rezolvată se enunță acum astfel : cît de mici trebuie să fie perturbațiile inițiale și forțele perturbatoare cu acțiune continuă pentru ca în nici un moment ulterior deviațiile să nu depășească valori date dinainte, din considerente de altă natură.

În urma caracterului întîmplător al perturbațiilor cu acțiune continuă, se va studia, evident, situația cea mai defavorabilă, corespunzătoare presupunerii că perturbația cu acțiunea continuă are în fiecare moment același semn cu valoarea instantanee a deviației provenite din efectul perturbației condițiilor inițiale. Pentru evaluări, înlocuind, ca în lucrarea [1], valorile absolute ale forțelor perturbatoare cu acțiune continuă prin niște constante — margini superioare ale acestora — se realizează un caz ipotetic acoperitor pentru orice situație practic posibilă.

Pentru început se consideră întreaga mișcare perturbată longitudinală a avionului, conținînd ambele etape tipice, și cea în care predomină variația rapidă a perturbațiilor unghiului de incidență și a vitezei unghiulare de tangaj și cea în care apare ca fenomen principal variația lentă a perturbațiilor vitezei de zbor și a unghiului de tangaj.

Ulterior se vor da formule aproximative pentru faza rapidă. Rezultatele studiului mai complet vor servi drept etalon, recurgîndu-se la ele ori de cîte ori cele obținute pe baza formulelor aproximative deduse pentru faza rapidă (sau lentă) vor da loc la dubiu (cazurile de dubiu corespund unor valori mici ale coeficientului de stabilitate statică, pentru care decalajul în timp și deci diferențierea netă a celor două moduri ale mișcării perturbate nu sînt asigurate).

Ecuațiile mișcării perturbate vor descrie următoarea împrejurare : peste mișcarea perturbată indusă de o forță perturbatoare instantanee se suprapune efectul exercitării în permanență a unor forțe perturbatoare repetate. Cu alte cuvinte, la deviațiile forțelor, datorite acțiunii într-un moment dat t_0 a unei cauze perturbatoare oarecare, reprezentate în primă aproximație prin părțile drepte ale ecuațiilor liniarizate ale mișcării perturbate

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + u,\\ \frac{dz}{dt} &= u,\\ \frac{du}{dt} &= a_{41}x + a_{42}y + a_{44}u,\end{aligned} \tag{1}$$

se adaugă niște forțe perturbatoare cu acțiune continuă, funcții în general necunoscute de timp și de deviațiile parametrilor cinematici respectivi.

Notînd adaosurile acestea respectiv prin R_x, R_y, R_u, ecuațiile se scriu

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + R_x(t, x, y, z, u),\\
\frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + u + R_y(t, x, y, z, u),\\
\frac{dz}{dt} &= u,\\
\frac{du}{dt} &= a_{41}x + a_{42}y + a_{44}u + R_u(t, x, y, z, u).
\end{aligned} \tag{2}$$

Se presupune că toate rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului liniar omogen (1) au părțile reale negative, și deci stabilitatea în sensul lui Liapunov este asigurată și în cazul prezenței forțelor perturbatoare cu acțiune continuă. Aceasta înseamnă că se poate realiza un grad arbitrar de amortizare a perturbațiilor, cu condiția ca, pe lîngă perturbațiile inițiale, și adaosurile R_x, R_y și R_u să fie suficient de mici.

După cum s-a amintit, problema practică constă în a stabili cît de mici trebuie să fie perturbațiile inițiale și forțele perturbatoare cu acțiune continuă pentru ca să fie asigurat gradul de amortizare cerut. Întrucît răspunsul la această întrebare depinde de caracteristicile constructive ale aparatului, rezultatul va reprezenta legătura funcțională dintre aceste caracteristici și intensitatea forțelor perturbatoare, putîndu-se exprima fie, ca o recomandare pentru constructor de alegere a unor parametri constructivi, care să asigure o bună comportare în zbor a avionului, în cazul unor rafale pînă la o anumită intensitate; fie, ca o prescripție de exploatare : un avion de o anumită construcție poate zbura în deplină securitate, dacă intensitatea agitației atmosferice nu depășește o anumită valoare admisibilă.

Pentru rezolvarea problemei propuse se construiește o funcție Liapunov după cum urmează. Deoarece rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului liniar omogen au părțile reale negative, oricărei forme patratice negativ definite U îi corespunde o formă patratică pozitiv definită W și una singură a cărei derivată în raport cu timpul luată în virtutea sistemului liniar omogen este identic egală cu funcția U.

Coeficienții formei patratice $W(x, y, z, u)$ se determină, evident, din condiția ca dW/dt în virtutea sistemului liniar omogen să fie egal cu forma patratică U pentru orice valori ale funcțiilor x, y, z, u, aceasta revenind la a rezolva un sistem de ecuații algebrice.

În continuare, se cere ca în nici un moment ulterior lui t_0, considerat drept inițial, deviațiile x, y, z, u să nu depășească în modul niște cantități constante ε_x, ε_y, ε_z, ε_u luate din considerente de securitate, confort etc. Astfel ε_y care se impune ca o margine superioară a valorii absolute a deviației unghiului de incidență nu poate depăși valoarea critică corespunzătoare coeficientului de portanță maxim. O precauție deosebită necesită și alegerea marginii superioare a deviației vitezei unghiulare longitudinale, ε_u, deviațiile maxime ale celorlalți doi parametri ai mișcării longitudinale : a vitezei de zbor, ε_x şi a unghiului de tangaj, ε_z, putînd varia în limite mai largi. La alegerea valorilor constantelor ε_x, ε_y, ε_z, ε_u, se va ţine seama, se înţelege, şi de destinaţia avionului. La un avion de pasageri, spre pildă, considerente de confort impun o mai mare restricţie în ceea ce priveşte unghiul de tangaj decît în cazul unui avion militar.

Urmează un raţionament analog cu cel utilizat de I. G. Malkin pentru demonstrarea teoremei de stabilitate în cazul perturbaţiilor cu acţiune continuă [2] *).

Într-adevăr, fie elipsoidul

$$W(x, y, z, u) = c^2,$$

cu $c^2 < W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_u)$, şi fie în momentul iniţial t_0 satisfăcute inegalităţile

$$|x_0| < \eta_x < \varepsilon_x \qquad |y_0| < \eta_y < \varepsilon_y \qquad |z_0| < \eta_z < \varepsilon_z \qquad |u_0| < \eta_u < \varepsilon_u, \tag{3}$$

unde x_0, y_0, z_0, u_0 reprezintă valorile funcţiilor x, y, z, u pentru $t = t_0$ iar η_x, η_y, η_z, η_u nişte constante alese astfel încît inegalităţile (3) să atragă după sine satisfacerea următoarei inegalităţi

$$W(x_0, y_0, z_0, u_0) < c^2. \tag{a}$$

Atunci, pe baza continuităţii funcţiei W, pentru ε_x, ε_y, ε_z, ε_u suficient de mici, $W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_u)$ va fi marginea inferioară strictă a funcţiei W pentru $|x| \geqslant \varepsilon_x$, $|y| \geqslant \varepsilon_y$, $|z| \geqslant \varepsilon_z$, $|u| \geqslant \varepsilon_u$. Întrucît $c^2 < W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_u)$, se demonstrează că pentru orice $t > t_0$ sînt satisfăcute inegalităţile cerute, cu condiţia ca în orice punct de pe suprafaţa elipsoidului $W(x, y, z, u) = c^2$, derivata în raport cu t a funcţiei W în virtutea sistemului (2) să fie negativ definită adică

$$\left\{ U(x, y, z, u) + \left| \frac{\partial W}{\partial x} R_x \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial y} R_y \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial u} R_u \right| \right\}_{W = c^2} < 0.$$

Dat fiind caracterul întîmplător al perturbaţiilor repetate (rafale etc.) în ultima inegalitate modulele funcţiilor R_x, R_y, R_u se înlocuiesc prin nişte constante ρ_x, ρ_y, ρ_u, reprezentînd margini superioare ale acestora. Atunci această relaţie devine

$$\left\{ U(x, y, z, u) + \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| \rho_x + \left| \frac{\partial W}{\partial y} \right| \rho_y + \left| \frac{\partial W}{\partial u} \right| \rho_u \right\}_{W = c^2} < 0. \tag{b}$$

Inegalităţile (a) şi (b) furnizează relaţiile căutate.

Pentru concretizare drept perturbaţii repetate se consideră rafale de aer. În acest caz, atît constantele η_x, η_y, η_u cît şi ρ_x, ρ_y, ρ_u se evaluează cu ajutorul aceloraşi funcţiuni de viteza curenţilor de aer, reprezentînd răspunsul maxim al avionului la acţiunea acestor curenţi.

Se notează cu $\hat{v}_h$ şi $\hat{v}_v$ componentele orizontală şi verticală ale vitezei curentului de aer raportate la viteza de zbor neperturbată a avionului.

---

*) p. 294.

Se presupune că mărimile adimensionale $\hat{v}_h$ şi $\hat{v}_v$ sînt suficient de mici pentru a se putea neglija într-o dezvoltare în serie de puteri termenii neliniari. Atunci $\hat{v}_v \approx \Delta\alpha_{\max}$, $\hat{v}_h = \Delta V_{\max}$ şi se pot scrie următoarele relaţii aproximative :

$$\begin{aligned} \eta_x &= \rho_x = \left| c_x \hat{v}_h + \frac{\partial c_x}{\partial \alpha} \hat{v}_v \right|, \\ \eta_y &= \rho_y = \left| c_z \hat{v}_h + \frac{\partial c_z}{\partial \alpha} \hat{v}_v \right|, \\ \eta_u &= \rho_u = \left| \frac{\hat{m}}{i_B} \left(c_m \hat{v}_h + \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \hat{v}_v \right) \right|. \end{aligned} \tag{4}$$

Valorile coeficienţilor aerodinamici şi ale derivatelor lor parţiale în raport cu unghiul de incidenţă, ce apar în aceste formule, corespund regimului neperturbat. Dacă componentele v_h şi v_v, sau vreuna dintre ele, nu sînt mici în comparaţie cu viteza de zbor neperturbată V a avionului, atunci, pe baza teoremei creşterilor finite, rămîn valabile aceleaşi relaţii, în care însă, pentru acoperire, se vor lua pentru coeficienţii aerodinamici şi derivatele lor parţiale valorile maxime respective (este de menţionat că, pentru a se evita intrarea în pierdere de viteză, $\hat{v}_v$ în nici un caz nu va putea întrece cifra de 0,30—0,35).

Relaţiile (a) şi (b) se utilizează în felul următor : în (a) se înlocuiesc x_0, y_0, u_0 respectiv prin η_x, η_y, η_u, z_0 putînd avea o valoare arbitrară; în (b) se ia valoarea minimă în modul a funcţiei U pe elipsoidul $W = c^2$, iar constantelor ρ_x, ρ_y, ρ_u li se substituie expresiile (4). Schimbînd acum în (a) şi (b) semnul de inegalitate prin cel de egalitate se obţin pentru $\hat{v}_v$ şi $\hat{v}_h$ limitele admisibile căutate.

Trecînd la cazul simplificat al rafalelor verticale ($\hat{v}_h = 0$), se va presupune viteza de zbor constantă. În felul acesta, problema poate fi tratată pe baza teoriei simplificate a mişcării perturbate rapide, sistemul de ecuaţii reducîndu-se la unul de ordinul 2

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= a_{22}\, y + u + R_y\,(t, y, z, u), \\ \frac{du}{dt} &= a_{42} y + a_{44} u + R_u\,(t, y, z, u). \end{aligned} \tag{5}$$

Ecuaţia caracteristică a acestui sistem fără adaosurile R_y şi R_u, precum se ştie, în cazul avioanelor static stabile, admite o pereche de rădăcini complex conjugate. Partea reală a rădăcinilor, care se va nota cu μ $\left(\mu = \frac{1}{2} (a_{22} + a_{44})\right)$, este negativă.

Constantele η_y, η_u, ρ_y, ρ_u (vezi (4)), depind numai de $\hat{v}_v$, fiind de forma

$$\eta_y = \rho_y = a\hat{v}_v,$$

$$\eta_u = \rho_u = \sigma\hat{v}_v,$$

unde a reprezintă panta curbei $c_z = f(\alpha)$, iar σ o mărime proporțională cu coeficientul de stabilitate statică $\left(\sigma = \frac{\hat{m}}{i_B}\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}\right)$.

Fie $U = \frac{dW}{dt} = -(y^2 + u^2)$, din care se determină coeficienții formei patratice $W = \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{24}yu + \alpha_{44}u^2$. Acești coeficienți vor avea următoarele expresii în funcție de coeficienții sistemului (5) :

$$\alpha_{22} = \frac{-a_{42}^2 + a_{42} - a_{22}a_{44}}{-2\mu a_{42} + a_{22}^2 a_{44}},$$

$$\alpha_{24} = \frac{a_{22}a_{42} + a_{44}}{-2\mu a_{42} + a_{22}^2 a_{44}},$$

$$\alpha_{44} = \frac{a_{42} - a_{22}^2 - 1}{-2\mu a_{42} + a_{22}^2 a_{44}}.$$

Atunci condiția (b) devine

$$\left\{-(y^2 + u^2)_{\min} + (a\,|\,\alpha_{22}y + \alpha_{24}u\,|_{\max} + \sigma\,|\,\alpha_{24}y + \alpha_{44}u\,|_{\max})\,\hat{v}_v\right\}_{W=c^2} < 0$$

de unde

$$\hat{v}_v < \left\{\frac{(y^2 + u^2)_{\min}}{a\,|\,\alpha_{22}y + \alpha_{24}u\,|_{\max} + \sigma\,|\,\alpha_{24}y + \alpha_{44}u\,|_{\max}}\right\}_{W=c^2}. \qquad (6)$$

Pentru obținerea unei formule practice de calcul se procedează în felul următor : minimul sumei $y^2 + u^2$ pe elipsa $W(y, u) = c^2$ este de forma

$$(y^2 + u^2)_{\min} = \frac{2\,c^2}{\sqrt{(\alpha_{22} - \alpha_{44})^2 + 4\alpha_{24}^2} + \alpha_{22} + \alpha_{44}},$$

unde c^2 se va lua egal chiar cu valoarea limită $W(\varepsilon_y, \varepsilon_u)$, iar numitorul membrului al doilea al inegalității (6) se va înlocui cu următoarea expresie acoperitoare :

$$(a\alpha_{22} + \sigma\,|\,\alpha_{24}\,|)\,\varepsilon_y + (a\,|\,\alpha_{24}\,| + \sigma\alpha_{44})\,\varepsilon_u.$$

Rezultă următoarea formulă aproximativă pentru determinarea limitei admisibile a vitezei rafalelor verticale

$$v_{v\,\lim} = \frac{2\,W(\varepsilon_y, \varepsilon_u)}{\left[\sqrt{(\alpha_{22} - \alpha_{44})^2 + 4\alpha_{24}^2} + \alpha_{22} + \alpha_{44}\right]\left[(a\alpha_{22} + \sigma\,|\,\alpha_{24}\,|)\varepsilon_y + (a|\,\alpha_{24}\,| + \sigma\,\alpha_{44})\,\varepsilon_u\right]}\,V. \qquad (7)$$

Din analiza ultimei relații rezultă că și în cazul rafalelor verticale, acționînd asupra avionului ca perturbații repetate, se cere în primul rînd o amortizare bună, obținută prin valori absolute mari ale derivatelor de rotație $\left(\frac{\partial c_m}{\partial \hat{q}} \text{ şi } \frac{\partial c_m}{\partial \dot{\alpha}}\right)$. O valoare absolută excesiv de mare a coeficientului de stabilitate statică $\left(\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}\right)$, dimpotrivă, nu favorizează stabilitatea dinamică în faza rapidă a mişcării perturbate (restabilirea rapidă a incidenței şi anularea vitezei unghiulare de tangaj).

Primită la redacție la 15 octombrie 1958.

О ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЕТА В СЛУЧАЕ ПОВТОРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Излагается способ исследования задачи о поведении самолета в неспокойной атмосфере (повторные порывы ветра), основанный на прямом методе Ляпунова. Способ позволяет наложить дифференцированные условия на различные составляющие возмущения.

В заключение рассматривается вклад некоторых конструктивных факторов в улучшение устойчивости самолета в случае повторных вертикальных порывов ветра.

SUR LA STABILITÉ LONGITUDINALE DE L'AVION LORS DES PERTURBATIONS RÉPÉTÉES

RÉSUMÉ

Pour traiter le problème du comportement de l'avion dans une atmosphère agitée (rafales répétées), l'auteur indique un procédé basé sur la méthode directe de Liapunov. Ce procédé permet d'imposer aux divers composants de la perturbation des conditions différenciées.

En conclusion, l'auteur analyse la contribution de certains facteurs constructifs à l'amélioration de la stabilité de l'avion en cas de rafales verticales répétées.

BIBLIOGRAFIE

1. T. HACKER, *Despre comportarea avionului în zbor în atmosfera agitată.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
2. И. Г. МАЛКИН, *Теория устойчивости движения.* Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит., Москва-Ленинград, 1952.

ASUPRA VIBRAȚIILOR CONSOLEI ANTICUPLU LA ELICOPTERELE CU UN SINGUR ROTOR

DE

ALEXE MARINESCU

Se știe că pentru anularea momentului rezistent al rotorului se folosește pentru elicopterele cu un singur rotor o elice anticuplu (de coadă) situată la o distanță anumită de corpul propriu-zis al elicopterului.

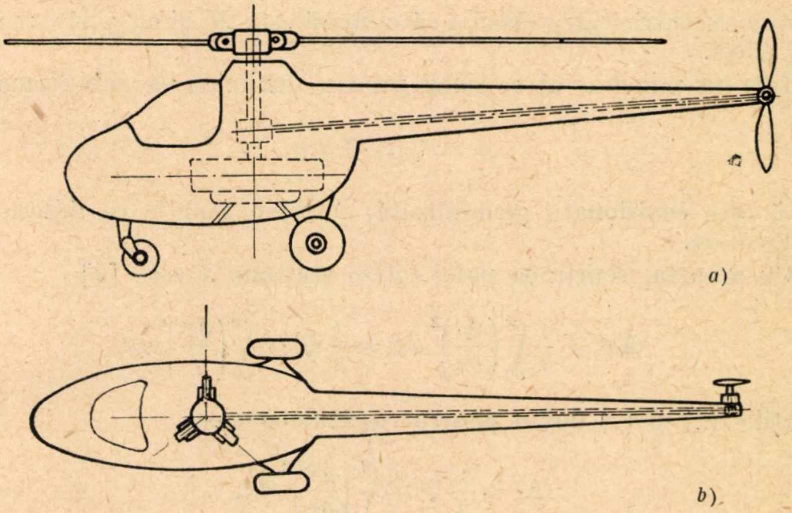


Fig. 1

Legătura între corpul elicopterului și elice este realizată cu ajutorul unei console obișnuite, construcție cocă, de formă aproape conică.

Elicea la rîndul său se sprijină pe un ax perpendicular pe axul longitudinal al consolei (fig. 1 *a* și *b*) ax antrenat de un altul constituit din porțiuni legate cardanic între ele, ce trece prin consolă și este în legătură cu motorul.

În lucrarea de față ne ocupăm de vibrațiile în plan vertical pe care le face sistemul considerat în condițiile existenței unei excentricități în repartiția maselor elicei. Se presupune că elicopterul zboară la punct fix deci nu apar pe elice excitații aerodinamice.

Discul elicei se află foarte aproape de axul longitudinal al consolei astfel că torsiunea este neglijabilă.

Raportăm sistemul axelor fixe xOy astfel că secțiunea de încastrare a consolei să cadă în origina axelor (fig. 2) și însemnăm cu l lungimea consolei, cu a excentricitatea elicei a cărei masă este M_e și cu ω viteza unghiulară a elicei.

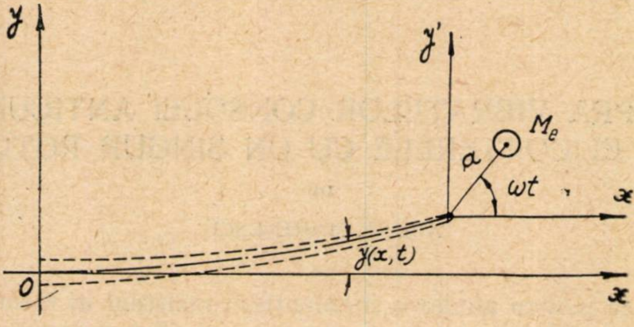


Fig. 2

Într-un punct x al consolei punem flexiunea sa sub forma

$$u = \zeta(t) \cdot Y(x), \tag{1}$$

unde ζ este coordonata generalizată, $Y(x)$ o funcție ce descrie forma de încovoiere.

Cu aceasta, scurtarea palei într-o secțiune x este [2]

$$\Delta x = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\,\zeta^2(t)\int_0^x \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{2}$$

și relațiile (1) și (2) devin pentru capătul consolei

$$\Delta l = \frac{1}{2}\,\zeta^2(t)\int_x^l \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{3}$$

$$u(l) = \zeta(t) \cdot Y(l).$$

Coordonatele centrului de greutate al elicei vor fi deci

$$x = l - \Delta l + a \cos \omega t, \tag{4}$$

$$y \approx u(l).$$

Notînd cu EI_x rigiditatea la flexiune, cu γ greutatea unității de volum și cu A_x aria într-o secțiune x a consolei, energia cinetică și potențială a sistemului este

$$T = \frac{\gamma}{2g}\int_0^l A_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} M_e (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{5}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l EI_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\cdot M_e\cdot\omega^2\cdot a\cdot\Delta l\cdot\cos\omega t. \tag{6}$$

Dacă ținem seama de (1) și (4) după ce notăm cu

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\gamma}{2g}\int_0^l A_x\, Y^2(x)\,dx, \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\int_0^l EI_x\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx, \end{aligned} \tag{7}$$

relațiile (5) și (6) devin

$$T = \dot{\zeta}^2\left[\varphi_1 + 2M_e\,\varphi_3^2\,\zeta^2 + \frac{Y^2(l)}{2}\,M_e\right] + \dot{\zeta}2M_e\varphi_3 a\omega\zeta\sin\omega t + \frac{1}{2}M_e a^2\omega^2, \tag{8}$$

$$V = \zeta^2\left(\varphi_2 + \frac{1}{2}M_e\,\omega^2\,a\,\varphi_3\cos\omega t\right). \tag{9}$$

Introducînd expresiile (8) și (9) în ecuația lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\zeta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\zeta} = 0 \tag{10}$$

și făcînd calculele, sîntem conduși la ecuația

$$\ddot{\zeta} + \Omega^2\,[1 - 2\mu\cos\omega t]\,\zeta + 2\varkappa[\zeta^2\,\ddot{\zeta} + \zeta\,\dot{\zeta}^2] = 0, \tag{11}$$

unde

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{2\varphi_2}{2\varphi_1 + Y^2(l)\cdot M_e}, \\ \mu &= -\frac{3}{4\varphi_2}M_e\cdot\varphi_3\cdot a\cdot\omega^2, \\ \varkappa &= \frac{2M_e\,\varphi_3^2}{2\varphi_1 + Y^2(l)\cdot M_e}. \end{aligned} \tag{11'}$$

Pentru a determina expresiile (11') în funcție de caracteristicile consolei va trebui mai întîi să găsim funcția $Y(x)$.

În mod obişnuit, o asemenea consolă este o construcţie ortotropă pe care o asimilăm unui con (fig. 2), constînd din înveliş cu cadre şi lise.

Cadrele nu sînt considerate în flexiune globală a consolei şi deoarece lisele se micşorează pe măsură ce ne apropiem de capătul consolei putem asimila structura cu lise uneia izotrope echivalente de grosime δ_m dedusă pentru acelaşi diametru mediu.

Notînd cu D_0 diametrul mediu al coroanei învelişului într-o secţiune x momentul de inerţie este

$$I_x \sim 0{,}4\ \delta_m D_0^3 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3. \tag{12}$$

Funcţia $Y(x)$ va trebui să îndeplinească următoarele condiţii la limită

$$\left[EI \frac{d^2Y}{dx^2}\right]_{x=l} = 0, \quad \frac{d}{dx}\left[EI \frac{d^2Y}{dx^2}\right]_{x-l} = 0, \quad [Y]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{dY}{dx}\right]_{x=0} = 0; \tag{13}$$

se vede că expresia *)

$$Y(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 \tag{14}$$

le îndeplineşte.

Secţiunea într-un punct x al consolei este

$$A_x = \pi D_0 \delta_{im} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + S, \tag{15}$$

unde $S = \sum s_i$, s_i fiind secţiunea unei lise şi δ_{im} grosimea învelişului.

Urmînd în mod aproximativ procedeul lui Ritz [1] pe baza condiţiei de minimum a expresiei

$$\frac{\int_0^l I_x \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^l A_x Y^2(x)\, dx}, \tag{16}$$

care se scrie

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left[\frac{\int_0^l I_x \left[\frac{d^2Y}{dx^2}\right]^2 dx}{\int_0^l A_x Y^2(x)\, dx}\right] = 0, \tag{17}$$

---

*) Pentru forme pronunţate tronconice de consolă este indicat să se ia $Y(x) = Ax^2\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^4$ iar $I_x = I_0\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^3$ A fiind o constantă l_1 lungimea conului în care se înscrie tronconul şi I_0 momentul de inerţie la încastrare.

notînd frecvenţa vibraţiilor naturale ale consolei cu

$$p^2 = \frac{Eg}{\gamma} \cdot \frac{\int_0^l I_x \left[\frac{d^2\, Y}{dx^2}\right]^2 dx}{\int_0^l A_x\, Y^2\, (x)\, dx}, \tag{18}$$

condiţia (17) se scrie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n}\int_0^l \left[I_x \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{p^2 A x \gamma}{Eg}\, Y^2\,(x)\right] dx = 0. \tag{19}$$

Ţinînd seama de (14)

$$\Phi = 4K\Big\{2a_1^2\, l - \frac{3}{2}\, a_1^2\, l - \frac{1}{4}\, a_1^2\, l + 3a_1\, a_2 l^2 - 6a_1\, a_2\, l^2 + $$
$$+ \frac{18}{4}\, a_1\, a_2\, l^2 - \frac{6}{5}\, a_1\, a_2\, l^2 + 3a_2^2\, l^3 - \frac{27}{4}\, a_2^2\, l^3 + \frac{27}{5}\, a_2^2\, l^3 +$$
$$+ \frac{27}{5}\, a_2^2\, l^3 - \frac{9}{6}\, a_2^2\, l^3\Big\} - p^2 \frac{\gamma}{Eg}\,(K_1 + S)\,\Big\{a_1^2\, \frac{l^5}{5} + 2a_1\, a_2 \frac{l^6}{6} +$$
$$+ a_2^2\, \frac{l^7}{7}\Big\} + \frac{K_1}{l}\, p^2 \frac{\gamma}{Eg}\Big\{a_1^2 \frac{l^6}{6} + \frac{2}{27}\, a_1\, a_2\, l^7 + a_2^2\, \frac{l^8}{8}\Big\},$$

unde

$$K = 0{,}4\ \delta_m D_0^3,$$
$$K_1 = \pi D_0\, \delta_{im}.$$

Condiţiile (19) devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} &= (c + \lambda G)\, a_1 + (d + \lambda H)\, a_2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} &= (a + \lambda B)\, a_1 + (b + \lambda D)\, a_2 = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

în care

$$H = \frac{2}{7}\, \frac{K_1 \gamma}{Eg}\, l^6 - \frac{\gamma}{Eg}\,(K_1 + S)\, \frac{1}{3}\, l^6,$$

$$G = \frac{1}{3}\, \frac{K_1 \gamma}{Eg}\, l^5 - \frac{\gamma}{Eg}\,(K_1 + S)\, \frac{2}{5}\, l^5,$$

$$D = \frac{1}{4}\, \frac{K_1 \gamma}{Eg}\, l^7 - \frac{2}{5}\, \frac{\gamma}{Eg}\, (K_1 + S)\, l^5,$$

$$B = \frac{2}{7}\, \frac{K_1 \gamma}{Eg}\, l^6 - \frac{1}{3}\, \frac{\gamma}{Eg}\, (K_1 + S)\, l^6,$$

$$a = 1{,}2\, Kl^2, \qquad b = 10{,}2\, Kl^3,$$
$$c = 6\, Kl, \qquad d = 1{,}2\, Kl^2.$$

Notînd $p^2 = \lambda$ din condiția ca sistemul algebric omogen (20) să nu aibă soluții toate nule, obținem ecuația

$$\lambda^2 (BH - DG) + \lambda (aH + Bd - cD - bG) + ad - bc = 0. \tag{21}$$

Din această ecuație scoatem pe λ cu care apoi determinăm raportul coeficienților a_1 și a_2 și în acest fel funcția $Y(x)$ este determinată cu aproximația unei constante. Cu ajutorul ei, funcțiile φ_1, φ_2, φ_3 date de relațiile (7) sînt

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\gamma}{2g} (K_1 + S) \left[a_1^2 \frac{l^5}{5} + \frac{1}{3} a_1 a_2 l^6 + \frac{1}{7} a_2^2 l^7 \right] - \\ &\quad - \frac{\gamma}{2g} \frac{K_1}{l} \left[a_1^2 \frac{l^6}{6} + 2a_1 a_2 \frac{l^7}{7} + a_2^2 \frac{l^8}{8} \right], \\ \varphi_2 &= \frac{EK}{2} \left\{ 4a_1^2 \frac{l^3}{3} + 3a_1 a_2 l^4 + 9a_2^2 \frac{l^5}{5} - \frac{3}{l} \left(a_1^2 l^4 + 12\, a_1 a_2 \frac{l^5}{5} + 3a_2^2 \frac{l^6}{6} \right) \right. \qquad (21') \\ &\quad \left. + \frac{3}{l^2} \left(4a_1^2 \frac{l^5}{5} + 2a_1 a_2 l^6 + 9a_2^2 \frac{l^7}{7} \right) - \frac{1}{l^3} \left(4a_1^2 \frac{l^6}{6} + 12\, a_1 a_2 \frac{l^7}{7} + 9\, a_2^2 \frac{l^8}{8} \right) \right\}, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} a_1^2 l^3 + 3\, a_1 a_2 l^4 + \frac{9}{5} a_2^2 l^5. \right) \end{aligned}$$

Avînd complet definită în acest fel, ecuația diferențială (11), vom trece la cercetarea ei. Ecuația (11), după cum se poate vedea ușor, este de ordinul doi neliniară, a cărei soluționare este în general puțin cam dificilă.

Pentru cerințele practice de cea mai mare importanță este fenomenul rezonanței care duce la creșterea indefinită a amplitudinii mișcării sistemului. De aceea, nu ne interesează soluția propriu-zisă cît amplitudinea pe care o vom deduce folosind anumite date ale problemei liniare.

Să observăm mai întîi că termenii neliniari din ecuația (11) sînt de puteri impare din care cauză soluția problemei liniare [3]

$$\zeta(t) = \sum \left(\alpha_n \sin \frac{n\omega t}{2} + \beta_n \cos \frac{n\omega t}{2} \right), \tag{22}$$

o vom considera în cazul neliniar sub forma

$$\zeta(t) = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \left(\alpha_n \sin \frac{n\omega t}{2} + \beta_n \cos \frac{n\omega t}{2} \right). \tag{23}$$

Soluția (23) este valabilă numai pe frontierele domeniilor impare de instabilitate.

Deoarece fenomenul principal de rezonanță poate fi cercetat cu ajutorul seriei

$$\zeta(t) = \alpha \sin \frac{\omega t}{2} + \beta \cos \frac{\omega t}{2}; \tag{24}$$

în cele ce urmează vom face uz numai de ea.

Rezultatul înlocuirii expresiei (24) în ecuaţia (11) nu trebuie să ducă la alţi termeni periodici în afară de $\sin\frac{\omega t}{2}$ şi $\cos\frac{\omega t}{2}$.

Se impune deci să exprimăm grupul termenilor neliniari într-o forma convenabilă.

Însemnînd cu

$$\varphi(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) = 2\varkappa\,[\zeta^2\ddot{\zeta} + \zeta\dot{\zeta}^2] \tag{25}$$

este uşor de observat că datorită expresiei (24) funcţia φ este periodică şi poate fi dezvoltată într-o serie Fourier.

Rezumîndu-ne la primii termeni avem

$$\varphi = U_0 + U\sin\frac{\omega t}{2} + W\cos\frac{\omega t}{2}, \tag{26}$$

unde

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\omega}{4\pi}\int_0^{\frac{4\pi}{\omega}}\varphi\,dt, \\ U &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{4\pi}{\omega}}\varphi\cdot\sin\frac{\omega t}{2}\,dt, \\ W &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{4\pi}{\omega}}\varphi\cdot\cos\frac{\omega t}{2}\,dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Introducînd expresia (24) a lui ζ în (25) obţinem după ce facem calculele

$$\begin{aligned} \varphi = 2\varkappa\Big[&\frac{\alpha\omega^2}{4}(\beta^2 - \alpha^2)\sin^3\frac{\omega t}{2} + \frac{\beta\omega^2}{4}(\alpha^2 - \beta^2)\cos^3\frac{\omega t}{2} + \\ &+ \frac{\omega^2\beta}{4}(\beta^2 - 5\alpha^2)\sin^2\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2} + \frac{\alpha\omega^2}{4}(\alpha^2 - 5\beta^2)\sin\frac{\omega t}{2}\cos^2\frac{\omega t}{2}\Big]. \end{aligned} \tag{28}$$

Întrucît primul coeficient (27) nu prezintă interes, ultimii doi devin după calcule ţinînd seama de (28)

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\varkappa\,\omega^2}{4}A^2\alpha, \\ W &= -\frac{\varkappa\,\omega^2}{4}A^2\alpha, \end{aligned} \tag{29}$$

unde $A^2 = \alpha^2 + \beta^2$ este amplitudinea.

Cu acestea trecem la determinarea efectivă a amplitudinii.

Înlocuind expresia (24) a lui ζ în ecuația (11) și ținînd seama de expresia (26) a lui φ, pentru ca relațiile să se mențină la orice valoare a lui ωt, va trebui ca coeficienții lui $\sin \frac{\omega t}{2}$, $\cos \frac{\omega t}{2}$ să se anuleze, fapt care ne conduce la următorul sistem de ecuații față de α și β:

$$\begin{aligned} \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\omega^2}{4}\right] \alpha + U &= 0, \\ \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\omega^2}{4}\right] B + W &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

sau ținînd seama de (29)

$$\begin{aligned} \left[\Omega^2 (1 + \mu) - \frac{\omega^2}{4}\right] \alpha - \frac{\varkappa \omega^2}{4} A^2 \alpha &= 0, \\ \left[\Omega^2 (1 - \mu) - \frac{\omega^2}{4}\right] \beta - \frac{\varkappa \omega^2}{4} A^2 \beta &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Deoarece α și β nu pot fi simultan nuli, rezultă amplitudinea la pătrat

$$A^2 = \frac{\Omega^2 (1 \pm \mu) - \frac{\omega^2}{4}}{\frac{\varkappa \omega^2}{4}}, \tag{32}$$

sau după ce ținem seama de relațiile (11′)

$$A^2 = \frac{4\varphi_2}{\omega^2 M_e \varphi_3^2} \left(1 \pm \frac{3}{2\varphi_2} M_e \varphi_3 a \omega^2\right) - \frac{2\varphi_1 + Y^2(l) M_e}{2 M_e \varphi_3^2}. \tag{33}$$

Prin extragerea radicalului din relația (33) obținem amplitudinea ca funcție complet definită de caracteristicile geometrice fizice ale sistemului anticuplu.

Deoarece pentru practică sînt importante deviațiile maxime ale consolei, acestea pot fi găsite înmulțind amplitudinea cu funcția $Y(x)$. Prin această operație constanta arbitrară dispare deoarece apare și la numitor în expresia lui A rămînînd numai raportul dintre a_1 și a_2 care se scoate din sistemul omogen (20).

Întrucît expresiile $\frac{\varphi_2}{a_1^2}$, $\frac{\varphi_3}{a_1^2}$ sau $\frac{\varphi_2}{a_2^2}$, $\frac{\varphi_3}{a_2^2}$ nu se anulează, primul domeniu de instabilitate care ar putea intra în discuție, nu este atins.

Primită la redacție la 11 iulie 1958.

О КОЛЕБАНИЯХ ПРОТИВОВРАЩАТЕЛЬНОЙ КОНСОЛИ У ВЕРТОЛЕТОВ С ОДНИМ НЕСУЩИМ ВИНТОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуются колебания противовращательной системы вертолетов с одним несущим винтом, вызываемые эксцентричностью винта.

После определения кинетической и потенциальной энергии системы при помощи лагранжевых уравнений, автор приходит к нелинейному уравнению второго порядка для движения консоли.

Устанавливаются функция модальной формы и амплитуда, при помощи которых можно исследовать максимальные отклонения консоли.

SUR LES VIBRATIONS DE LA CONSOLE ANTICOUPLE DANS LES HÉLICOPTÈRES À ROTOR UNIQUE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur étudie les vibrations du système anticouple des hélicoptères à rotor unique, qui sont causées par l'excentricité de l'hélice.

Après avoir déterminé la valeur de l'energie cinétique et potentielle du système au moyen des équations de Lagrange, on obtient, pour le mouvement de la console, une équation du second ordre, non linéaire.

On trouve la fonction de la forme modale et l'amplitude qui permettent d'étudier les déviations maxima de la console.

BIBLIOGRAFIE

1. S. THIMOSHENKO, *Theorie des vibrations.* Paris — Liège, 1947.
2. AL. MARINESCU, *Vibraţiile forţate ale rotoarelor de elicopter cu pale Cantilever.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX,** *2,* 297 (1958).
3. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, Москва, 1954.

O METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU STUDIUL SCURGERII SPRE SONDE ÎN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

TEODOR OROVEANU

1. **Generalități.** Dacă se consideră un mediu poros neomogen însă izotrop, a cărui permeabilitate este funcție de punct, diferitele probleme de scurgere a unui fluid incompresibil prin acest mediu se tratează căutînd soluțiile ecuației

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0, \tag{1}$$

cu condițiile la limită corespunzătoare. În această ecuație, $k\ (x, y, z)$ este permeabilitatea despre care admitem că este o funcție continuă și mărginită, pozitivă și diferită de zero în toate punctele domeniului în care se produce scurgerea considerată, iar

$$\varphi = -\frac{1}{\mu}(p+U), \tag{2}$$

μ fiind viscozitatea fluidului, presupusă constantă, $p\ (x, y, z)$ presiunea și $U\ (x, y, z)$ potențialul forțelor exterioare. Bineînțeles, am făcut ipoteza că scurgerea se produce în condițiile de valabilitate a legii lui Darcy.

De obicei, forțele exterioare se reduc la greutatea proprie a fluidului și dacă se face o alegere convenabilă a axelor de coordonate astfel ca axa Oz să fie verticală, avem

$$U = \pm \gamma z, \tag{3}$$

semnul pozitiv corespunzînd cazului în care sensul pozitiv al axei Oz este acela al verticalei ascendente, iar semnul negativ, situației contrare.

În cele ce urmează, vom considera numai scurgeri plane, orizontale în care influența greutății este absentă, funcția φ avînd forma

$$\varphi = -\frac{p}{\mu}. \tag{4}$$

De asemenea, ecuația (1) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{5}$$

și într-o serie de lucrări anterioare ne-am ocupat de problema găsirii soluțiilor pentru anumite probleme, utilizînd diferite ipoteze simplificatoare. În cele ce urmează, vom introduce o nouă asemenea ipoteză care conduce la rezultate relativ simple într-o serie de probleme.

2. **O aproximație pentru cazul variației lente a permeabilității.** Metoda aproximativă de studiu pe care o vom introduce se bazează pe presupunerea că variația permeabilității mediului poros considerat este relativ lentă, marginea inferioară și marginea superioară a funcției $k(x, y)$ fiind deci destul de apropiate ca valoare. Mai admitem că permeabilitatea nu atinge ambele sale valori extreme într-un domeniu suficient de mic din jurul fiecărui punct al mediului poros.

O dată aceste ipoteze admise, să observăm că ecuația (5) se mai poate scrie

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial(\log k)}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial(\log k)}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

și dacă funcția k are o variație lentă, funcția log k are o variație mai lentă, așa că putem introduce aproximația de a considera derivatele acestei funcții ca avînd valori constante

$$\frac{\partial(\log k)}{\partial x} = l, \quad \frac{\partial(\log k)}{\partial y} = n. \tag{7}$$

Dacă domeniul în care se produce scurgerea este situat în întregime la distanță finită, așa cum este cazul pentru aplicațiile pe care le avem în vedere, constantele l și n pot fi calculate cu ajutorul formulelor

$$l = \frac{1}{\Omega_D}\iint_D \frac{\partial(\log k)}{\partial x}\,dx\,dy, \qquad n = \frac{1}{\Omega_D}\iint_D \frac{\partial(.\log k)}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{8}$$

Ω_D fiind aria domeniului D considerat. Pentru evitarea unor dificultăți de principiu la integrare, trebuie admis că funcțiile $\frac{\partial(\log k)}{\partial x}$ și $\frac{\partial(\log k)}{\partial y}$ sînt mărginite în toate punctele domeniului D, fapt care nu implică restricții asupra legii de variație a permeabilității.

Pentru a preciza mai bine la ce revine aproximația introdusă, vom introduce notația

$$f(x, y) = \log k(x, y) \tag{9}$$

și vom considera suprafața

$$z = f(x, y). \tag{10}$$

Ecuația planului tangent la această suprafață într-un punct oarecare de coordonate x, y, z este

$$(\xi - x)\frac{\partial(\log k)}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial(\log k)}{\partial y} - (\zeta - z) = 0, \tag{11}$$

ξ, η, ζ fiind coordonatele punctului curent al planului tangent. Evident, valorile derivatelor $\frac{\partial(\log k)}{\partial x}$ și $\frac{\partial(\log k)}{\partial y}$ diferă de la un punct la altul al suprafeței considerate și dacă admitem că aceasta nu are puncte singulare, planul tangent este definit în toate punctele ei. În aproximația introdusă, valorile derivatelor $\frac{\partial(\log k)}{\partial x}$ și $\frac{\partial(\log k)}{\partial y}$ într-un punct oarecare se înlocuiesc prin valorile lor medii l, respectiv n, astfel că planul tangent (10) este înlocuit de planul

$$l(\xi - x) + n(\eta - y) - (\zeta - z) = 0. \tag{12}$$

Eroarea care se face în acest mod este cu atît mai mică cu cît diferențele

$$\frac{\partial(\log) k}{\partial x} - l, \quad \frac{\partial(\log k)}{\partial y} - n,$$

sînt mai mici în valoare absolută.

3. **Transformarea ecuației diferențiale**. Cu aproximația introdusă mai sus, ecuația (6) devine

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + n\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

și pentru eliminarea derivatelor parțiale de ordinul întîi vom utiliza o schimbare de funcție pe care am introdus-o în lucrarea [3]. În acest scop, vom pune

$$\varphi = \Phi e^{h(x, y)} \tag{14}$$

și vom determina funcția $h(x, y)$, astfel ca în ecuația funcției Φ termenii care conțin derivatele $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ și $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ să se anuleze. După calcule simple, găsim

$$2\frac{\partial h}{\partial x} + l = 0 \quad , \quad 2\frac{\partial h}{\partial y} + n = 0, \tag{15}$$

ceea ce ne dă, cu aproximația unei constante,

$$h = -\frac{l}{2}x - \frac{n}{2}y.$$

În felul acesta, ecuația funcției Φ are forma

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \alpha^2\,\Phi = 0, \tag{16}$$

unde am pus

$$\alpha^2 = \frac{l^2 + n^2}{4}, \tag{17}$$

iar între Φ și φ există relația

$$\Phi = \varphi e^{\frac{1}{2}(lx + ny)}. \tag{18}$$

Credem că este necesar să remarcăm că forma ecuației (16) este independentă de semnul constantelor l și n.

Soluțiile ecuației (16) au cîteva proprietăți generale importante pentru aplicații, așa că este util să le reamintim. Astfel, dacă se consideră un domeniu închis D, cu frontiera S, soluția ecuației (16) nu poate atinge în punctele din interiorul acestui domeniu valori maxime pozitive sau valori minime negative. Pentru demonstrația de altfel foarte simplă a acestei proprietăți, se poate consulta lucrarea [4]. Mai departe, vom considera problema la limite care constă în găsirea unei soluții a ecuației (16), definită și continuă în domeniul închis $D + S$, cunoscîndu-se valorile acestei soluții pe frontiera S. Se poate de asemenea demonstra că problema astfel pusă admite o soluție unică. În acest scop, să presupunem că există două soluții Φ_1 și Φ_2 ale ecuației (16), continue în domeniul închis $D + S$, care iau pe frontiera S aceleași valori

$$\Phi_1 |_S = f, \tag{19}$$

$$\Phi_2 |_S = f. \tag{20}$$

Diferența acestor soluții

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 \tag{21}$$

este de asemenea o soluție a ecuației (16) continuă în $D + S$ și nulă pe frontiera S

$$\Phi |_S = 0. \tag{22}$$

O funcție continuă într-un domeniu închis își atinge însă valoarea maximă. Dacă funcția Φ este diferită de zero și pozitivă cel puțin într-un punct ($\Phi > 0$), rezultă că atinge o valoare maximă pozitivă în interiorul domeniului. Acest fapt este însă în contradicție cu proprietatea semnalată mai înainte a soluțiilor ecuației (16). La fel se arată că funcția Φ nu poate lua nicăieri în interiorul domeniului D valori negative. Prin urmare, Φ este peste tot nulă în domeniul D, fapt care demonstrează existența unei soluții unice pentru problema considerată.

4. Aplicație la cazul unei sonde situate în centrul unui contur circular de alimentare. Ca primă aplicație, vom studia cazul simplu al unei sonde de rază r_s situată în centrul unui contur circular de alimentare de rază r_c ($r_c > r_s$). Condițiile la limită ale problemei constau în cunoașterea valorilor presiunii pe cele două cercuri concentrice de raze r_c și r_s. Legea de variație a permeabilității fiind dată, prin intermediul relațiilor (4) și (18) sînt cunoscute pe aceste cercuri valorile funcției Φ.

Pentru ușurarea calculelor, vom transcrie ecuația (6) în coordonatele adimensionale

$$\xi = \frac{x}{r_c}, \quad \eta = \frac{y}{r_c} \tag{23}$$

și vom pune

$$\frac{\partial (\log k)}{\partial \xi} = \lambda, \quad \frac{\partial (\log k)}{\partial \eta} = \nu. \tag{24}$$

Trecînd apoi la coordonatele polare ρ și θ, în care

$$\rho = \frac{r}{r_c} \tag{25}$$

rezultă imediat

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + (\lambda \cos\theta + \nu \sin\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\nu\cos\theta - \lambda\sin\theta}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0. \tag{26}$$

Cu schimbarea de funcție introdusă mai înainte, care ia forma

$$\varphi = \Phi e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}, \tag{27}$$

obținem

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \beta^2 \Phi = 0, \tag{28}$$

constanta β^2 avînd valoarea

$$\beta^2 = \frac{\lambda^2 + \nu^2}{4}. \tag{29}$$

De altfel, ecuația (28) se poate deduce direct din (16) prin schimbările de variabile utilizate.

Soluțiile pot fi căutate sub forma unui produs de două funcții, una depinzînd numai de ρ iar cealaltă numai de θ,

$$\Phi = R(\rho)\,\Theta(\theta). \tag{30}$$

Cu funcţia Φ exprimată sub această formă de produs, ecuaţia (28) devine

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}-\beta^2\rho^2+\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}=0, \tag{31}$$

variabilele fiind astfel separate. Pentru funcţia Θ avem prin urmare ecuaţia

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}+m^2\,\Theta=0, \tag{32}$$

m fiind un număr întreg şi pozitiv, a cărei soluţie este

$$\Theta = A_m\cos m\theta + B_m\sin m\theta. \tag{33}$$

De asemenea, pentru funcţia R găsim ecuaţia

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\left(\beta^2+\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0, \tag{34}$$

a cărei soluţie generală are forma

$$R = C_m\,I_m(\beta\rho)+D_m\,K_m(\beta\rho), \tag{35}$$

$I_m(\beta\rho)$ şi $K_m(\beta\rho)$ fiind funcţiile Bessel modificate (de argument imaginar) de specia întîia şi a doua, de ordinul m.

Prin urmare, soluţia ecuaţiei (27) se poate scrie

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta)\,[C_m\,I_m(\beta\rho)+D_m\,K_m(\beta\rho)]. \tag{36}$$

După cum se ştie [1], pentru m întreg şi pozitiv, funcţia $I_m(\beta\rho)$ se reprezintă prin seria

$$I_m(\beta\rho)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s\,!\,(m+s)\,!}\left(\frac{\beta\rho}{2}\right)^{m+2s}, \tag{37}$$

iar funcţia $K_m(\beta\rho)$

$$\begin{aligned}K_m(\beta\rho) &= (-1)^{m+1}I_m(\beta\rho)\log\frac{\beta\rho}{2}+\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^s(m-s-1)\,!}{s\,!}\left(\frac{\beta\rho}{2}\right)^{-m+2s}+\\ &+(-1)^m\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s\,!\,(m+s)\,!}\left(\frac{\beta\rho}{2}\right)^{m+2s}[\psi(s)+\psi(m+s)],\end{aligned} \tag{38}$$

unde $\psi(u)$ are pentru u întreg şi pozitiv expresia

$$\psi(u)=-\gamma+\sum_{t=1}^{u}\frac{1}{t}, \tag{39}$$

cu

$$\gamma = 0{,}5772256649\ldots$$

cunoscută sub numele de constanta lui Euler.

Funcțiile $I_m(\beta\rho)$ sînt prin urmare regulate în orice domeniu situat în întregime la distanță finită, în timp ce funcțiile $K_m(\beta\rho)$ au pentru $\rho\to 0$ o comportare asimptotică dată de formulele [2]

$$K_0(\beta\rho)\approx\log\frac{2}{\beta\rho},\quad K_m(\beta\rho)\approx\frac{1}{2}(m-1)!\left(\frac{\beta\rho}{2}\right)^{-m},\ (m=1,2,3,\ldots).\tag{40}$$

Prin urmare, punctul $\rho=0$, care coincide în cazul de față cu originea axelor de coordonate, este un punct singular pentru funcțiile $K_m(\beta\rho)$. În particular, funcția $K_0(\beta\rho)$ are în acest punct o singularitate logaritmică, fapt interesant de reținut pentru considerațiile ulterioare.

Pentru determinarea constantelor din (35), recurgem la condițiile la limită despre care am amintit mai înainte. În cazul cel mai simplu, presiunea este constantă pe cercurile de raze r_c și r_s, respectiv 1 și ρ_s, astfel că avem

$$\begin{aligned}&\rho=1\ (r=r_c),\quad p=p_c,\quad \Phi=\Phi_c=-\frac{p_c}{\mu}\,e^{\frac{1}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)},\\&\rho=\rho_s\ (r=r_s),\quad p=p_s,\quad \Phi=\Phi_s=-\frac{p_s}{\mu}\,e^{\frac{\rho_s}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}.\end{aligned}\tag{41}$$

Condițiile la limită sînt deci periodice cu perioada 2π. Determinarea constantelor se face scriind în prealabil expresia (36) a funcției Φ sub forma

$$\begin{aligned}\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\{[M_mI_m(\beta\rho)+N_mK_m(\beta\rho)]\cos m\theta+[P_mI_m(\beta\rho)+\\+Q_mK_m(\beta\rho)]\sin m\theta\}\end{aligned}\tag{42}$$

și dezvoltînd apoi în serie Fourier funcțiile

$$g(\theta)=e^{\frac{1}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)},\quad h(\theta)=e^{\frac{\rho_s}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}.\tag{43}$$

Dacă presupunem că am obținut dezvoltările

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_m\cos m\theta+\beta_m\sin m\theta),\\h(\theta)&=\sum_{m=0}^{\infty}(\gamma_m\cos m\theta+\delta_m\sin m\theta),\end{aligned}\tag{44}$$

coeficienții căutați rezultă prin înlocuirea expresiei (42) a lui Φ în condițiile la limită și prin simplă identificare. Avem astfel pentru $m=0,1,2,3,\ldots,$

$$\begin{aligned}M_mI_m(\beta)+N_mK_m(\beta)&=-\frac{p_c}{\mu}\alpha_m\\M_mI_m(\beta\rho_s)+N_mK_m(\beta\rho_s)&=-\frac{p_s}{\mu}\gamma_m,\end{aligned}\tag{45}$$

iar pentru $m = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\begin{aligned} P_m I_m(\beta) + Q_m K_m(\beta) &= -\frac{p_c}{\mu}\beta_m, \\ P_m I_m(\beta\rho_s) + Q_m K_m(\beta\rho_s) &= -\frac{p_s}{\mu}\delta_m, \end{aligned} \tag{46}$$

de unde rezultă

$$M_m = -\frac{1}{\mu}\frac{\alpha_m K_m(\beta\rho_s)p_c - \gamma_m K_m(\beta)p_s}{I_m(\beta)K_m(\beta\rho_s) - I_m(\beta\rho_s)K_m(\beta)}, \tag{47}$$

$$N_m = \frac{1}{\mu}\frac{\alpha_m I_m(\beta\rho_s)p_c - \gamma_m I_m(\beta)p_s}{I_m(\beta)K_m(\beta\rho_s) - I_m(\beta\rho_s)K_m(\beta)},$$

şi

$$P_m = -\frac{1}{\mu}\frac{\beta_m K_m(\beta\rho_s)p_c - \delta_m K_m(\beta)p_s}{I_m(\beta)K_m(\beta\rho_s) - I_m(\beta\rho_s)K_m(\beta)}, \tag{48}$$

$$Q_m = \frac{1}{\mu}\frac{\beta_m I_m(\beta\rho_s)p_c - \delta_m I_m(\beta)p_s}{I_m(\beta)K_m(\beta\rho_s) - I_m(\beta\rho_s)K_m(\beta)}.$$

În realitate, calculul coeficienților din dezvoltările în serie Fourier (44) conduce la dificultăți de netrecut, așa că este necesar să se recurgă la o metodă aproximativă. Astfel, dezvoltarea (42) se poate limita la un număr finit s de termeni, convenabil ales, iar funcțiile $g(\theta)$ şi $h(\theta)$ pot fi, la rîndul lor, aproximate prin sume trigonometrice cu același număr de termeni. Este necesar ca această aproximare să fie făcută pentru fiecare caz concret în parte, deoarece rezultatele depind de valorile constantelor λ şi ν. Procedeul fiind cunoscut, nu insistăm asupra lui, amintind numai că pentru a obține o precizie bună s trebuie să fie, în general, suficient de mare.

Valoarea presiunii într-un punct oarecare al coroanei circulare considerate rezultă imediat din (4), (27) şi (42) şi este

$$p = -\mu\varphi = -\mu\,\Phi e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)} = -\mu e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}\sum_{m=0}^{\infty}\{[M_m I_m(\beta\rho) + \\ + N_m K_m(\beta\rho)]\cos m\theta + [P_m I_m(\beta\rho) + Q_m K_m(\beta\rho)]\sin m\theta\}, \tag{49}$$

respectiv după utilizarea relațiilor (47) şi (48)

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{I_m(\beta)K_m(\beta\rho_s) - I_m(\beta\rho_s)K_m(\beta)}\{[(\alpha_m K_m(\beta\rho_s)p_c - \\ - \gamma_m K_m(\beta)p_s)I_m(\beta\rho) - (\alpha_m I_m(\beta\rho_s)p_c - \gamma_m I_m(\beta)p_s)K_m(\beta\rho)]\cos m\theta + \\ + [(\beta_m K_m(\beta\rho_s)p_c - \delta_m K_m(\beta)p_s)I_m(\beta\rho) - (\beta_m I_m(\beta\rho_s)p_c - \\ - \delta_m I_m(\beta)p_s)K_m(\beta\rho)]\sin m\theta\}. \tag{50}$$

În ceea ce privește debitul Q al sondei, acesta este dat de expresia

$$Q = \int_0^{2\pi} r v_r \, d\theta = -\frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} r k \frac{\partial p}{\partial r} \, d\theta = -\frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \rho k \frac{\partial p}{\partial \rho} \, d\theta, \tag{51}$$

grosimea stratului productiv fiind presupusă egală cu unitatea. În această formulă, avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\mu}{2} (\lambda \cos \theta + \nu \sin \theta) \, e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda \cos \theta + \nu \sin \theta)} \sum_{m=0}^{\infty} \{ [M_m I_m (\beta \rho) + \\ + N_m K_m (\beta \rho)] \cos m\theta + [P_m I_m (\beta \rho) + Q_m K_m (\beta \rho)] \sin m\theta \} - \\ - \mu e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda \cos \theta + \nu \sin \theta)} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{2} \, [M_m (I_{m-1} (\beta \rho) + I_{m+1} (\beta \rho)) - N_m (K_{m-1}(\beta \rho) + \right. \\ + K_{m+1} (\beta \rho))] \cos m\theta + \frac{\beta}{2} \, [P_m (I_{m-1} (\beta \rho) + I_{m+1} (\beta \rho)) - Q_m (K_{m-1}(\beta \rho) + \\ \left. + K_{m+1} (\beta \rho))] \sin m\theta \right\}, \end{aligned} \tag{52}$$

și pentru integrare ar trebui să mai introducem și funcția $k(\rho, \theta)$. O simplificare importantă se obține dacă integrăm pe cercul de rază ρ_s, lucru care este posibil deoarece este evident că, din cauza continuității, rezultatul integrării trebuie să fie independent de ρ. Pentru cazurile reale, ρ_s este însă foarte mic, de exemplu de ordinul 0,001, iar dacă ținem seama și de faptul că aceste considerații sînt valabile pentru variații relativ lente ale permeabilității, putem înlocui prin urmare în (51) funcția $k(\rho, \theta)$ cu valoarea ei din origine, pe care o notăm prin k_s. De asemenea, datorită valorilor foarte mici ale lui ρ_s, mai putem pune

$$e^{-\frac{\rho_s}{2}(\lambda \cos \theta + \nu \sin \theta)} \approx 1, \tag{53}$$

ori care ar fi θ, aceasta cu atît mai mult cu cît λ și ν sînt de asemenea mici. În aceste condiții, determinarea debitului revine la calculul unor integrale de forma

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos \theta \, d\theta = 0 \quad (m \neq 1), \qquad \int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin \theta \, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin \theta \, d\theta = 0 \quad (m \neq 1), \qquad \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos \theta \, d\theta = 0,$$

precum și cele corespunzătoare cazului $m = 1$, pe care credem că nu este necesar să le mai reamintim.

Introducînd aceste rezultate în (51) şi ţinînd seama de observaţiile precedente, găsim

$$Q = -\frac{\pi}{2}\rho_s k_s \{\lambda [M_1 I_1(\beta\rho_s) + N_1 K_1(\beta\rho_s)] + \nu [P_1 I_1(\beta\rho_s) + \\ + Q_1 K_1(\beta\rho_s)] - 4\beta [M_0 I_1(\beta\rho_s) - N_0 K_1(\beta\rho_s)]\}. \tag{54}$$

Să observăm însă că deoarece λ şi ν sînt mici, β dat de formula (29) va avea o valoare subunitară; reamintindu-ne şi faptul că ρ_s este foarte mic, rezultă că argumentul $\beta\rho_s$ are de asemenea o valoare foarte mică. În acest caz, avem însă [2]

$$I_1(\beta\rho_s) \approx 0, \tag{55}$$

iar din (40) obţinem

$$K_1(\beta\rho_s) \approx \frac{1}{\beta\rho_s}, \tag{56}$$

astfel încît expresia (54) a debitului devine

$$Q = \frac{\pi}{2\beta} k_s (\lambda N_1 + \nu Q_1 + 4\,\beta N_0), \tag{57}$$

sau

$$Q = \frac{2\pi k_s}{\mu(\lambda^2+\nu^2)} \left\{ \frac{1}{I_1(\beta)K_1(\beta\rho_s) - I_1(\beta\rho_s)K_1(\beta)} [(\lambda\alpha_1 + \nu\beta_1) I_1(\beta\rho_s) p_c - \right. \\ \left. - (\lambda\gamma_1 + \nu\delta_1) I_1(\beta) p_s] + (\lambda^2+\nu^2) \frac{\alpha_0 I_0(\beta\rho_s) p_c - \gamma_0 I_0(\beta) p_s}{I_0(\beta)K_0(\beta\rho_s) - I_0(\beta\rho_s)K_0(\beta)} \right\}, \tag{58}$$

unde am considerat valoarea absolută şi am înlocuit pe β, N_0, N_1, şi Q_1 prin expresiile lor, date de (29), (47) şi (48).

În formula debitului (58), coeficienţii α_0, α_1, β_0, β_1, γ_1 şi δ_1 vor fi determinaţi din dezvoltările în sume trigonometrice finite ale funcţiilor $g(\theta)$ şi $h(\theta)$ despre care am amintit mai sus. Tot din aceste dezvoltări vor rezulta şi ceilalţi coeficienţi α_m, β_m, γ_m şi δ_m care apar în formula presiunii (50). Prin urmare şi această formulă se va prezenta în calcule sub forma unei sume finite şi nu a unei serii, aşa cum a fost scrisă mai înainte pentru a se păstra generalitatea.

Consideraţiile precedente pot fi extinse şi la cazul mai general în care presiunile pe cercurile de raze r_c şi r_s (1 şi ρ_s) sînt variabile. Este evident că p_c şi p_s sînt funcţii periodice de θ şi problema se poate rezolva la fel ca mai înainte, considerînd dezvoltările în sume trigonometrice ale funcţiilor $\frac{p_c}{\mu} e^{\frac{1}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}$ şi $\frac{p_s}{\mu} e^{\frac{\rho_s}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}$.

5. **Soluţia pentru sonda considerată ca o sursă punctiformă.** Faptul că raza ρ_s a sondei este foarte mică, precum şi forma soluţiei găsite în cazul precedent, ne sugerează o simplificare constînd în înlocuirea sondei cu o

sursă punctiformă de debit dat. Dacă această sursă se află în origine, soluția trebuie să prezinte o singularitate logaritmică în acest punct și din (40) rezultă că această condiție este îndeplinită de soluția particulară a ecuației (28)

$$\Phi_1 = c_0 K_0 (\beta \rho). \tag{59}$$

Această soluție, evident, nu satisface condiția la limită a problemei. Într-adevăr, dacă presiunea este constantă pe conturul de alimentare, avem condiția

$$\rho = 1 \ (r = r_c), \ p = p_c, \quad \Phi = \Phi_c = -\frac{p_c}{\mu} e^{\frac{1}{2}(\lambda \cos\theta + \nu \sin\theta)} \tag{60}$$

și se observă imediat că este necesar să mai introducem o soluție particulară Φ_2, regulată în interiorul cercului de rază egală cu unitatea și care să ia pe acest cerc valorile

$$\Phi_2 |_{\rho=1} = \Phi_c - c_0 K_0 (\beta) = -\frac{p_c}{\mu} e^{\frac{1}{2}(\lambda \cos\theta + \nu \sin\theta)} - c_0 K_0 (\beta). \tag{61}$$

În acest caz, soluția problemei este

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \tag{62}$$

și satisface pe cercul de rază egală cu unitatea condiția (60).

Considerațiile precedente conduc pentru Φ_2 la o expresie de forma

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) I_m (\beta \rho), \tag{63}$$

astfel încît avem

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = C_0 K_0 (\beta \rho) + \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\,\theta + b_m \sin m\theta) I_m (\beta \rho). \tag{64}$$

Constantele a_m și b_m se determină pe calea indicată mai înainte și anume limitînd dezvoltarea (64) la un număr finit s de termeni și dezvoltînd condiția la limită într-o sumă trigonometrică cu același număr de termeni

$$\Phi_c = -\frac{p_c}{\mu} \sum_{m=0}^{s} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta). \tag{65}$$

Prin identificare, rezultă

$$\begin{gathered} a_0 = -\frac{p_c}{\mu} \frac{\alpha_0}{I_0(\beta)} - c_0 \frac{K_0 (\beta)}{I_0 (\beta)}, \\ a_m = -\frac{p_c}{\mu} \frac{\alpha_m}{I_m (\beta)}, \quad b_m = -\frac{p_c}{\mu} \frac{\beta_m}{I_m (\beta)}, \end{gathered} \tag{66}$$

şi presiunea are expresia

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}\Big\{[\alpha_0 p_c + \mu\, c_0\, K_0(\beta)]\,\frac{I_0(\beta\rho)}{I_0(\beta)} + {}$$

$$+ p_c \sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + \beta_m \sin m\theta)\,\frac{I_m(\beta\rho)}{I_m(\beta)} - \mu\, c_0\, K_0(\beta\rho)\Big\}. \qquad (67)$$

În felul acesta, mai rămîne nedeterminată constanta c_0; pentru a găsi valoarea acesteia, vom admite că este cunoscut debitul Q_0. Acesta se poate calcula însă cu ajutorul formulei (51); în acest scop, vom calcula mai întîi derivata presiunii în raport cu variabila ρ

$$\frac{\partial p}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)\,e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}\Big\{[\alpha_0 p_c + \mu c_0 K_0(\beta)]\,\frac{I_0(\beta\rho)}{I_0(\beta)} + {}$$

$$+ p_c\sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + \beta_m \sin m\theta)\,\frac{I_m(\beta\rho)}{I_m(\beta)} - \mu c_0 K_0(\beta\rho)\Big\} + \qquad (68)$$

$$+ e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}\Big\{[\alpha_0 p_c + \mu c_0 K_0(\beta)]\,\beta\,\frac{I_1(\beta\rho)}{I_0(\beta)} + \frac{\beta}{2}\,p_c\sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + {}$$

$$+ \beta_m\sin m\theta)\,\frac{I_{m-1}(\beta\rho)+I_{m+1}(\beta\rho)}{I_m(\beta)} + \mu\, c_0\beta\, K_1(\beta\rho)\Big\}.$$

Pentru integrare vom considera un cerc de rază ρ_s cu centrul în origine; deoarece este vorba de o sursă punctiformă, ρ_s poate fi luat oricît de mic. Prin urmare, pentru permeabilitate putem considera valoarea k_s din origine şi aproximaţia (53) este de asemenea valabilă. În aceste condiţii, debitul se calculează cu formula

$$Q_0 = -\frac{\rho_s k_s}{\mu}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_s} d\theta = \frac{\rho_s k_s}{\mu}\int_0^{2\pi}\Big\{(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)\,[(\alpha_0 p_c + {}$$

$$+ \mu c_0 K_0(\beta))\,\frac{I_0(\beta\rho_s)}{I_0(\beta)} + p_c\sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + \beta_m\sin m\theta)\,\frac{I_m(\beta\rho_s)}{I_m(\beta)} - {}$$

$$- \mu c_0 K_0(\beta\rho_s)] - 2\,\beta\,[(\alpha_0 p_c + \mu c_0 K_0(\beta))\,\frac{I_1(\beta\rho_s)}{I_0(\beta)} + {}$$

$$+ \frac{p_c}{2}\sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + \beta_m\sin m\theta)\,\frac{I_{m-1}(\beta\rho_s)+I_{m+1}(\beta\rho_s)}{I_m(\beta)} + \mu c_0 K_1(\beta\rho_s)]\Big\}\,d\theta.$$

$$(69)$$

Integralele sînt de aceeași formă cu cele întîlnite mai înainte și după calcule simple găsim

$$Q_0 = \frac{\pi \rho_s k_s}{2\mu}\Big\{(\lambda\alpha_1 + \nu\beta_1)\, p_c \frac{I_1(\beta\rho_s)}{I_1(\beta)} - 4\beta\,[(\alpha_0\, p_c + \mu c_0 K_0(\beta))\frac{I_1(\beta\rho_s)}{I_0(\beta)} + \\ + \mu c_0 K_1(\beta\rho_s)]\Big\}. \tag{70}$$

Comportarea funcțiilor $I_1(\beta\rho_s)$ și $K_1(\beta\rho_s)$ pentru valori foarte mici ale argumentului ne este însă cunoscută din formulele (55) și (56), așa că expresia debitului devine

$$Q_0 = -2\,\pi c_0 k_s \tag{71}$$

de unde rezultă

$$c_0 = -\frac{Q_0}{2\,\pi k_s}. \tag{72}$$

Prin urmare, expresia definitivă a presiunii este

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}\Big\{\Big[\alpha_0\, p_c - \frac{\mu Q_0}{2\,\pi k_s} K_0(\beta)\Big]\frac{I_0(\beta\rho)}{I_0(\beta)} + \\ + p_c\sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + \beta_m\sin m\theta)\,\frac{I_m(\beta\rho)}{I_m(\beta)} + \frac{\mu Q_0}{2\,\pi k_s} K_0(\beta\rho)\Big\}. \tag{73}$$

Remarcăm însă că valoarea constantei c_0 se poate găsi și fără a impune condiția ca debitul Q_0 să fie dat. În acest scop, vom considera tot un cerc de rază foarte mică ρ_s, cu centrul în origine, pe care vom admite că presiunea are valoarea constantă p_s (presiunea sondei). Ținînd seama de (53), expresia (67) devine, pe acest cerc,

$$p_s = [\alpha_0\, p_c + \mu c_0 K_0(\beta)]\,\frac{I_0(\beta\rho_s)}{I_0(\beta)} + p_c\sum_{m=1}^{s}(\alpha_m\cos m\theta + \beta_m\sin m\theta)\,\frac{I_m(\beta\rho_s)}{I_m(\beta)} - \\ - \mu c_0 K_0(\beta\rho_s). \tag{74}$$

Pentru valori foarte mici ale argumentului $\beta\rho_s$ avem însă [2]

$$I_0(\beta\rho_s) \approx 1,\quad I_m(\beta\rho_s) \approx 0 \quad (m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots) \tag{75}$$

și dacă ținem seama și de (40) rezultă

$$p_s \approx [\alpha_0\, p_c + \mu c_0 K_0(\beta)]\,\frac{1}{I_0(\beta)} + \mu c_0 \log\frac{\beta\rho_s}{2} \tag{76}$$

respectiv

$$c_0 = \frac{I_0(\beta)\, p_s - \alpha_0\, p_c}{\mu\Big[K_0(\beta) + I_0(\beta)\log\dfrac{\beta\rho_s}{2}\Big]}, \tag{77}$$

iar legea de variație a presiunii capătă forma

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)} \left\{ \left[\alpha_0 p_c + \frac{I_0(\beta)\, p_s - \alpha_0 p_c}{K_0(\beta) + I_0(\beta)\log\frac{\beta\rho_s}{2}} \right] \frac{I_0(\beta\rho)}{I_0(\beta)} + \right.$$

$$\left. + p_c \sum_{m=1}^{s} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta) \frac{I_m(\beta\rho)}{I_m(\beta)} - \frac{I_0(\beta)\, p_s - \alpha_0 p_c}{K_0(\beta) + I_0(\beta)\log\frac{\beta\rho_s}{2}} K_0(\beta\rho) \right\}. \tag{78}$$

La rîndul său, debitul are expresia, luată în valoare absolută

$$Q_0 = \frac{2\pi k_s}{\mu} \frac{I_0(\beta)\, p_s - \alpha_0 p_c}{K_0(\beta) + I_0(\beta)\log\frac{\beta\rho_s}{2}}. \tag{79}$$

Considerații analoage se pot face și pentru cazul în care presiunea pe conturul de alimentare este variabilă dar nu credem că este necesar să insistăm asupra lor.

6. Cazul sondei situate într-un punct oarecare. Rezultatele precedente ne permit să găsim soluția problemei și pentru un caz mai general, în care sonda, considerată ca o sursă punctiformă, nu se mai află în centrul conturului circular de alimentare.

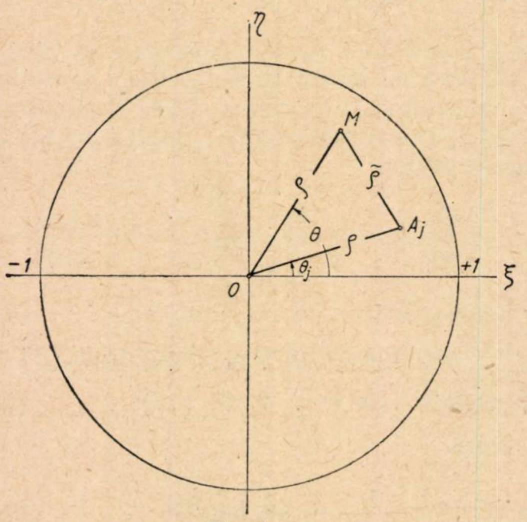


Fig. 1

Să presupunem astfel că sonda (sursa punctiformă) este situată în punctul A_j (vezi figura) și că are debitul Q_j cunoscut. Deoarece soluția va trebui să aibă o singularitate logaritmică în punctul A_j, vom nota cu $\tilde{\rho}$ distanța de la acest punct la un punct oarecare M și vom introduce o soluție particulară a ecuației (28) de forma

$$\Phi_1 = c_j K_0(\beta\tilde{\rho}),$$

care îndeplinește această condiție. Urmînd aceeași cale ca și mai înainte, va fi necesar să mai introducem o a doua soluție Φ_2, regulată peste tot în interiorul cercului de rază egală cu unitatea, așa fel ca să fie satisfăcută condiția la limită (60), dacă presupunem că presiunea pe conturul de alimentare este constantă. Mai întîi, trebuie însă să găsim o expresie convenabilă pentru valorile funcției Φ_1 pe cercul de rază egală cu unitatea. În acest scop, vom observa că avem (fig. 1)

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 + \rho_j^2 - 2\,\rho\,\rho_j \cos(\theta - \theta_j) \tag{80}$$

și prin urmare

$$K_0(\beta\tilde{\rho}) = K_0\left(\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_j^2 - 2\,\rho\,\rho_j \cos(\theta - \theta_j)}\right). \tag{81}$$

Dacă ținem seama de faptul că $0 < \rho_j < 1$, putem aplica teorema de adunare [1] pentru funcția $K_0(\beta\tilde{\rho})$ și obținem pe cercul de rază $\rho = 1$,

$$K_0\left(\beta\sqrt{1 + \rho_j^2 - 2\,\rho_j \cos(\theta - \theta_j)}\right) = K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j) + 2\sum_{m=1}^{\infty} K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)\cos m(\theta - \theta_j). \tag{82}$$

Dacă presiunea este constantă pe acest cerc, condiția la limită a problemei este (60) și prin urmare soluția Φ_2 trebuie să îndeplinească la rîndul ei condiția

$$\Phi_2|_{\rho=1} = \Phi_e - c_j K_0\left(\beta\sqrt{1 + \rho_j^2 - 2\,\rho_j\cos(\theta - \theta_j)}\right) = -\frac{p_c}{\mu}\,e^{\frac{1}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)} - c_j\left[K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j) + 2\sum_{m=1}^{\infty} K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)\cos m(\theta - \theta_j)\right]. \tag{83}$$

Forma generală a acestei soluții este

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (d_m \cos m\theta + f_m \sin m\theta)\,I_m(\beta\rho) \tag{84}$$

și pentru determinarea constantelor vom proceda întocmai ca și în cazurile precedente. Vom limita deci dezvoltările la un număr finit s de termeni și vom reprezenta funcția $e^{\frac{1}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}$ tot printr-o sumă trigonometrică, avînd același număr s de termeni, convenabil ales pentru a se obține o precizie suficientă în calcule. Rezultă în cele din urmă relația, valabilă pe cercul de rază $\rho = 1$,

$$\sum_{m=0}^{s} (d_m \cos m\theta + f_m \sin m\theta)\,I_m(\beta) = -\frac{p_c}{\mu}\sum_{m=0}^{s} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta) - c_j\left[K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j) + 2\sum_{m=1}^{s} K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)(\cos m\theta_j \cos m\theta + \sin m\theta_j \sin m\theta)\right] \tag{85}$$

şi prin identificare obţinem

$$\begin{aligned} d_0 &= -\frac{p_c}{\mu}\frac{\alpha_0}{I_0(\beta)} - c_j\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)}, \\ d_m &= -\frac{p_c}{\mu}\frac{\alpha_m}{I_m(\beta)} - 2\,c_j\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)}\cos m\theta_j, \\ f_m &= -\frac{p_c}{\mu}\frac{\beta_m}{I_m(\beta)} - 2\,c_j\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)}\sin m\theta_j. \end{aligned} \tag{86}$$

Înlocuind aceste valori în (84), cu observaţia că numărul de termeni este acum finit, avem

$$\begin{aligned} \Phi_2 = -\frac{p_c}{\mu}\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m\cos m\theta + \beta_m\sin m\theta}{I_m(\beta)}\,I_m(\beta\rho) - c_j\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)}\,I_0(\beta\rho) - \\ - 2\,c_j\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)}\,I_m(\beta\rho)\cos m(\theta-\theta_j), \end{aligned} \tag{87}$$

iar soluţia problemei cu condiţia la limită (60) este

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = c_j\,K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2+\rho_j^2-2\,\rho\,\rho_j\cos(\theta-\theta_j)}\right) - \\ -\frac{p_c}{\mu}\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m\cos m\,\theta + \beta_m\sin m\,\theta}{I_m(\beta)}\,I_m(\beta\rho) - c_j\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)}\,I_0(\beta\rho) - \\ - 2\,c_j\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)}\,I_m(\beta\rho)\cos m(\theta-\theta_j) \end{aligned} \tag{88}$$

şi se constată cu uşurinţă că satisface condiţia (60), bineînţeles dacă ţinem seama de (82).

De aici obţinem imediat expresia presiunii sub forma

$$\begin{aligned} p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}\Bigg[p_c\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m\cos m\,\theta + \beta_m\sin m\,\theta}{I_m(\beta)}\,I_m(\beta\rho) + \\ + \mu c_j\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)}\,I_0(\beta\rho) + 2\,\mu c_j\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)}\,I_m(\beta\rho)\cos m(\theta-\theta_j) - \\ - \mu c_j K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2+\rho_j^2-2\,\rho\,\rho_j\cos(\theta-\theta_j)}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{89}$$

şi urmează să determinăm valoarea constantei c_j. În acest scop, vom considera un cerc de rază foarte mică $\tilde{\rho}_j$ cu centrul în punctul A_j. Din motivele arătate mai înainte, putem lua pentru permeabilitate o valoare constantă k_j, care este aceea din punctul A_j. Vom observa de asemenea că din expresia (89) a presiunii este necesar să reținem numai termenul care prezintă o singularitate logaritmică în punctul A_j, deoarece acesta este singurul care dă o contribuție diferită de zero la valoarea debitului. Mai departe, deoarece $\widetilde{\rho}_j$ poate fi oricît de mic, bineînțeles finit, rezultă că putem pune

$$e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)} \approx e^{-\frac{\rho_j}{2}(\lambda\cos\theta_j+\nu\sin\theta_j)} = \varepsilon_j . \tag{90}$$

Deoarece avem

$$\frac{\partial K_0(\beta\widetilde{\rho})}{\partial\widetilde{\rho}} = -\beta K_1(\beta\widetilde{\rho}) = -\beta K_1\left(\beta\sqrt{\rho^2+\rho_j^2-2\rho\rho_j\cos(\theta-\theta_j)}\right), \tag{91}$$

iar pentru $\widetilde{\rho}=\widetilde{\rho}_j$ foarte mic găsim din (40)

$$\beta K_1(\beta\widetilde{\rho}_j) \approx \frac{1}{\widetilde{\rho}_j}, \tag{92}$$

la integrarea pe cercul de rază $\widetilde{\rho}_j$, obținem

$$Q_j = -2\pi k_j\,\varepsilon_j\,c_j \tag{93}$$

și

$$c_j = -\frac{Q_j}{2\pi k_j\,\varepsilon_j} \tag{94}$$

astfel că expresia presiunii devine

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta+\nu\sin\theta)}\left\{p_c\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m\cos m\theta+\beta_m\sin m\theta}{I_m(\beta)}I_m(\beta\rho)+\right.$$

$$+\frac{\mu Q_j}{2\pi k_j\,\varepsilon_j}K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2+\rho_j^2-2\rho\rho_j\cos(\theta-\theta_j)}\right)-\frac{\mu Q_j}{2\pi k_j\,\varepsilon_j}\left[\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)}I_0(\beta\rho)+\right.$$

$$\left.\left.+2\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)}I_m(\beta\rho)\cos m(\theta-\theta_j)\right]\right\}. \tag{95}$$

Se observă imediat că dacă punem $\rho_j=0$ și $\varepsilon_j=1$, regăsim rezultatele din cazul precedent, al sursei punctiforme situate în origine, așa cum era de așteptat.

Și în acest caz se poate obține o valoare aproximativă a constantei c_j fără a impune cunoașterea debitului Q_j. Revenind astfel la expresia (89) a presiunii, vom admite că pe un cerc de rază foarte mică $\widetilde{\rho}_j$, avînd centrul în punctul A_j, presiunea are valoarea constantă p_j (presiunea sondei). Dacă $\widetilde{\rho}_j$ este foarte mic, putem pune cu o bună aproximație $\rho \approx \rho_j$, $\theta \approx \theta_j$ și avem

$$p_j = e^{-\frac{\rho_j}{2}(\lambda \cos \theta_j + \nu \sin \theta_j)} \left[p_c \sum_{m=0}^{s} \frac{\alpha_m \cos m\,\theta_j + \beta_m \sin m\,\theta_j}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho_j) + \right.$$

$$\left. + \mu c_j \frac{K_0(\beta)\, I_0^2(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)} + 2\,\mu c_j \sum_{m=1}^{s} \frac{K_m(\beta)\, I_m^2(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} - \mu c_j K_0(\beta\,\widetilde{\rho}_j) \right]. \tag{96}$$

Ținînd seama de prima formulă (40), obținem

$$c_j = \frac{p_j\, e^{\frac{\rho_j}{2}(\lambda \cos \theta_j + \nu \sin \theta_j)} - p_c \sum\limits_{m=0}^{s} \frac{\alpha_m \cos m\,\theta_j + \beta_m \sin m\,\theta_j}{I_m(\beta)} I_m(\beta\rho_j)}{\mu \left[\frac{K_0(\beta)\, I_0^2(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)} + 2 \sum\limits_{m=1}^{s} \frac{K_m(\beta)\, I_m^2(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} + \log \frac{\beta\widetilde{\rho}_j}{2} \right]}, \tag{97}$$

expresie care trece de asemenea în (77) atunci cînd $\rho_j = 0$. Formula care dă valoarea debitului este deci

$$Q_j = \frac{2\,\pi k_j}{\mu} \frac{p_j - p_c\, \varepsilon_j \sum\limits_{m=0}^{s} \frac{\alpha_m \cos m\,\theta + \beta_m \sin m\,\theta}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho_j)}{\frac{K_0(\beta)\, I_0^2(\beta\,\rho_j)}{I_0(\beta)} + 2 \sum\limits_{m=1}^{s} \frac{K_m(\beta)\, I_m^2(\beta\,\rho_j)}{I_m(\beta)} + \log \frac{\beta\widetilde{\rho}_j}{2}}, \tag{98}$$

deoarece

$$e^{\frac{\rho_j}{2}(\lambda \cos \theta_j + \nu \sin \theta_j)} = \frac{1}{\varepsilon_j}. \tag{99}$$

Înlocuind valoarea (97) a constantei c_j în (89) putem scrie și expresia presiunii în cazul cînd nu se dă debitul.

7. **Generalizare pentru cazul a *n* sonde.** Rezultatele precedente se generalizează cu ușurință pentru cazul a n sonde, considerate ca surse punctiforme, dispuse oricum în interiorul cercului de rază $\rho = 1$. Într-adevăr, ecuația (28) fiind liniară, soluția Φ_1 care conține singularitățile corespunzătoare surselor situate în punctele $A_j\,(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ devine

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j K_0\left(\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_j^2 - 2\,\rho\,\rho_j\, \cos(\theta - \theta_j)}\right) \tag{100}$$

și are pe frontieră valoarea

$$\Phi_1 \Big|_{\rho=1} = \sum_{j=1}^{n} \left[K_0(\beta)\, I_0(\beta\,\rho_j) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(\beta)\, I_m(\beta\,\rho_j) \cos m(\theta - \theta_j) \right]. \tag{101}$$

Dacă adoptăm și în acest caz condiția la limită (60) soluția Φ_2 trebuie să aibă forma

$$\Phi_2 = -\frac{p_c}{\mu}\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m \cos m\,\theta + \beta_m \sin m\,\theta}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho) - \sum_{j=1}^{n} c_j\left[\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)} I_0(\beta\,\rho) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho)\,\cos m\,(\theta - \theta_j)\right]. \qquad (102)$$

Prin urmare

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2 + \rho_j^2 - 2\,\rho\,\rho_j\cos(\theta - \theta_j)}\right) -$$

$$-\frac{p_c}{\mu}\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m \cos m\,\theta + \beta_m \sin m\,\theta}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho) - \sum_{j=1}^{u} c_j\left[\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)} I_0(\beta\,\rho) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} I_m(\beta\rho)\,\cos m\,(\theta - \theta_j)\right] \qquad (103)$$

și presiunea are expresia

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}\left\{p_c\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m \cos\, m\,\theta + \beta_m \sin\, m\,\theta}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho) - \right.$$

$$-\mu\sum_{j=1}^{n} c_j K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2 + \rho_j^2 - 2\,\rho\,\rho_j\cos(\theta - \theta_j)}\right) + \mu\sum_{j=1}^{n} c_j\left[\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)} I_0(\beta\rho) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho)\,\cos m\,(\theta - \theta_j)\right]. \qquad (104)$$

Constantele c_j sînt date de formula (94), care presupune cunoașterea debitelor Q_j ale sondelor, așa că în cele din urmă expresia presiunii devine

$$p = e^{-\frac{\rho}{2}(\lambda\cos\theta + \nu\sin\theta)}\left\{p_c\sum_{m=0}^{s}\frac{\alpha_m \cos\, m\,\theta + \beta_m \sin\, m\,\theta}{I_m(\beta)} I_m(\beta\,\rho) + \right.$$

$$+\frac{\mu}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{k_j\,\varepsilon_j} K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2 + \rho_j^2 - 2\,\rho\,\rho_j\cos(\theta - \theta_j)}\right) -$$

$$\left. -\frac{\mu}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{k_j\,\varepsilon_j}\left[\frac{K_0(\beta)\,I_0(\beta\,\rho_j)}{I_0(\beta)} I_0(\beta\,\rho) + 2\sum_{m=1}^{s}\frac{K_m(\beta)\,I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} I_m(\beta\rho)\cos m\,(\theta - \theta_j)\right]\right\}. \qquad (105)$$

Dacă debitele Q_j nu sînt date, putem recurge la o determinare aproximativă a constantelor c_j pe o cale analoagă cu aceea întrebuințată mai înainte. Să considerăm astfel o sursă situată în punctul A_i și să admitem că pe un cerc de rază foarte mică $\tilde{\rho}_i$ cu centrul în punctul A_i, presiunea are valoarea constantă p_i (presiunea sondei). Putem scrie deci, reluînd expresia (104), în care admitem $\rho \approx \rho_i$, $\theta \approx \theta_i$,

$$p_i = e^{-\frac{\rho_i}{2}(\lambda \cos \theta_i + \nu \sin \theta_i)} \left\{ p_c \sum_{m=0}^{s} \frac{\alpha_m \cos m\,\theta_i + \beta_m \sin m\,\theta_i}{I_m(\beta)} I_m(\beta \rho_i) - \right.$$

$$- \mu c_i K_0(\beta \tilde{\rho}_i) - \mu \sum_{j=1}^{n}{}' c_j K_0\left(\beta \sqrt{\rho_i^2 + \rho_j^2 - 2 \rho_i \rho_j \cos(\theta_i - \theta_j)}\right) +$$

$$\left. + \mu \sum_{j=1}^{n} c_j \left[\frac{K_0(\beta) I_0(\beta \rho_j)}{I_0(\beta)} I_0(\beta \rho_i) + 2 \sum_{m=1}^{s} \frac{K_m(\beta) I_m(\beta \rho_j)}{I_m(\beta)} I_m(\beta \rho_i) \cos m(\theta_i - \theta_j) \right] \right\} \quad (106)$$

unde semnul $\sum\limits_{j=1}^{n}{}'$ arată că din sumare se omite termenul de indice i. Scriind n asemenea relații, obținem un sistem de ecuații algebrice liniare cu necunoscutele c_i.

Este evident că se poate trata și cazul în care presiunea variază de la un punct la altul al conturului de alimentare, dar calculele sînt absolut analoage.

8. **Observații finale și concluzii.** Metoda de rezolvare expusă a fost introdusă luînd ca punct de plecare o aproximație în ecuația diferențială (6) a problemei. Semnalăm însă că există și cazuri de variație posibilă a permeabilității pentru care soluțiile date sînt exacte. Dacă ne referim la relațiile (24) se observă imediat că legi de variație de forma

$$k = k_0 e^{\lambda \xi}, \qquad k = k_0 e^{\nu \eta}, \tag{107}$$

sau mai general

$$k = k_0 e^{\lambda \xi + \nu \eta}, \tag{108}$$

unde constanta k_0 are o semnificație imediată, satisfac exact aceste relații. Prin urmare, dacă permeabilitatea are o variație exponențială de felul arătat mai sus, soluțiile date sînt riguroase.

De asemenea, dacă λ și ν sînt mici, există legi de variație liniară a permeabilității de forma

$$k = k_1 \xi + k_2 \eta + k_0, \tag{109}$$

precum și cele corespunzătoare formulelor (107) care printr-o determinare corespunzătoare a coeficienților k_1 și k_2, diferă destul de puțin de legea exponențială. Pentru aceste cazuri soluțiile găsite reprezintă aproximații bune. O apropiere și mai bună de legile exponențiale se poate obține cu polinoame de grad superior, așa cum este ușor de constatat. În orice caz, putem afirma că aplicarea soluțiilor găsite la diferite situații poate conduce la rezultate destul de bune, cu condiția ca legea de variație reală a permeabilității să nu se depărteze prea mult de o lege exponențială de tipul celor indicate mai sus. Întrucît variația permeabilității are un efect important îndeosebi în zona din apropierea găurilor de sondă, este necesar ca legea exponenţială să aibă valori apropiate de cele reale ale permeabilităţii în special în aceste regiuni. În cazul general, legea de variaţie a permeabilităţii poate avea o formă oarecare, satisfăcînd însă condiţia unei variaţii lente.

În legătură cu ecuaţia (28), remarcăm că funcţia

$$G(M, M_j) = K_0\left(\beta\sqrt{\rho^2 + \rho_j^2 - 2\rho\rho_j\cos(\theta-\theta_j)}\right) - \frac{K_0(\beta)I_0(\beta\rho_j)}{I_0(\beta)}\, I_0(\beta\rho) -$$

$$- 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_m(\beta)I_m(\beta\rho_j)}{I_m(\beta)} I_m(\beta\rho)\cos m(\theta-\theta_j), \qquad (110)$$

simetrică în raport cu $M(\rho, \theta)$ şi $M_j(\rho_j, \theta_j)$, este o soluţie a acestei ecuaţii în cercul de rază $\rho = 1$, nulă pe acest cerc şi avînd o singularitate logaritmică pentru $M = M_j$. Prin urmare $G(M, M_j)$ este funcţia lui Green pentru ecuaţia (28) şi pentru domeniul considerat (cercul de rază $\rho = 1$ cu centrul în origine). Cu ajutorul acestei funcţii, putem ajunge la reprezentări integrale ale soluţiei ecuaţiei (28), utilizabile în diferite probleme.

Primită la redacţie la 30 iulie 1958.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИТОКА К СКВАЖИНАМ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается вопрос плоского стока несжимаемой жидкости через пористую изотропную, но неоднородную среду. Дифференциальное уравнение задачи пишется в виде (6), что наводит на мысль о возможности некоторого приближения в случае достаточно медленного изменения водопроницаемости. После допущения этого приближения, изменяющего некоторые коэффициенты уравнения, приведенного таким образом к виду (13), производится замена функции (14), примененная автором в своей предыдущей работе [3]. Таким образом, получается уравнение (16), которое записывается в безразмерных полярных координатах. Полученное в результате этого уравнение (28) применяется сначала к стоку в кругловом кольце, причем напор принимается постоянным на обоих окружностях. При этих условиях дается выражение напора (50) и дебита (58). Затем ищется решение для скважины, рассматриваемой как точечный источник, расположенный в центре кругового контура, и получается выражение напора (73) при заданном дебите источника, а также другое выражение для напора (78) и дебита (79) при заданном напоре скважины. Результаты распространяются на случай скважины, рассматриваемой как точечный источник, расположенный в некоторой точке внутренности кругового контура, причем приводятся выражения (95) для напора и (98) для дебита. Далее метод обобщается на случай n скважин при их произвольном расположении внутри кругового контура, причем выражение напора имеет вид (105) при заданном дебите скважин.

Указывается также способ решения в случае, когда известен напор в скважинах. В заключение показаны возможности применения найденных решений.

MÉTHODE D'APPROXIMATION POUR L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT VERS LES PUITS DE PÉTROLE À TRAVERS DES MILIEUX POREUX NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur considère le problème de l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux isotrope mais non homogène. L'équation différentielle du problème peut être mise sous la forme (6) qui suggère une approximation pour le cas où la perméabilité a une variation suffisamment lente. Après application de cette approximation, qui porte sur certains coefficients de l'équation (6) — laquelle prend la forme (13) —, on y introduit le changement de fonction déjà utilisé par l'auteur dans un travail antérieur [3]. De cette manière, on arrive à l'équation (16) et on effectue ensuite un changement de variables, en passant aux coordonnées polaires adimensionnelles. L'équation (28) ainsi obtenue trouve son application à l'étude de l'écoulement dans une couronne circulaire, la pression étant supposée constante sur les deux cercles. Dans ces conditions, on trouve l'expression de la pression (50) et celle du débit (58). Par la suite, on cherche la solution pour un puits de pétrole considéré comme une source située au centre du contour circulaire, et on obtient l'expression de la pression (73), dans l'hypothèse d'un débit de la source donné, et une autre expression de la pression (78) et du débit, dans l'hypothèse d'une pression au puits connue. Les résultats sont étendus au cas d'un puits, toujours considéré comme une source, qui se trouve dans un point quelconque à l'intérieur du cercle ; les formules de la pression (95) et du débit (98) expriment les conclusions de cette étude. On passe ensuite à la généralisation pour le cas de *n* puits placés d'une manière quelconque à l'intérieur du contour circulaire, l'expression de la pression étant (105) au cas où les débits sont connus. On indique ensuite la voie à suivre pour trouver la solution lorsque l'on connaît les pressions au puits. En conclusion, on montre les possibilités d'application des solutions trouvées.

BIBLIOGRAFIE

1. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică.* Ed. tehnică, București, 1958, 35—37 și 146.
2. N. N. LEBEDEV, *Funcții speciale și aplicațiile lor.* Ed. tehnică, București, 1957, 162 și 202.
3. T. OROVEANU, *Scurgerea unui fluid printr-un mediu poros cu neomogenitate redusă.* Comunicările Acad. R.P.R., **V**, *5*, 843—846 (1955).
4. A. N. TIHONOV, A. A. SAMARSKI, *Ecuațiile fizicii matematice.* Ed. tehnică, București, 1956, 445—446.

DETERMINAREA LUNGIMII DE STABILIZARE A MIŞCĂRII FLUIDELOR CU SUPRAFAŢĂ LIBERĂ ÎN CANALE LARGI CU FUND ORIZONTAL

DE

SIMION HÎNCU

Studiul scurgerii fluidelor în porţiunea de început a canalelor largi cu nivel liber, pe cît ne este cunoscut, a fost efectuat teoretic doar de Chen-Che-Pen în lucrările [1] şi [2], în cazul mişcării fluidelor în regim laminar. Chen-Che-Pen rezolvă această problemă pornind de la ecuaţia continuităţii şi ecuaţia cantităţii de mişcare, în care neglijează termenii ce conţin acţiunea forţelor de inerţie.

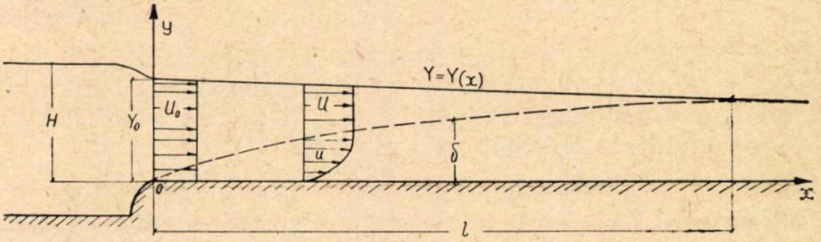


Fig. 1

În lucrarea de faţă ne propunem să determinăm lungimea de stabilizare a mişcării fluidelor cu suprafaţă liberă în canale largi cu fund orizontal în regim laminar şi turbulent, pornind de la ecuaţiile integrale ale stratului limită şi ţinînd seama şi de efectul forţelor de inerţie.

Mişcarea o raportăm la un sistem de coordonate conform figurii 1 şi presupunem realizate următoarele condiţii :

— în secţiunea de intrare a fluidului în canal, viteza este uniform distribuită ;

— în aval de secţiunea de intrare, datorită frecării şi aderenţii fluidului de fundul canalului apare şi se dezvoltă stratul limită, deasupra căruia fluidul se mişcă fără frecare;

— presiunea se repartizează hidrostatic în orice secţiune a curentului, perpendiculară pe fundul canalului.

În cele ce urmează folosim următoarele notaţii:

U_0 — viteza fluidului în secţiunea de început,
U — viteza fluidului în zona fără frecare într-o secţiune curentă,
u — viteza fluidului în stratul limită,
$Y = Y(x)$ — curba suprafeţei libere de scurgere,
δ — grosimea stratului limită
$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ — grosimea de eliminare,
τ_0 — efortul unitar de frecare pe fund,
ρ — masa specifică a fluidului,
μ — coeficientul de viscozitate dinamică,
ν — coeficientul de viscozitate cinematică,
g — acceleraţia gravitaţională,
γ — greutatea specifică a fluidului,
H — înălţimea energetică totală a curentului,
Y_0 — înălţimea curentului în secţiunea de intrare,
$\mathcal{F}r = \frac{U_0}{\sqrt{gY_0}}$ — numărul lui Froude,
$\mathcal{R}e = \frac{U_0 Y_0}{\nu}$ — numărul lui Reynolds,

$$\eta = \frac{U}{U_0}; \qquad X = \frac{x}{Y_0}.$$

Considerînd două secţiuni normale pe planul fundului canalului, una în originea axelor de coordonate şi alta la distanţa x, atît pentru regimul laminar de mişcare a fluidului, cît şi pentru regimul turbulent, putem scrie următoarele ecuaţii ale mişcării

$$\int_0^Y \rho u^2\, dy - \rho U_0^2 Y_0 = \gamma \int_0^{Y_0} (Y_0 - y)\, dy - \gamma \int_0^Y (Y - y) dy - \int_0^x \tau_0\, dx, \tag{1}$$

ecuaţia cantităţii de mişcare,

$$U(Y - \delta^*) = U_0 Y_0 \tag{2}$$

ecuaţia continuităţii,

$$\frac{U_0^2}{2g} + Y_0 = \frac{U^2}{2g} + Y, \tag{3}$$

ecuaţia lui Bernoulli.

Derivînd ecuația (1) în raport cu x, obținem în locul ei ecuația (4)

$$\int_0^Y 2\,\rho u \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + \rho U^2 \frac{dY}{dx} + \gamma Y \frac{dy}{dx} + \tau_0 = 0. \tag{4}$$

Regim laminar de mișcare a fluidului. Admitem că distribuția vitezelor în stratul limită este parabolică

$$\frac{u}{U} = 2\,\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}. \tag{5}$$

În acest caz avem

$$\delta^{\star} = \frac{1}{3}\,\delta \tag{6}$$

iar pentru efortul unitar de frecare la perete din relația lui Newton obținem

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 2\mu\,\frac{U}{\delta}. \tag{7}$$

În locul ecuațiilor (2) și (4) putem scrie

$$U\left(Y - \frac{1}{3}\,\delta\right) = U_0 Y_0, \tag{8}$$

$$2\,\rho U\left(Y - \frac{7}{15}\,\delta\right)\frac{dU}{dx} + \rho U^2\left(\frac{dY}{dx} - \frac{7}{15}\frac{d\delta}{dx}\right) + \gamma\,Y\,\frac{dY}{dx} + 2\mu\,\frac{U}{\delta} = 0. \tag{9}$$

Ecuațiile (3) și (8) permit să exprimăm variabilele Y și δ funcție de U și să obținem după unele transformări

$$dx = \frac{3}{10\nu}\left(U_0 Y_0 + \frac{U^3}{2g} - U\,\frac{U_0^2}{2g} - Y_0 U\right)\left(7\,U_0 Y_0 + 13\frac{U^3}{2g} - 9\,U\,\frac{U_0^2}{2g} - 9\,U\,Y_0\right)\frac{dU}{U^2}. \tag{10}$$

Integrînd pe (10) de la U_0 la U și trecînd la forme adimensionale, ajungem la următoarea relație

$$\frac{x}{Y_0} = \frac{3}{10}\,\mathcal{R}e\left[7\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) - 16\left(\frac{\mathcal{F}r^2}{2} + 1\right)\ln\eta + 9\left(\frac{\mathcal{F}r^2}{2} + 1\right)^2(\eta - 1) + \right.$$
$$\left. + 5\,\mathcal{F}r^2\,(\eta^2 - 1) - \frac{11}{3}\,\mathcal{F}r^2\left(\frac{\mathcal{F}r^2}{2} + 1\right)(\eta^3 - 1) + \frac{13}{20}\,\mathcal{F}r^4(\eta^5 - 1)\right]. \tag{11}$$

În secțiunea în care $\delta = \mathbf{Y}_l$ avem $x = 1$, $\eta = \eta_l$. Din ecuațiile lui Bernoulli și de continuitate rezultă

$$\frac{Y_l}{Y_0} = \frac{3}{2\eta_l}, \tag{12}$$

$$1 - \frac{3}{2\eta_l} = \frac{\mathcal{F}r^2}{2}\,(\eta_l{}^2 - 1), \tag{13}$$

de unde putem determina pe η_l și respectiv, din (11), pe $\frac{l}{Y_0}$.

Pentru $\mathcal{F}r \neq 0$ putem scrie

$$\eta_l^3 - \left(\frac{2}{\mathcal{F}r^2} + 1\right)\eta_l + \frac{3}{\mathcal{F}r^2} = 0. \tag{14}$$

Din analiza ecuațiilor (12), (13) și (14) și din respectarea condițiilor fizice ale mișcării fluidului rezultă că soluția unic valabilă pentru η_l este

$$\eta_l = 2\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\mathcal{F}r^2}\right)} \cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arc\,cos} \frac{9\sqrt{3}\,\mathcal{F}r}{2(\mathcal{F}r^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}\right], \tag{15}$$

ce corespunde valorilor $1,5 < \eta_l <$ și $0 < \mathcal{F}r < 0,405$.

Pentru numere $\mathcal{F}r > 0,405$ vom analiza posibilitatea descrierii matematice a scurgerii în cazul mișcării fluidului în regim turbulent.

Relația (11) $\frac{x}{Y_0} = f\,(\mathcal{R}e, \mathcal{F}r, \eta)$,

dă pentru lungimea de stabilizare a mișcării fluidului valori cu mult mai mari decît cele obținute de Chen — Cho — Pen. Pentru numere $\mathcal{F}r$ mici ($\mathcal{F}r < 0,1 \div 0,2$) cu suficientă aproximație pentru practică în locul relației (11) se poate utiliza relația (16)

$$\frac{x}{Y_0} = \frac{3}{10}\mathcal{R}e\left[7\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) - 16 \ln \eta + 9\,(\eta - 1)\right]\cdot \tag{16}$$

Relația (16) este identică cu cea obținută de **Leibensohn** și citată de **Targ** la[3] pentru canale largi sub presiune; punînd $\eta_l = 1,5$ obținem $\frac{l'}{Y_0} =$ $= 0,103\,\mathcal{R}e.$ (16′)

Regim turbulent de mișcare a fluidului. Presupunem că pe toată lungimea de stabilizare a mișcării fluidelor repartiția vitezelor în stratul limită este de forma

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \tag{17}$$

iar efortul unitar de frecare a fluidului de fundul canalului poate fi exprimat de relația

$$\tau_0 = 0,0225\,\rho U^{\frac{7}{4}}\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{18}$$

Folosind expresia (17) ecuațiile (2) și (4) devin

$$U\left(Y - \frac{\delta}{8}\right) = U_0 Y_0, \tag{19}$$

$$2\,\rho U\frac{dU}{dx}\left(Y - \frac{2}{9}\,\delta\right) + \rho U^2\left(\frac{dY}{dx} - \frac{2}{9}\frac{d\delta}{dx}\right) + \gamma Y\frac{dY}{dx} + \tau_0 = 0. \tag{20}$$

Alegem ca variabilă independentă viteza U. Cu ajutorul ecuațiilor (3) și (19) explicităm mărimile Y și δ funcție de U și le introducem în ecuația (20). Obținem după unele transformări

$$dx = \frac{\left(23\,UH - 16\,U_0 Y_0 - 30\,\frac{U^3}{2g}\right)\left(UH - \frac{U^3}{2g} - U_0 Y_0\right)^{\frac{1}{4}} dU}{0{,}121\,\nu^{\frac{1}{4}}\quad U^2}, \tag{21}$$

sau, introducînd mărimile adimensionale $\mathcal{F}r, \mathcal{R}e, \eta$ lungimea de stabilizare a mișcării turbulente este dată de integrala

$$\frac{l}{Y_0} = 8{,}3\,\mathcal{R}e^{\frac{1}{4}} \int_0^{\eta_l} \left[\frac{23\left(1 + \frac{\mathcal{F}r^2}{2}\right)}{\eta} - \frac{16}{\eta^2} - 15\,\mathcal{F}r^2\,\eta\right] \left[\left(1 + \frac{\mathcal{F}r^2}{2}\right)\eta - \eta^2 \frac{\mathcal{F}r^2}{2} - 1\right]^{\frac{1}{4}} d\eta \tag{22}$$

unde η_l este valoarea raportului η în secțiunea în care $\delta = Y_l$.

η_l se determină cu ajutorul ecuațiilor (3) și (19). Într-adevăr ecuația (19) ne dă

$$\frac{Y_l}{Y_0} = \frac{8}{7}\,\eta_l. \tag{23}$$

Introducînd această expresie în ecuația lui Bernoulli obținem pentru determinarea mărimii η_l o ecuație de gradul trei :

$$\eta_l^3 \frac{\mathcal{F}r^2}{2} - \eta_l \left(1 + \frac{\mathcal{F}r^2}{2}\right) + \frac{8}{7} = 0. \tag{24}$$

Pentru numere $\mathcal{F}r = 0$ avem $\eta_l = \frac{8}{7}$. Pentru numere $\mathcal{F}r \neq 0$ ecuația (24) poate fi adusă la forma canonică obișnuită

$$\eta_l^3 - \eta_l \left(\frac{2}{\mathcal{F}r^2} + 1\right) + \frac{16}{7\,\mathcal{F}r^2} = 0. \tag{25}$$

Fie η_{l1}, η_{l2}, η_{l3} cele trei rădăcini ale acestei ecuații. Din relațiile între coeficienți și rădăcini rezultă că una din ele este neapărat reală și negativă. Soluțiile fizic posibile ale acestei ecuații sînt pentru cazul în care discriminantul ei este negativ sau egal cu zero

$$\frac{64}{49\,\mathcal{F}r^4} - \frac{1}{27}\left(\frac{2}{\mathcal{F}r^2} + 1\right)^3 \leqslant 0. \tag{26}$$

Condiția (26) are loc pentru numere $\mathcal{F}r \leqslant 0{,}6$ sau $\mathcal{F}r^2 \leqslant 0{,}36$. Pentru numere $\mathcal{F}r$ superioare acestei limite va trebui să adoptăm o altă lege cu privire la repartiția vitezelor în stratul limită.

Dacă admitem pentru repartiția vitezelor expresia mai generală

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{27}$$

condiția (26) devine

$$\frac{(n+1)^2}{n^2 \mathcal{F}r^4} - \frac{1}{27}\left(\frac{2}{\mathcal{F}r^2} + 1\right)^3 \leqslant 0. \tag{28}$$

Cînd n crește, limita superioară a numărului $\mathcal{F}r$ de asemenea crește apropiindu-se de unitate. Pentru $n \to \infty$ condiția (28) este respectată pentru orice numere $\mathcal{F}r$.

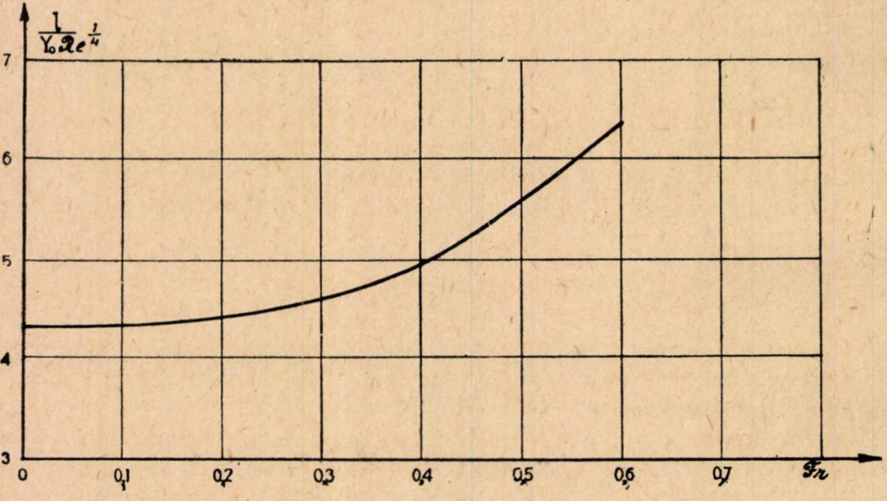


Fig. 2

Cazul $n = 7$ admis de noi conduce la următoarea expresie pentru η_l :

$$\eta_l = 2\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\mathcal{F}r^2}\right)} \cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arc\,cos} \frac{24\sqrt{3}\mathcal{F}r}{7\left(2 + \mathcal{F}r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{29}$$

Integrala (22) nu se poate efectua exact, decît în cazul asimptotic $\mathcal{F}r \to 0$. În acest caz obținem

$$\frac{x}{Y_0} = 8{,}3\, \mathcal{R}e^{\frac{1}{4}} \left[92\,(\eta - 1)^{\frac{1}{4}} + 16\,\frac{(\eta-1)^{\frac{1}{4}}}{\eta} - \right.$$

$$\left. - \frac{27}{\sqrt{2}} \ln \frac{(\eta-1)^{\frac{1}{2}} + (\eta-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2} + 1}{(\eta-1)^{\frac{1}{2}} - (\eta-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2} + 1} - \frac{54}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\,(\eta-1)^{\frac{1}{4}}}{1 - (\eta-1)^{\frac{1}{2}}}\right], \tag{30}$$

ceea ce dă pentru $\eta_l = \frac{8}{7}$.

$$\frac{l}{Y_0} = 4{,}30\, \mathcal{R}e^{\frac{1}{4}}. \tag{31}$$

Relațiile (30) și (31) corespund și mișcării fluidelor în canale largi sub presiune [4].

Efectuînd numeric integrala (22) s-au obținut pentru lungimile de stabilizare a mișcării turbulente cu nivel liber în canale largi cu fund orizontal, valorile indicate în graficul din figura 2.

Se observă că relația (31) este practic valábilă pentru numere $\mathcal{F}r < 0{,}1 \div 0{,}2$.

Figura 2 ne mai arată că lungimea de stabilizare a mișcării, ca și în cazul regimului laminar, crește o dată cu creșterea numărului $\mathcal{F}r$.

Primită la redacție la 13 mai 1958.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ШИРОКИХ КАНАЛАХ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДНОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается длина стабилизации ламинарного и турбулентного течений жидкостей со свободной поверхностью в широких каналах с горизонтальным дном.

Автор производит исследование, исходя из интегральных уравнений пограничного слоя; получаются соотношения, выражающие функциональную зависимость длины относительной стабилизации от геометрической и гидравлической характеристик движения.

DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DE STABILISATION DU MOUVEMENT DES FLUIDES À SURFACE LIBRE DANS DES CANAUX LARGES, AU FOND HORIZONTAL

RÉSUMÉ

L'auteur présente dans ce travail une étude de la longueur de stabilisation du mouvement laminaire et turbulent des fluides à surface libre, dans des canaux larges, au fond horizontal.

L'étude a pris comme point de départ les équations intégrales de la couche limite ; les relations obtenues expriment la dépendance fonctionnelle entre la longueur de stabilisation relative et les caractéristiques géométriques et hydrauliques du mouvement.

BIBLIOGRAFIE

1. CHEN-CHE-PEN, *Etablissement du régime laminaire dans un canal infiniment large rectangulaire de fond horizontal*. Comptes Rendus des Séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris, **240**, *1*, 48 (1955).
2. — *Etablissement du régime laminaire dans un canal infiniment large rectangulaire de pente i*. Comptes Rendus des Séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris, **240**, *4*, 401 (1955).
3. С. М. ТАРГ, *Основные задачи теории ламинарных течений*. Москва, 1951.
4. S. HÎNCU, *Determinarea lungimii de stabilizare a mișcării turbulente a fluidelor în canale largi și conducte circulare sub presiune*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4* 973 (1958).

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

ASUPRA STABILITĂȚII MIȘCĂRII LAGĂRELOR CIRCULARE LUBRIFICATE CU GAZE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Lubrificația cu gaze are, după cum se știe, un larg cîmp de aplicații, în special pentru construcția lagărelor la viteze de rotație mari și foarte mari. În acest sens se poate afirma în momentul de față că realizările practice se găsesc într-un stadiu mai avansat decît rezultatele teoretice obținute pînă în prezent. Din această cauză, proiectarea lagărelor cu aer se face în general pe o bază empirico-teoretică, fără să se țină seama de toate prevederile teoretice (care nu au fost elaborate în mod complet). Lacunele amintite se manifestă cu deosebire pentru lagărele cu viteze mari, în ceea ce privește stabilitatea funcționării lor.

Asigurarea stabilității funcționării lagărelor este cea mai importantă problemă care se pune în momentul de față în construcția lagărelor cu aer. Problema prezintă o importanță practică evidentă, deoarece stabilitatea în funcționare condiționează nu numai durabilitatea lagărelor, dar, și siguranța funcționării lor. Problema se pune cu mult mai multă acuitate decît pentru lagărele lubrificate cu lichide. Într-adevăr, din cauza capacității portante reduse a peliculei de gaz, a jocurilor reduse și a vitezelor relative mari, orice tendință de instabilitate a mișcării poate conduce la contact direct între suprafețele de alunecare, la șocuri și încălziri puternice și la griparea lagărului, fenomen care la viteze foarte mari este nu numai dăunător dar și periculos pentru întreaga construcție.

În plus, acest fenomen deosebit de dăunător se produce foarte frecvent în funcționarea lagărelor cu aer la viteze mari și a fost necesar să se imagineze o serie întreagă de soluții, mai mult sau mai puțin eficiente [1], [2], ca realizarea unei variații speciale a grosimii stratului de lubrifiant, alimentarea cu aer sub presiune etc.

Se simte de aceea nevoia unor studii teoretice, cu scopul de a obține criterii pentru determinarea zonelor de instabilitate și factorii care o influențează.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

1. ECUAŢIILE LUBRIFICAŢIEI CU GAZE ÎN REGIM NEPERMANENT

În cazul general, pentru a putea ataca problema, este necesar să se cunoască mişcarea în stratul de lubrifiant în regim nepermanent, adică în cazul cînd atît viteza relativă dintre suprafeţe, cît şi sarcina suportată de lagăr variază în timp.

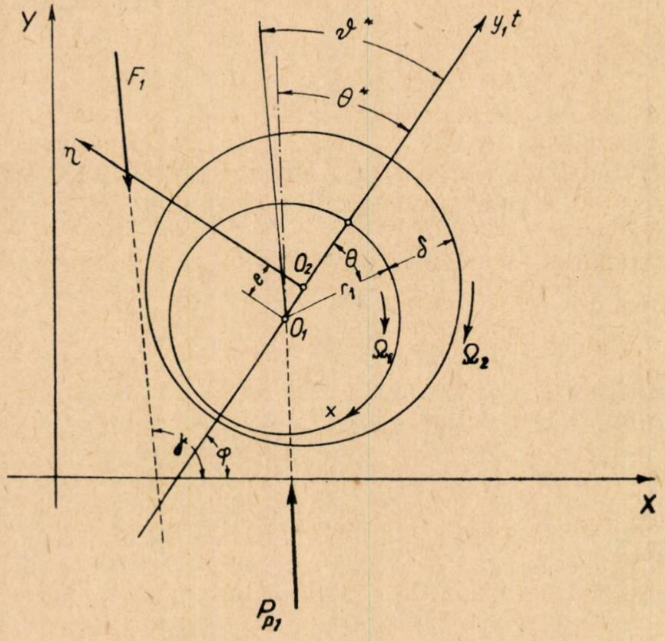


Fig. 1

Pentru aceasta vom porni de la ecuaţia generală a presiunilor pentru lubrificaţia cu gaze, scrisă în ipoteza unei evoluţii politropice oarecare a gazului lubrifiant şi în condiţiile obişnuite ale problemei lubrificaţiei [3]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right)=6\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\Bigg\{2\,(V_{2y}-V_{1y})\,p^{\frac{1}{\varkappa}}-$$

$$-\,p^{\frac{1}{\varkappa}}\left[(V_{2x}-V_{1x})\frac{\partial\delta}{\partial x}+(V_{2z}-V_{1z})\frac{\partial\delta}{\partial z}\right]+ \tag{1}$$

$$+\,\delta\left[\frac{\partial\,[p^{\frac{1}{\varkappa}}(V_{2x}+V_{1x})]}{\partial x}+\frac{\partial\,[p^{\frac{1}{\varkappa}}(V_{2z}+V_{1z})]}{\partial z}+2\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\partial t}\right]\Bigg\}.$$

În această ecuaţie, p este presiunea, δ grosimea stratului de lubrifiant, $\varkappa$ exponentul politropic al evoluţiei, iar V_{1x}, V_{1y}, V_{1z} respectiv V_{2x},

V_{2y}, V_{2z}, proiecțiile vitezelor $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ ale celor două suprafețe după direcțiile de referință x, y, z.

Pentru lagărele circulare, grosimea δ a filmului de lubrifiant este dată de relația

$$\delta = \Delta + e \cos \theta = \Delta \ (1 + \alpha \cos \theta), \tag{2}$$

în care Δ este jocul radial, e excentricitatea, $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ excentricitatea relativă, iar unghiul $\theta = \frac{x}{r_1}\cdot$

În cazul general, se poate considera (fig. 1) că fusul şi cuzinetul sînt animate de vitezele de rotație Ω_1 şi Ω_2. Apoi, dacă linia centrelor O_1O_2 face cu axa OX a sistemului fix OXY unghiul φ, mişcarea relativă dintre cele două suprafețe se mai compune din viteza $\dot{e}$, dirijată după linia centrelor şi din viteza $e\ \dot{\varphi}$ dirijată normal la aceasta. Considerînd în plus şi o viteză de antrenare a întregului ansamblu, $\overline{V}_0$ (în planul OXY), proiecțiile vitezelor $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ sînt

$$\left.\begin{aligned}
&V_{1x} = r_1\ \Omega_1 + V_{0x}\,;\ \ V_{1y} = V_{0y}\,;\ \ V_{1z} = 0,\\
&V_{2x} = V_{0x} + r_2\ \Omega_2 \cos\ \varepsilon - \dot{e} \sin\ \theta - e\ \dot{\varphi} \cos\ \theta,\\
&V_{2y} = V_{0y} - r_2\ \Omega_2 \sin\ \varepsilon + \dot{e} \cos\ \theta - e\ \dot{\varphi} \sin\ \theta,\\
&V_{2z} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

În aceste relații r_1 şi r_2 sînt razele fusului şi cuzinetului, iar unghiul ε este egal cu

$$\sin\ \varepsilon = \frac{e \sin\ \theta}{r_2} = \frac{e}{r_1}\frac{\sin\ \theta}{1 + \frac{\Delta}{r_1}} \cong \frac{e}{r_1} \sin\ \theta = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial \delta}{\partial \theta}\cdot \tag{4}$$

În acelaşi timp, ținînd seama că $\cos\ \varepsilon \cong 1$ şi că termenii $\dot{e} \sin\ \theta$ şi $e\ \dot{\varphi} \cos\ \theta$ sînt neglijabili față de $r_2\ \Omega_2$ $\left(\text{în raportul } \frac{\Delta}{r_1}\right)$ relațiile (3) se scriu, cu $r_2 \cong r_1$

$$\left.\begin{aligned}
&V_{1x} = V_{0x} + r_1\ \Omega_1\,;\ \ V_{1y} = V_{0y},\\
&V_{2x} = r_1\ \Omega_2 + V_{0x}\,;\ \ V_{2y} = V_{0y} + \Omega_2 \frac{\partial \delta}{\partial \theta} + \dot{\delta} + \dot{\varphi}\ \frac{\partial \delta}{\partial \theta}\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ținînd seama de relațiile (5), ecuația diferențială (1) se scrie, pentru lagărele circulare

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial \theta}\right) + r_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right) = 6\, r_1^2\left(\frac{1}{\varkappa} + 1\right)\left\{2\left(\Omega_2 \frac{\partial \delta}{\partial \theta} + \dot{\delta} + \right.\right.$$

$$\left.+ \dot{\varphi}\ \frac{\partial \delta}{\partial \theta}\right) p^{\frac{1}{\varkappa}} - p^{\frac{1}{\varkappa}}\ (\Omega_2 - \Omega_1)\frac{\partial \delta}{\partial \theta} + \delta\left[\frac{\partial\, [p^{\frac{1}{\varkappa}}\ (\Omega_1 + \Omega_2)]}{\partial \theta}\right] + 2\ \ \delta\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\partial t}\left.\vphantom{\frac{1}{1}}\right\}, \tag{6}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial \theta}\right) + r_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right) = 6 r_1^2\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\left\{(\Omega_1+\Omega_2)\frac{\partial (p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta)}{\partial \theta} + \right.$$

$$\left. + 2\,\dot{\varphi}\, p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial \delta}{\partial \theta} + 2\,\frac{\partial (p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta)}{\partial t}\right\}, \qquad (7)$$

în care s-a considerat $\overline{V}_0 = 0$, așa cum este cazul în majoritatea situațiilor practice.

Se constată că ecuația diferențială a presiunilor în cazul regimului nepermanent conține, ca și ecuația presiunilor pentru lubrifianți incompresibili, o serie de termeni în care timpul nu intervine decît ca parametru, și un termen în care timpul intervine direct ca variabilă de derivare și care reprezintă indirect influența apropierii și depărtării suprafețelor. Spre deosebire însă de cazul incompresibil, ecuația presiunilor este diferită de cazul regimului permanent, cînd $\dot{\varphi} \neq 0$, chiar dacă termenul $\frac{\partial}{\partial t}(p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta)$ este neglijabil. În plus, ecuația este neliniară, ceea ce complică foarte mult problema.

În cele ce urmează, vom considera cazul mișcării bidimensionale în stratul de lubrifiant (mișcarea nu depinde de z). Apoi, vom cerceta stabilitatea mișcării în două cazuri mai importante pentru aplicații și anume : cazul încărcării constante și cazul încărcării centrifugale. Aceste două regimuri sînt staționare, fapt care ne îndreptățește să neglijăm în studiul mișcării perturbate influența termenului $\frac{\partial}{\partial t}(p^{\frac{1}{\varkappa}}\delta)$, deoarece, dacă mișcarea este stabilă, oscilațiile vor fi reduse și deci și influența vitezelor normale la suprafață (care vor fi mici) va fi redusă.

Pentru cazul încărcării centrifugale în special, este necesar să cunoaștem soluția ecuației presiunilor, scrisă sub forma (în ipoteza unei evoluții izotermice, $\varkappa = 1$)

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial \theta}\right) = 12\, r_1^2\left[(\Omega_1+\Omega_2)\frac{\partial (p\delta)}{\partial \theta} + 2\,\dot{\varphi}\, p\,\frac{\partial \delta}{\partial \theta}\right]. \qquad (8)$$

Ecuația presiunilor, chiar sub forma simplificată de mai sus, este greu de rezolvat în mod exact. De aceea, pentru a ne face o idee de felul cum este influențată distribuția presiunilor de viteza unghiulară $\dot{\varphi}$ a liniei centrelor, vom adopta metoda perturbațiilor, propusă de J. S. Ausman [4]. Astfel, să considerăm că presiunea poate fi pusă sub forma

$$p = p_0 + \alpha\, p_1 + \alpha^2\, p_2 + \ldots \qquad (9)$$

în care p_0 este o presiune de referință, pe care să o luăm egală cu presiunea în zona grosimii maxime a stratului de lubrifiant (egală cu presiunea din mediul înconjurător numai dacă în punctul respectiv stratul de lubrifiant este în comunicaţie cu exteriorul; altfel presiunea p_0 poate fi presiunea de alimentare, sau, dacă nu există alimentare sub presiune, valoarea ei trebuie dedusă prin condiţii fizice de debit [5]).

Introducînd presiunea sub forma (9) în ecuaţia (8) şi ţinînd seama că grosimea filmului de lubrifiant este dată de relaţia (2), obţinem în locul ecuaţiei (8) o dezvoltare după puterile excentricităţii α. Păstrînd acum numai primii termeni ai dezvoltării, obţinem ecuaţia diferenţială satisfăcută de funcţia p_1

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} - \xi_\Delta \frac{\partial p_1}{\partial \theta} = - \xi_\Delta \left(1 + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \right) p_0 \sin\ \theta, \tag{10}$$

în care

$$\xi_\Delta = \frac{6\mu\,(\Omega_1 + \Omega_2)}{p_0\,\psi^2}, \tag{11}$$

unde ψ este jocul relativ al lagărului $\left(\psi = \frac{\Delta}{r_1} \right)$.

Soluţionarea ecuaţiei (10) se poate face prin mijloace elementare, cu ajutorul substituţiei $y = \frac{\partial p_1}{\partial \theta}$. Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$p_1 = \int e^{\xi_\Delta \theta} \left[C_1 - \xi_\Delta \left(1 + \frac{2\,\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \right) p_0 \int \sin\ \theta\ e^{-\xi_\Delta \theta}\, d\ \theta \right] d\theta + C_2, \tag{12}$$

sau, efectuînd integralele

$$p_1 = \frac{C_1}{\xi_\Delta} e^{\xi_\Delta} + \frac{\xi_\Delta \left(1 + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \right) p_0}{1 + \xi_\Delta^2} (\sin\ \theta - \xi_\Delta \cos\ \theta) + C_2. \tag{13}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină punînd condiţiile ca funcţia p_1 să fie periodică şi să se anuleze la $\theta = 0$

$$p_1(\theta) = p_1\ (\theta + 2\,\pi)\,;\ p_1(0) = 0. \tag{14}$$

Rezultă astfel

$$C_1 = 0\ ;\ C_2 = \frac{\xi_\Delta^2 \left(1 + \frac{2\,\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \right) p_0}{1 + \xi_\Delta^2}, \tag{15}$$

iar soluţia căutată este

$$p_1 = \frac{\xi_\Delta \left(1 + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \right) p_0}{1 + \xi_\Delta^2} (\,\xi_\Delta + \sin\ \theta - \xi_\Delta \cos\ \ \theta). \tag{16}$$

În sfîrşit, distribuţia presiunilor, mărginindu-se numai la primii doi termeni ai dezvoltării (9), are expresia

$$p = p_0 + \frac{\alpha\,\xi_\Delta\left(1 + \dfrac{2\,\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2}\right) p_0}{1 + \xi_\Delta^2}\,(\xi_\Delta + \sin\theta - \xi\cos\theta). \tag{17}$$

Rezultanta presiunilor după direcţia liniei centrelor este

$$P_t = -\int_0^{2\pi} p\cos\theta\, r_1\, d\theta = \frac{\alpha\,\pi\,\xi_\Delta^2\left(1 + \dfrac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2}\right) p_0\, r_1}{1 + \xi_\Delta^2}, \tag{18}$$

iar după o direcţie normală pe aceasta

$$P_n = \int_0^{2\pi} p\sin\theta\, r_1\, d\theta = \frac{\alpha\,\pi\xi_\Delta\left(1 + \dfrac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2}\right) p_0\, r_1}{1 + \xi_\Delta^2}. \tag{19}$$

Să considerăm acum $\dot{\varphi} = -\Omega_1$, adică o rotaţie constantă a liniei centrelor în direcţia rotaţiei fusului, şi $\Omega_2 = 0$ (cuzinetul fix). Presiunea şi respectiv componentele rezultantei presiunilor vor fi respectiv egale cu

$$\left.\begin{aligned} p - p_0 &= -\frac{\alpha\,\xi_\Delta p_0}{1 + \xi_\Delta^2}\,(\xi_\Delta + \sin\theta - \xi_\Delta\cos\theta),\\ P_t &= -\frac{\alpha\,\pi\xi_\Delta^2\, p_0 r_1}{1 + \xi_\Delta^2};\quad P_n = -\frac{\alpha\,\pi\xi_\Delta\, p_0\, r_1}{1 + \xi_\Delta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Rezultă deci că atît diferenţa presiunilor p-p_0 cît şi rezultanta presiunilor au valori constante în timp şi egale cu cele obţinute în cazul static, cînd linia centrelor este fixă ($\dot{\varphi} = 0$) şi sarcina suportată de lagăr este aceeaşi, dar de semn schimbat. În acelaşi timp, datorită faptului că valorile componentelor P_{p1t}, P_{p1n} sînt constante, unghiul făcut de rezultanta presiunilor cu direcţia liniei centrelor este de asemenea constant. În consecinţă, rezultanta presiunilor se roteşte odată cu fusul şi în aceeaşi direcţie cu acesta : este cazul *încărcării centrifugale.*

Rezultă deci o situaţie oarecum similară cazului lubrificaţiei cu lichide [3] : cazul încărcării centrifugale se reduce la cazul static corespunzător, în care componentele rezultantei presiunilor au semnele schimbate (orientate în sens invers). Analogia cu cazul lubrificaţiei cu lichide nu este completă deoarece în acel caz, neluîndu-se în considerare decît zona de suprapresiuni, această zonă se schimbă : zona activă a lagărului devine pentru încărcarea centrifugală $\pi < \theta < 2\pi$ în loc de $0 < \theta < \pi$ ca în cazul static ; de aceea se schimbă limitele de integrare, rezultînd, pe lîngă schimbarea de semn generală datorită factorului în care intervine viteza $\dot{\varphi}$ şi o schimbare de semn a integralei funcţiei de θ din formula presiunilor, la calculul componentei P_{p1t} care în acest mod nu schimbă de semn [3], în timp ce componenta P_{p1n} schimbă de semn (în cazul lubrificaţiei cu gaze ambele componente schimbînd de semn). De aceea, de data aceasta nu se poate presupune că încărcarea centrifugală corespunde situaţiei statice cînd fusul s-ar roti cu viteza $-\Omega_1$ (semnul componentei P_{p1n}, ca şi distribuţia presiunilor nu ar mai corespunde, deoarece în acest caz s-ar schimba şi semnul parametrului ξ_Δ).

În cazul general al unei mişcări perturbate oarecare, linia centrelor poate fi animată de o viteză unghiulară $\dot{\varphi}$ de asemenea oarecare. Din relaţiile (18) şi (19) rezultă că pentru această situaţie influenţa rotaţiei liniei centrelor $\dot{\varphi}$ asupra rezultantei presiunilor se manifestă prin amplificarea acesteia cu factorul

$$1 + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \tag{21}$$

faţă de cazul static corespunzător.

În consecinţă, dacă viteza normală a celor două suprafeţe este suficient de redusă pentru a putea neglija în ecuaţia presiunilor influenţa termenului $\frac{\partial}{\partial t}(p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\delta)$, se pot utiliza în primă aproximaţie pentru regimurile dinamice, rezultatele obţinute pentru regimurile permanente, afectate de factorul (21). Această concluzie permite utilizarea rezultatelor obţinute anterior [6], [7] pentru calculul lagărelor circulare, renunţînd la soluţia prin perturbaţii, mai aproximativă, utilizată mai sus numai pentru a obţine această concluzie.

2. ECUAŢIILE STABILITĂŢII MIŞCĂRII LAGĂRELOR CIRCULARE

Pentru a scrie ecuaţiile stabilităţii mişcării, vom utiliza metoda perturbaţiilor mici, sub forma propusă de N. Tipei [3]. Această metodă constă în a scrie ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri lubrificate şi în a considera că fiecare din variabilele de care depinde mişcarea, suferă o perturbaţie redusă. Dezvoltînd termenii ecuaţiilor în serii Taylor în raport cu perturbaţiile şi păstrînd numai primii termeni ai acestor dezvoltări, se liniarizează sistemul de ecuaţii al mişcării ; acest fapt permite apoi obţinerea soluţiilor prin metode analitice relativ simple şi în sfîrşit discutarea sistemului de soluţii în vederea găsirii unor criterii pentru aprecierea stabilităţii mişcării.

Să considerăm (fig. 1) un sistem de axe OXY fix şi un sistem mobil $O_2x_t\,x_n$, cu originea în centrul cuzinetului. În aceste condiţii, urmînd metoda de mai sus [3], se obţine în cele din urmă o condiţie de compatibilitate a sistemului de ecuații ale mișcării sub forma

$$\begin{vmatrix} \Delta \nu^2 - (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star)^2 \Delta + \frac{1}{m_1} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha}, & \left[2 \alpha \Delta (\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star) + \frac{1}{m_1} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right] \nu + \frac{1}{m_1} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} \\ -[2(\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star)\nu + \ddot{\gamma} - \ddot{\vartheta}^\star] \Delta - \frac{1}{m_1} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}, & \alpha \Delta \nu^2 + \left(2 \dot{\alpha} \Delta - \frac{1}{m_1} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right) \nu - \frac{1}{m_1} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

în care (fig. 1)

$$\vartheta^\star = \gamma - \varphi, \tag{23}$$

iar perturbațiile excentricității α și a unghiului $\vartheta^\star$ sînt considerate de forma

$$\delta \alpha = \alpha^\star e^{\nu t} ; \ \delta \vartheta^\star = \vartheta^{\star\star} e^{\nu t}. \tag{24}$$

În determinantul (22) m_1 este masa fusului, iar P_{1t} și P_{1n} sînt componentele pe direcțiile t și n ale rezultantei forțelor de presiune și forțelor exterioare care acționează asupra fusului.

Determinantul (22) reprezintă o ecuație de gradul 4 în ν, de forma

$$C_0 \nu^4 + C_1 \nu^3 + C_2 \nu^2 + C_3 \nu + C_4 = 0. \tag{25}$$

După cum se știe [3], stabilitatea mișcării poate fi apreciată direct din studiul acestei ecuații, fără să fie nevoie să se determine efectiv soluțiile (24) ale sistemului. Într-adevăr, pentru ca mișcarea să fie stabilă, adică pentru ca perturbațiile (24) să se amortizeze în timp, este necesar ca rădăcinile ν ale ecuației (25) să fie negative, dacă sînt reale, sau să aibă partea reală a lor negativă, dacă sînt complexe. Aceste condiții pot fi verificate cu ajutorul condițiilor Rooth-Hurwitz. Astfel, fie tabloul coeficienților

$$\left\| \begin{array}{cccc} C_1 & C_0 & 0 & 0 \\ C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ 0 & C_4 & C_3 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{array} \right\| \tag{26}$$

Pentru ca partea reală a rădăcinilor ν_i $(i = 1,2,3,4)$ să fie negativă, este necesar și suficient ca toți determinanții D_i, formați cu un număr egal de coloane și de linii succesive, să aibă semnul coeficientului C_0

$$C_0 D_i > 0. \tag{27}$$

Calculînd determinanții D_i, condițiile (26) se scriu

$$C_0 C_i > 0 ; \ C_0 [(C_1 C_2 - C_0 C_3) C_3 - C_1^2 C_4] > 0. \tag{28}$$

În acest mod, rezultă că se poate aprecia stabilitatea dinamică a funcționării unui lagăr cu aer dacă se cunosc valorile γ, α, $\vartheta^{\star}$ pentru regimul de bază, forțele $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_2$ și variația acestora în raport cu α și $\vartheta^{\star}$.

Derivatele care intervin în determinantul (22) sînt egale cu

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial P_{1t,n}}{\partial V_{0t}} = -\dfrac{\partial F_{1t,n}}{\partial V_{0t}} \quad ; \quad \dfrac{\partial P_{1t,n}}{\partial V_{0n}} = -\dfrac{\partial F_{1t,n}}{\partial V_{0n}} \\[2ex]
\dfrac{\partial P_{2t,n}}{\partial V_{0t}} = -\dfrac{\partial F_{2t,n}}{\partial V_{0t}} \quad ; \quad \dfrac{\partial P_{2t,n}}{\partial V_{0n}} = -\dfrac{\partial F_{2t,n}}{\partial V_{0n}} \\[2ex]
\dfrac{\partial P_{1t,n}}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial P_{p1t,n}}{\partial \alpha} ; \quad \dfrac{\partial P_{2t,n}}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial P_{p2t,n}}{\partial \alpha} = -\dfrac{\partial P_{1t,n}}{\partial \alpha} \\[2ex]
\dfrac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^{\star}} = F_1 \sin \vartheta^{\star} \; ; \quad \dfrac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^{\star}} = -F_1 \cos \vartheta^{\star} \\[2ex]
\dfrac{\partial P_{2t}}{\partial \vartheta^{\star}} = -F_2 \sin(\vartheta^{\star} + \tau) ; \dfrac{\partial P_{2n}}{\partial \vartheta^{\star}} F_2 \cos(\vartheta^{\star} + \tau) \\[2ex]
\dfrac{\partial P_{1t,n}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}} = \dfrac{\partial P_{p1t,n}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}} ; \quad \dfrac{\partial P_{2t,n}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}} = \dfrac{\partial P_{p2t,n}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}} = -\dfrac{\partial P_{1t,n}}{\partial \dot{\vartheta}^{\star}}
\end{array}\right\} \qquad (29)$$

unde $\overline{P}_{p1.2}$ sînt rezultantele presiunilor pe cele două corpuri, $\overline{F}_{1.2}$ forțele exterioare, iar τ unghiul dintre forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$.

Dacă se ține seama de viteza $\overline{V}_0$, derivatele în raport cu componentele V_{0t}, V_{0n} sînt egale cu derivatele corespunzătoare ale forțelor exterioare $\overline{F}_i$, deoarece, în acestea intervenind și forțele de inerție ale elementelor cinematice legate de cele două corpuri lubrificate prin intermediul reazemelor și articulațiilor, aceste forțe pot depinde de $\overline{V}_0$, după relații ce se pot determina de la caz la caz.

După cum s-a mai spus, dacă se neglijează forțele de inerție ale elementelor legate de cele două corpuri lubrificate, atunci $\vartheta^{\star} = \theta^{\star}$. Apoi, dacă $\Omega_2 = 0$, condițiile de stabilitate (28) nu se modifică, deoarece ecuația (25) rezultă numai din ecuațiile de mișcare ale centrului de greutate al corpului 1 ; eventual influența rotației Ω_2 poate apare în termenii care conțin pe $\dot{\gamma}$ și $\ddot{\gamma}$, viteza de rotație a sarcii $\overline{F}_1$ putînd eventual depinde de aceea a cuzinetului.

În concluzie, problema este determinată dacă se cunosc derivatele rezultantei presiunilor în raport cu α, $\vartheta^{\star}$ și $\dot{\vartheta}^{\star}$. Pentru a determina aceste mărimi, vom considera mișcarea bidimensională și vom utiliza concluziile expuse în § 1 și rezultatele cuprinse în lucrările [6], [7].

Pentru a păstra aceleași notații ca în lucrările [6], [7], în locul parametrului ξ_{Δ} (11) vom utiliza parametrul

$$\xi' = \frac{3\,\pi\mu\,(\Omega_1 + \Omega_2)}{2\,p_0\,\psi^2} = \frac{\pi}{4}\,\xi_{\Delta}. \qquad (30)$$

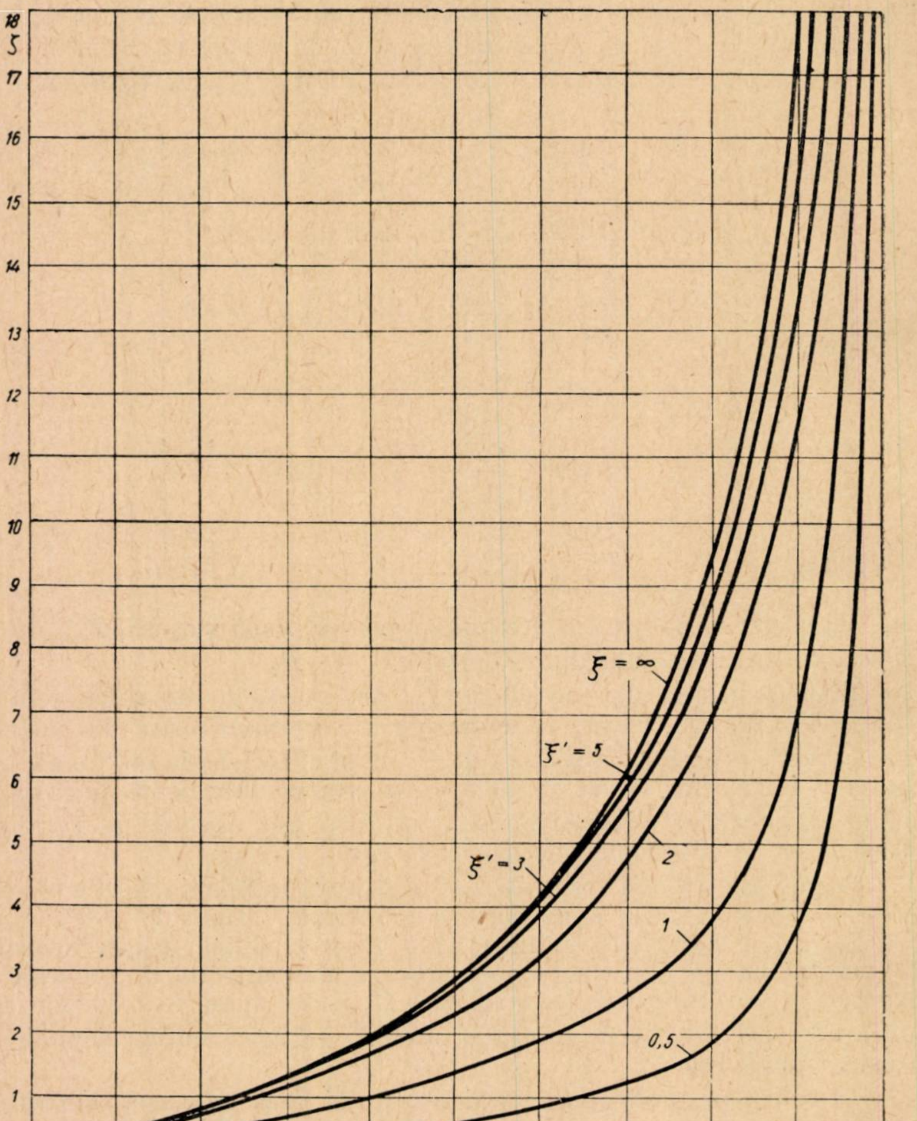

18
ζ
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
α
ξ = ∞
ξ' = 5
ξ' = 3
2
1
0,5
ξ' = 0

Fig. 2

Fig. 2

Vom pune rezultanta presiunilor pe unitatea de lăţime a lagărului sub forma

$$P_{v1} = p_0 r_1 \left(1 + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2} \right) \zeta, \tag{31}$$

unde p_0 este presiunea la $\theta = 0$, iar ζ coeficientul adimensional de portanţă, a cărui variaţie în funcţie de α, pentru diferite valori $\xi' =$ constant, o reproducem în figura 2.

Pentru calculul derivatelor (29) este necesar să cunoaştem variaţia componentelor P_{v1t} şi P_{v1n} ale rezultantei presiunilor. În acest scop,

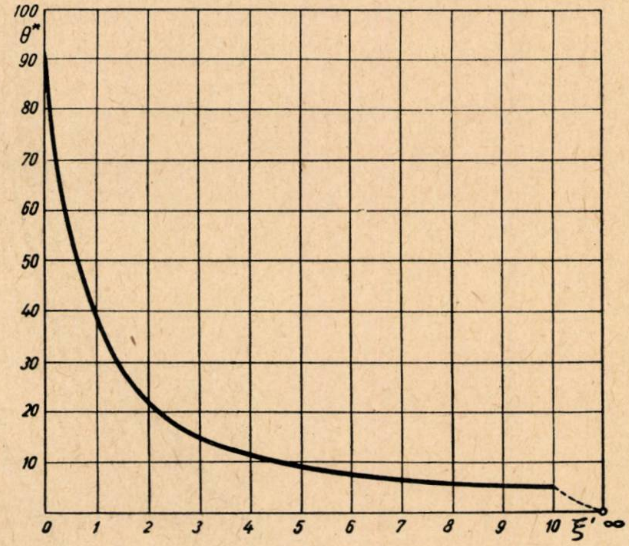


Fig. 3

notînd cu $\theta^\star$ unghiul dintre rezultanta presiunilor şi linia centrelor, din teoria simplificată, expusă anterior (punctul 1, relaţiile (18), (19)) rezultă

$$\operatorname{tg} \theta^\star = \frac{P_{v1n}}{P_{v1t}} = \frac{1}{\xi_\Delta} = \frac{\pi}{4\xi'} \tag{32}$$

a cărui variaţie în funcţie de ξ' este arătată în figura 3. Din relaţia (32) se constată că unghiul $\theta^\star$ nu depinde de excentricitate ci numai de parametrul ξ', fiind invers proporţional cu ξ'. Relaţia (32), deşi dedusă pentru excentricităţi mici, este valabilă practic pentru orice excentricităţi, fapt ce se poate verifica şi cu ajutorul rezultatelor cuprinse în lucrările [6], [7], [8]. De altfel, aceste concluzii sînt evidente pentru cazul limită $\xi' \to 0$, cînd presiunile sînt antisimetrice faţă de linia centrelor şi deci $\theta^\star = 90°$ şi pentru $\xi' \to \infty$, cînd presiunile sînt simetrice faţă de aceeaşi linie şi de $\theta^\star = 0$.

Acest fapt, total deosebit de cazul lubrificaţiei cu lichide (unde $\theta^\star$ variază de la 90° la 0° cînd α variază între 0 şi 1), este datorit, pe lîngă efectului compresibilităţii, în primul rînd faptului că la gaze se pot naşte şi depresiuni. Amintim totuşi că acest rezultat este obţinut pentru cazul lagărelor de alungire infinită; pentru lagărele reale, de alungire finită, este posibil totuşi ca $\theta^\star$ să depindă de α, deşi în situaţiile limită $\xi' \to 0$ $\xi' \to \infty$, $\theta^\star$ nu depinde de α nici în cazul lagărelor de dimensiuni finite.

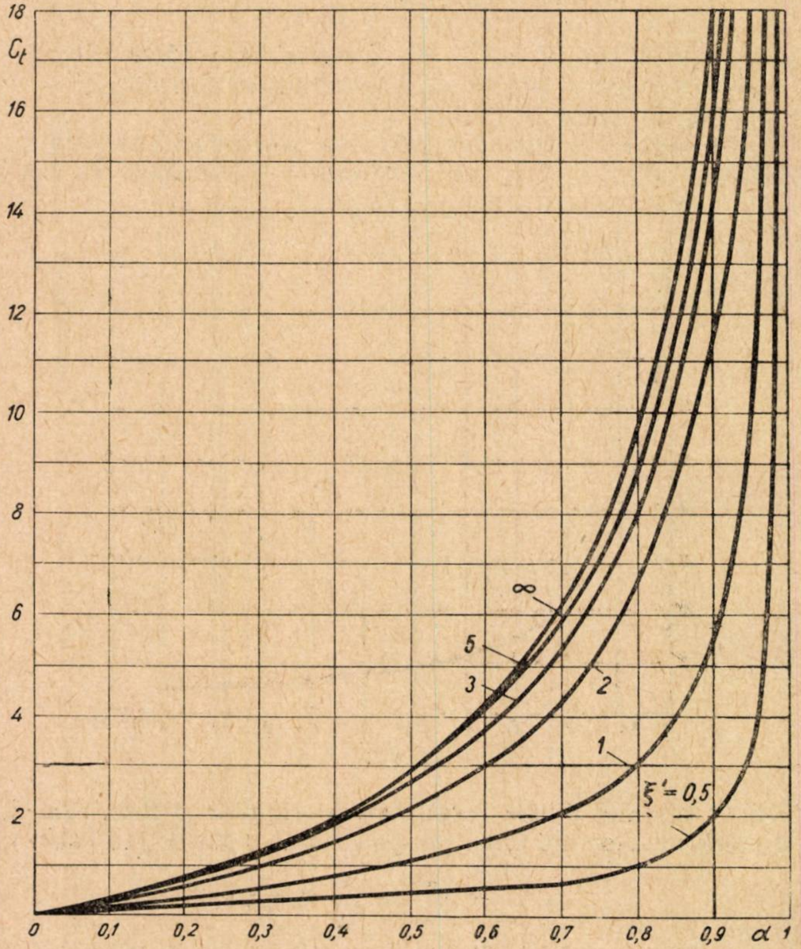


Fig. 4

Cu ajutorul diagramelor din figurile 2 şi 3 se pot determina coeficienţii C_t şi C_n

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \frac{P_{p1t}}{p_0\, r_1 \left(1 + \dfrac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)} = \zeta \cos \theta^\star, \\ C_n &= \frac{P_{p1n}}{p_0\, r_1 \left(1 + \dfrac{2\dot{\varphi}}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)} = \zeta \sin \theta^\star. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Astfel, în diagramele din figurile 4,5,6,7 s-au reprezentat variaţiile coeficienţilor C_t şi C_n în funcţie de α şi respectiv de ξ'.

Toate aceste mărimi sînt însă puse în funcţie de o presiune de referinţă p_0, aleasă ca fiind presiunea în punctul de grosime maximă a stratului de lubrifiant. Determinarea acestei presiuni şi a dependenţei ei de variabilele problemei este o problemă destul de dificilă. Dacă există alimentare sub presiune, presiunea p_0 poate fi egală cu presiunea de alimentare, dacă priza de presiune este plasată în apropierea zonei de grosime maximă a stratului de lubrifiant, sau poate fi o funcţie de presiunea de alimentare (valoarea presiunii p_0 depinde de poziţia prizei de presiune, de debitul acesteia, de forma şi dimensiunile orificiului sau orificiilor de alimentare, de regimul de funcţionare al lagărului etc.). Dacă lagărul nu este alimentat din exterior, în cazul lagărelor de dimensiuni finite, presiunea p_0 poate fi determinată punînd o condiţie de debit şi anume ca debitul total de la capetele lagărului să fie nul (pentru regimurile staţionare).

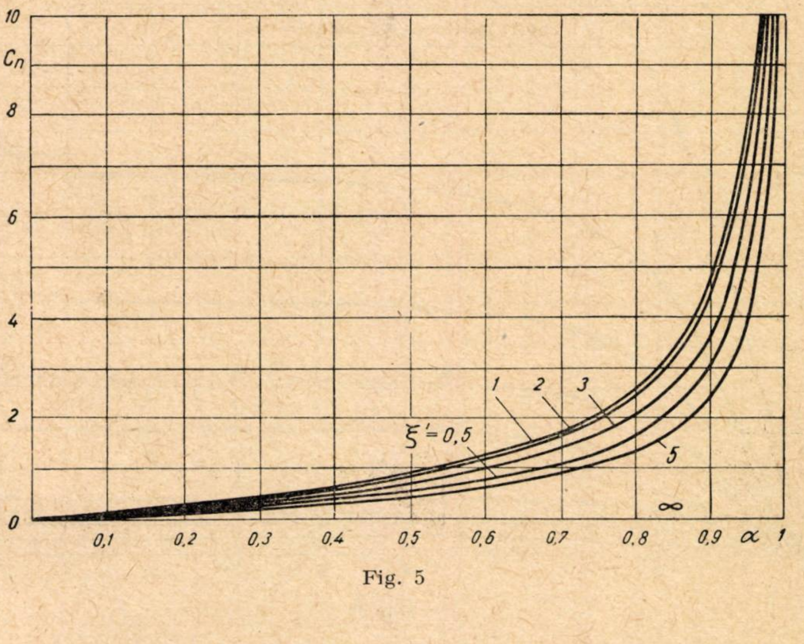
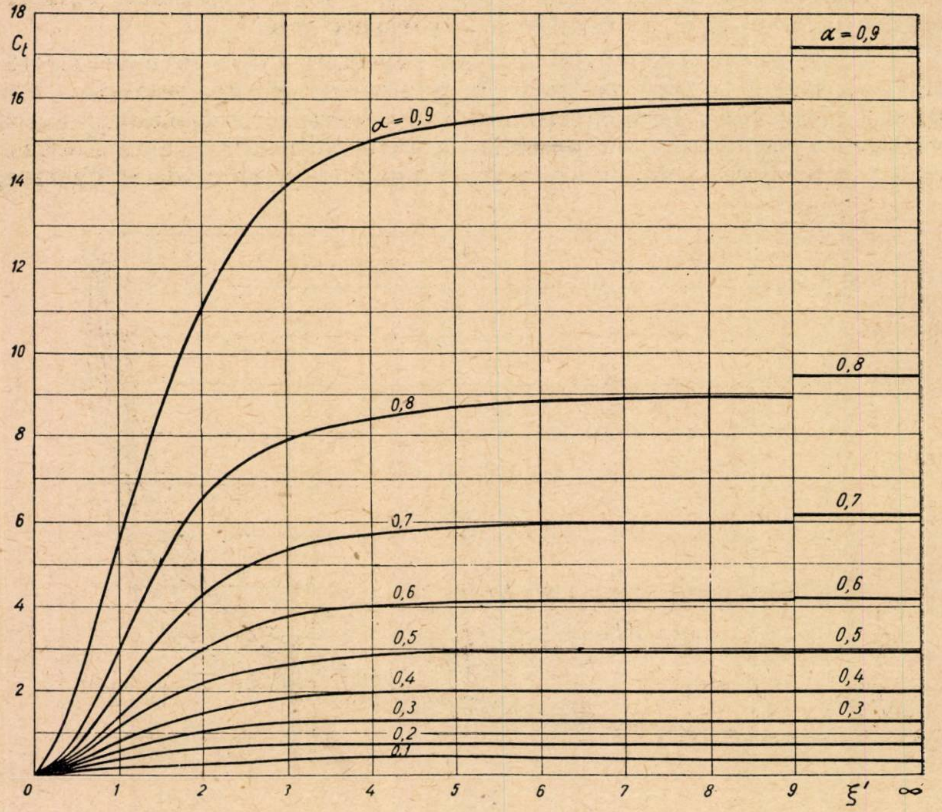


Fig. 5

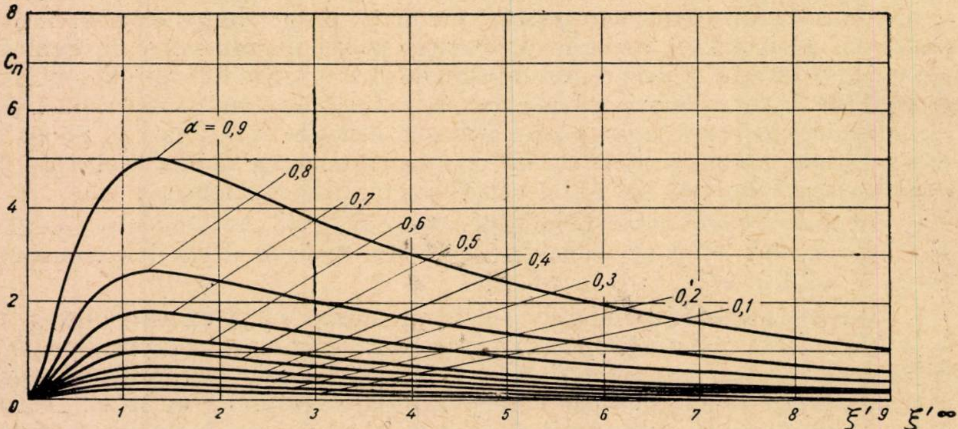
În ceea ce priveşte dependenţa presiunii p_0 de variabilele problemei V_{0t}, V_{0n}, α, ϑ^*, se poate considera că p_0 nu depinde decît de excentricitatea α şi de ϑ^*.

Pentru a găsi dependenţa dintre presiunea p_0 şi excentricitatea α şi cu ϑ^* cea mai plauzibilă ipoteză pentru cazul regimurilor de bază neperturbate staţionare, este aceea de a considera că masa de gaz care evoluează este constantă şi egală cu cea corespunzătoare regimului de bază. În tot cazul, variaţia reală a presiunii p_0 cu α şi ϑ^* se va găsi între aceste două situaţii : p_0 = constant şi p_0 variind astfel încît masa de gaz din stratul



C_t
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
ξ'
∞
α = 0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1

Fig. 6



C_n
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
ξ' 9
ξ' ∞
α = 0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1

Fig. 7

de lubrifiant să rămînă constantă. Această ultimă condiţie se scrie

$$\int_0^{2\pi} \rho\, \delta r_1\, d\theta = M = \text{const.}, \tag{34}$$

unde s-a notat cu M masa stratului de lubrifiant pentru o lăţime a lagărului egală cu unitatea. Ţinînd seama că, conform ipotezei făcute anterior a unei evoluţii izoterme a gazului lubrifiant, $\rho = C\,p$, relaţia de mai sus se poate scrie

$$C\,\Delta r_1\, p_0 \int_0^{2\pi} \frac{p}{p_0}\frac{\delta}{\Delta}\, d\theta = M = \text{const.}, \tag{35}$$

sau încă

$$\left(1 + \frac{2\varphi}{\Omega_1 + \Omega_2}\right) p_0\, \chi(\alpha, \xi') = k = \text{const.}, \tag{36}$$

unde

$$k = \frac{M}{C\Delta r_1} \tag{37}$$

şi, de asemenea, ţinînd seama de relaţia (18)

$$\chi(\alpha, \xi') = \frac{1}{1 + \dfrac{2\varphi}{\Omega_1 + \Omega_2}} \int_0^{2\pi} \frac{p}{p_0}(1 + \alpha\cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2\varphi}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)} \left[\int_0^{2\pi} \frac{p}{p_0} d\theta - \alpha C_t\right] \cong$$

$$\cong 2\pi\left(1 + \frac{\alpha\xi_\Delta^2}{1 + \xi_\Delta^2}\right), \tag{38}$$

ultimul termen reprezentînd valoarea aproximativă a funcţiei χ pentru excentricităţi mici, dedusă cu ajutorul teoriei simplificate de la punctul 1.

Cu ajutorul relaţiilor cuprinse în lucrările [6], [7] pentru distribuţia presiunilor, şi ţinînd seama de valorile C_t date în diagramele din figurile 4, 5, în figurile 8 şi 9 s-a reprezentat mărimea χ în funcţie de α şi respectiv de ξ'.

Din aceste figuri se constată că, după cum era şi normal, la $\alpha = 0$, $\chi = 2\pi$. Apoi $\chi = 2\pi$ = constant la $\xi' = 0$ şi creşte cu valorile acestui parametru păstrînd însă tot timpul o variaţie aproximativ liniară cu α, iar în cazul limită $\xi' \to \infty$, χ este egal cu

$$\chi = 2\pi(1 + \alpha). \tag{39}$$

Pentru a obţine derivata $\frac{\partial p_0}{\partial \alpha}$, vom diferenţia relaţia (36). Obţinem astfel

$$\chi\frac{\partial p_0}{\partial \alpha} + p_0\left[\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{\xi'}{p_0}\frac{\partial \chi}{\partial \xi'}\frac{\partial p_0}{\partial \alpha}\right] = 0, \tag{40}$$

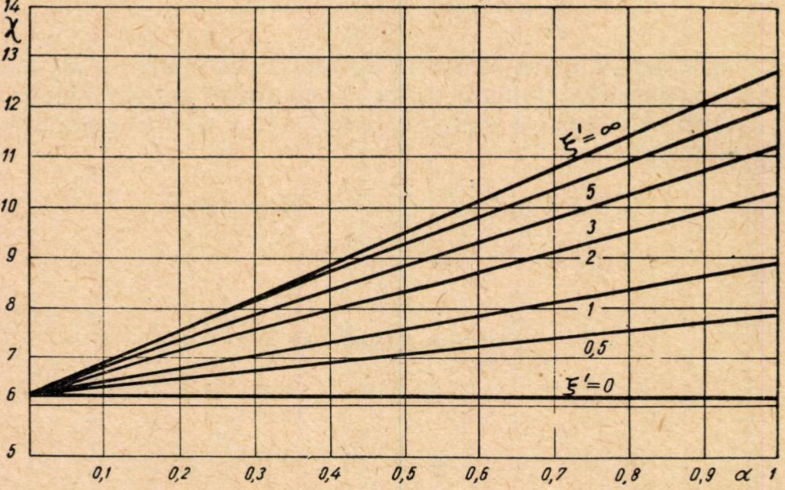

14
χ
13
12
11
10
9
8
7
6
5
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
α
1
ξ' = ∞
5
3
2
1
0,5
ξ' = 0

Fig. 8

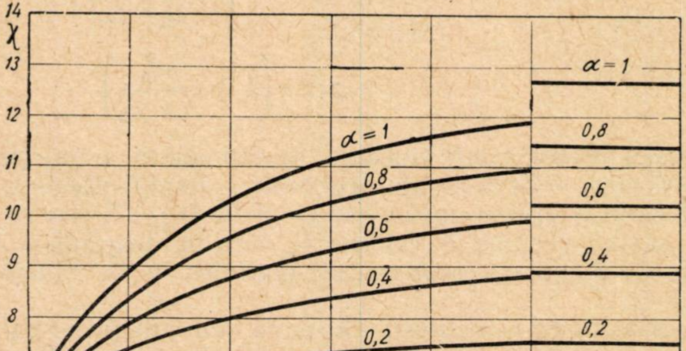

14
χ
13
12
11
10
9
8
7
6
5
0
1
2
3
4
5
ξ'
∞
α = 1
0,8
0,6
0,4
0,2
α = 1
0,8
0,6
0,4
0,2

Fig. 9

de unde rezultă

$$\frac{\partial p_0}{\partial \alpha} = -\frac{p_0}{\chi}\,\frac{\dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha}}{1-\dfrac{\xi'}{\chi}\,\dfrac{\partial \chi}{\partial \xi'}} \cong -\frac{p_0}{\chi}\,\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}\,;\quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \cong \frac{2\pi\,\xi_\Delta^2}{1+\xi_\Delta^2}\,. \tag{41}$$

Într-adevăr, termenul $\frac{\xi'}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial \xi'}$ poate fi neglijat față de unitate, în special

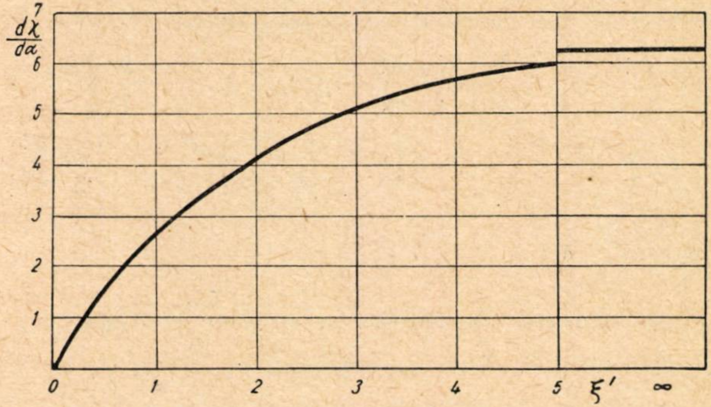


Fig. 10

la valori ξ' mari, cînd el tinde către zero ; apoi, la valori ξ' mici, $\frac{\partial \chi}{\partial \xi'}$, are valori mai mari, dar sînt înmulțite cu ξ' care tinde către zero. Variația termenului $\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}$ cu ξ' este dată în diagrama din figura 10.

În mod asemănător, derivata presiunii p_0 în raport cu $\dot{\vartheta}^\star$ se scrie

$$\frac{\partial p_0}{\partial \dot{\vartheta}^\star} = p_0\,\frac{2}{[\Omega_1+\Omega_2+2(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star)]\left(1-\dfrac{\xi'}{\chi}\,\dfrac{\partial \chi}{\partial \xi'}\right)} \cong p_0\,\frac{2}{\Omega_1+\Omega_2+2(\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star)} \tag{42}$$

Ținînd seama de rezultatele de mai sus, derivatele rezultantei presiunilor P_{p1}, care intervin în relațiile (29) se scriu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_{p_1 t,n}}{\partial \alpha} &= r_1\left(1+2\,\frac{\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1+\Omega_2}\right) C_{t,n}\,\frac{\partial p_0}{\partial \alpha} + p_0 r_1\left(1+2\,\frac{\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1+\Omega_2}\right)\left[\frac{\partial C_{t,n}}{\partial \alpha} - \right.\\ &\qquad\qquad \left. -\frac{\xi'}{p_0}\,\frac{\partial C_{t,n}}{\partial \xi'}\,\frac{\partial p_0}{\partial \alpha}\right],\\ \frac{\partial P_{p_1 t,n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} &= r_1\left(1+2\,\frac{\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1+\Omega_2}\right) C_{t,n}\,\frac{\partial p_0}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \frac{2p_0 r_1}{\Omega_1+\Omega_2}\,C_{t,n}\\ &\qquad\qquad - r_1 p_0\left(1+2\,\frac{\dot{\gamma}-\dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1+\Omega_2}\right)\frac{\xi'}{p_0}\,\frac{\partial C_{t,n}}{\partial \xi'}\,\frac{\partial p_0}{\partial \dot{\vartheta}^\star}\,. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Dacă se consideră p_0 ca fiind constant, relațiile de mai sus devin

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\alpha} &= p_0\, r_1\left(1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)\frac{\partial C_{t,n}}{\partial\alpha},\\ \frac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star} &= -\,\frac{2p_0\, r_1}{\Omega_1 + \Omega_2}\, C_{t,n}.\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

Dacă în sfîrșit se consideră că p_0 este o funcție de α și $\dot{\vartheta}^\star$, avînd derivatele respective date de relațiile (41) și (42), atunci relațiile (43) se scriu

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\alpha} &= -\,p_0 r_1\left(1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)\frac{C_{t,n}}{\chi}\,\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} + p_0 r_1\left(1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)\left[\frac{\partial C_{t,n}}{\partial\alpha} + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\xi'}{\chi}\,\frac{\partial C_{t,n}}{\partial\xi'}\,\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right] \cong p_0\, r_1\left(1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1 + \Omega_2}\right)\left(\frac{\partial C_{t,n}}{\partial\alpha} - \frac{C_{t,n}}{\chi}\,\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right),\\ \frac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star} &= -\,\frac{2p_0\, r_1}{\Omega_1 + \Omega_2}\,\xi'\,\frac{\partial C_{t,n}}{\partial\xi'},\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

unde s-a neglijat termenul care conține ca factor $\dfrac{\partial C_{t,n}}{\partial\xi'}$ în derivata $\dfrac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\alpha}$.

Se constată că dacă derivata presiunii p_0 în funcție de α are o influență mai redusă asupra mărimii corespunzătoare $\dfrac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{C_{t,n}}{\chi}\dfrac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right.$ în raport cu $\left.\dfrac{\partial C_{t,n}}{\partial\alpha}\right)$, influența derivatei presiunii p_0 în raport cu $\dot{\vartheta}^\star$ este aproximativ egală și de semn contrar cu derivata $\dfrac{\partial P_{p_1t,n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}$ (44), obținută cînd nu se ia în considerare această variație.

Cu ajutorul relațiilor de mai sus, se pot calcula derivatele care intervin în determinantul (22) și apoi se pot determina coeficienții ecuației în ν (25), fapt care permite studiul stabilității mișcării în funcție de caracteristicile constructive ale lagărului și de regimul de funcționare respectiv. În cele ce urmează, vom aplica aceste rezultate la două regimuri de funcționare curent întîlnite în aplicații și anume la cazul încărcării constante și la cazul încărcării centrifugale.

Încărcare constantă

În cazul obișnuit al unui regim de bază pur static, $\vartheta^\star = \theta^\star = \text{const.} > 0$, $\dot{\gamma} = 0$, $\Omega_2 = 0$ și din determinantul (36) rezultă ecuația în ν [3]

$$\begin{aligned}&\nu^4 - \frac{1}{m_1\Delta}\,\frac{\partial P_{1n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\,\nu^2 + \frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial\alpha} - \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial P_{1n}}{\partial\vartheta^\star}\right)\nu^2 + \\ &+ \frac{1}{m_1^2\Delta^2\alpha}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\,\frac{\partial P_{1n}}{\partial\alpha} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial\alpha}\,\frac{\partial P_{1n}}{\partial\dot{\vartheta}^\star}\right)\nu + \frac{1}{m_1^2\Delta^2\alpha}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial\vartheta^\star}\,\frac{\partial P_{1n}}{\partial\alpha} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial\alpha}\,\frac{\partial P_{1n}}{\partial\vartheta^\star}\right) = 0.\end{aligned}\tag{46}$$

Cum, pentru acest caz $C_t > 0$, $C_n > 0$, $\theta^\star > 0$, derivatele care intervin au următoarele semne :

$$\frac{\partial P_{st}}{\partial \alpha} > 0\,; \quad \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} > 0\,; \quad \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0\,; \quad \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} > 0\,; \quad \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} < 0\,; \quad \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0. \tag{47}$$

Se deduce atunci imediat

$$C_0 = 1 > 0, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad C_4 > 0. \tag{48}$$

Pentru coeficientul C_3 rezultă condiția

$$C_3 = \frac{1}{m_1^2 \Delta^2 \alpha} \left(\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} \right) > 0. \tag{49}$$

Primul termen al acestei expresii este negativ, iar al doilea pozitiv. Dacă se consideră p_0 constant, ținînd seama de relațiile (50), rezultă

$$C_3 = \frac{2 p_0^2 r_1^2}{m_1^2 \Delta^2 \alpha (\Omega_1 + \Omega_2)} \left(- C_t \frac{\partial C_n}{\partial \alpha} + C_n \frac{\partial C_t}{\partial \alpha} \right) = \frac{2 p_0^2 r_1^2 C_t C_n}{m_1^2 \Delta^2 \alpha (\Omega_1 + \Omega_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln \mathrm{cotg}\, \theta^\star) = 0 \tag{50}$$

Dacă se consideră p_0 variabil, ținînd seama de relațiile (44), coeficientul C_3 rezultă egal cu

$$C_3 = \frac{2 p_0^2 r_1^2 \xi'}{m_1^2 \Delta^2 \alpha (\Omega_1 + \Omega_2)} \left\{ \left(\frac{\partial C_t}{\partial \alpha} \frac{\partial C_n}{\partial \xi'} - \frac{\partial C_n}{\partial \alpha} \frac{\partial C_t}{\partial \xi'} \right) - \left[\frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} C_t C_n \frac{\partial}{\partial \xi'} (\ln \mathrm{tg}\, \theta^\star) \right] \right\} \tag{51}$$

Deoarece, tg $\theta^\star$ scade cînd ξ' crește (vezi fig. 3), $\frac{\partial}{\partial \xi'} (\ln \mathrm{tg}\, \theta^\star) < 0$ și deci a două paranteză este pozitivă. În ceea ce privește prima paranteză, dacă $\xi' < 1{,}4$, $\frac{\partial C_n}{\partial \xi'} > 0$ și termenul care conține ca factor această derivată este pozitiv; dacă însă $\xi' > 1{,}4$ acest termen este negativ. Această concluzie este cu atît mai mult valabilă pentru întreaga paranteză, cu cît cel de-al doilea termen este negativ, deoarece $\frac{\partial C_n}{\partial \alpha} > 0$ și $\frac{\partial C_t}{\partial \xi'} > 0$.

Dacă se consideră excentricitatea ca fiind redusă, cu ajutorul metodei simplificate, expusă la punctul 1, coeficientul C_3 este egal cu

$$C_3 = - \frac{2 p_0^2 r_1^2 \xi_\Delta}{m_1^2 \Delta^2 \alpha (\Omega_1 + \Omega_2)} \frac{\alpha \pi^2 \xi_\Delta^2}{\left(1 + \xi_\Delta^2\right)\left(1 + \xi_\Delta^2 + \alpha \xi_\Delta^2\right)} < 0, \tag{52}$$

deci negativ. De altfel, se poate ușor verifica faptul că și la excentricități mai mari coeficientul C_3 este negativ, iar $C_3 \to 0$ cînd $\xi' \to \infty$.

În sfîrșit, ultima condiție (28) se scrie, dacă $p_0 =$ constant

$$(C_1 C_2 - C_3) C_3 - C_1^2 C_4 \cong - C_1^2 C_4 < 0, \tag{53}$$

și deci această condiție nu este satisfăcută. Aceeași concluzie rezultă și în cazul cînd se consideră presiunea p_0 ca fiind variabilă.

În consecință, din analiza de mai sus rezultă că mișcarea lagărelor cu aer de alungire infinită încărcate cu sarcini constante este instabilă. Este posibil totuși ca situația reală să fie mai favorabilă ; în parte datorită aproximațiilor acoperitoare introduse (în special datorită neglijării contribuției termenului $\frac{\partial(p\delta)}{\partial t}$ în ecuația presiunilor (7) care este stabilizator și a inerției pieselor din sistem) și în parte datorită faptului că alungirea finită poate avea de asemenea un efect stabilizator. Rezultă deci ca necesare unele soluții constructive speciale, pentru asigurarea stabilității mișcării.

Încărcarea centrifugală

În acest caz $\Omega_2 = 0$, $\dot{\gamma} = -\Omega_1 = \text{const.}$ $\ddot{\gamma} = 0$, $\dot{\vartheta}^\star = \dot{\theta}^\star = 0$, iar din determinantul (22) se deduce ecuația în ν [3]

$$\begin{aligned}\nu^4 &- \frac{1}{\alpha m_1 \Delta}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star}\nu^3 + \left[3\,\Omega_1^2 + \frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} - \frac{2}{\alpha}\Omega_1\frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star}\right)\right]\nu^2 - \\ &- \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \Omega_1^2\right)\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \left(\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - 2\alpha\,\Omega_1\right)\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} + \right. \\ &\left. + \frac{2\Omega_1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star}\right]\nu + \frac{1}{m_1\Delta\alpha}\left[\Omega_1^2\frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} + \frac{1}{m_1\Delta}\left(\frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star}\right)\right] = 0.\end{aligned} \tag{54}$$

Încărcarea fiind centrifugală, $C_t > 0$, $C_n > 0$, dar $P_{p1t} < 0$, $P_{p1n} < 0$, din cauza termenului $1 + 2\,\frac{\dot{\gamma} - \dot{\vartheta}^\star}{\Omega_1} = -1 < 0$. Apoi $\vartheta^\star = \theta^\star + \pi$. Se deduce astfel că derivatele care intervin în ecuația de mai sus au semnele

$$\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} < 0\,; \quad \frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star} < 0\,; \quad \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0\,; \quad \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} < 0\,; \quad \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star} > 0\,; \quad \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} < 0\,. \tag{55}$$

Se remarcă faptul că față de cazul incompresibil [3]*), conform celor spuse anterior, derivatele componentelor P_{p1t} au semnele schimbate.

Cu ajutorul relațiilor (55) se deduce

$$C_0 = 1 > 0, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0. \tag{56}$$

Condiția $C_4 > 0$ se scrie apoi

$$C_4 = \frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1t}}{\partial \vartheta^\star}\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} - \frac{\partial P_{1n}}{\partial \vartheta^\star}\left(\frac{1}{m_1\Delta}\frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \Omega_1^2\right) > 0\,, \tag{57}$$

unde toți termenii sînt pozitivi.

---

*) p. 548 (8.37).

Semnul coeficientului C_3 depinde de semnul sumei

$$s = -\left(\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} - \Omega_1^2\right) \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} + \left(\frac{1}{m_1 \Delta} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - 2 \alpha \Omega_1\right) \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} = 0 \tag{58}$$

$$= \frac{1}{m_1 \Delta}\left(\frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1t}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \frac{\partial P_{1t}}{\partial \alpha} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star}\right) + 2 \Omega_1 \left[\frac{\Omega_1}{2} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \alpha \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}\right].$$

Prima paranteză, cu aproximația unui factor constant pozitiv, este egală cu $- C_3$ din cazul precedent al încărcării constante (49). În consecință, această paranteză este nulă, dacă se consideră presiunea p_0 ca fiind constantă (50) sau este pozitivă, dacă se consideră presiunea p_0 ca fiind variabilă (51), (52). A doua paranteză din relația (58) este egală cu

$$2 \Omega_1 \left[\frac{\Omega_1}{2} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \alpha \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}\right] = 2 \Omega_1 p_0 r_1 C_n \left[\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln C_n) - 1\right], \tag{59}$$

dacă se consideră $p_0 =$ constant, și

$$2 \Omega_1 \left[\frac{\Omega_1}{2} \frac{\partial P_{1n}}{\partial \dot{\vartheta}^\star} - \alpha \frac{\partial P_{1n}}{\partial \alpha}\right] = 2 \Omega_1 p_0 r_1 c_n \alpha \left[\frac{\partial (\ln C_n)}{\partial \alpha} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{\xi'}{\alpha} \frac{\partial (\ln C_n)}{\partial \xi'}\right], \tag{60}$$

dacă se consideră presiunea p_0 variabilă.

În ambele cazuri se constată că paranteza se anulează cînd $\xi' \to \infty$ (deoarece $C_n \to 0$, și $\frac{\partial C_n}{\partial \xi'} \to 0$). În cazul formulei (59) paranteza rămîne în rest pozitivă $\left(\text{termenul } \alpha \frac{\partial (\ln C_n)}{\partial \alpha} \to 1\text{, cînd } \alpha \to 0 \text{ iar pentru } \alpha > 0 \text{ este tot timpul supraunitar}\right)$. Aceeași concluzie se obține și pentru relația (60), pentru $\xi' > 1{,}4$, cînd $\frac{\partial C_n}{\partial \xi'} < 0$ (la excentricități mici $\frac{\partial C_n}{\partial \xi'}$, la $\xi_\Delta = 1$ respectiv la $\xi' = \frac{4}{\pi} = 1{,}28$) ; de asemenea la valori $\xi' < 1{,}4$, $\frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} < 1$, $\frac{\partial (\ln C_n)}{\partial \alpha} > 2{,}5$, tinzînd către infinit ca $\frac{1}{\alpha}$, iar $\frac{\xi'}{\alpha} \frac{\partial (\ln C_n)}{\partial \xi'} \cong \xi_\Delta \frac{1 - \xi_n^2}{(1 + \xi_\Delta)^2} < 1$ cînd $\xi' < 1{,}4$ și tinde către zero cînd $\xi' \to 0$; în consecință relația (60) rămîne pozitivă, chiar cînd $\alpha \to 0$.

Prin urmare, coeficientul C_3

$$C_3 = \frac{s}{m_1 \Delta \alpha} - \frac{2 F_1 \Omega_1}{m_1 \Delta} \sin \vartheta^\star > 0, \tag{61}$$

deoarece $\sin \vartheta^\star < 0$ iar suma s este pozitivă. Se remarcă însă că dacă $\xi^2 \to \infty$, $s \to 0$, $\sin \vartheta^\star \to 0$ și $C_3 \to 0$ și mișcarea devine instabilă.

Ultima condiție (28) se scrie în mod asemănător ca pentru cazul precedent. În cazul p_0 variabil se constată ușor că mișcarea este instabilă pentru $\xi' > 1{,}4$ deoarece coeficientul C_1 devine negativ.

Pe măsură ce ξ' creşte , această condiţie nu este îndeplinită, deoarece coeficienţii C_1 şi C_3 tind către zero, conform celor arătate anterior. În consecinţă stabilitatea mişcării poate avea loc pentru anumite regimuri, funcţie de α, ξ', m_1, Δ, mişcarea devenind însă instabilă la valori ξ' mari.

3. CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că stabilitatea mişcării lagărelor circulare cu aer nu este în general asigurată, în special la viteze mari şi foarte mari. Comportarea este ceva mai bună în cazul sarcinilor dinamice (centrifugale), la viteze nu prea mari şi la anumite valori pentru masele în mişcare şi pentru dimensiunile relative ale lagărului. În cazul prezentat, al lagărelor de alungire infinită, cel mai defavorabil din acest punct de vedere, se pare că, spre deosebire de cazul lubrificaţie cu lichide, excentricitatea nu mai joacă un rol esenţial în delimitarea zonelor de instabilitate, cel puţin pentru domeniul de excentricităţi curent utilizat în aplicaţiile tehnice. În realitate este probabil ca situaţia să fie ceva mai bună, deoarece termenul $\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{\frac{1}{\chi}}\,\delta\right)$ din ecuaţia diferenţială a presiunilor (7), ca şi alungirea au o influenţă favorabilă.

Concluziile de mai sus explică de ce fenomenele de instabilitate apar atît de frecvent în funcţionarea lagărelor circulare cu aer.

Explicarea fizică a cauzelor care provoacă instabilitatea apare deci ca o problemă interesantă, care poate eventual conduce la găsirea unor soluţii pentru remedierea instabilităţii. Deşi pentru aceasta mai sînt necesare unele studii, din analiza făcută rezultă că principala cauză care conduce la instabilitatea mişcării ar fi compresibilitatea şi mai ales posibilitatea formării zonelor de depresiuni, în stratul de lubrifiant; acestea conduc la o orientare a rezultantei presiunilor după o direcţie care este independentă de excentricitate ; din această cauză, deşi lagărul este static stabil în raport cu perturbaţiile excentricităţii, nu prezintă aceleaşi proprietăţi în ceea ce priveşte unghiul ϑ^*. Concluzia de mai sus explică într-o oarecare măsură eficienţa unora din soluţiile constructive utilizate în vederea asigurării stabilităţii mişcării, ca : utilizarea unor cuzineţi în trepte [1] sau utilizarea alimentării sub presiune [2]. Într-adevăr, în cazul cuzineţilor în trepte, din cauza existenţei unor canale care taie curba presiunilor (în punctele respective presiunea este aproximativ egală cu presiunea din mediul înconjurător), echilibrul existent anterior se rupe, zona posibilă de oscilaţie a unghiului ϑ^* este micşorată considerabil şi însăşi unghiul ϑ^* va depinde de excentricitate şi de poziţia liniei centrelor. În cazul unor prize de presiune izolate, situaţia este oarecum asemănătoare, deoarece poziţia prizei de presiune rămîne fixă ; în zona respectivă se modifică de asemenea curba presiunilor. Dacă se realizează o alimentare sub presiune pe toată circumferinţa lagărului, în una, două sau mai multe secţiuni, se obţine un efect de lubrificaţie hidrostatică, care este stabilizator.

Trebuie spus că în special pentru cazul încărcărilor centrifugale la excentricități mai mari, fenomenul poate fi diferit. Într-adevăr, în aceste condiții pot apare din calcul depresiuni mari și chiar presiuni negative, ceea ce este fizic inacceptabil. În asemenea cazuri trebuie să se reia problema, considerîndu-se $p \rightarrow 0$ în zonele unde ar rezulta din calcul presiuni negative.

Primită la redacție la 2 octombrie 1958.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ КРУГЛОГО ПОДШИПНИКА С ГАЗОВОЙ СМАЗКОЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для исследования движений с возмущениями, играющих важную роль в задаче устойчивости движения, пишется дифференциальное уравнение давлений для круглых подшипников при неустановившемся режиме. Затем это уравнение интегрируется при помощи упрощенного метода, на основании которого устанавливаются влияние вращения линии центров на распределение давлений и характеристика движения при центробежных нагрузках. Полученные результаты позволяют применить сделанные ранее выводы к расчету круглых подшипников.

Далее пишутся уравнения устойчивости движения в предположении малых возмущений и вычисляются производные, входящие в систему уравнений возмущенного движения. Полученные результаты применяются к исследованию устойчивости движения круглых подшипников, находящихся под действием постоянных и центробежных нагрузок. Автор приходит к выводу, что движение подшипников, находящихся под действием постоянных нагрузок, а также движение подшипников, находящихся под действием центробежных нагрузок, является неустойчивым.

В заключение приводятся некоторые соображения относительно причин неустойчивости движения и возможных мер для устранения этого явления.

SUR LA STABILITÉ DES PALIERS CIRCULAIRES LUBRIFIÉS AUX GAZ

RÉSUMÉ

En vue d'une étude des mouvements perturbés qui interviennent dans le problème de la stabilité, on écrit d'abord l'équation différentielle des pressions pour les paliers circulaires en régime non permanent. Une méthode simplifiée permet de résoudre cette équation et de déterminer

l'influence de la rotation de la ligne des centres sur la distribution des pressions et les caractéristiques du mouvement dans le cas des paliers soumis à des charges centrifuges. Les conclusions auxquelles on aboutit permettent d'utiliser des résultats déduits antérieurement, pour le calcul des paliers circulaires.

On écrit ensuite les équations de la stabilité du mouvement, dans l'hypothèse des perturbations réduites et on détermine les dérivées qui interviennent dans le système des équations du mouvement perturbé. Les résultats obtenus sont appliqués à l'étude de la stabilité des paliers soumis à des charges constantes et à des charges centrifuges. La conclusion est que le mouvement des paliers soumis à des charges constantes, ainsi que celui des paliers soumis à des charges centrifuges, est instable.

Finalement, on présente certaines considérations sur les causes de l'instabilité du mouvement et les solutions qu'on peut éventuellement envisager, afin de remédier à ce phénomène.

BIBLIOGRAFIE

1. H. DRESCHER, *Gleitlager mit Luftschmierung.* V.D.I., **95**, *35*, 1182 (1953).
2. G. W. FORD, D. M. HARRIS, *Principles and Application of Hydrodynamic-Type Gas Bearings.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, London, 1957.
3. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificaţiei.* Ed. Academiei R.P.R., 1957.
4. J. S. AUSMANN, *The Fluid Dynamic Theory of Gas-Lubricated Bearings.* Transactions of the A.S.M.E., **79**, 1218 (1957).
5. V. N. CONSTANTINESCU, *Sur le problème tridimensionnel de la lubrification aux gaz.* Révue de Mécanique Appliquée, *2*, 123 (1956).
6. — *Calculul lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *3–4*, 377 (1955); **VII**, *1*, 81 (1956).
7. V. N. CONSTANTINESCU, *Sur la théorie des paliers à gaz.* Revue de Mécanique Appliquée, *1*, 141 (1956).
8. S. A. SCHEINBERG, *Gazovaia smazca podşipnicov scoljenia.* Trenie i iznos v maşinah, **8**, 1953, 107.
9. С. А. ШЕЙНБЕРГ, *Газовая смазка подшипников скольжения.* Трение и износ в машинах, 8, 1953, 107.

SINTEZA MECANISMELOR CU PATRU ELEMENTE PE BAZA ANALIZEI ARMONICE

DE

RADU C. BOGDAN şi CHRISTIAN PELECUDI

Este binecunoscut că problema de bază în sinteza mecanismelor o constituie determinarea parametrilor geometrici ai unui mecanism, astfel ca un punct sau un element al său să respecte anumite legi de mişcare date.

În general, mecanismele simple nu realizează uşor legi variate impuse iniţial; mecanismele cu număr mare de elemente, deşi teoretic pot realiza o precizie superioară, devin în realitate inferioare primelor atît datorită complexităţii lor, cît şi erorilor inevitabile de execuţie.

Tendinţa curentă în sinteza mecanismelor este aceea de a satisface legile de mişcare într-un număr finit maxim de puncte, sau aproximarea funcţiilor respective cu o eroare cît mai mică pe o anumită porţiune utilă de lucru. Aceste probleme se pot rezolva în general, fie prin metodele şcolii sovietice ilustrată de L. P. Cebîşev [4], L. V. Assur, I. I. Artobolevski [1], Z. S. Bloch [3], L. N. Levitski [7], S. A. Cerkudinov şi alţii, pe cale analitică, fie prin metodele şcolii germane ilustrată de L. Burmester, H. Alt, R. Beyer [2], R. Kraus [6], K. Hain [5], W. Lichtenheldt ş.a., pe cale geometrică.

În prezentul articol, ne propunem să obţinem dezvoltările parametrilor cinematici ai unui mecanism cu patru elemente, funcţie de unghiul φ de rotaţie al manivelei, întrebuinţînd seriile Fourier sub formă complexă. Considerăm analiza armonică deosebit de importantă pentru caracterizarea cinematică şi dinamică a unui mecanism, aşa cum observă de altfel şi W. Meyer zur Capellen [8].

În tratarea problemei propuse mai sus, să considerăm funcţiile $\Phi = \Phi(\varphi)$, $\Psi = \Psi(\varphi)$, $Z = Z(\varphi), Z_0 = Z_0(\varphi)$, precum şi derivatele lor reprezentînd viteze şi acceleraţii, sub forma generală pentru parametrii geometrici oarecare $r, R, l, L, \mathfrak{z}$ ai unui mecanism patrulater (figura)

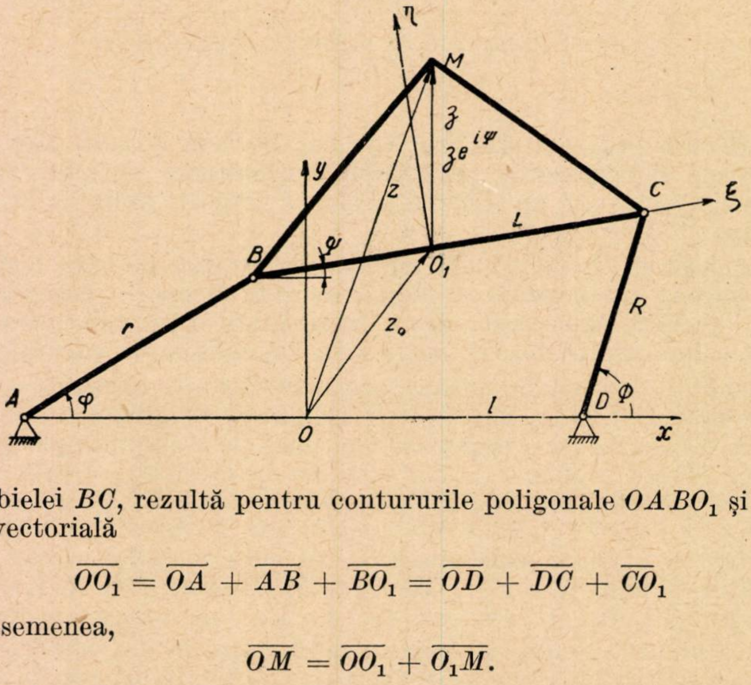
$$e^{i\Phi(\varphi)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\varphi}, \tag{1}$$

$$e^{i\Psi(\varphi)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} M_k e^{ik\varphi}, \tag{2}$$

$$Z_0(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} N_k e^{ik\varphi}, \tag{3}$$

$$Z(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k e^{ik\varphi}. \tag{4}$$

Cunoscînd că axele fixe Oxy sînt alese cu originea în centrul elementului de bază AD, iar axele mobile $O\xi\eta$ legate de bielă au originea în centrul bielei BC, rezultă pentru contururile poligonale $OABO_1$ şi $ODCO_1$ relaţia vectorială



$$\overline{OO_1} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO_1} = \overline{OD} + \overline{DC} + \overline{CO_1}$$

şi de asemenea,

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}.$$

Întrebuinţînd reprezentarea complexă a vectorilor, obţinem

$$Z_0 = -\frac{l}{2} + r\,e^{i\varphi} + \frac{L}{2}\,e^{i\Psi} = \frac{l}{2} + Re^{i\Phi} - \frac{L}{2}\,e^{i\Psi}, \tag{5}$$

$$Z = Z_0 + \mathfrak{z}\,e^{i\Psi}, \tag{6}$$

deoarece vectorul $\overline{O_1M}$ este reprezentat faţă de axele $O\xi\eta$ prin $\mathfrak{z}$, dar faţă de axele fixe Oxy este rotit cu unghiul Ψ în sens pozitiv. Se deduce relația

$$Le^{i\Psi} = l + Re^{i\Phi} - re^{i\varphi}, \tag{7}$$

și conjugata ei

$$L\,e^{-i\Psi} = l + Re^{-i\Phi} - re^{-i\varphi}. \tag{8}$$

Prin înmulțire se elimină unghiul Ψ, rămînînd expresia

$$\begin{aligned} L^2 = l^2 + lR(e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}) - lr(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + \\ + R^2 + r^2 - Rr[e^{i(\Phi-\varphi)} + e^{-i(\Phi-\varphi)}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Introducem dezvoltările

$$e^{i\Phi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k\,e^{ik\varphi}, \qquad e^{-i\Phi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}_k\,e^{-ik\varphi}, \tag{10}$$

și procedăm mai departe la identificarea coeficienților

$$\begin{aligned} lR\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}(A_k e^{ik\varphi} + \bar{A}_k\,e^{-ik\varphi})\right] - lr(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) - \\ - Rr\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}(A_k e^{i(k-1)\varphi} + \bar{A}_k\,e^{-i(k-1)\varphi})\right] = L^2 - l^2 - R^2 - r^2, \end{aligned}$$

sau grupînd termenii asemenea

$$\begin{aligned} R\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}(lA_k - rA_{k+1})\,e^{ik\varphi} + \sum_{-\infty}^{+\infty}(l\bar{A}_k - r\bar{A}_{k+1})\,e^{-ik\varphi}\right] = \\ = lr(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + L^2 - l^2 - R^2 - r^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Dacă se notează

$$\begin{gathered} B_k = lA_k - rA_{k+1}, \\ \alpha_0 = \frac{L^2 - l^2 - R^2 - r^2}{2R}, \quad \alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{lr}{2R}, \\ \alpha_k = 0 \text{ pentru } k \neq -1\,;0\,;1 \end{gathered} \tag{12}$$

rezultă

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(B_k e^{ik\varphi} + \bar{B}_k\,e^{-ik\varphi}) = 2\alpha_1\,e^{i\varphi} + 2\alpha_{-1}\,e^{-i\varphi} + 2\alpha_0,$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(B_k + \bar{B}_{-k})\,e^{ik\varphi} = 2\alpha_1\,e^{i\varphi} + 2\alpha_{-1}\,e^{-i\varphi} + 2\alpha_0, \tag{13}$$

şi deci

$$\begin{aligned} B_0 + \bar{B}_0 &= 2\alpha_0, \\ B_1 + \bar{B}_{-1} &= 2\alpha_1, \\ \dots\dots&\dots\dots \\ B_k + \bar{B}_{-k} &= 2\alpha_k. \end{aligned} \tag{14}$$

Constantele B_k conform formulelor (12) sînt coeficienţii complecşi ai seriei Fourier pentru funcţia

$$f(\varphi) = e^{i\Phi}(l - re^{-i\varphi}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\varphi} \tag{15}$$

şi conjugata

$$\bar{f}(\varphi) = e^{-i\Phi}(l - re^{+i\varphi}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{B}_k e^{-ik\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{B}_{-k} e^{ik\varphi},$$

condiţiile (14) fiind impuse de geometria mecanismului patrulater prin care funcţia Φ depinde de φ

$$f(\varphi) + \bar{f}(\varphi) = 2\alpha_1(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + 2\alpha_0 = 4\alpha_1 \cos\varphi + 2\alpha_0. \tag{16}$$

O altă serie de relaţii între coeficienţii A_k, respectiv B_k, se obţin luînd produsul funcţiilor din (10) sau (15). Astfel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_k \bar{A}_k = 1 \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k \bar{A}_{k+m} = 0, \qquad \text{pentru } m \neq 0. \tag{17}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_k \bar{B}_{k+m} = \beta_m, \quad \begin{array}{ll} \beta_0 = l^2 + r^2, & \beta_m = 0, \\ \beta_1 = \beta_{-1} = -lr, & m \neq -1,\ 0,\ +1. \end{array} \tag{18}$$

Dacă facem transformarea

$$C_k = B_k - \alpha_k, \tag{19}$$

constantele C_k vor fi coeficienţii complecşi ai seriei Fourier pentru funcţia

$$F(\varphi) = f(\varphi) - \alpha_{-1} e^{-i\varphi} - \alpha_1 e^{i\varphi} - \alpha_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\varphi} \tag{20}$$

şi conjugata ei

$$\bar{F}(\varphi) = \bar{f}(\varphi) - \alpha_{-1} e^{i\varphi} - \alpha_1 e^{-i\varphi} - \alpha_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{C}_k e^{-ik\varphi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{C}_{-k} e^{ik\varphi},$$

cu condiţiile stabilite mai jos (23) şi (24).

Din definiţia funcţiei $F(\varphi)$ rezultă

$$\begin{aligned} F(\varphi) + \bar{F}(\varphi) &= 0, \\ F(\varphi) - \bar{F}(\varphi) &= f(\varphi) - \bar{f}(\varphi) \end{aligned} \tag{21}$$

și deci

$$F(\varphi) = -\overline{F}(\varphi) = \frac{f(\varphi) - \overline{f}(\varphi)}{2}, \tag{22}$$

ceea ce atrage

$$C_k + \overline{C}_{-k} = 0, \qquad C_k = \frac{B_k - \overline{B}_{-k}}{2}, \tag{23}$$

funcția $F(\varphi)$ fiind pur imaginară. Relațiile corespunzătoare celor de la punctele (17) și (18) se obțin luînd

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} B_k \overline{B}_{k+m} = \sum_{-8}^{+\infty} (C_k + \alpha_k)(\overline{C}_{k+m} + \alpha_{k+m}) = \beta_m,$$

sau

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [C_k \overline{C}_{k+m} + \alpha_{k+m} C_k + \alpha_k \overline{C}_{k+m} + \alpha_k \alpha_{k+m}] = \beta_m.$$

Dar ținînd seama de proprietățile constantelor α și C

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{k+m} \overline{C}_{-k} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{-k-m} \overline{C}_{-k} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{k-m} \overline{C}_k = \sum_{-8}^{+\infty} \alpha_k \overline{C}_{k+m}$$

și împreună cu relația (23)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_{k+m} C_k + \alpha_{k+m} \overline{C}_{-k}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_{k+m} C_k + \alpha_k \overline{C}_{k+m}) = 0,$$

astfel că rezultă

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_k \overline{C}_{k+m} = \gamma_m,$$

$$\gamma_m = \gamma_{-m} = \beta_m - \sum_{-1}^{+1} \alpha_k \alpha_{k+m}, \tag{24}$$

$$\gamma_0 = \beta_0 - \alpha_0^2 - 2\alpha_1^2, \quad \gamma_1 = \beta_1 - 2\alpha_0 \alpha_1,$$

$$\gamma_2 = -\alpha_1^2, \quad \gamma_m = 0, \text{ pentru } m \neq -2, -1, 0, 1, 2,$$

De asemenea din (23) și (24) reiese

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_k C_{-k+m} = -\gamma_m, \tag{25}$$

ceea ce arată că dacă C_k sînt coeficienții complecși ai seriei Fourier pentru funcția $F(\varphi)$, atunci $-\gamma_m$ sînt coeficienții complecși ai seriei Fourier pentru funcția $F^2(\varphi)$

$$F^2(\varphi) = -\sum_{-2}^{+2} \gamma_m e^{im\varphi} = -(\gamma_0 + 2\gamma_1 \cos\varphi + 2\gamma_2 \cos 2\varphi). \tag{26}$$

Pentru determinarea constantelor C_k, urmărind a obţine apoi pe B_k şi în urmă pe A_k, ar trebui să se rezolve sistemul infinit de ecuaţii neliniare (25), sau se poate dezvolta în serie Fourier funcţia pară, imaginară

$$F(\varphi) = F(-\varphi) = i\sqrt{\Upsilon_0 + 2\Upsilon_1 \cos\varphi + 2\Upsilon_2 \cos 2\varphi}, \tag{27}$$

ceea ce atrage

$$C_k = C_{-k}, \qquad C_k + \overline{C}_k = 0, \tag{28}$$

rezultînd că aceşti coeficienţi sînt puri imaginari.

Pentru dezvoltarea funcţiei $F(\varphi)$ în serie Fourier facem transformarea

$$\begin{aligned} 2\cos\varphi &= e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = u, \\ 2\cos 2\varphi &= u^2 - 2, \end{aligned} \tag{29}$$

deci

$$\begin{aligned} F(u) &= i\sqrt{\Upsilon_2 u^2 + \Upsilon_1 u + \delta_0^2}, \\ \delta_0^2 &= \Upsilon_0 - 2\Upsilon_2, \end{aligned} \tag{30}$$

care se poate dezvolta după puterile lui u în serie Mac-Laurin. Pentru aceasta să considerăm

$$F^2(u) = -(\Upsilon_2 u^2 + \Upsilon_1 u + \delta_0^2), \tag{31}$$

care se derivează succesiv, obţinîndu-se

$$\begin{aligned} &2F'(u)F(u) = -(2\Upsilon_2 u + \Upsilon_1), \\ &2F''(u)F(u) + 2[F'(u)]^2 = -2\Upsilon_2, \\ &2F'''(u)F(u) + 6F''(u)F'(u) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{32}$$

sau simbolic

$$[F(u) + F(u)]^{(n)} = 0, \qquad \text{pentru } n \neq 0, 1, 2,$$

ceea ce atrage pentru $u = 0$
pentru n impar,

$$F^{(n)}(0) = i\,\frac{2\sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k F^{(n-k)}(0).F^{(k)}(0) - D_n(0)}{2\delta_0}, \tag{33}$$

pentru n par,

$$F^{(n)}(0) = i\,\frac{2\sum\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} C_n^k F^{(n-k)}(0).F^{(k)}(0) - D_{(n)}(0) + C_n^{\frac{n}{2}}\left[F^{\left(\frac{n}{2}\right)}(0)\right]^2}{2\delta_0}$$

unde

$$D_1(0) = -\gamma_1, \quad D_2(0) = -2\gamma_2, \quad D_n(0) = 0, \quad \text{pentru } n \neq 1{,}2, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} F(0) &= i\,\delta_0, \\ F'(0) &= i\frac{\gamma_1}{2\delta_0}, \\ F''(0) &= i\left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1^2}{4\delta_0^2}\right)\cdot\frac{1}{\delta_0}, \\ F'''(0) &= -i\left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1^2}{4\delta_0^2}\right)\frac{3\gamma_1}{2\delta_0^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{34}$$

În dezvoltarea Mac-Laurin

$$F(u) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}u^1 + \frac{F''(0)}{2!}u^2 + \ldots.$$

puterile lui u vor reprezenta, potrivit notațiilor de la (29) următoarele:

$$\begin{aligned} u &= e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi, \\ u^2 &= e^{+2i\varphi} + e^{-2i\varphi} + 2 = 2\cos 2\varphi + 2, \\ u^3 &= e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi} + 3(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2\cos 3\varphi + 6\cos\varphi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{35}$$

sau

$$u^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, e^{i(n-2k)\varphi}$$

şi deci

$$F(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, e^{i(n-2k)\varphi}\right].$$

În această formulă însumînd pentru $n - 2k = m$ constant, rezultă coeficientul seriei Fourier

$$C_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\, C_n^{\frac{n-m}{2}}, \tag{36}$$

unde n este de aceeaşi paritate cu m.

În consecință rămîne, ca fiind dată legea de variație a unui parametru Φ, Ψ, Z_0, Z, funcție de φ, să se determine seria Fourier respectivă şi să se compare cu cea posibil de redat de mecanismul patrulater, fie în sensul de a se satisface aşa cum am arătat la început într-un număr finit maxim de puncte, fie de a se aproxima pe o porţiune utilă de lucru, cu o eroare minimă.

Primită la redacţie la 28 octombrie 1958.

СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Применяя гармонический анализ, имеющий особое значение для кинематической и динамической характеристики механизма, авторы получают разложения кинематических параметров четырехзвенника в функции от угла φ вращения кривошипа. В частности, уравнение кривой шатуна находится в параметрическом виде. При заданном законе движения синтез четырехзвенного механизма можно получить либо путем удовлетворения соотношению в конечном максимальном количестве точек, либо путем его апроксимирования на рабочем участке с минимальной погрешностью.

SYNTHESIS OF FOUR BAR MECHANISMS ON THE BASIS OF HARMONIC ANALYSIS

ABSTRACT

By using the harmonic analysis, which is of a particular importance for the kinematic and dynamic characterization of a mechanism, the authors obtain the expanding of the kinematic parameters of a four bar mechanism, function of the crank rotation angle φ. The equation of the connecting rod curve is, in particular, set under parametric form. For a given motion law, the synthesis of a four bar mechanism is realized either by satisfying the relation in a maximum finite number of points, or by its approximation on an effective working portion.

BIBLIOGRAFIE

1. И. И. Артоболевский, З. С. Блох, В. В. Добровольский, *Синтез механизмов*. Огиз. Гостехиздат, Москва, 1944.
2. R. Beyer, *Kinematische Getriebesynthese*. Springer Verlag, Berlin, 1953.

3. З. С. Блох, *Приближенный синтез механизмов.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1950.
4. — *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева.* Издательство Академии Наук СССР, Москва-Ленинград, 1948.
5. K. Hain, *Angewandte Getriebelehre.* Hermann Schroedel Verlag R. G., Hannover Darmstadt, 1952.
6. R. Kraus, *Getriebelehre.* V E B Verlag Technik, Berlin, 1956.
7. Н. И. Левицкий, *Проектирование плоских механизмов с низшими парами.* Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва. 1948.
8. W. Meyer zur Capellen, *Die harmonische Analyse bei elliptischen Kurbelschleifen.* Z.A.M.M., **38**, *1–2* (1958).
9. K. H. Sieker, *Zur algebraischen Masssynthese ebener Kurbelgetriebe.* Ingenieur Archiv, **XXIV**, *3–4* (1956).

STUDIUL COMPORTĂRII CONSTRUCȚIILOR PRIN ÎNCERCĂRI PE MODELE DIN MASĂ PLASTICĂ

DE

ST. BĂLAN, S. RĂUTU, M. ARGAN și V. PETCU

Proiectarea unei construcții inginerești presupune o cunoaștere a comportării reale a acesteia sub sarcini. Metodele de calcul existente, bazate pe o serie de ipoteze simplificatoare, nu reușesc întodeauna să poată cuprinde toate aspectele problemei. Din această cauză, introducerea unui nou gen de construcție, sau a unei construcții ce depășește cu mult dimensiunile curente, pune problema verificării experimentale a comportării construcției sub sarcini și a concordanței între calcule și realitate. De asemenea, în cazul elaborării unei noi teorii de calcul, verificarea ei nu se poate face decît pe bază de încercări.

Cea mai bună verificare o reprezintă executarea construcției și urmărirea comportării ei în timp. Un asemenea mod de lucru nu este însă indicat totdeauna, deoarece necesită un timp foarte îndelungat pînă cînd construcția este solicitată simultan de toate sarcinile posibile. În plus, în acest caz, este destul de dificil să se urmărească punctele în care apar primele avarii și cauzele exacte ale acestora.

De asemenea, realizarea unei construcții speciale experimentale, care să fie supusă într-un termen scurt la toate solicitările pe care le va suporta construcția în timpul exploatării și la care s-au luat toate măsurile de securitate, este scumpă. În afară de costul ridicat al construcției experimentale, solicitările la care ea trebuie supusă sînt adeseori foarte mari și necesită realizarea unor dispozitive costisitoare pentru transmiterea sarcinilor și pentru măsurarea deformațiilor.

Avînd în vedere că, în majoritatea cazurilor, experiențele trebuie repetate, executarea încercărilor pe construcții în mărime naturală nu este posibilă decît în cazuri rare.

Din această cauză, o dată cu dezvoltarea mecanicii construcțiilor s-a dezvoltat și tehnica încercărilor *pe modele la scară redusă.*

Pentru ca rezultatele obţinute pe modele să poată constitui indicaţii asupra modului de comportare a construcţiilor în realitate, este necesar să se respecte regulile de similitudine cunoscute, între model şi prototip.

I

Probleme de similitudine. Se vor nota elementele modelului cu indicele *m*, iar elementele prototipului (construcţiei reale proiectate) cu indicele *p*.

Se aleg următoarele scări:

— scara lungimilor . . . . $l_m = \frac{1}{\lambda} \cdot l_p$ (1)

— scara timpului . . . . $t_m = \frac{1}{\tau} \cdot t_p$ (2)

— scara eforturilor unitare . . . $\sigma_m = \frac{1}{\alpha} \cdot \sigma_p$ (3)

— scara deplasărilor . . . . . . $\delta_m = \frac{1}{\beta} \cdot \delta_p$ (4)

— scara modulilor de elasticitate $E_m = \frac{1}{\gamma} \cdot E_p$. (5)

Există două posibilităţi de realizare a modelului: din acelaşi material cu prototipul sau din materiale deosebite.

S-ar putea urmări realizarea unui model care să satisfacă relaţiile de similitudine în toate cazurile de solicitări. În acest caz, problema ar prezenta interes numai din punct de vedere teoretic, deoarece practic un asemenea model este greu de realizat şi nici nu este totdeauna necesar.

Fiecare model este executat pentru un anumit gen de solicitare şi în consecinţă trebuie urmărite problemele de similitudine numai pentru solicitarea respectivă. În felul acesta relaţiile sînt mai simple şi mai uşor de urmărit practic.

Se vor examina pe rînd cazurile curente de solicitări.

1. Model executat din acelaşi material cu prototipul

În acest caz $E_m = E_p = E$; deci $\gamma = 1$.

a. *Solicitare statică în zona elastică.* Se alege scara lungimilor (λ). Din condiţia ca eforturile unitare să respecte relaţia (3), rezultă mărimea sarcinilor distribuite pe suprafaţă

$$p_m = \frac{1}{\alpha} \cdot p_p.$$

Presupunînd că sarcinile concentrate lucrează pe o suprafață oarecare a prototipului, respectiv a modelului, rezultă raportul dintre sarcinile exterioare

$$P_m = \frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2} \cdot P_p .$$

Pe baza relațiilor dintre eforturi și deformații rezultă

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} = \frac{1}{\alpha} \cdot \varepsilon_p ,$$

$$\delta_m = \frac{1}{\beta}\, \delta_p = \varepsilon_m \cdot l_m = \frac{1}{\alpha \cdot \lambda} \cdot \delta_p ,$$

deci

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\lambda} .$$

În cazul cînd modelul este solicitat numai de sarcini exterioare, se alege valoarea lui α, iar relațiile dintre mărimile măsurate pe model și ale prototipului sînt

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{\alpha}\, p_p , \quad & \varepsilon_m &= \frac{1}{\alpha} \cdot \varepsilon_p , \\ P_m &= \frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2}\, P_p , \quad & \delta_m &= \frac{1}{\alpha\lambda} \cdot \delta_p . \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă solicitările provenite din greutatea proprie nu sînt neglijabile, trebuie ca și ele să respecte relația de similitudine

$$G_m = \frac{1}{\lambda^3} \cdot G_p$$

și deoarece

$$P_m = \frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2} \cdot P_p ,$$

rezultă că

$$\alpha = \lambda .$$

O asemenea modelare nu este în general avantajoasă, deoarece deplasările pe model sînt foarte mici și greu de măsurat.

În cazul cînd trebuie să se țină seama și de forțele provenite din greutatea proprie, relațiile de similitudine sînt

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{\lambda}\, p_p , \quad & \varepsilon_m &= \frac{1}{\lambda} \cdot \varepsilon_p , \\ P_m &= \frac{1}{\lambda^3} \cdot P_p , \quad & \delta_m &= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \delta_p . \end{aligned} \tag{7}$$

Dacă nu interesează efortul unitar care ia naştere în fiecare punct, ci numai efortul din secţiune, se poate accepta ca solicitările provenite din greutatea proprie să fie aplicate sub forma unei solicitări exterioare. În acest caz, se asigură similitudinea cu ajutorul relaţiilor (6).

b. *Solicitări statice, cu sarcini axiale mari.* În cazul cînd se studiază o construcţie cu solicitări axiale mari şi se urmăreşte stabilirea sarcinii critice sau influenţa deformaţiilor asupra solicitărilor (calcul de ordinul II) este necesar ca scara deformaţiilor să fie aceeaşi cu scara lungimilor

$$\frac{1}{\alpha\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \alpha = 1;$$

iar relaţiile de similitudine devin

$$\begin{aligned} p_m &= p_p, & \varepsilon_m &= \varepsilon_p, \\ P_m &= \frac{1}{\lambda^2} P_p, & \delta_m &= \frac{1}{\lambda} \delta_p. \end{aligned} \tag{8}$$

c. *Solicitare statică în zona elastico-plastică.* Pentru a avea similitudine între model şi prototip este necesar ca $\sigma_m = \sigma_p$ deci $\alpha = 1$. În consecinţă, în acest caz condiţiile de similitudine sînt date de relaţiile (8).

d. *Solicitări dinamice.* În acest caz, pe lîngă solicitările exterioare, intervin şi forţele de inerţie.

Acceptînd ca scară a timpului relaţia (2) $t_m = \frac{1}{\tau} t_p$, rezultă raportul acceleraţiilor

$$a_m = \frac{\tau^2}{\alpha \cdot \lambda} \cdot a_p \tag{9}$$

şi deci raportul forţelor de inerţie este

$$\frac{I_m}{I_p} = \frac{m_m \cdot a_m}{m_p \cdot a_p} = \frac{\tau^2}{\alpha \cdot \lambda^4}.$$

Cum toate forţele care acţionează sistemul trebuie să fie în raportul $\frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2}$ rezultă scara timpului

$$\tau = \lambda. \tag{10}$$

În plus, dacă pe construcţie se găsesc mase concentrate (M_m, M_p), pentru ca forţele de inerţie să fie în raportul $\frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2}$, este necesar ca

$$\frac{M_m}{M_p} = \frac{1}{\tau^2 \cdot \lambda} = \frac{1}{\lambda^3}. \tag{11}$$

2. Modele executate din alte materiale decît prototipul

Executarea unui model din acelaşi material cu prototipul nu este posibilă decît în puţine cazuri, îndeosebi în cazul construcţiilor metalice. Chiar şi în acest caz modelul se execută destul de greu şi deformaţiile lui sînt mici şi în consecinţă greu de măsurat cu aparatele obişnuite de măsură. În cazul construcţiilor din beton, beton armat, zidărie sau lemn, în general, modelele nu pot fi executate din acelaşi material ca prototipul.

În acest caz, un material bun pentru modele ar trebui să aibă următoarele proprietăţi :

— să fie omogen şi izotrop,

— să se poată prelucra uşor,

— să aibă un modul de elasticitate destul de mic pentru a da deformaţii uşor de măsurat.

Materialele plastice corespund, în general, acestor condiţii. Pentru aceste materiale vom avea situaţiile care urmează.

a. *Solicitare statică în zona plastică.* Alegînd scara lungimilor şi a eforturilor unitare

$$l_m = \frac{1}{\lambda} \cdot l_p ,$$

$$\sigma_m = \frac{1}{\alpha} \sigma_p ,$$

rezultă scara forţelor, alungirilor şi deplasărilor

$$P_m = \frac{1}{\alpha\lambda^2} P_p ,$$

$$\varepsilon_m = \frac{\gamma}{\alpha} \varepsilon_p , \tag{12}$$

$$\delta_m = \frac{\gamma}{\alpha \cdot \lambda} \delta_p .$$

Dacă în calcul intervin şi sarcini din greutatea proprie, iar relaţia dintre densităţi este

$$d_m = \frac{1}{\rho} d_p ,$$

din condiţia ca raportul greutăţilor să respecte raportul general al forţelor rezultă

$$\frac{G_m}{G_p} = \frac{d_m \cdot l_m^3}{d_p \cdot l_p^3} = \frac{1}{\rho \cdot \lambda^3} = \frac{1}{\alpha \cdot \lambda^2} .$$

Se obţine, astfel, valoarea lui α

$$\alpha = \rho \cdot \lambda . \tag{13}$$

b. *Încercări statice cu sarcini axiale mari.* În cazul calculului de ordinul II sau în problemele de stabilitate, se poate asigura similitudinea dacă influenţa greutăţii proprii este neglijabilă sau dacă ea este înlocuită, printr-o solicitare exterioară, repartizată asemănător cu greutatea proprie. În acest caz, punînd condiţia ca

$\frac{\delta_m}{\delta_p} = \frac{l_m}{l_p} = \frac{1}{\lambda}$, rezultă relaţia suplimentară $\alpha = \gamma$.

Vom avea deci

$$\delta_m = \frac{1}{\lambda}\delta_p \quad , \quad P_m = \frac{1}{\gamma\cdot\lambda^2}\cdot P_p ,$$
$$\varepsilon_m = \varepsilon_p \quad , \quad p_m = \frac{1}{\gamma} p_p . \tag{14}$$

c. *Solicitarea statică în zona elastico-plastică.* Pentru a putea exista o similitudine între comportarea modelului şi a prototipului în zona elastico-plastică, este necesar să existe o relaţie între modulele de elasticitate ale materialelor din care s-au confecţionat modelul şi prototipul (fig. 1).

$$\sigma_m = \frac{1}{\alpha}\sigma_p ,$$
$$E_m(\sigma_m) = \frac{1}{\gamma} E_p(\sigma_p). \tag{15}$$

Valorile α şi γ sînt date dacă se cunosc materialele din care este executat prototipul şi modelul.

Cunoscînd aceste valori, rezultă relaţiile dintre ceilalţi parametri

$$\varepsilon_m = \frac{\gamma}{\alpha}\varepsilon_p ,$$
$$P_m = \frac{1}{\alpha\cdot\lambda^2}\cdot P_p , \tag{16}$$
$$\delta_m = \frac{\gamma}{\alpha\cdot\lambda}\delta_p .$$

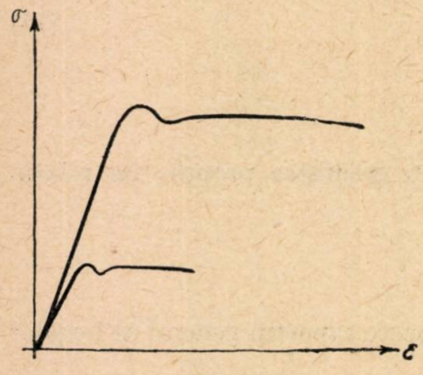


Fig. 1

d. *Solicitări dinamice.* În acest caz, cunoscînd coeficienţii α, ρ şi γ, rezultă raportul acceleraţiilor

$$a_m = \frac{\gamma\cdot\tau^2}{\alpha\cdot\lambda} ,$$

iar din condiția ca forțele de inerție să respecte raportul forțelor

$$\frac{1}{\alpha\cdot\lambda^2}=\frac{I_m}{I_p}=\frac{m_m\cdot a_m}{m_p\cdot a_p}=\frac{1}{\rho\cdot\lambda^3}\cdot\frac{\tau^2\cdot\gamma}{\alpha\cdot\lambda},$$

rezultă scara timpului

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\gamma}. \tag{17}$$

II

Încercările pe modele din masă plastică sînt astăzi utilizate în multe laboratoare din străinătate.

Caracteristic încercărilor la care ne vom referi în continuare este faptul că se utilizează un nou tip de material, care permite observarea directă a zonelor plastifiate prin colorarea acestora. Metoda a fost denumită *cromoplasticitate.*

Proprietățile fizico-mecanice ale maselor plastice folosite pentru executarea modelelor. Masele plastice folosite la executarea modelelor sînt varietăți de policlorură de vinil realizate la Institutul de cercetări chimice (ICECHIM) de un colectiv condus de N. Goldenberg, laureat al Premiului de Stat.

Au fost utilizate trei varietăți de masă plastică.

Prima varietate denumită SDE, are următoarele proprietăți :

— comportare perfect elastică pentru $\sigma < \sigma_p$,

— modulul de elasticitate la încovoiere $E \cong 36\,000$ kg/cm^2,

— limita de proporționalitate $\sigma_p \cong 550$ kg/cm^2,

— limita de curgere $\sigma_c \cong 600$ kg/cm^2.

Celelalte două materiale prezintă o diagramă caracteristică foarte apropiată de diagrama teoretică a lui Prandtl, lucrînd aproape perfect elastic pentru $\sigma < \sigma_c$ și perfect plastic pentru $\sigma = \sigma_c$ (fig.2).

Varietatea a 2-a denumită SDP-1, are următoarele proprietăți :

— modulul de elasticitate la încovoiere este cuprins între 30 000 kg/cm^2 și 36 000 kg/cm^2,

— limita de curgere, care coincide cu rezistența la rupere este :

pentru întindere 550—700 kg/cm^2,
pentru compresiune 600—800 kg/cm^2,
pentru încovoiere 550—750 kg/cm^2.

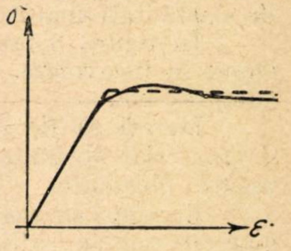


Fig. 2

Valorile limitei de curgere în interiorul acestui interval depind de tratamentul termic la care a fost supus materialul.

În momentul în care în material se ajunge la limita de curgere *prin întindere*, acesta *își modifică culoarea, albindu-se,* datorită schimbărilor de structură ale materialului.

În *zona comprimată*, după atingerea limitei de curgere, *culoarea materialului rămîne neschimbată.*

Varietatea a 3-a care a fost obţinută în 3 forme : SDP-2, SDP-3, SDP-4, prezintă următoarele proprietăţi :

— modulul de elasticitate la încovoiere este cuprins între 20 000 kg/cm^2 şi 35 000 kg/cm^2,

— limita de curgere : pentru întindere 450—500 kg/cm^2,

— limita de curgere : pentru încovoiere 480—600 kg/cm^2.

Valorile modulului de elasticitate şi limitei de curgere depind de material şi de tratamentul termic la care a fost supus acesta.

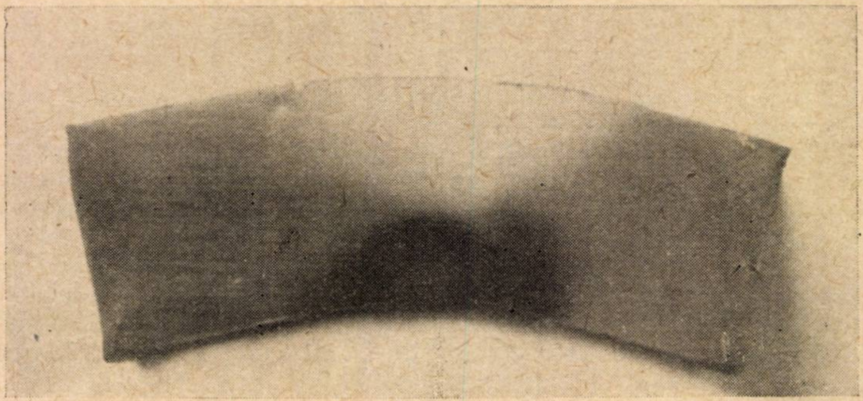


Fig. 3

În zonele de curgere, materialul celei de-a treia variante *îşi schimbă culoarea* şi anume *se albeşte* dacă curgerea s-a produs *prin întindere* şi *se înegreşte* dacă curgerea are loc *prin compresiune.*

Formele SDP-3 şi SDP-4 au zonele de curgere prin compresiune mai evidente (se înegresc mai puternic), iar rezistenţa la rupere şi modulul de elasticitate mai mici decît la SDP-2.

În figura 3 este prezentată o articulaţie plastică a unui element supus la încovoiere. Se observă zonele de curgere prin întindere şi prin compresiune.

Merită să fie subliniat de asemenea faptul că toate sortimentele de material obţinute se prelucrează mecanic foarte bine la maşinile-unelte obişnuite.

Cercetări efectuate. Primele încercări, executate cu noile mase plastice, s-au efectuat în cadrul catedrei de mecanica construcţiilor de la Institutul de construcţii din Bucureşti, cu ajutorul masei plastice SDE.

S-a verificat frecvenţa vibraţiilor proprii ale unui *cadru etajat cu 7 nivele*, de tipul cadrelor întrebuinţate în construcţiile de locuit*). Modelul

---

*) St. Bălan, S. Răutu şi M. Bergman, *În legătură cu comportarea unei construcţii în cadre la solicitări seismice.* Comunicare la Sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul de construcţii, Bucureşti, 1956.

(fig. 4) a fost executat la scara 1 : 30, din bare de masă plastică prinse între ele cu ajutorul unor corniere de aluminiu. Masele concentrate care acționau construcția la nivelul planșeelor erau cu mult mai mari decît masele repartizate pe stîlpi. Pe model s-au concentrat masele numai la nivelul etajelor. Masele concentrate au fost reduse la scara 1/40 000 și

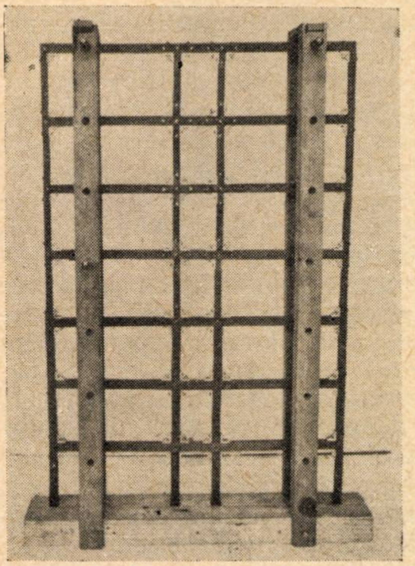


Fig. 4

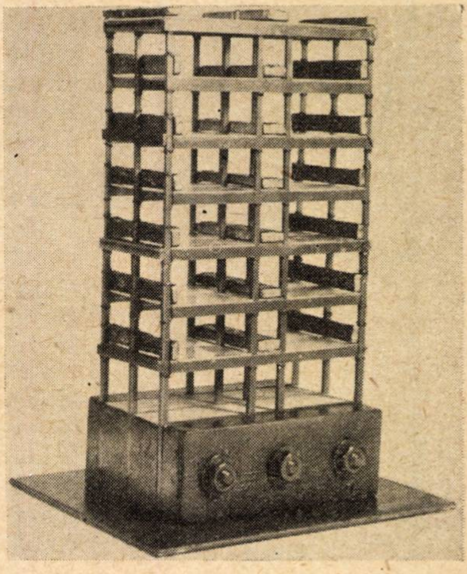


Fig. 5

realizate cu ajutorul unor rondele de plumb fixate de o parte și alta a modelului.

Din relațiile de similitudine a rezultat scara timpului $t_m = \frac{1}{12,6} t_p$. Cu ajutorul unor rulmenți pe bile s-a dat posibilitate cadrului să vibreze în planul său, împiedicîndu-se în același timp deplasările după normală. Calculul cadrului s-a făcut în ipoteza că riglele cadrului sînt infinit rigide.

Experiența urmărea tocmai verificarea erorii introdusă prin această ipoteză. Rezultatele experienței au arătat că această ipoteză este admisibilă, dînd naștere unei erori la calculul primei frecvențe a vibrațiilor proprii de 2—3%.

Sînt în curs experiențe cu modelul spațial al aceleiași construcții (fig. 5).

O altă încercare executată în cadrul catedrei urmărea verificarea unei noi metode de calcul static al construcțiilor turn [1]. Experiența s-a executat cu *material SDE*. De data aceasta nu s-au pus probleme de similitudine, executîndu-se calculul și experimentarea directă a modelului.

Introducerea noului material SDP-1 a făcut posibilă executarea de încercări în care să se urmărească comportarea unor construcții în domeniul elastico-plastic. Prin încercări s-a urmărit momentul apariției primei articulații plastice, punctele de apariție a articulațiilor plastice şi ordinea lor, precum şi calculul capacității portante. Astfel, a fost studiat cadrul reprezentat în figura 6, încărcat simetric [2].

După un calcul al acestui cadru, executat de G. I. Rozenblat [3], rezultă că ordinea de apariție a articulațiilor plastice trebuie să fie cea din figura 6. Experiența a confirmat această ordine de apariție dată de calcul (fig. 7 *a* şi *b*). Singura deosebire față de calculul teoretic o constituie apariția articulației plastice din punctul 4. Din calcul, articulația trebuie să apară pe toată rigla superioară şi concomitent cu ea trebuie să se plastifice şi rigla inferioară în punctele 5. Articulația de pe rigla superioară nu s-a extins totuşi pe întreaga lungime, apărînd numai în partea ei centrală. În punctele 5, au apărut deformații plastice de suprafață, fără ca ele să se extindă pe secțiune şi să ia naştere articulația plastică. Acest lucru s-a datorit eforturilor suplimentare cauzate de deformațiile cadrului.

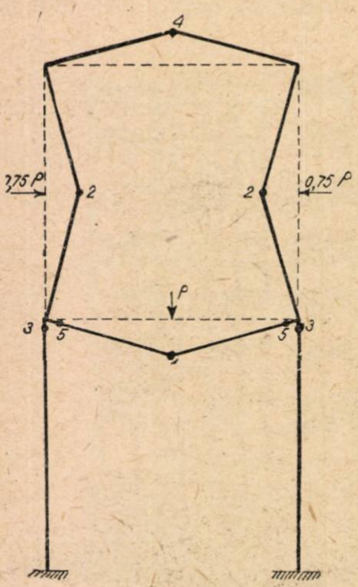


Fig. 6

A apărut deci problema calculului de ordinul II al cadrului, pentru a se constata dacă similitudinea este asigurată şi care este influența deformațiilor asupra capacității portante a cadrului.

Din calculul de ordinul I, sarcina la rupere este

$$P_r = \frac{8\,M_c}{l},$$

$$M_c = 103 \text{ kg. cm}, \qquad P_r = 82{,}4 \text{ kg.}$$

Sarcina la rupere, rezultată dintr-un calcul de ordinul II, este [6]

$$P_r = \frac{8\,M_c}{l} \cdot \frac{1}{1 + 1{,}6\left[\frac{N_1}{P} \cdot \frac{y_1}{l} + \frac{N_2}{P} \cdot \frac{y_4}{l}\right]} = \eta \cdot \frac{8\,M_c}{l},$$

unde N_1 şi N_2 sînt sarcinile axiale din riglele cadrului, iar y_1 şi y_4 săgețile cadrului în punctele de apariție a articulațiilor plastice din punctele 1 şi 4.

Calculînd capacitatea portantă [4], rezultă

$$P_r = 72{,}6 \text{ kg}.$$

Sarcina la rupere rezultată din experiență a fost de 76 kg, avînd

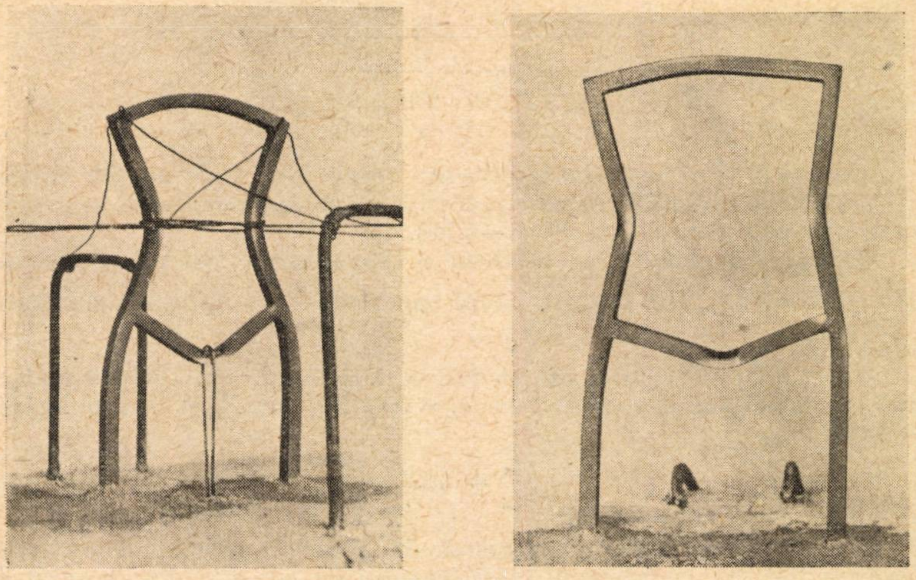


Fig. 7 *a* și *b*

o eroare de — 7,8 % față de calculul de ordinul I și o eroare de + 4,5 % față de calculul de ordinul II.

★

Se pune problema dacă din rezultatele obținute pe model se pot obține date și pentru construcția în mărime naturală. În cazul calculului de ordinul I, similitudinea este asigurată prin relațiile existente între sarcinile care acționează modelul și prototipul. Pentru a putea obține similitudinea este necesar ca

$$\eta = \frac{1}{1 + 1{,}6\left[\frac{N_1}{P}\cdot\frac{y_1}{l} + \frac{N_2}{P}\cdot\frac{y_4}{l}\right]}$$

să fie același pentru prototip și pentru model.

Această condiție nu este satisfăcută și, în consecință, nu se păstrează similitudinea dintre model și construcție, ceea ce nu influențează însă asupra ordinei de apariție a articulațiilor plastice, ci numai asupra capacității portante.

Capacitatea portantă a prototipului este

$$P_{rp} = \alpha \cdot \lambda^2 \cdot P_{rm} \cdot \frac{\eta_p}{\eta_m},$$

$$\frac{\eta_p}{\eta_m} = \frac{\dfrac{1}{1 + 1{,}6\left[\dfrac{N_{1m}}{P_m} \cdot \dfrac{y_{1m}}{l_m} + \dfrac{N_{2m}}{P_m} \cdot \dfrac{y_{4m}}{l_m}\right]}}{\dfrac{1}{1 + 1{,}6\left[\dfrac{N_{1p}}{P_p} \cdot \dfrac{y_{1p}}{l_p} + \dfrac{N_{2p}}{P_p} \cdot \dfrac{y_{4p}}{l_p}\right]}}.$$

Coeficientul η reprezintă influenţa sarcinilor axiale asupra capacităţii portante a cadrului. Pentru prototip, acest coeficient este în general foarte apropiat de unitate (0,98—0,99).

În cazul modelelor, coeficientul η este sensibil mai mic decît unitatea (0,85—0,95). Din această cauză raportul $\frac{\eta_p}{\eta_m}$ este întotdeauna supraunitar.

În cazul prototipului din metal cu $\lambda = 50$, $E = 2\,100\,000$ şi $\sigma_c = 2\,400$ şi modelului din SDP-1 cu $\sigma_c = 550$ kg/cm², $E_m = 36\,000$ kg/cm² se obţine

$$\frac{\eta_p}{\eta_m} = 1{,}12.$$

Experienţa dă nu numai punctele de apariţie a articulaţiilor plastice şi ordinea lor, ci, cu ajutorul coeficientului de corecţie din calculul de ordinul II, şi capacitatea portantă a sistemului.

Un alt cadru încercat [5] a fost cel din figura 8 *a*. Calculul static a arătat că articulaţiile plastice vor apare în ordinea indicată pe figură. S-au executat două modele, *unul din SDP-2 şi al doilea din SDP-3*.

Rezultatele obţinute prin calcul şi din experienţe sînt date în tabela de mai jos. Experienţele au confirmat ordinea de apariţie a articulaţiilor, cu erori foarte mici.

În fotografia din figura 8 *b* este reprezentat modelul din SDP-3 înainte de încercare, iar în figura 8 *c* în momentul apariţiei primelor deformaţii plastice în secţiunea 6.

Tabela *)

Articulaţia	Rezultatele din calcul	Rezultatele din experienţe		Eroarea în procente	
		SDP-2	SDP-3	SDP-2	SDP-3
1	48,6	50,8	50,0	+4,5	+2,8
2	48,9	50,8	50,0	+3,8	+2,2
3	56,9	55,2	57,0	−3,10	+0,20
4	57,9	57,0	58,0	−1,7	+0,18
5	58,2	58,0	59,0	−0,38	+1,35
6	61,4	60,5	62,2	−1,50	+1,00

*) Sarcinile de apariţia articulaţiilor plastice sînt date în kg.

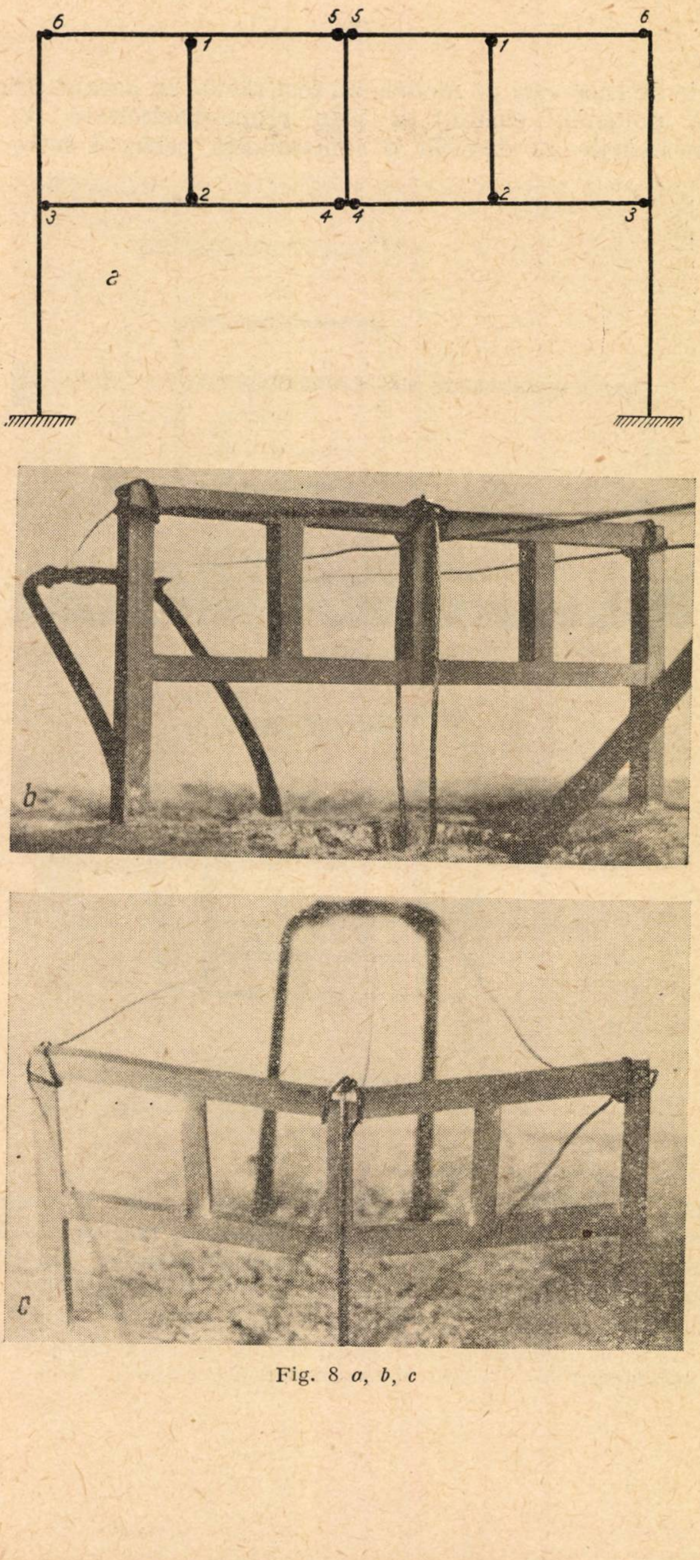

6
5 5
6
1
1
2
2
3
4 4
3
a
b
c

Fig. 8 *a*, *b*, *c*

III

O serie de încercări pe modele au fost făcute în paralel prin fotoelasticitate (în domeniul elastic) şi prin cromoplasticitate (în domeniul plastic). Încercările au dovedit o concordanţă perfectă între rezultate.

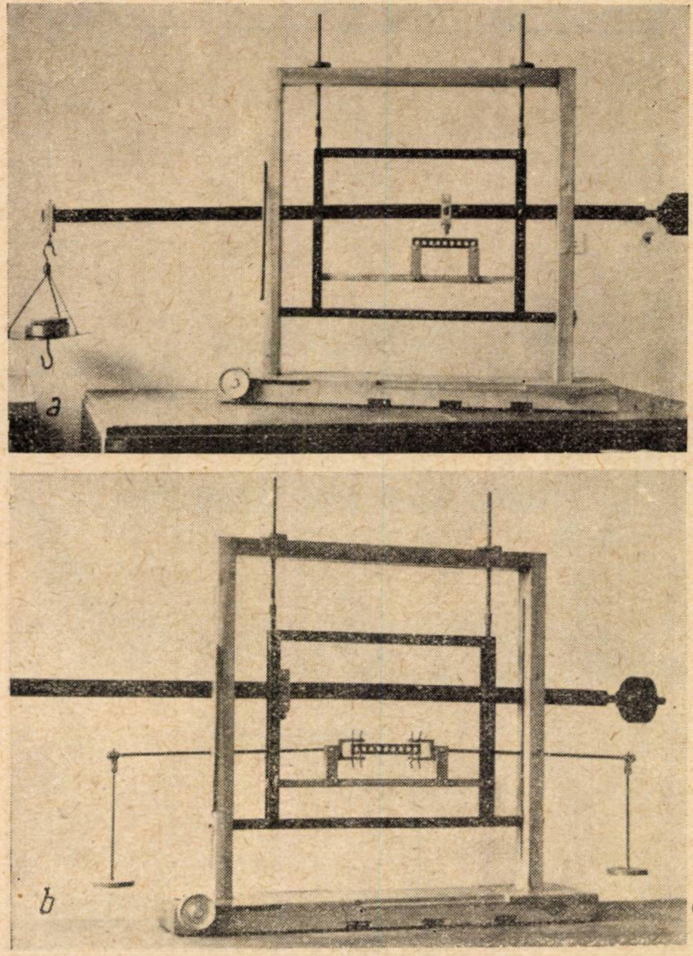


Fig. 9 *a* şi *b*

Materialul SDP-1 a fost utilizat şi în studiul comportării unor grinzi cu goluri rectangulare*). Această problemă a fost cercetată în paralel atît pe modele din SDP-1 cît şi pe modele fotoelastice din Dinox F 110 (răşină epoxidică, optic activă, realizată în ţara noastră [6]).

---

*) M. Arcan, *Influenţa golurilor asupra stării de tensiune şi deformaţii în diafragmele de rigidizare ale construcţiilor.* I.C.M.L., Referat de începere, Bucureşti, 1958.

În figurile 9 *a* şi *b* se dau fotografiile dispozitivelor pentru solicitarea unor bare cu şir axial de goluri, simplu rezemate, supuse la încovoiere cu forţă tăietoare şi la încovoiere pură.

S-a urmărit să se cerceteze

a) capacitatea portantă a barei;

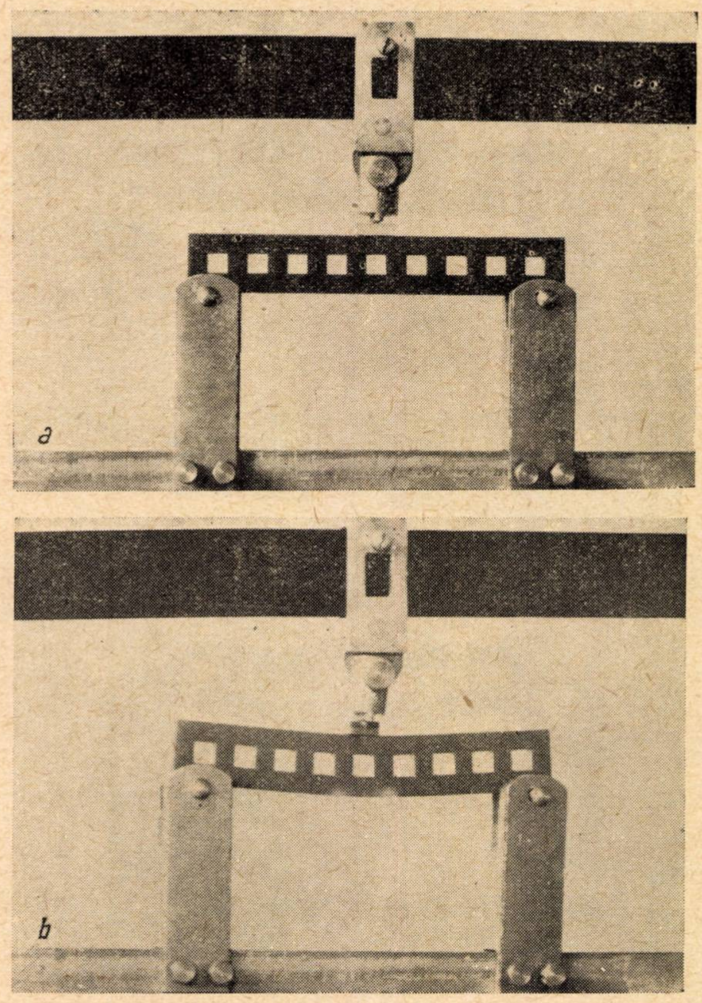


Fig. 10

b) influenţa concentrărilor de tensiuni de la colţurile golurilor asupra capacităţii portante;

c) regiunile de intrare în zona plastică, în ordinea apariţiei;

d) coincidenţa acestor regiuni cu cele de solicitare maximă rezultate din modelul fotoelastic.

Modelul nr. 1 are $\frac{L_0}{H} > 5$, grosimea 6,5 mm, golurile patrate cu latura $\frac{H}{3}$, iar secțiunile plinurilor (montanților) cu dimensiunile $\frac{H}{3} \times 6{,}5$mm; așadar montanții sînt tot atît de puternici ca și tălpile (fig. 10).

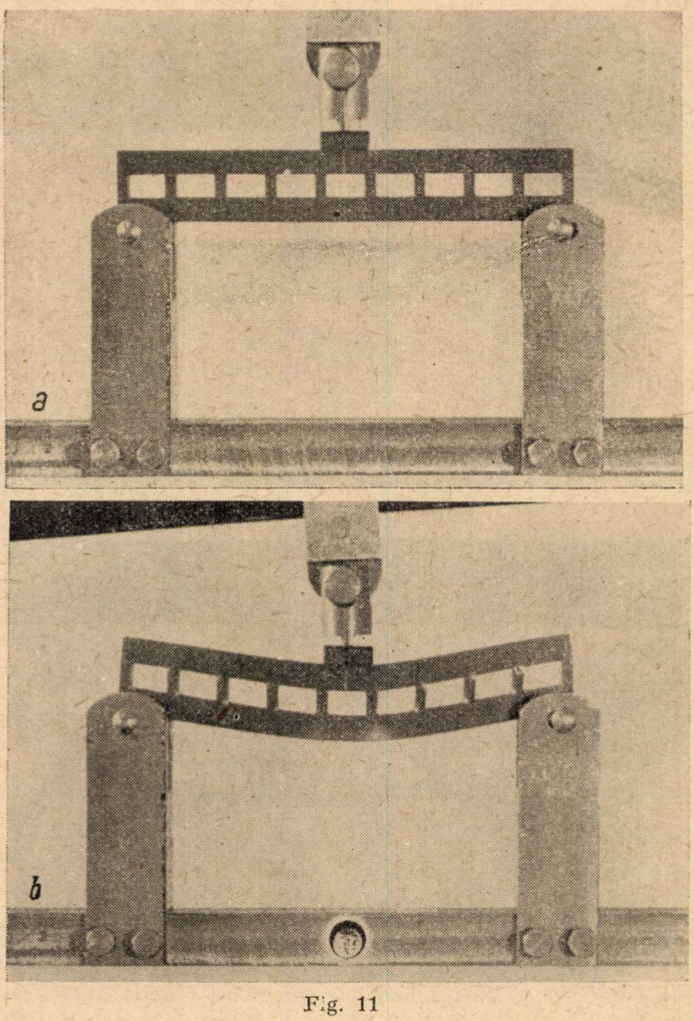


Fig. 11

Modelul nr. 2 are $\frac{L_0}{H} > 5$, grosimea 6,5 mm, golurile dreptunghiulare cu baza $\frac{H}{2}$ și înălțimea $\frac{H}{3}$, iar secțiunile plinurilor (montanților) au dimensiunile $\frac{H}{7} \times 6{,}5$ mm (fig. 11); așadar tălpile sînt mult mai puternice decît montanții.

Încercarea modelului nr. 1 a arătat că pierderea capacității portante a barei nu se datorește concentrărilor de tensiuni de la colțurile golurilor, deși acestea nu sînt rotunjite, ci eforturilor unitare de întindere în talpa inferioară, în regiunea celor doi montanți centrali. Această observație prezintă importanță, deoarece studiul unor asemenea grinzi cu goluri se va putea orienta în viitor asupra comportării și stării de tensiune în ansamblu și nu asupra concentrărilor de tensiuni care duc la plastifieri locale.

Tabloul de izocromate (fig. 12) ne dă o imagine a distribuției tensiunilor în model, în domeniul elastic. Din punctele de tensiune maximă ale tălpii inferioare, observate cu ajutorul tabloului de izocromate, începe formarea regiunilor de intrare în zona plastică, regiuni care se extind apoi în întreaga talpă inferioară. Dacă facem calculul exact al efortului unitar de întindere în aceste puncte, cu ajutorul tabloului de izocromatice (fig. 12), pentru forța $P = 112$ kg la care a apărut plastifierea, pe modelul din SDP-1 rezultă $\sigma = 530$ kg/cm^2. Această cifră este foarte apropiată de valoarea efortului unitar de întindere la care se produce apariția plastifierii materialului (550 kg/cm^2). Așadar, verificarea fotoelastică ne confirmă posibilitățile de cercetare a apariției zonei de plastifiere cu ajutorul modelelor din SDP în piese oricît de complicate.

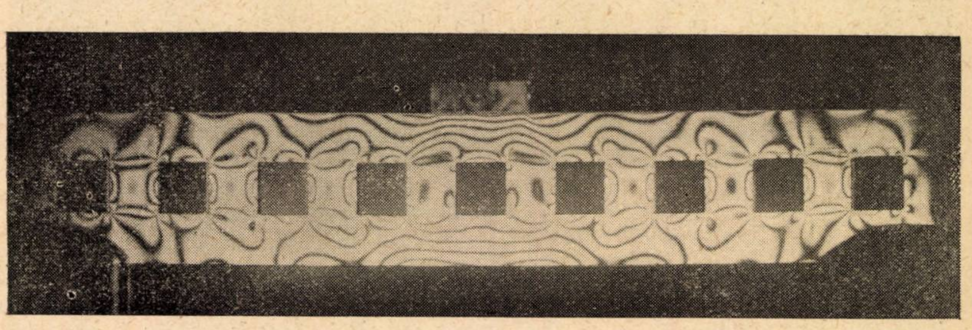


Fig. 12

Calculul efortului unitar de întindere s-a făcut ținînd seama că prin etalonare s-a stabilit valoarea benzii materialului care a fost de $\tau_{0.1} = 5{,}25$ kg/cm^2/cm, grosimea modelului din Dinox F 110 a fost de 5,5 mm, iar forța cu care s-a stabilit tabloul de izocromate a fost de $P = 18{,}7$ kg.

Este interesant de observat că tensiunile maxime nu au apărut în secțiunea cea mai solicitată (secțiunea din mijloc) care este în același timp și o secțiune slăbită, cu moment de inerție mai mic, așa cum era de așteptat, ci în secțiunea plină; această observație este confirmată și de tabloul de izocromate în cazul solicitării aceluiași model numai la încovoiere pură (fig. 13); se observă că în dreptul golurilor, tensiunile la extremitățile secțiunii sînt mai mici decît în dreptul plinurilor.

Încercarea modelului nr. 2 arată că pierderea capacității portante se produce datorită forfecării montanților (a se vedea fig. 11). Se observă că, în acest caz, plastifierea în aceleaşi zone, a tălpilor, ca şi la modelul nr. 1, nu ajunge să cuprindă întreaga secţiune a acestora, în timp ce în montanţi pierderea capacităţii portante este grăbită de concentrările de tensiuni de la colţurile golurilor (a se vedea pentru comparaţie şi tabloul de izocromatice din fig. 14).

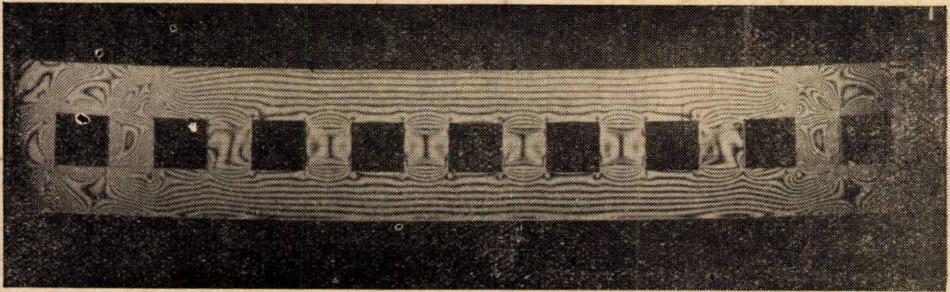


Fig. 13

Comparînd cele două modele din punctul de vedere al capacităţii portante, rezultă că la primul model pierderea acesteia s-a produs pentru $P = 125$ kg, iar la cel de-al doilea pentru $P = 100$ kg. Din încercările fotoelastice făcute şi pentru alte cazuri intermediare, a rezultat că pierderea capacităţii portante poate apare simultan datorită tensiunilor din tălpi şi din montanţi, pentru montanţii a căror dimensiune transversală în planul grinzii este de $\frac{H}{6}$, tălpile avînd aceeaşi dimensiune transversală în planul grinzii $\left(\frac{H}{3}\right)$ pentru toate modelele încercate.

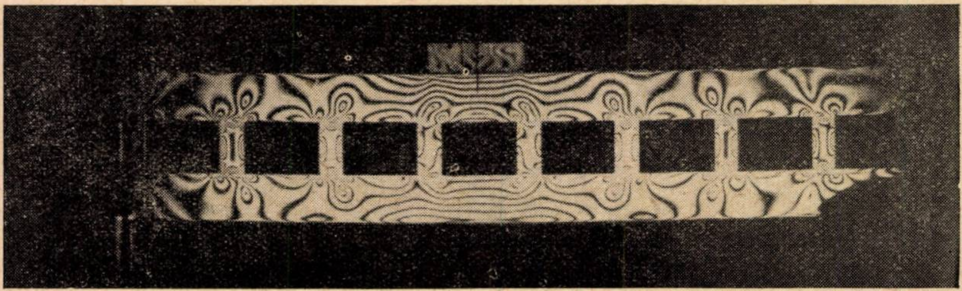


Fig. 14

De asemenea, prezentăm informativ şi alte încercări făcute în paralel pe modele fotoelastice şi pe modele cromoplastice. Calculele făcute au dovedit, aşa cum s-a arătat mai sus, faptul că noua metodă — cromoplasticitatea — se verifică în toate cazurile drept o metodă eficace de studiu pe modele în domeniul plastic. Astfel, în figura 15 *a*, *b*, *c* sînt prezentate

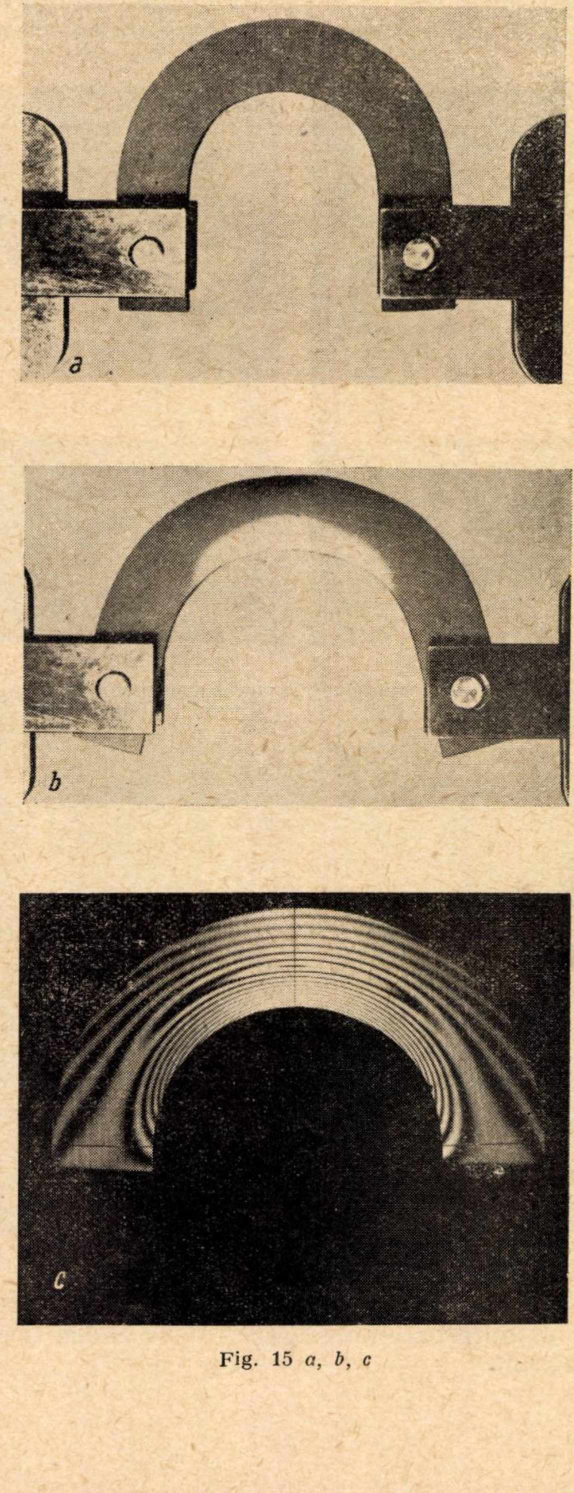


Fig. 15 *a*, *b*, *c*

încercările făcute asupra unei bare curbe solicitată la forţe orizontale simetrice, iar în figura 16 *a*, *b*, *c*, încercările în legătură cu ordinea de apariţie

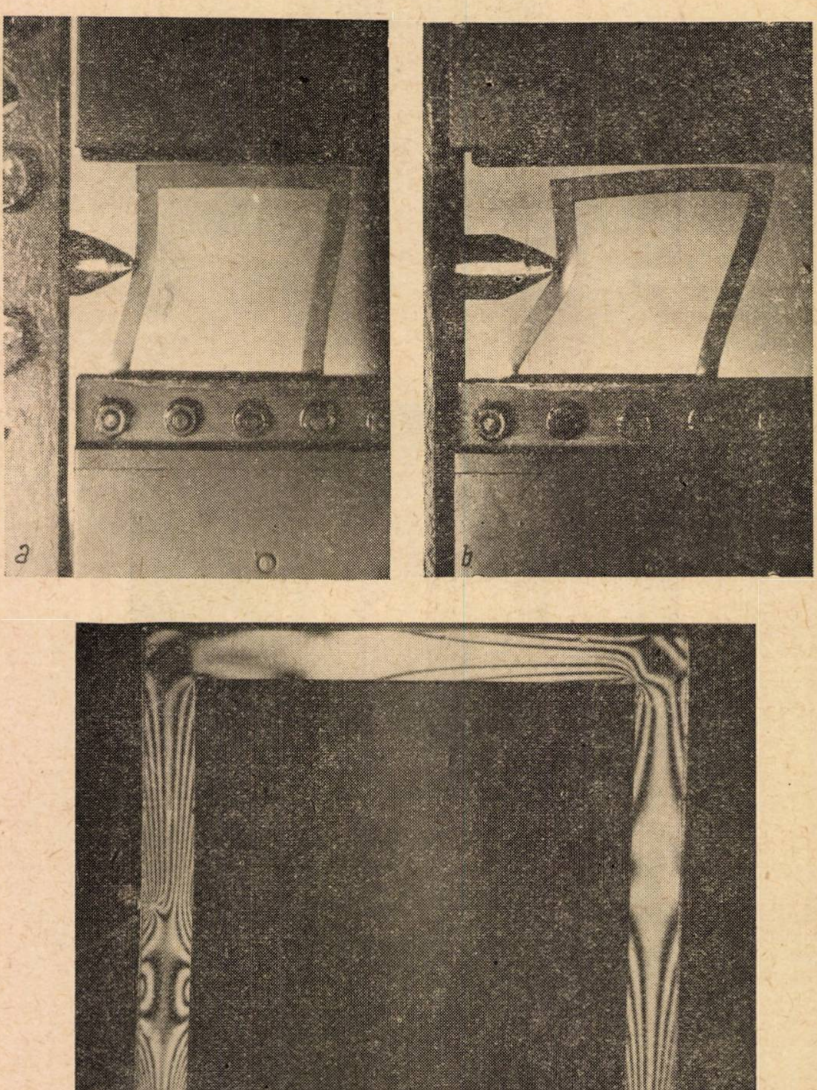


Fig. 16 *a*, *b*, *c*.

a deformaţiilor plastice executate asupra unui cadru încastrat şi supus la o forţă orizontală.

CONCLUZII

1) Încercările pe modele din masă plastică prezintă foarte multe avantaje în studiul comportării construcțiilor ; ele permit cercetarea unei game foarte bogate de probleme privind modul de pierdere a capacității portante.

2) Noua metodă — cromoplasticitatea — dă posibilitatea de a urmări direct zonele de apariție a deformațiilor plastice, evoluția acestor zone, modul în care se produce ruperea și care este capacitatea portantă a elementului.

3) Rezultatele obținute experimental au fost confirmate atît de calculele teoretice cît și de experiențele fotoelastice excutate în paralel. Se vede astfel că prin cromoplasticitate se completează fotoelasticitatea în domeniul plastic.

4) Tehnica încercărilor cromoplastice este foarte simplă ; experiențele se pot executa fără nici un fel de aparate speciale, afară de dispozitivele de încărcare.

Primită la redacție la 29 octombrie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ПУТЕМ ИСПЫТАНИЙ НА ПЛАСТМАССОВЫХ МОДЕЛЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе представлен новый метод экспериментального исследования конструкций в упруго-пластической зоне, так называемый метод хромопластичности, с использованием модели из специальной пластмассы SDP, обладающей следующими характерными свойствами:

— ее характерная кривая очень близка к теоретической кривой Прандтля;

— она меняет свой цвет, белея при достижении предела текучести при растяжении и чернея при достижении предела текучести при сжатии;

— обладает большой способностью к пластической деформации.

Эти свойства позволяют непосредственно следить на моделях за появлением зон пластических деформаций, развитием этих зон, возникновением разрушений и несущей способностью конструкции.

Экспериментально полученные результаты были подтверждены как теоретическим расчетом, так и параллельно проведенными фотоэластичными опытами.

В этой работе приводятся также формулы подобия, дающие возможность перейти от модели к опытному образцу.

ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES CONSTRUCTIONS PAR DES ESSAIS SUR MAQUETTES EN MATIÈRES PLASTIQUES

RÉSUMÉ

Pour l'étude expérimentale des constructions dans la zone élastoplastique, les auteurs présentent une nouvelle méthode, dénommée chromoplasticité. A ces fins, il est fait usage de maquettes en matière plastique spéciale, «SDP», douée des propriétés suivantes, particulièrement remarquables :

— courbe caractéristique très rapprochée du diagramme théorique de Prandtl ;

— blanchit, lorsqu'elle atteint la limite d'écoulement (la résistance limite) à la traction, et noircit lorsqu'elle atteint la limite d'écoulement (la résistance limite) à la compression ;

— grande capacité de déformation plastique.

Ces propriétés permettent de suivre directement, sur la maquette, les zones de déformation plastique, l'évolution de ces zones, la façon dont se produit la rupture et la capacité portante de la construction.

Les résultats obtenus expérimentalement ont été confirmés tant par les calculs théoriques que par les expériences photoélastiques effectuées en parallèle.

On présente en outre, dans ce travail, les relations de similitude permettant de passer de la maquette au prototype.

BIBLIOGRAFIE

1. M. MUTAFOLO, *Calculul turnurilor spaţiale etajate prin metoda „modelelor plane"*. Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *10* (1957).
2. ST. BĂLAN, S. RĂUTU şi V. PETCU, *Introducerea masei plastice SDP-1 în studiul construcţiilor pe modele la scară redusă.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, 9, 903 (1958).
3. Г. И. РОЗЕНБЛАТ, *Применение метода деформации к расчету рам за пределом упругости. Исследования по теории сооружений.* **VII**, Москва, 1957.
4. ST. BĂLAN, S. RĂUTU şi V. PETCU, *În legătură cu calculul de ordinul II al capacităţii portante a cadrelor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată **X**, *2* (1959) (sub tipar).
5. ST. BĂLAN, S. RĂUTU, N. GOLDENBERG şi V. PETCU, *Cromoplasticitatea, o nouă metodă de studiere a comportării construcţiilor pe modele la scară redusă.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, 11, 1153 (1958).
6. M. ARCAN, F. STOENESCU şi R. MIHAIL, *Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate : Dinox F 110.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).

ELASTICITATE – PLASTICITATE
– REZISTENȚA MATERIALELOR

INFLUENȚA LUNGIMII BIELEI ASUPRA ECHILIBRĂRII UNITĂȚILOR DE POMPARE*)

DE

NICOLAE S. PÎRVULESCU

Echilibrarea unităților de pompare are o importanță economică însemnată, întrucît extracția țițeiului se face prin pompare la majoritatea sondelor.

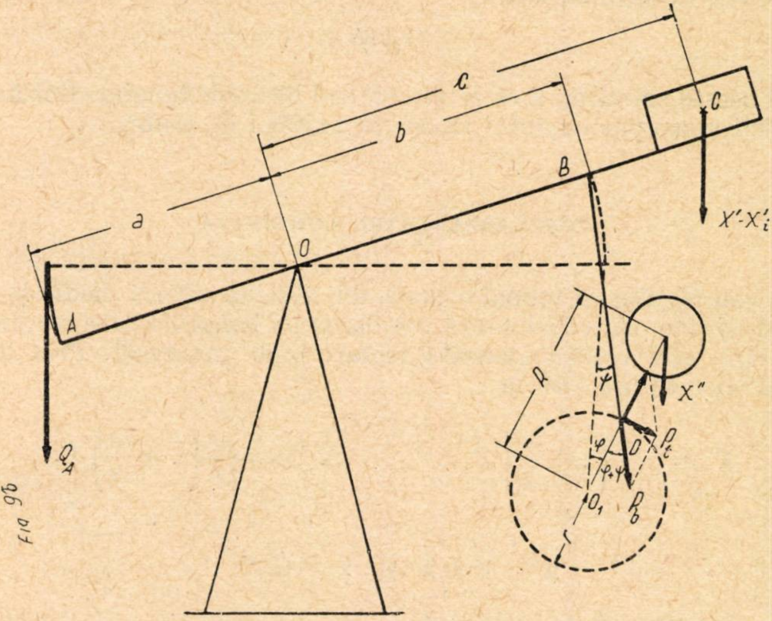


Fig. 1

O unitate de pompare (fig. 1) constă dintr-un balansier, care este acționat de un motor, prin intermediul unui mecanism bielă-manivelă

---

*) Comunicare prezentată la 29 mai 1958 în ședința lunară de comunicări a Institutului de mecanică aplicată „TRAIAN VUIA".

O_1DB şi care suportă sarcina Q_A în A. O contragreutate X' situată pe balansier în C, sau X'' situată pe manivelă, este destinată să echilibreze sarcina statică medie din A.

Studiul cuplului motor şi al echilibrării unităţilor de pompare este cunoscut [1] în aşa-numita *teorie elementară*, în care se admit următoarele premise simplificatoare :

1) Sarcini statice constante $P + G$ la cursa ascendentă şi P la cursa descendentă, aplicate nemijlocit la capătul A (capul de cal) al balansierului ; P fiind greutatea aparentă a prăjinilor, iar G greutatea lichidului ridicat de piston ;

2) Masa mecanismului, în afară de contragreutăţi, neglijabilă ;

3) Viteza de rotaţie ω a manivelei constantă ;

4) $r/b = 0,$ (1)

r — lungimea manivelei,

b — distanţa dintre B (articulaţia bielei la balansier) şi O (lagărul principal al balansierului) ;

5) $r/l = 0,$ (2)

l — lungimea bielei.

În aşa-numita *teorie corectată* se păstrează premisele teoriei elementare în afară de ultima, adică

$$r/l \neq 0. \tag{3}$$

Cu aceste premise, să cercetăm efectul bielei de lungime finită asupra echilibrării şi asupra cuplului motor al unităţii de pompare.

CONTRABALANSARE COMBINATĂ

Să considerăm că numai o parte din sarcina statică medie şi anume $\mu\,(P + G/2)$ este contrabalansată (oscilant) pe balansier ; iar restul, adică $\nu\,(P + G/2)$ este contrabalansată (rotativ) pe manivelă. Prin urmare, în teoria elementară, avem

$$X' = \mu \frac{a}{c}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) P, \qquad X'' = \nu \frac{ar}{bR}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) P, \tag{4}$$

în care

$$\mu + \nu = 1 \quad \text{şi} \quad \varkappa = G/P \tag{5}$$

a — distanţa dintre A şi O,

c — distanţa dintre C (poziţia contragreutăţii de pe balansier) şi O,

R — depărtarea contragreutăţii de pe manivelă de axul O_1 al manivelei.

Expresia X' din (4) rămîne valabilă şi în teoria corectată, întrucît s-a menţinut premisa 4 dată de expresia (1).

Fie P_b efortul din bielă; vom scrie deci ecuaţia de momente în raport cu O a forţelor care acţionează balansierul

$$a Q_A = b P_b \cos\psi + c(X' - X_i'), \tag{6}$$

în care

X_i' — forţa de inerţie a contragreutăţii de pe balansier dată de expresia

$$X_i' = \mu P\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\frac{a w_B}{b g}, \tag{7}$$

w_B — acceleraţia punctului B cunoscută din teoria mecanismului bielă-manivelă şi anume

$$w_B = r\omega^2\left(\cos\omega t \pm \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right). \tag{8}$$

Admiţînd că O_1 se găseşte pe verticala ce trece prin B, unghiul ψ pe care biela îl face cu verticala este dat de expresiile

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi, \qquad \cos\psi = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}, \tag{9}$$

în care φ unghiul manivelei cu verticala este

$$\varphi = \omega t. \tag{10}$$

Dacă r/l este îndeajuns de mic faţă de unitate, dezvoltînd în serie expresia $\cos\psi$ din relaţia (9) şi păstrînd numai primii doi termeni ai seriei, se poate face următoarea aproximaţie

$$\cos\psi \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\varphi. \tag{11}$$

Ţinînd seama de relaţia (10), expresia (8) se poate pune sub forma

$$w_B = r\omega^2 \zeta \cos\varphi, \tag{12}$$

în care

$$\zeta = 1 + \frac{r\cos 2\varphi}{l\cos\varphi}. \tag{13}$$

Avînd în vedere premisa 1) şi expresia (5), sarcina din A este dată de expresia

$$Q_A = P\left(1 + \frac{\varkappa}{2} \pm \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \frac{w_A}{g}\right), \tag{14}$$

în care semnul de deasupra al ultimului termen din prima paranteză (în acest caz $+$) se referă la cursa ascendentă a prăjinilor, iar semnul de dedesubt (în acest caz—) se referă la cursa descendentă. Ultimul termen din paranteza a doua se referă la forța de inerție, unde accelerația punctului A este dat de expresia

$$w_A = w_B \frac{a}{b} \tag{15}$$

Făcînd înlocuirile (7), (12), (14), (15) în (6), se obține

$$P_b \approx \overline{A} + \overline{B} \cos \varphi, \tag{16}$$

în care

$$\overline{A} \cos \psi = A = \frac{a}{b}\left[\nu\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) \pm \frac{\varkappa}{2}\right] P, \tag{17}$$

$$\overline{B} \frac{\cos \psi}{\zeta} = B = \frac{a^2}{b^2}\left[\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \mu \frac{c}{a}\right) \pm \frac{\varkappa}{2}\right] \chi P, \tag{18}$$

$$\chi = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{r\pi^2 n^2}{900\, g}, \tag{19}$$

n fiind numărul de curse duble pe minut.

Primul termen al expresiei (16) se referă la forțele statice, iar cel de-al doilea la forțele dinamice.

Pentru $\cos \psi = 1$ și $\zeta = 1$ expresia (16) devine

$$P_b = A + B \cos \varphi, \tag{20}$$

regăsindu-se expresia cunoscută din teoria elementară.

Ecuația de momente în raport cu O_1 ne dă

$$r\, P_t = r\, P_b \sin(\varphi + \psi) - R\overline{X''} \sin \varphi, \tag{21}$$

în care

P_t este valoarea componentei tangențiale a efortului din butonul manivelei (D din fig. 1),

$\overline{X''}$ — valoarea contragreutății pe manivelă în acest caz, determinat de condiția (3).

Acceptînd aceleași aproximații cu cele admise la stabilirea relației (11) și ținînd seamă de această relație și de (9) avem

$$\sin(\varphi + \psi) = \xi \sin \varphi, \tag{22}$$

în care

$$\xi = 1 + \frac{r}{l}\left(\cos \varphi - \frac{r}{2l}\sin^2 \varphi\right). \tag{23}$$

Făcînd substituirea în (21) se obține

$$P_t = \left(\xi P_b - \frac{R}{r}\overline{X''}\right)\sin\varphi. \tag{24}$$

Pentru a determina valoarea contragreutății $\overline{X}''$ în premisa acceptată, să determinăm valoarea statică medie P_{bm} a efortului din bielă cu ajutorul relațiilor (5), (16), (17)

$$P_{bm}\cos\psi = \frac{a}{b}\nu\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)P. \tag{25}$$

Dacă sarcina statică medie este echilibrată, forța tangențială P_{tm} corespunzătoare trebuie să fie nulă, și folosind relația (24) avem

$$P_{tm} = \left(\xi P_{bm} - \frac{R}{r}\overline{X}''\right)\sin\varphi = 0. \tag{26}$$

Înlocuind pe P_{bm} din (25) se obține

$$\overline{X}'' = \nu\frac{ar}{bR}\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)P\frac{\xi}{\cos\psi}, \tag{27}$$

în care $\xi/\cos\psi$ rezultă din (11), (23) și dacă r/l este îndeajuns de mic față de unitate, se poate face aproximația

$$\frac{\xi}{\cos\psi} \approx 1+\frac{r}{l}\cos\varphi. \tag{28}$$

Se vede că raportul $\xi/\cos\psi$ fiind o funcție de φ, contragreutatea $\overline{X}''$ urmează să fie variabilă pentru a asigura echilibrarea sarcinii medii. Dacă dăm acestei contragreutăți rotative, valoarea exprimată de relația (4), sarcina medie statică nu mai este echilibrată în măsura în care $\xi/\cos\psi$ este diferit de unitate, iar ν este diferit de zero.

Avînd în vedere relația (28), dezechilibrarea se accentuează cu cît raportul r/l este mai mare. Cu alte cuvinte considerînd biela de lungime finită și balansierul de lungime infinită, prin rotirea contragreutății (respectiv a butonului de manivelă) efectul de echilibrare nemaifiind constant, nu se mai echilibrează media sarcinilor statice, ca în cazul contrabalansării oscilante. Apare în D componenta orizontală a efortului P_b, a cărui moment în raport cu O_1 este o funcție de 2φ, care se opune sau se adaugă la efectul contragreutății de pe manivelă, producînd o perturbare, inexistentă în teoria elementară.

Prin urmare în contrabalansarea rotativă, biela de lungime finită are o influență nefavorabilă, de frecvență dublă față de aceea a manivelei, ca și efectul inerției contragreutății în echilibrarea pe balansier.

Să acceptăm pentru contragreutatea rotativă $\overline{X}''$ valoarea dată de (4), în care caz expresia (24), avînd în vedere (16), (17), (18), devine

$$P_t = \overline{\overline{A}}\sin\varphi + \overline{\overline{B}}\frac{\sin 2\varphi}{2} \tag{29}$$

în care

$$\overline{\overline{A}} = \frac{\xi}{\cos\psi}A - \nu\frac{a}{b}\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)P \quad ; \quad \overline{\overline{B}} = \frac{\zeta\xi}{\cos\psi}B. \tag{30}$$

Cu aceleași aproximații admise, expresia $\zeta\xi/\cos\psi$ se poate pune sub forma

$$\frac{\zeta\xi}{\cos\psi} = 1 + \frac{r}{l}\,\frac{2 - 3\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,. \tag{31}$$

Întrucît

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \quad ; \quad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \tag{32}$$

și avînd în vedere (17), (30), (31), relația (29) se poate pune sub forma

$$P_t = \sum_{j=1}^{3} C_j \sin j\varphi, \tag{33}$$

în care

$$\begin{gathered} C_1 = \pm\frac{a}{b}\,\frac{\varkappa}{2}\,P - \frac{r}{4l}\,B, \\ C_2 = \frac{1}{2}\left(B + \frac{r}{l}\,A\right) \quad , \quad C_3 = \frac{3r}{4l}\,B. \end{gathered} \tag{34}$$

CONTRABALANSAREA OSCILANTĂ

În acest caz $\mu = 1$, $\nu = 0$ și relațiile (17), (18) devin

$$A' = \pm\frac{a}{b}\,\frac{G}{2} \quad , \quad B' = \frac{a^2}{b^2}\left[\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \pm \frac{\varkappa}{2}\right]\chi P, \tag{35}$$

care introduse în (34) și (33), ne dau

$$\begin{aligned} \frac{P'_{t1}}{G/2} &= \frac{a}{b}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right) + \\ &+ \frac{a^2}{b^2}\left[1 + \varkappa + \frac{c}{a}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right]\left[\sin 2\varphi + \frac{r}{2l}\left(3\sin 3\varphi - \sin\varphi\right)\right]\frac{\chi}{\varkappa}, \\ \frac{P'_{t2}}{G/2} &= -\frac{a}{b}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right) + \\ &+ \frac{a^2}{b^2}\left[1 + \frac{c}{a}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right]\left[\sin 2\varphi + \frac{r}{2l}\left(3\sin 3\varphi - \sin\varphi\right)\right]\frac{\chi}{\varkappa}, \end{aligned} \tag{36}$$

în care P'_{t1} și P'_{t2} sînt eforturile tangențiale respective la cursa ascendentă și la cursa descendentă, în acest caz, al contragreutății situată pe balansier.

CONTRABALANSARE ROTATIVĂ

În acest caz $\mu = 0$, $\nu = 1$ şi relaţiile (17), (18) devin

$$A'' = \pm \frac{a}{b}\frac{G}{2}\ ; \quad B'' = \frac{a^2}{b^2}\left[\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \pm \frac{\varkappa}{2}\right]\chi P, \tag{37}$$

care introduse în (34) şi (33), ne dau

$$\begin{aligned}
\frac{P''_{t1}}{G/2} &= \frac{a}{b}\left[\sin\varphi + \frac{r}{\varkappa l}(1 + \varkappa)\sin 2\varphi\right] + \\
&+ \frac{a^2}{b^2}(1 + \varkappa)\left[\sin 2\varphi + \frac{r}{2l}(3\sin 3\varphi - \sin\varphi)\right]\frac{\chi}{\varkappa}, \\
\frac{P''_{t2}}{G/2} &= -\frac{a}{b}\left[\sin\varphi + \frac{r}{\varkappa l}\sin 2\varphi\right] + \\
&+ \frac{a^2}{b^2}\left[\sin 2\varphi + \frac{r}{2l}(3\sin 3\varphi - \sin\varphi)\right]\frac{\chi}{\varkappa},
\end{aligned} \tag{38}$$

în care P''_{t1} şi P''_{t2} sînt eforturile tangenţiale, respectiv la cursa ascendentă şi la cursa descendentă, în acest caz, adică al contragreutăţii instalată pe manivelă.

APLICAŢII

Exemplul 1 cu următoarele date:

$$a = b = c \quad ; \quad r/l = 0{,}2 \quad ; \quad \varkappa = 0{,}4 \quad ; \quad \chi = 0{,}1$$

este reprezentat pe diagrama din figura 2, unde sînt trasate variaţiile rapoartelor eforturilor tangenţiale către jumătate din greutatea lichidului, în cele două moduri de echilibrare: pe balansier şi pe manivelă. S-au trasat atît componentele: 1′, 1″ de frecvenţa manivelei, 2′, 2″, de frecvenţă dublă, 3′, 3″ de frecvenţă triplă, cît şi rezultantele lor, atît la cursa ascendentă cît şi la cursa descendentă.

Exemplul 2 cu trei variante

a) $r/l = 0{,}2$; $\varkappa = 0{,}40$; $\chi = 0{,}2$; $\chi/\varkappa = 0{,}5$;

b) $r/l = 0{,}3$; $\varkappa = 0{,}25$; $\chi = 0{,}1$; $\chi/\varkappa = 0{,}4$;

c) $r/l = 0{,}4$; $\varkappa = 0{,}20$; $\chi = 0{,}06$; $\chi/\varkappa = 0{,}3$;

în care $a = b = c$ şi corespunzătoare a trei sonde de adîncime diferite şi anume, mică, medie şi mare.

Pe diagrama din figura 3 sînt trasate variaţiile rapoartelor $\frac{P_t}{G/2}$, la cele trei variante a', a'', b', b'', c', c'' corespunzător celor două moduri de echilibrare şi la ambele curse.

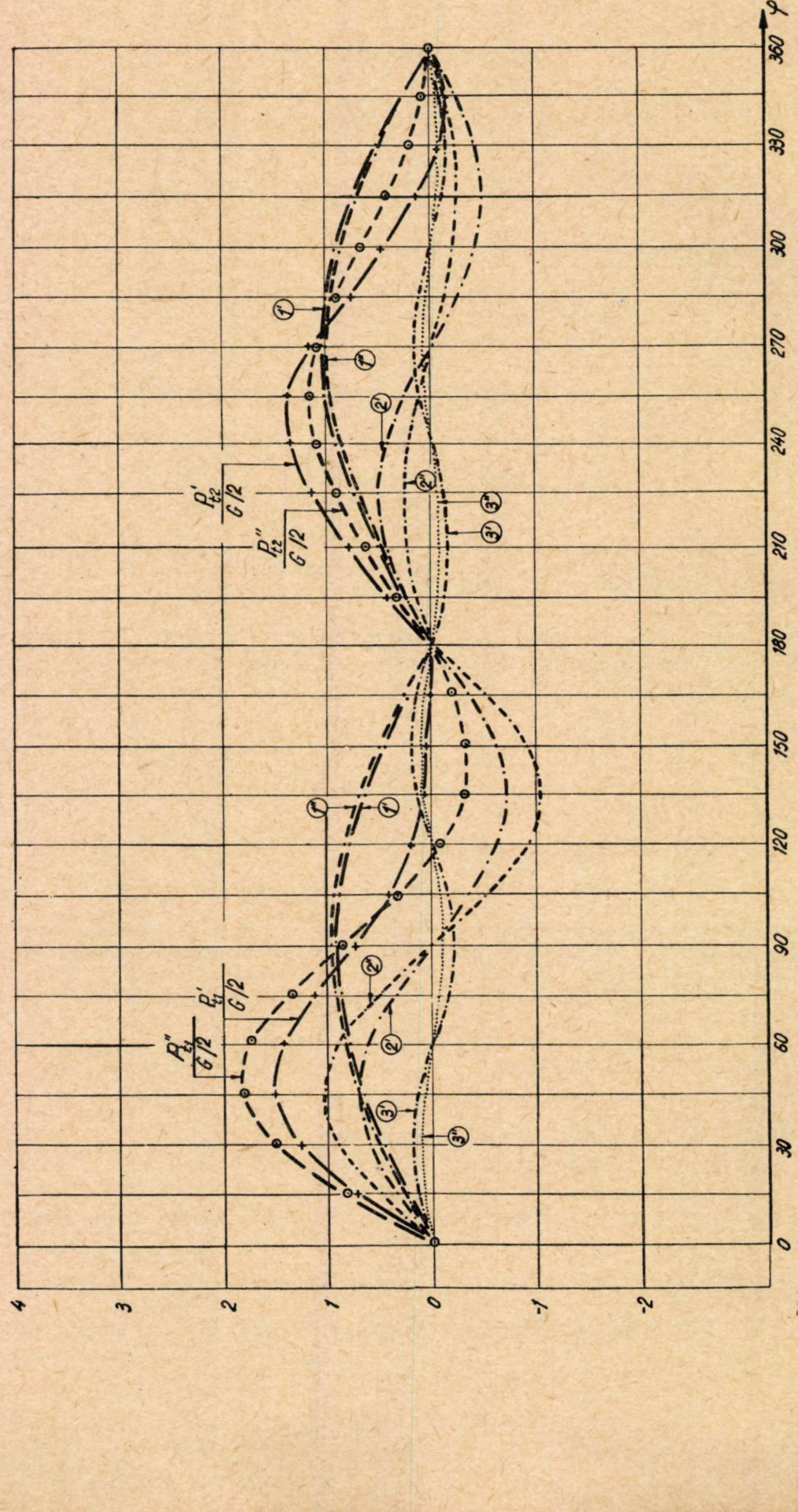

4
3
2
1
0
-1
-2
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
φ°
$\frac{P''_{t1}}{G/2}$
$\frac{P'_{t1}}{G/2}$
$\frac{P'_{t2}}{G/2}$
$\frac{P''_{t2}}{G/2}$
1'
1''
2'
2''
3'
3''

Fig. 2

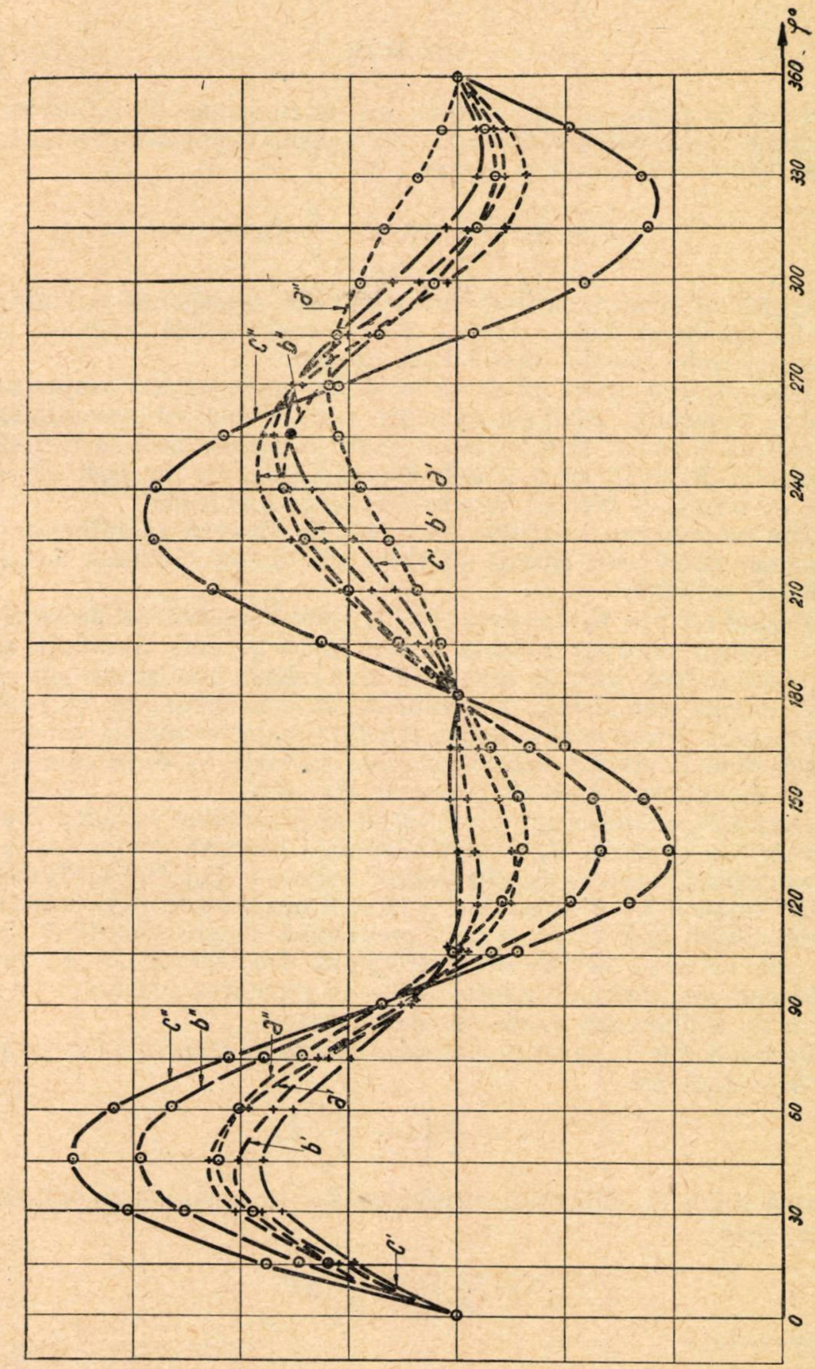


Fig. 3

CONCLUZII

Dacă în expresia (33) cu (34), nu ţinem seama de influenţa bielei de lungime finită, adică pentru $r/l = 0$, regăsim expresia efortului tangenţial din teoria elementară şi anume

$$P_t = \pm \frac{a}{b}\frac{G}{2}\sin\varphi + \frac{B}{2}\sin 2\varphi, \tag{39}$$

în care, primul termen, cu frecvenţa manivelei, corespunde sarcinii statice utile, iar cel de-al doilea termen, de frecvenţă dublă, conform relaţiei (18) corespunde inerţiei maselor în mişcare.

Dacă $r/l \neq 0$, apare influenţa bielei de lungime finită asupra forţelor statice cu termenul $(Ar/2l)\sin 2\varphi$ de frecvenţă dublă, cît şi asupra forţelor dinamice cu factorul Br/l, care se poate repartiza astfel : trei sferturi pe termenul $B\,(3r/4l)\sin 3\varphi$ de frecvenţă triplă, iar un sfert, cu semnul minus, pe termenul $B\,(r/4l)\sin\varphi$ de frecvenţa manivelei.

Din examinarea relaţiilor (35), (37) se observă că influenţa bielei de lungime finită este diferită în cazul echilibrării oscilante de aceea a echilibrării rotative.

Primul termen C_1 din expresia (34) este independent de felul echilibrării întrucît nu apar valorile A sau B. În general, frecvenţa acestor unităţi este redusă, încît şi valorile B sînt relativ mici şi întrucît r/l este mic, C_3 devine şi mai mic. Deocamdată să considerăm pe C_3 neglijabil şi prin urmare şi termenul al doilea din C_1. Ceea ce rămîne ca diferenţiere, între cele două moduri de echilibrare, este valoarea C_2, după cum se poate vedea şi din interpretarea diagramelor alăturate.

Dacă r/l este îndeajuns de mic încît să predomine valoarea B asupra valorii Ar/l în expresia C_2, contrabalansarea rotativă devine într-adevăr mai avantajoasă, ceea ce este în general admis — [1] *), [4]**) deoarece $B' > B''$ întrucît în B' intervine şi efectul inerţiei contragreutăţii de pe balansier. Dacă însă valoarea Ar/l predomină asupra valorii B, contrabalansarea rotativă devine dezavantajoasă deoarece $A'' > A'$, întrucît — după cum s-a arătat cu relaţia (27) — cu greutatea constantă pe manivelă, nu se echilibrează media sarcinilor statice.

Partea α din A, datorită contrabalansării pe manivelă ($\nu = 1$) scoasă din relaţia (17) este

$$\alpha = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)P, \tag{40}$$

iar partea β din B, datorită contrabalansării pe balansier ($\mu = 1$) scoasă din (18) este

$$\beta = \frac{ac}{b^2}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\chi P. \tag{41}$$

---

*) p. 461.
**) p. 382.

Pentru ca să domine efectul inerției contragreutății de pe balansier, asupra dezechilibrării provocată de amplasarea contragreutății pe manivelă, trebuie să avem în expresia C_2 din (34)

$$\beta > \alpha r/l. \tag{42}$$

Făcînd înlocuirile în relațiile (40) și (41) se obține

$$\chi > br/cl \tag{43}$$

și ținînd seama de (19)

$$n^2 > 900\, gb/cl^2 \pi^2. \tag{44}$$

Se vede că pentru $l \to \infty$, ceea ce condiționează teoria elementară, condiția (44) devine $n > 0$, ceea ce înseamnă că efectul inerției contragreutăților de pe balansier este predominant, oricît de mică ar fi turația, regăsindu-se astfel concluzia teoriei elementare.

Din relația (29) se observă că efectul dezechilibrării, prin amplasarea contragreutății pe manivelă se accentuează pe măsura în care r/l crește.

Dacă $lc/b \approx 2{,}25$ m — ceea ce se poate întîmpla pentru sonde puțin adînci — condiția (44) devine $n > 20$, frecvență în general nedepășită.

Cu creșterea adîncimii se folosesc valori mărite pentru lc/b, însă la frecvențe coborîte cu mult. Astfel dacă $lc/b \approx 4{,}5$ m — corespunzător la sonde adînci — condiția (44) devine $n > 14$, ceea ce reprezintă o frecvență ridicată, neîntîlnită în general, la adîncimile respective.

În consecință, pentru sonde de mare frecvență, se poate ca efectul inerției contragreutății de pe balansier să fie mai mare ca efectul dezechilibrării de la contrabalansarea pe manivelă; dar în general pentru sondele de mică adîncime cele două efecte se compensează. Cu cît adîncimea crește, efectul dezechilibrării devine tot mai preponderent, prin scăderea frecvenței, încît contrabalansarea pe balansier devine mult mai convenabilă.

Formulele (12), (13), (23) sînt cunoscute [1] și se regăsesc în manualele [2], [3], [4], [5], dar în concluzia teoriei corectate — [1]*) și [3]**) — se recomandă formulele din teoria elementară, cu deosebirea că w_B se înlocuiește cu valoarea dată de expresia (8) și se introduce ξ în expresia XVI 30 din [1]

$$P_t = P_b\, \xi \sin \varphi. \tag{45}$$

În acest fel se face o anumită eroare, neglijînd pe ψ sau admițînd premisa simplificatoare $\cos \psi \approx 1$, cînd se iau momentele în raport cu O_1, dacă nu se mențin aceleași premise și cînd se iau momentele în raport cu O_1, adică în expresia (21). Aceasta revine la a folosi în expresiile (30) formula mai complicată

$$\frac{\xi}{\cos \psi} = 1 + \frac{r}{l}\left(\cos \varphi - \frac{r}{2l}\sin^2 \varphi\right), \tag{46}$$

---

*) p. 45.

**) p. 528.

provenită din (23) în loc de a folosi formula (28), care este mai simplă şi totodată corectă.

„*Teoria corectată*", aşa cum este redată în bibliografia citată, se mărgineşte la cele menţionate mai sus — formula (45) — fără să fie aplicată la contrabalansarea pe manivelă cu formula (24), încît să împingă concluzia la constatarea esenţială, că, prin plasarea contragreutăţii pe manivelă, nu se echilibrează media sarcinilor statice, din cauza factorului $\xi/\cos\psi$, care apare în formula (27) şi că acest efect, în anumite condiţii, care se accentuează cu adîncimea, este mai important decît efectul inerţiei de la contrabalansarea oscilantă.

Formulele prezentate (16) — (19) şi (24) — (31) sînt mai cuprinzătoare, întrucît referindu-se prin μ şi ν la contrabalansarea combinată, rezolvă problema, mai general, din acest punct de vedere (premisele acceptate) incluzînd orice grad de repartizare al contragreutăţii pe balansier şi pe manivelă.

Aceste formule, puse sub forma (33) şi (34) şi aplicate ca în diagramele alăturate, evidenţiază cele două efecte examinate şi anume, a inerţiei, în cazul contrabalansării oscilante şi a dezechilibrării, în cazul contrabalansării rotative.

În condiţiile luate pentru exemplul 1, se vede pe diagramă (fig. 2) că termenul de frecvenţa manivelei, în cele două moduri de echilibrare, se deosebeşte puţin şi anume cu 3 % la cursa ascendentă şi cu —2,5 % la cursa descendentă. Termenul de frecvenţă dublă, însă, dă diferenţe apreciabile şi anume de 35 %. Influenţa termenului de frecvenţă triplă, mai puţin importantă, care se manifestă dezavantajos echilibrării la începutul cursei ascendente şi uneori la sfîrşitul cursei descendente, este mai pronunţată în echilibrarea oscilantă.

Rezultanta efortului tangenţial în contrabalansarea oscilantă prezintă o variaţie maximă de 158 %, iar în contrabalansarea rotativă de 213 %, adică mai avantajoasă în primul caz cu 35 %.

Pentru a preîntîmpina condiţiile grele la care lucrează prăjinile de pompare la sondele adînci, se obişnuieşte ca să se reducă frecvenţa şi să se lungească lungimea cursei cu adîncimea. În exemplul 2, urmărind (fig. 2) cele trei variante *a*, *b*, *c*, care corespund respectiv la condiţiile de adîncime crescîndă, se observă că variaţia echilibrării rotative este cu atît mai pronunţată cu cît creşte adîncimea de pompare. Aceasta se datoreşte creşterii raportului r/l, care intervine în expresia C_2 din (34); adică se agravează influenţa bielei de lungime finită asupra echilibrării forţelor statice din contrabalansarea rotativă.

Pe de altă parte, chiar dacă r creşte, χ scade cu adîncimea, din cauza reducerii frecvenţei n, care se găseşte la pătrat în expresia (19), încît efectul dinamic al contragreutăţii oscilante, dezavantajos în această contrabalansare, scade cu adîncimea.

Ambele efecte se cumulează în defavoarea echilibrării rotative şi din ce în ce mai accentuat cu cît creşte adîncimea de pompare. În cazul sondelor de mică adîncime, diferenţele efortului tangenţial din cele două moduri de echilibrare sînt neînsemnate, ceea ce se poate urmări pe diagramă (fig. 3) unde curbele efortului tangenţial *a'* şi *a''* aproape se suprapun. Indicii superiori, prim şi secund, se referă la modul de echilibrare pe balansier sau pe manivelă. Curbele b' şi b'', corespunzător adîncimilor mijlocii de pompare, se depărtează apreciabil încît diferența variațiilor maxime este cu 35 % mai dezavantajoasă în cazul echilibrării rotative. Curbele c' şi c'', corespunzătoare sondelor adînci, se depărtează aşa de mult, încît diferența variațiilor maxime între cele două echilibrări ajunge la 179% în favoarea echilibrării pe balansier.

Se înțelege că rămîn valabile celelalte avantaje ale contragreutății pe manivelă, de a fi uşor manipulabile sau de a evita solicitarea de flambaj a bielei.

O deplasare a contragreutății de pe manivelă pe balansier la sondele adînci, va ameliora echilibrarea şi prin aceasta, în primul rînd, reducînd uzura reductorului, va mări durata sa de funcționare şi în al doilea rînd, va permite reducerea puterii instalate, deci, reducînd puterea dewatată, va ameliora factorul de putere al rețelei electrice.

Primită la redacție la 23 iulie 1958.

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ШАТУНА НА УРАВНОВЕШИВАНИЕ НАСОСНЫХ АГРЕГАТОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Определяется выражение усилия у цапфы шатуна по касательной (касательного усилия) и рассматривается уравновешивание насосного агрегата с комбинированным балансированием (колебательным и вращательным) в рамках элементарной теории с той лишь разницей, что отношение радиуса шатуна к его длине отлично от нуля (3). Выражение касательного усилия представляется в виде суммы (33) трех синусоидальных составляющих функций, причем одна имеет частоту шатуна, а остальные частоту, в 2—3 раза большую.

Рассмотрены частные случаи, когда противовес находится только на балансире (колебательное уравновешивание) или только на шатуне (вращательное уравновешивание).

Приводятся два примера. В первом примере, приведенном на соответствующем графике (рис. 2), выявляется влияние составляющих, определяемых формулами (34) в выражении касательного усилия. Величины A и B, определяемые выражениями (17) и (18), относятся соответственно к статическим и динамическим силам и зависят от способа уравновешивания.

Во втором примере, изображенном на соответствующем графике (рис. 3), выявляется влияние параметров r/l, $\varkappa$ (5) и χ (19), зависящих в свою очередь от условий откачки, среди которых важнейшим является, обычно, глубина откачки. Путем соответствующего выбора параметров при разных глубинах откачки, три варианта а), b), c) дают влияние глубины для указанных двух способов уравновешивания.

В заключение рассматривается влияние отношения r/l при указанных двух способах уравновешивания, причем для выбранных условий это влияние выгоднее при колебательном уравновешивании. Как видно из второго примера, этот эффект усиливается с возрастанием глубины откачки.

INFLUENCE DE LA BIELLE DE LONGUEUR FINIE SUR L'ÉQUILIBRAGE DE L'UNITÉ DE POMPAGE

RÉSUMÉ

L'auteur établit l'expression de l'effort tangentiel à la manivelle et étudie l'équilibrage de l'unité de pompage à contrepoids combiné (sur le balancier et sur la manivelle) à l'aide des prémisses de la théorie élémentaire, sauf le rapport du rayon de la manivelle à la longueur de la bielle, différente de zéro (3). L'expression de l'effort tangentiel est mise sous la forme (33) d'une somme de trois fonctions composantes sinusoïdales ; l'une d'elle, de la fréquence de la manivelle, les autres, de fréquence double et triple. Les cas où le contrepoids appuie seulement sur le balancier (équilibrage oscillant) ou seulement sur la manivelle (équilibrage rotatif) sont particularisés.

Deux exemples d'applications sont donnés.

Le premier exemple, représenté sur le diagramme de la figure 2, met en évidence l'influence des comparantes-formules (34) — sur l'expression de l'effort tangentiel. Les valeurs A et B — expressions (17), (18) —, relatives aux forces statiques et dynamiques respectives, dépendent du mode de balancement.

Le second exemple, représenté sur le diagramme de la figure 3, met en évidence les paramètres r/l, $\varkappa$ (5) et χ (19), qui à leur tour dépendent des conditions de pompage, surtout de la profondeur, dans les deux cas de balancement.

En conclusion, on analyse l'influence du rapport r/l, pour les deux cas, influence favorable à l'équilibrage oscillant dans les conditions choisies. Il ressort de l'exemple 2, que cet effet croît avec la profondeur de pompage.

BIBLIOGRAFIE

1. R. I. SISCENKO, *Maşini şi mecanisme pentru forarea şi exploatarea sondelor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1951.
2. V. ANASTASIU şi A. PURCEL, *Extracţia ţiţeiului*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
3. GR. IOACHIM, *Exploatarea zăcămintelor de ţiţei*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
4. N. DRAGOTESCU, *Pompajul de adîncime din Manualul inginerului petrolist*. Cap. XII, 42, Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
5. ST. SEMENCU, *Cercetarea şi studiul tehnologic al sondelor petrolifere*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.

ELASTICITATE – PLASTICITATE
– REZISTENȚA MATERIALELOR

CÎTEVA PROBLEME ALE TEORIEI UNEI CLASE DE ÎNVELITORI ELASTICE, SUBȚIRI, NEOMOGENE

DE

LIVIU LIBRESCU

1. **Introducere.** Vom da în cele ce urmează o extindere a corespondenței stabilite de analogia statico-geometrică în cazul învelitorilor subțiri izotrope, omogene [1], învelitorilor neomogene construite dintr-un număr impar de straturi. Aceste straturi sînt dispuse simetric pe grosime, în raport cu suprafața mediană, a învelitoarei (simetrie geometrică și elastică). În final, vom utiliza analogia statico-geometrică stabilită în prima parte a lucrării, la rezolvarea în eforturi și momente a problemei învelitorilor de mică curbură, neomogene, acționate de sarcina exterioară de componente X', Y',$-Z'$ și plasate într-un cîmp de temperatură neuniform.

2. **Ipoteze.** Se va considera că fiecare strat component este omogen, izotrop și că ascultă de legea fizică a lui Hooke.

Vom adopta ipotezele formulate în [2] și [3] după care straturile sînt împreunate rigid. Se exclude astfel posibilitatea ca ele să alunece pe suprafețele de contact, fiind astfel forțate a se deforma împreună, ca un tot. Pentru învelitoarea în ansamblu, considerăm valabile [2] și [3] ipotezele următoare :

a) Ipoteza nedeformabilității elementului normal la suprafața mediană a învelitoarei.

g) Ipoteza nulității eforturilor unitare normale pe suprafețele echidistante față de suprafața mediană.

În baza acestor ipoteze, vom neglija în cele ce urmează, mărimile de ordinul $\frac{\delta}{R_{\min}}$ în raport cu unitatea.

De asemenea, vom presupune că învelitoarea este referită la un sistem ortogonal de coordonate (α, β) în general vorbind neconjugat, $z =$ const. reprezentînd o anumită suprafață paralelă cu suprafața mediană considerată.

În cele ce urmează vom nota cu j un strat oarecare din cele $2n + 1$ straturi considerate ($n = 1, 2, 3 \ldots$), iar mărimile statice, fizice şi geometrice ce caracterizează stratul j le vom afecta cu indicele j.

3. **Legile fizice**. Ţinînd seama de ipotezele enunţate anterior, eforturile unitare ale unui strat j, exprimate prin legea lui Hooke sînt date de relaţiile

$$\sigma_\alpha^j(z) = \frac{E_j}{1-\mu_j^2}\left[(\varepsilon_1 + \mu_j\,\varepsilon_2) + z\,(\varkappa_1 + \mu_j\,\varkappa_2)\right] \tag{1}$$

$$\sigma_\beta^j(z) = \frac{E_j}{1-\mu_j^2}\left[(\varepsilon_2 + \mu_j\,\varepsilon_1) + z\,(\varkappa_2 + \mu_j\,\varkappa_1)\right]$$

$$\tau_{\alpha\beta}^j(z) = \frac{E_j}{2(1+\mu_j)}(\omega + 2z\tau)$$

În aceste relaţii σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ sînt eforturile unitare din mediul tridimensional al învelitoarei.

E_j — modulul de elasticitate al materialului;
μ_j — coeficientul Poisson al materialului;
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ — deformaţiile tangenţiale ale suprafeţei mediane;
$\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$ — deformaţiile de încovoiere a suprafeţei mediane.

Eforturile şi momentele reduse la suprafaţa mediană au următoarele expresii:

$$T_\alpha = \sum_{j=1}^{n+1}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\sigma_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\right]^{*)}$$

$$T_\beta = \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz\right]$$

$$T_{\alpha\beta} = \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\tau_{\beta\alpha}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\tau_{\beta\alpha}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\right]$$

$$T_{\beta\alpha} = \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\right]$$

$$M_\alpha = -\sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\sigma_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\sigma_\alpha^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz\right] \tag{2}$$

$$M_\beta = -\sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\sigma_\beta^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz\right]$$

$$M_{\alpha\beta} = \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz\right]$$

$$M_{\beta\alpha} = -\sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\tau_{\alpha\beta}^j\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz\right]$$

---

*) În cele ce urmează vom pune pentru simplificarea scrisului în loc de $\sum_{j=1}^{n+1} F_j$, expresia ΣF_j, subînţelegînd că sumarea se face de la $J = 1$ la $J = n + 1$.

Introducînd în expresiile (2), relațiile (1) şi raportîndu-ne la ipotezele făcute inițial, se obțin următoarele expresii pentru eforturi şi momente, pe care pentru considerațiuni uşor de dedus din cele ce vom urma, le vom pune sub forma

$$\begin{aligned}
T_\alpha &= 2\sum \frac{E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}\left[\varepsilon_1+\frac{\sum \frac{\mu_j E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}\,\varepsilon_2\right]\\
T_\beta &= 2\sum \frac{E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}\left[\varepsilon_2+\frac{\sum \frac{\mu_j E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}\,\varepsilon_1\right]\\
T^{\alpha\beta} &= -T_{\beta\alpha}=\sum \frac{E_j(\delta_j-\delta_{j-1})}{1+\mu_j}\,\omega.\\
M_\alpha &= -\frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}\left[\varkappa_1+\frac{\sum \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}\,\varkappa_2\right]\\
M_\beta &= -\frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}\left[\varkappa_2+\frac{\sum \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}\,\varkappa_1\right]\\
M_{\alpha\beta} &= -M_{\beta\alpha}=\frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3-\delta_{j-1}^3\right)}{1+\mu_j}\,\tau.
\end{aligned}\tag{3}$$

Exprimînd în aceste relații componentele de deformație prin componentele energetice ale deformației legate prin relațiile

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\varepsilon^{(1)}\quad,\quad \varkappa_2=-\varkappa^{(2)}\quad,\quad \varkappa_1=-\varkappa^{(1)}\quad,\quad \varepsilon_2=\varepsilon^{(2)}\\
&\omega^{(1)}=\frac{\omega}{2}\quad,\quad \tau^{(2)}=-\tau,\quad,\quad \tau^{(1)}=\tau,\quad,\quad \omega^{(2)}=-\frac{\omega}{2}\ ^{*)}
\end{aligned}$$

---

*) În calculele practice, în majoritatea cazurilor, se pot admite relațiile aproximative $\tau^{(1)}=-\tau^{(2)}=\tau$, pentru detalii a se vedea [1], p. 63.

se obține

$$T_\alpha = 2\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}\left[\varepsilon^{(1)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}\,\varepsilon^{(2)}\right]$$

$$T_\beta = 2\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}\left[\varepsilon^{(2)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}\,\varepsilon^{(1)}\right]$$

$$T_{\alpha\beta} = 2\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}\left[\omega^{(1)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}\,\omega^{(2)}\right] \qquad (4)$$

$$T_{\beta\alpha} = 2\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}\left[\omega^{(2)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}\,\omega^{(1)}\right]$$

$$M_\alpha = \frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}\right)}{1-\mu_j^2}\left[\varkappa^{(1)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}\,\varkappa^{(2)}\right]$$

$$M_\beta = \frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}\left[\varkappa^{(2)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}\,\varkappa^{(1)}\right]$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}\left[\tau^{(1)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}\,\tau^{(2)}\right] \qquad (4)$$

$$M_{\beta\alpha} = \frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}\left[\tau^{(2)} + \frac{\sum \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^2\right)}{1-\mu_j^2}}\,\tau^{(2)}\right]^{*)}$$

---

*) Relațiile obținute mai sus au fost deduse în ipoteza că suprafața mediană este referită în linii de curbură, însă o astfel de restricție nu este esențială. Ele rămîn valabile și în cazul mai general al coordonatelor ortogonale, dar neconjugate.

4. **Analogia statico-geometrică.** În baza relațiilor fizice (4) se observă că se poate scrie

$$\begin{aligned} T_\alpha &= F^\star\,[\varepsilon^{(1(} + \mu^\star\,\varepsilon^{(2)}] \\ T_\beta &= F^\star\,[\varepsilon^{(2)} + \mu^\star\,\varepsilon^{(1)}]. \end{aligned} \tag{5}$$

și

$$\begin{aligned} \varkappa^{(1)} &= D^{\star\star}\,[M_\alpha - \mu^{\star\star}\,M_\beta] \\ \varkappa^{(2)} &= D^{\star\star}\,[M_\beta - \mu^{\star\star}\,M_\alpha] \end{aligned} \tag{6}$$

unde s-au introdus notațiile

$$F^\star = 2\sum \frac{E_j\,(\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu_j^2}\,, \quad D^{\star\star} = \frac{1}{G^{\star\star}\,[1 - \mu^{\star\star 2}]}\,, \tag{7}$$

$$\mu^\star = \frac{\sum \dfrac{\mu_j\,E_j\,(\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}{\sum \dfrac{E_j\,(\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}\,, \quad \mu^{\star\star} = \frac{\sum \dfrac{\mu_j\,E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_j^2}}{\sum \dfrac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_j^2}}\,,$$

iar constanta $G^{\star\star}$ este definită de

$$G^{\star\star} = \frac{2}{3}\sum \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_j^2}\,. \tag{8}$$

Se observă că grupurile de relații (5) și (6) pot trece unul într-altul dacă între elementele ce intervin se stabilesc următoarele corespondențe

$$\begin{gathered} T_\alpha \longleftrightarrow -\varkappa^{(2)}\,, \quad M_\beta \longleftrightarrow \varepsilon^{(1)}\,, \quad M_\alpha \longleftrightarrow \varepsilon^{(2)} \\ T_\beta \longleftrightarrow -\varkappa^{(1)} \\ F^\star \longleftrightarrow -D^{\star\star}\,, \quad \mu^\star \longleftrightarrow -\mu^{\star\star}. \end{gathered} \tag{I}$$

Un alt grup de corespondențe ne este sugerat de expresiile eforturilor de lunecare și momentelor de răsucire.

Referindu-ne la ecuațiile fizice (4), în baza notațiilor (7) și (8) adoptate mai sus, acestea pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= F^\star\,[\omega^{(1)} + \mu^\star\,\omega^{(2)}], \\ T_{\beta\alpha} &= F^\star\,[\omega^{(2)} + \mu^\star\,\omega^{(1)}] \end{aligned} \tag{9}$$

și

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= D^{\star\star}\,[M_{\alpha\beta} - \mu^{\star\star}\,M_{\beta\alpha}], \\ \tau^{(2)} &= D^{\star\star}\,[M_{\beta\alpha} - \mu^{\star\star}\,M_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \tag{10}$$

Grupurile de relaţii (9) şi (10) pot trece unul în celălalt dacă tabloul de corespondenţe (I) se completează cu

$$T_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \tau^{(2)}, \quad M_{\beta\alpha} \longleftrightarrow -\omega^{(1)}, \quad M_{\alpha\beta} \longleftrightarrow -\omega^{(2)}, \quad T_{\beta\alpha} \longleftrightarrow \tau^{(1)} \qquad \text{(II)}$$

Tablourile de corespondenţe (I) şi (II) se completează observînd că în cazul neomogen ca şi în cazul omogen, pe de o parte, ecuaţiile de echilibru omogene în eforturi şi ecuaţiile de continuitate în deformaţii şi, pe de altă parte, relaţiile dintre eforturi şi funcţii de efort şi relaţiile dintre deformaţii şi deplasări se menţin la fel.

De aici se obţin şi relaţiile ce completează corespondenţele date în (I) şi (II)

$$\begin{array}{cccc} Q_\beta \longleftrightarrow \zeta_1 & Q_\alpha \longleftrightarrow -\zeta_2 & & \\ a \longleftrightarrow u & b \longleftrightarrow v & c \longleftrightarrow w & \nu \longleftrightarrow \delta, \end{array} \qquad \text{(III)}$$

unde Q_α, Q_β — forţele tăietoare,
ζ_1, ζ_2 — deformaţiile transversale,
a, b, c, ν — funcţiile de efort [1]
u, v, w — componentele vectorului deplasare,
δ — componenta pe normală a rotirii elastice.

În felul acesta, prin corespondenţele stabilite în (I), (II) şi (III) numărul necunoscutelor şi a relaţiilor de cercetat este redus efectiv la jumătate.

5. **Invelitori neomogene de mică curbură.** În cele ce urmează vom utiliza analogia statico-geometrică la calculul învelitorilor neomogene de mică curbură, în condiţiile existenţei sarcinii exterioare de componente X', Y', $-Z'$ şi a cîmpului de temperatură neuniform $T(\alpha, \beta, z)$.

În acest scop vom relua pentru acest caz, ideea folosită în [4], de reducere a problemei determinării stării de tensiune, la găsirea unei funcţii complexe $C = c + i\ \zeta\ w$.

5. 1. **Ecuaţiile teoriei învelitorilor neomogene de mică curbură sub formă complexă.** Vom porni de la ecuaţiile de echilibru şi de compatibilitate, ecuaţii care în condiţiile existenţei unui cîmp de temperatură neuniform îşi menţin aceeaşi formă ca şi în cazul elastic. În cazul ipotezelor proprii teoriei învelitorilor de mică curbură*), aceste ecuaţii se pot scrie

---

*) Aceste ipoteze sînt:

a) metrica suprafeţei mediane este identică cu cea a planului. Vom lua $A = B = 1$.

b) Se renunţă la eforturile tăietoare Q'_α, Q'_β în primele două ecuaţii de echilibru.

c) Se renunţă la deformaţiile transversale ζ^*_1, ζ^*_2 în primele două ecuaţii de compatibilitate.

sub forma [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+X'=0\quad,\quad\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T'_{\beta}}{\partial\beta}+Y'=0,\\ \frac{T'_{\alpha}}{R_1}-2\frac{T'_{\alpha\beta}}{R_{12}}+\frac{T'_{\beta}}{R_2}+\frac{\partial Q'_{\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q'_{\beta}}{\partial\beta}+Z'=0.\\ \frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial M'_{\beta}}{\partial\beta}+Q'_{\beta}=0,\quad,\quad\frac{\partial M'_{\alpha}}{\partial\alpha}-\frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-Q'_{\alpha}=0.\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varkappa^{(2)}_{\star}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tau^{(1)}_{\star}}{\partial\beta}=0,\ \frac{\partial\tau^{(2)}_{\star}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varkappa^{(1)}_{\star}}{\partial\beta}=0.\\ -\frac{\varkappa^{(2)}_{\star}}{R_1}-\frac{\varkappa^{(1)}_{\star}}{R_2}-2\frac{\tau^{(2)}_{\star}}{R_{12}}\frac{\partial\zeta^{\star}_{2}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\zeta^{\star}_{1}}{\partial\beta}=0,\\ -\frac{\partial\omega^{(2)}_{\star}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varepsilon^{(1)}_{\star}}{\partial\beta}+\zeta^{\star}_{1}=0\quad,\quad\frac{\partial\varepsilon^{(2)}_{\star}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega^{(2)}_{\star}}{\partial\beta}+\zeta^{\star}_{2}=0.\end{gathered}\tag{12}$$

Urmărind a aplica analogia statico-geometrică formulată anterior, vom reduce formal ecuațiile de echilibru (11) și de compatibilitate (12) la cazul elastic.

În acest scop, urmărind ideea din [5], [6] vom porni de la expresia eforturilor unitare date în cazul existenței cîmpului de temperatură neuniform T (α, β; z) și admiterii ipotezei Love-Kirchoff

$$\begin{aligned}\sigma'^{j}_{\alpha}&=\frac{E_j}{1-\mu_j^2}[\varepsilon^{\star}_{1}+\mu_j\varepsilon^{\star}_{2}+z(\varkappa^{\star}_{1}+\mu_j\varkappa^{\star}_{2})-(1+\mu_j)\beta_j T]\\ \sigma'^{j}_{\beta}&=\frac{E_j}{1-\mu_j^2}[\varepsilon^{\star}_{2}+\mu_j\varepsilon^{\star}_{1}+z(\varkappa^{\star}_{2}+\mu_j\varkappa^{\star}_{1})-(1+\mu_j)\beta_j T]\\ \tau'^{j}_{\alpha\beta}&=\frac{E_j}{2(1+\mu_j)}(\omega^{\star}2z\tau^{\star})\end{aligned}\tag{13}$$

Aceste relații se pot transcrie sub următoarea formă;

$$\begin{aligned}\sigma'^{j}_{\alpha}&=\sigma^{j}_{\alpha}-\frac{E_j}{1-\mu_j}\beta_j T,\\ \sigma'^{j}_{\beta}&=\sigma^{j}_{\beta}-\frac{E_j}{1-\mu_j}\beta_j T,\\ \tau'^{j}_{\alpha\beta}&=\tau^{j}_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{14}$$

unde

$$\begin{aligned}\sigma^{j}_{\alpha}&=\frac{E_j}{1-\mu_j^2}[\varepsilon^{\star}_{1}+\mu_j\varepsilon^{\star}_{2}+z(\varkappa^{\star}_{1}+\mu_j\varkappa^{\star}_{2})],\\ \sigma^{j}_{\beta}&=\frac{E_j}{1-\mu_j^2}[\varepsilon^{\star}_{2}+\mu_j\varepsilon^{\star}_{1}+z(\varkappa^{\star}_{2}+\mu_j\varkappa^{\star}_{1})],\\ \tau^{j}_{\alpha\beta}&=\frac{E_j}{2(1+\mu)_j}(\omega^{\star}+2z\,\tau^{\star}),\end{aligned}\tag{14'}$$

reprezintă eforturile unitare ce ar apare în mediul tridimensional al învelitoarei în absenţa cîmpului de temperatură neuniform. Din utilizarea relaţiilor (14) şi (2) rezultă următoarele expresii pentru eforturi şi momente

$$
\begin{aligned}
T'_\alpha &= T_\alpha - \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T\, dz\right],\\
T'_\beta &= T_\beta - \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T\, dz\right]\\
T'_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta},\\
M'_\alpha &= M_\alpha + \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T z\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T z\, dz\right],\\
M'_\beta &= M_\beta + \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T z\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T z\, dz\right]\\
M'_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

unde T_α T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α M_β, $M_{\alpha\beta}$ sînt eforturi şi momente ce ar rezulta în absenţa cîmpului de temperatură neuniform. Din aceste relaţii, ţinînd seama de ecuaţiile fizice (15), se obţine expresia deformaţiilor sub următoarea formă :

$$
\varepsilon_*^{(1)} = \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{F^*(1+\mu^*)}\sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T\, dz\right] \tag{16}
$$

$$
\varepsilon_*^{(2)} = \varepsilon^{(2)} + \frac{1}{F^*(1+\mu^*)}\sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T\, dz\right] \tag{16'}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_* &= \omega,\\
\varkappa_*^{(1)} &= \varkappa^{(1)} - \frac{1}{G^{**}(1+\mu^{**})}\sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T z\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T z\, dz\right]\\
\varkappa_*^{(2)} &= \varkappa^{(2)} - \frac{1}{G^{**}(1-\mu^{**})}\sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j\, T z\, dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j\, T z\, dz\right],\\
\tau_*^{(1)} &= \tau^{(1)},\\
\tau_*^{(2)} &= \tau^{(2)},
\end{aligned}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{(2)} &= \frac{T'_\beta - \mu^* T'_\alpha}{F^*(1-\mu^{*2})}, \quad \varepsilon^{(1)} = \frac{T'_\alpha - \mu^* T'_\beta}{F^*(1-\mu^{*2})},\\
\varkappa^{(1)} &= \frac{M'_\alpha - \mu^{**} M'_\beta}{G^{**}(1-\mu^{**2})}, \quad \varkappa^{(2)} = \frac{M'_\beta - \mu^{**} M'_\alpha}{G^{**}(1-\mu^{**2})},
\end{aligned}
\tag{16''}
$$

$\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ reprezintă deformaţii energetice, corespunzînd cazului cînd cîmpul de temperatură neuniform ar fi nul.

Ținînd seama în ecuațiile (11) de relațiile (15) se obțin ecuațiile de echilibru ale învelitorilor de mică curbură, reduse formal la cazul elastic

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + X = 0 \quad , \quad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} + Y = 0, \\
\frac{T_\alpha}{R_1} - 2\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{T_\beta}{R_2} + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q'_\beta}{\partial \beta} + Z = 0, \\
\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + Q'_\beta = R, \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - Q'_\alpha = -P,
\end{gathered} \tag{17}$$

unde am introdus notațiile

$$\begin{gathered}
X = X' - \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j T\,dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j T\,dz\right], \\
Y = Y' - \frac{\partial}{\partial \beta} \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j T\,dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j T\,dz\right], \\
Z = Z' - 2H \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j T dz\right], \\
R = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j T z dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j T z dz\right], \\
P = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum \frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \beta_j T z dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \beta_j T z dz\right].
\end{gathered} \tag{18}$$

Ținînd seamă de relațiile (16) în ecuațiile de compatibilitate (12), acestea devin

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varkappa^{(2)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \beta} = \Gamma_1, \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varkappa^{(1)}}{\partial \beta} = \Gamma_2, \\
-\frac{\varkappa^{(2)}}{R_1} - \frac{\varkappa^{(1)}}{R_2} - 2\,\frac{\tau^{(2)}}{R_{12}} - \frac{\partial \zeta_2^\star}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta_1^\star}{\partial \beta} = \Lambda, \\
-\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varepsilon^{(1)}}{\partial \beta} + \zeta_1^\star = \Delta_1, \\
\frac{\partial \varepsilon^{(2)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \beta} + \zeta_2^\star = -\Delta_2,
\end{gathered} \tag{19}$$

unde am notat

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{G^{**}(1+\mu^{**})}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum\frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\beta_j Tzdz+\int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\beta_j Tzdz\right],\\
-\Gamma_2 &= \frac{1}{G^{**}(1-\mu^{**})}\frac{\partial}{\partial\beta}\sum\frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\beta_j Tzdz+\int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\beta_j Tzdz\right],\\
\Lambda &= -\frac{2H}{G^{**}(1+\mu^{**})}\sum\frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\beta_j Tzdz+\int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\beta_j Tzdz\right],\\
\Delta_1 &= \frac{1}{F^{*}(1+\mu^{*})}\frac{\partial}{\partial\beta}\sum\frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\beta_j Tdz+\int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\beta_j Tdz\right], \qquad (20)\\
\Delta_2 &= \frac{1}{F^{*}(1+\mu^{*})}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum\frac{E_j}{1-\mu_j}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\beta_j Tdz+\int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\beta_j Tdz\right].
\end{aligned}
$$

Ecuațiile omogene de compatibilitate sub forma (19) pe de o parte și ecuațiile omogene de echilibru (17) pe de altă parte, au aceeași structură (analogia statico-geometrică). De aceea ele se pot reuni într-un singur sistem, fiecare ecuație a sistemului fiind un semiinvariant al analogiei statico-geometrice [7].

Pentru aceasta vom înmulți ecuațiile de compatibilitate cu factorul $i\zeta$ *) și le vom aduna cu ecuațiile de echilibru. Se obțin astfel ecuațiile teoriei învelitorilor neomogene de mică curbură sub formă complexă. Rezultatul acestei operații ne sugerează că este avantajos a se introduce, în cele ce urmează, următoarele combinații :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}_\alpha &= T_\alpha - i\zeta\varkappa^{(2)},\\
\widetilde{T}_\beta &= T_\beta - i\zeta\varkappa^{(1)},\\
\widetilde{T}_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} + i\zeta\tau^{(2)}, \qquad (21)\\
\widetilde{T}_{\beta\alpha} &= T_{\beta\alpha} + i\zeta\tau^{(1)},\\
\widetilde{Q}_\alpha &= Q'_\alpha - i\zeta\zeta_2^{*},\\
\widetilde{Q}_\beta &= Q'_\beta + i\zeta\zeta_1^{*},\\
\widetilde{M}_\alpha &= M_\alpha + i\zeta\varepsilon^{(2)}, \qquad (21')\\
\widetilde{M}_\beta &= M_\beta + i\zeta\varepsilon^{(1)},\\
\widetilde{M}_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta} - i\zeta\omega^{(2)},\\
\widetilde{M}_{\beta\alpha} &= M_{\beta\alpha} - i\zeta\omega^{(1)}.
\end{aligned}
$$

---

*) ζ este deocamdată un factor nedeterminat.

În baza acestor combinații (21), pe care le vom numi eforturi complexe, ecuațiile teoriei învelitorilor de mică curbură sub formă complexă vor fi date de sistemul

$$\frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \widetilde{X} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{T}_{\beta}}{\partial \beta} + \widetilde{Y} = 0,$$

$$\frac{T_{\alpha}}{R_1} - 2\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{\widetilde{T}_{\beta}}{R_2} + \frac{\partial \widetilde{Q}_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{Q}_{\beta}}{\partial \beta} + \widetilde{Z} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_{\beta}}{\partial \beta} + Q_{\beta} = R;\ \frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \widetilde{Q} = -\widetilde{P},{}^{\star)}$$

unde

$$\widetilde{X} = X + i\zeta\Gamma_1,{}^{\star\star)} \tag{23}$$

$$\widetilde{Y} = Y + i\zeta\Gamma_2,$$

$$\widetilde{Z} = Z + i\zeta\Lambda,$$

$$\widetilde{R} = R + i\zeta\Delta_1,$$

$$\widetilde{P} = P + i\zeta\Delta_2.$$

Se observă ușor că cele 10 ecuații ale sistemelor (17) și (19) sînt echivalente sistemului de cinci ecuații sub formă complexă (22). Rămîne de determinat factorul ζ. Reluînd raționamentul din [7], vom pune la început condiția ca fiecare efort complex luat în parte să fie unitar din punct de vedere dimensional. În acest sens, din tablourile de corespondențe se observă că toate perechile de elemente corespondente se reduc din punct de vedere dimensional la următoarele trei cazuri caracteristice

$$T_{\alpha} \longleftrightarrow -\varkappa^{(2)},$$

$$M_{\alpha} \longleftrightarrow \varepsilon^{(2)},$$

$$c \longleftrightarrow w.$$

Rezultă că din punct de vedere dimensional în toate cazurile ζ satisface relației

$$|\zeta| = |F|,$$

$F|$ fiind dimensiunea forței.

În continuare vom exprima ζ sub forma celei mai generale combinații de constante ce intervin în analogia statico-geometrică

$$\zeta = F^{\star m} D^{\star\star n} \mu^{\star p} \mu^{\star\star q}, \tag{24}$$

---

*) După cum se poate constata, procedeul utilizat pentru obținerea ecuațiilor teorie învelitorilor neomogene de mică curbură sub formă complexă are un caracter general.

**) Este evident că aceste mărimi nu se bucură de proprietatea de semiinvarianță.

unde m, n, p, q sînt valori deocamdată nedeterminate. Deoarece din punct de vedere dimensional avem

$$|F^{\star}| = |F||L|^{-1},$$

$$|D^{\star\star}| = |F|^{-1}|L|^{-1},$$

rezultă că

$$|\zeta| = |F|^{m-n}|L|^{-m-n} \equiv |F|^{1},$$

unde notațiile introduse sînt evidente. De aici rezultă că

$$m = \frac{1}{2},\ n = -\frac{1}{2},$$

și deci

$$\zeta = \left(\frac{F^{\star}}{D^{\star\star}}\right)^{1/2} \mu^{\star p}\, \mu^{\star\star q}. \tag{25}$$

De asemenea, vom impune condiția [7] ca eforturile complexe (21) *) să fie semiinvarianți ai analogiei statico-geometrice (potrivit acestei noțiuni, aceste eforturi transpuse prin analogie trebuie să se reproducă înmulțite cu o constantă).

Din această condiție rezultă

$$\zeta_a = -\frac{1}{\zeta}, \tag{26}$$

ζ_a fiind analogul lui ζ.

Condiția (26) aplicată relației (25), conduce la

$$-\left(\frac{D^{\star\star}}{F^{\star}}\right)^{1/2} \mu^{\star -p}\, \mu^{\star\star -q} = \left(\frac{D^{\star\star}}{F^{\star}}\right)^{1/1} \mu^{\star\star p}\, \mu^{\star q}\, (-1)^{p+q},$$

de unde

$$p = q = 0.$$

Rezultă în definitiv

$$\zeta = \left(\frac{F^{\star}}{D^{\star\star}}\right)^{1/2} = \sqrt{F^{\star}G^{\star\star}(1-\mu^{\star\star 2})}. \tag{27}$$

Factorul ζ fiind astfel determinat, eforturile complexe (21) devin înlo-

---

*) Eforturile complexe au fost introduse pentru prima dată de V. V. Novojilov în teoria învelitorilor omogene și izotrope [8].

cuind în ele componentele deformației suprafeței mediane prin eforturi și momente.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}_{\alpha} &= T_{\alpha-i}\sqrt{\frac{F^{\star}}{G^{\star\star}\,(1-\mu^{\star\star 2})}}\,(M_{\beta}-\mu^{\star\star}M_{\alpha}),\\
T_{\beta} &= T_{\beta-i}\sqrt{\frac{F^{\star}}{G^{\star\star}\,(1-\mu^{\star\star 2})}}\,(M_{\alpha}-\mu^{\star\star}M_{\beta}),\\
\widetilde{T}_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta-i}\,\frac{\sqrt{\dfrac{F^{\star}}{G^{\star\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}}{1-\mu^{\star\star}}\;M_{\alpha\beta},\\
\widetilde{Q}_{\alpha} &= Q'_{\alpha}-i\sqrt{F^{\star}G^{\star\star}\,(1-\mu^{\star\star 2})}\;\zeta^{\star}_{2},\\
\widetilde{Q}_{\beta} &= Q'_{\beta}+i\sqrt{F^{\star}G^{\star\star}\,(1-\mu^{\star\star 2})}\;\zeta^{\star}_{1},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M}_{\alpha} &= M_{\alpha}+i\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}\,\frac{T_{\beta}-\mu^{\star}T_{\alpha}}{1-\mu^{\star 2}},\\
\widetilde{M}_{\beta} &= M_{\beta}+i\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}\,\frac{T_{\alpha}-\mu^{\star}T_{\beta}}{1-\mu^{\star 2}},\\
M_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta}+i\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}\,\frac{T_{\alpha\beta}}{1-\mu^{\star}}.
\end{aligned}
\tag{28'}
$$

Eforturile complexe (28′) nu sînt independente fiind legate de eforturile complexe (28) prin relațiile

$$
\begin{aligned}
M_{\alpha} &= i\,(\lambda_1\widetilde{T}_{\alpha}+\lambda_2\widetilde{T}_{\beta}+\lambda_3\overline{\widetilde{T}}_{\alpha}+\lambda_4\overline{\widetilde{T}}_{\beta}\,{}^{\star)}),\\
M_{\beta} &= i\,(\rho_1\widetilde{T}_{\beta}+\rho_2\widetilde{T}_{\alpha}+\rho_3\overline{\widetilde{T}}_{\alpha}+\rho_4\overline{\widetilde{T}}_{\beta}),\\
M_{\alpha\beta} &= i\,(\gamma_1\widetilde{T}_{\alpha\beta}+\gamma_2\overline{\widetilde{T}}_{\alpha\beta}),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

unde au fost introduse notațiile

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \rho_2=\frac{1}{2}\left[\mu^{\star\star}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}(1-\mu^{\star\star 2})}}-\frac{\mu^{\star}}{1-\mu^{\star 2}}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}\right],\\
\lambda_2 &= \rho_1=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}(1-\mu^{\star\star 2})}}+\frac{1}{1-\mu^{\star 2}}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}\right],\\
\lambda_3 &= \rho_4=-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu^{\star}}{1-\mu^{\star 2}}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}+\mu^{\star\star}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}(1-\mu^{\star\star 2})}}\right],\\
\lambda_4 &= \rho_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\mu^{\star 2}}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}-\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}(1-\mu^{\star\star 2})}}\right],\\
\gamma_1 &= \frac{1}{2}\left[(1-\mu^{\star\star})\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}(1-\mu^{\star\star 2})}}+\frac{1}{1-\mu^{\star}}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}\right],\\
\gamma_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\mu^{\star}}\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}}(1-\mu^{\star\star 2})}-(1-\mu^{\star\star})\sqrt{\frac{G^{\star\star}}{F^{\star}(1-\mu^{\star\star 2})}}\right].
\end{aligned}
\tag{30}
$$

---

*) $\overline{\widetilde{T}}_{\alpha}$ este conjugatul lui $\widetilde{T}_{\alpha}$ etc.

5.2. **Funcția de efort. Expresiile eforturilor.** Se observă că primele două ecuații din sistemul de ecuații complexe sînt identic satisfăcute prin introducerea funcției complexe $C(\alpha, \beta)$ astfel că

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_\alpha &= \frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} - \int \widetilde{X} d\alpha,\\ \widetilde{T}_\beta &= \frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2} - \int \widetilde{Y} d\beta,\\ \widetilde{T}_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\partial\beta}.\end{aligned} \tag{31}$$

Din ultimele două ecuații (18) ținîndu-se seama de relațiile (25)—(27) rezultă Q_α și $\widetilde{Q}_\beta$ exprimate prin funcția C

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_\alpha = i\Big[&(\lambda_1 + \gamma_1)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha\partial\beta^2} + (\lambda_3 + \gamma_2)\frac{\partial^3 \overline{C}}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \lambda_2\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^3} + \lambda_4\frac{\partial^3 \overline{C}}{\partial\alpha^3} -\\ &-(\lambda_3 + \lambda_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_\alpha^\alpha \widetilde{X} d\alpha - (\lambda_2 + \lambda_4)\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{\beta_0}^\beta \widetilde{Y} d\beta\Big] + \widetilde{P},\\ \widetilde{Q}_\beta = i\Big[&(\gamma_1 + \rho_2)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^3\partial\beta} + (\rho_4 + \gamma_2)\frac{\partial^3 \overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \rho_1\frac{\partial^3 C}{\partial\beta^3} +\\ &+ \rho_3\frac{\partial^3 \overline{C}}{\partial\beta^3} - (\rho_1 + \rho_3)\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{\alpha_0}^\alpha \widetilde{X} d\alpha - (\rho_2 + \rho_4)\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{\beta_0}^\beta \widetilde{Y} d\beta\Big] + \widetilde{R}.\end{aligned} \tag{32}$$

Funcția $C(\alpha, \beta)$ va satisface ecuația ce rezultă din înlocuirea în ecuația a treia a sistemului de ecuații complexe, a eforturilor complexe exprimate prin relațiile (31) și (32)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} + \frac{2}{R_{12}}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2} + i\Big[(\lambda_1 + 2\gamma_1 + \rho_2)\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + (\lambda_3 + 2\gamma_2 + \rho_4)\frac{\partial^4 \overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} +\\ &+ \lambda_2\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4} + \lambda_4\frac{\partial^4 \overline{C}}{\partial\alpha^4} + \rho_1\frac{\partial^4 C}{\partial\beta_4} + \rho_3\frac{\partial^4 \overline{C}}{\partial\beta^4} = \frac{1}{R_1}\int_{\alpha_0}^\alpha \widetilde{X} d\alpha + \frac{1}{R_2}\int_{\beta_0}^\beta \widetilde{Y} d\beta +\\ &+ i\Big[(\lambda_1 + \lambda_3)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_{\alpha_0}^\alpha \widetilde{X} d\alpha + (\lambda_2 + \lambda_4)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_{\beta_0}^\beta \widetilde{Y} d\beta + (\rho_1 + \rho_3)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int_{\alpha_0}^\alpha \widetilde{X} d\alpha +\\ &+ (\rho_2 + \rho_4)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int_{\beta_0}^\beta \widetilde{Y} d\beta\Big] - \widetilde{Z} - \frac{\partial\overline{P}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\overline{R}}{\partial\beta}.\end{aligned} \tag{33}$$

Determinarea funcției C din ecuația (33) permite ușor calculul eforturilor și momentelor.

Din relațiile (28) și (31) se obțin expresiile lui T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ în funcție de $c = \mathcal{R}e C$ și

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{1}{\zeta} \mathcal{I}m\, C,\\
T_\alpha &= \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} - \int_{\alpha_0}^{\alpha} X\, d\alpha,\\
T_\beta &= \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - \int_{\beta_0}^{\beta} Y\, d\beta,\\
T_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta}, \qquad\qquad (34)\\
M_\alpha &= -G^{\star\star}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \mu^{\star\star}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right) + G^{\star\star}\left(\int_{\beta_0}^{\beta}\Gamma_2\, d\beta + \mu^{\star\star}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1\, d\alpha\right),\\
M_\beta &= -G^{\star\star}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \mu^{\star\star}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right) + G^{\star\star}\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1 d\alpha + \mu^{\star\star}\int_{\beta_0}^{\beta}\Gamma_2\, d\beta\right)\cdot\\
M_{\alpha\beta} &= G^{\star\star}(1-\mu^{\star\star})\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}
\end{aligned}
$$

Cunoașterea acestor mărimi permite, la urmă, determinarea eforturilor și momentelor reale T'_α, T'_β, $T'_{\alpha\beta}$, M'_α, M'_β, $M'_{\alpha\beta}$, cu ajutorul relațiilor (15).

În baza relațiilor (16) rezultă componentele deformațiilor $\varepsilon_*^{(1)}$, $\varepsilon_*^{(1)}$, ω_*, $\varkappa_*^{(1)}$, $\varkappa_*^{(2)}$, $\tau_*^{(1)}$, $\tau_*^{(2)}$.

Cunoașterea componentelor de deformație tangențială și de încovoiere a suprafeței mediane, permite datorită relațiilor (13) determinarea eforturilor unitare din mediul tridimensional al învelitoarei.

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ТЕОРИИ КЛАССА ТОНКИХ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается широкое толкование установленному статико-геометрической аналогией соответствию тонких однородных изотропных оболочек неоднородным оболочкам, состоящим из нечетного числа слоев.

Эти слои расположены симметрично по толщине относительно срединной поверхности оболочки (геометрическая и упругая симметрии).

В заключение статико-геометрическая аналогия, установленная в первой части работы, применяется для расчета усилий и моментов в задаче неоднородных пологих оболочек, подверженных внешней нагрузке с составляющими X', Y', $-Z'$ и расположенных в неоднородном температурном поле $T(\alpha, \beta, z)$.

QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE D'UNE CLASSE DE COQUES ÉLASTIQUES MINCES, NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

L'auteur étend aux coques non homogènes construites avec un nombre impair de strates, la correspondance établie par l'analogie statico-géométrique pour les coques minces, isotropes, homogènes.

Par rapport à la surface médiane de la coque, les strates sont disposés symétriquement en épaisseur (symétrie géométrique et élastique).

En conclusion, l'auteur utilise l'analogie statico-géométrique établie dans la première partie du travail, pour la résolution en efforts et moments du problème des coques de faible courbure, non homogènes, sous l'action de la charge extérieure aux composants X', Y', $-Z'$, placées dans un champ de température non uniforme T (α, β, z).

BIBLIOGRAFIE

1. А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙСЕР, *Теория упругих тонких оболочек.* Москва, 1953.
2. С. А. АМБАРЦУМИАН, *Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев.* Известия Акад. Наук Армянской ССР, **IV**, *5* (1951).
3. Е. И. ГРИГОЛЮК, *О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек.* Инж. Сборник, **XVI**, (1953).
4. V. VISARION şi C. STĂNESCU, *Calculul învelitorilor elastice subţiri de mică curbură cu ortotropie de material.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, *12* (1957).
5. L. LIBRESCU, *Asupra analogiei sarcinilor termice în problema termo-elastică a învelitorilor subţiri.* Studii şi cercetări de macanică aplicată, **IX**, 3 (1958).
6. L. LIBRESCU, *Asupra problemei termoelastice a învelitorilor subţiri de formă arbitrară.* Comunicările Acad. R.P.R. **VIII**, *8* (1958).
7. V. VISARION şi C. STĂNESCU, *Etude des semi-invariantes de l'analogie statico-géometrique pour les enveloppes élastiques minces à matériaux isotropes et orthotropes.* Acta Technica Hungaricae (sub tipar).
8. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек.* Исудпромгиз, 1951.

O EXTINDERE A REZOLVĂRII PROBLEMEI TORSIUNII UNOR PALETE DE TURBINĂ

DE

VASILE MANEA şi EUDOXIU PROCOPOVICI

Într-o lucrare consacrată studiului încovoierii şi torsiunii unor palete de turbină, avînd secţiunea transversală în formă de profil, Jan Polasek şi Ladislav Spacek [1] dau soluţia problemei pentru un tip special de profile, obţinute prin transformarea conformă

$$z_1 = \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \qquad (1)$$

Aceasta transformă cercul unitate într-un profil biconvex simetric cu corespondenţa domeniilor interioare. Pentru cazul cînd $\gamma = \frac{1}{2}$ se obţine lemniscata lui Bernoulli, care este tratată de altfel în cunoscuta lucrare a lui N. I. Muselişvili [2]. Pentru valori foarte mici ale lui γ se obţin profile foarte subţiri, dar a căror grosime maximă se apropie foarte mult de bordul de atac.

Autorii menţionaţi au căutat să lărgească clasa profilelor studiate folosind transformarea

$$z_1 = \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\gamma}(1 + i\beta\zeta), \quad 0 < \gamma < 1. \qquad (2)$$

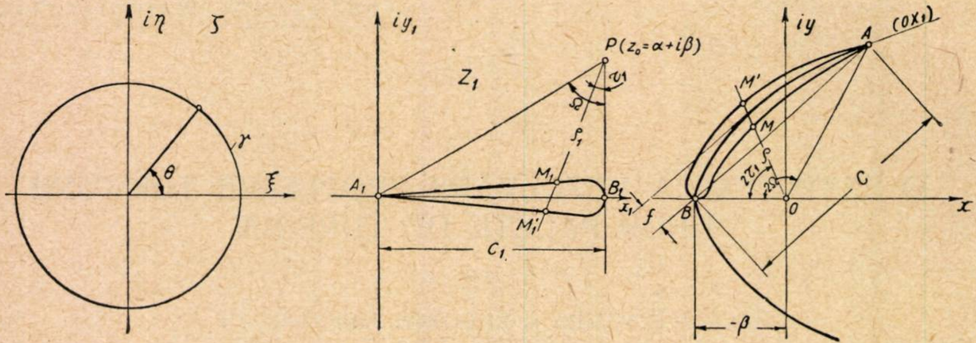
Profilele ce se obţin astfel prezintă însă mai puţin interes pentru necesităţile tehnicii.

Avînd în vedere simplitatea funcţiei de transformare (1), ne-am propus să rezolvăm problema torsiunii pentru o clasă mai largă de profile, utilizabile în construcţia paletelor de turbine, sau turbo-compresoare, avînd la bază această transformare.

Să considerăm deci funcţia

$$z_1 = c_1\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{3}$$

care transformă cercul-unitate într-un profil biconvex simetric, avînd



$i\eta$
ζ
r
θ
ξ
iy_1
Z_1
$P(z_0=\alpha+i\beta)$
ϑ_1
Ω
ρ_1
M_1
A_1
B_1
x_1
M_1'
c_1
iy
A
(Ox_1)
M'
M
ρ
$2\vartheta_1$
2Ω
C
f
B
O
x
$-\beta$

Fig. 1.

unghiul diedru egal cu $\gamma\pi$ şi coarda egală cu c_1. Fie punctul P de afixă

$$z_0 = \alpha + i\beta$$

şi să efectuăm transformarea

$$z = (z_1 - z_0)^m, \tag{4}$$

$m > 1$ şi întreg.

Se poate vedea uşor că axa Ox_1, pe care este aşezat simetric profilul, se transformă într-o curbă, profilul devenind şi el curb.

În cazul $m = 2$, caz de care ne vom ocupa în cele ce urmează, axa Ox_1 se transformă într-o parabolă (fig. 1).

Forma parabolei va depinde evident de alegerea făcută pentru β.

Punînd $y_1 = 0$ în (4) se obţine

$$x = (\alpha - x_1)^2 - \beta^2, \tag{5}$$

$$y = 2\beta(\alpha - x_1). \tag{5'}$$

Eliminînd pe x_1 obţinem

$$x = \frac{y^2}{4\beta^2} - \beta^2, \tag{6}$$

care reprezintă ecuaţia parabolei de care am amintit mai sus. Coarda c_1 a profilului biconvex simetric, se curbează evident şi ea devenind un arc de parabolă, astfel că profilul obținut are coarda c și săgeata f, date de formulele

$$c = c_1 \sqrt{(c_1 - 2\alpha)^2 + 4\beta^2}, \tag{7}$$

$$f = \frac{\beta c_1^2}{2} \frac{1}{\sqrt{(c_1 - 2\alpha)^2 + 4\beta^2}}. \tag{8}$$

În cazul profilelor subțiri, se poate admite că arcul de parabolă $\overset{\frown}{AB}$ este chiar scheletul profilului, ceea ce permite evaluarea curburii acestuia cu ajutorul relației (8).

Fixînd o valoare pentru coarda c_1 a profilului intermediar, se observă că săgeata și coarda noului profil depind de parametrii α și β. Invers, parametrii α și β pot fi determinați în funcție de coarda și săgeata scheletului profilului real, pe baza acelorași relații. Pentru trasarea profilului și calculele grafice ce se vor dezvolta, este util să luăm pentru c, dat de relația (7), aceeași valoare ca pentru c_1. Între coarda C și săgeata F a profilului real și coarda și săgeata date de relațiile (7) și (8), vor exista relațiile de omotetie

$$C = kc = kc_1,$$

$$F = kf$$

sau în general

$$Z = kz\,(\zeta),$$

k fiind coeficientul omotetic respectiv.

Cu ajutorul relațiilor (5) și (5') se pot determina coordonatele corespunzătoare bordurilor de atac și de fugă, punînd pentru primul $x_1 = c_1$, iar pentru ultimul $x_1 = 0$.

Profilele care rezultă au grosimea distribuită mult mai uniform în lungul corzii, ceea ce se poate constata comparînd profilele obținute cu profilele de bază, care au fost modelate cu ajutorul transformării (4) (fig. 2).

Trasarea profilelor se poate efectua simplu utilizînd coordonatele polare. Alegînd punctul P (z_0), pe care îl vom numi pol de modelare (fig. 1), se poate ușor constata că, dacă

$$z_1 - z_0 = \rho_1 e^{i\tau_1},$$

atunci pe baza transformării folosită, (4), avem

$$z = \rho e^{i\tau} = (z_1 - z_0)^m = \rho_1^m e^{im\tau_1}.$$

Astfel razei vectoare ρ a punctului M_1 din planul z_1 îi corespunde în planul z raza vectoare $\rho = \rho_1^m$, unghiurile stînd în relația $\tau = 2\tau_1$. Cu aceste elemente se poate construi grafic profilul.

Este evident că transformarea (4) se poate opera pentru orice m întreg. Cînd $m > 2$ axa reală a planului z_1 se transformă într-o curbă ce poate fi stabilită în același mod ca mai sus, profilul curbîndu-se în mod corespunzător. În cazul $m = 3$ axa Ox_1 se transformă în folium lui Descartes.

Revenind la transformarea (3) este de remarcat că pe baza ei se pot obţine profile cu bordul de fugă rotunjit.

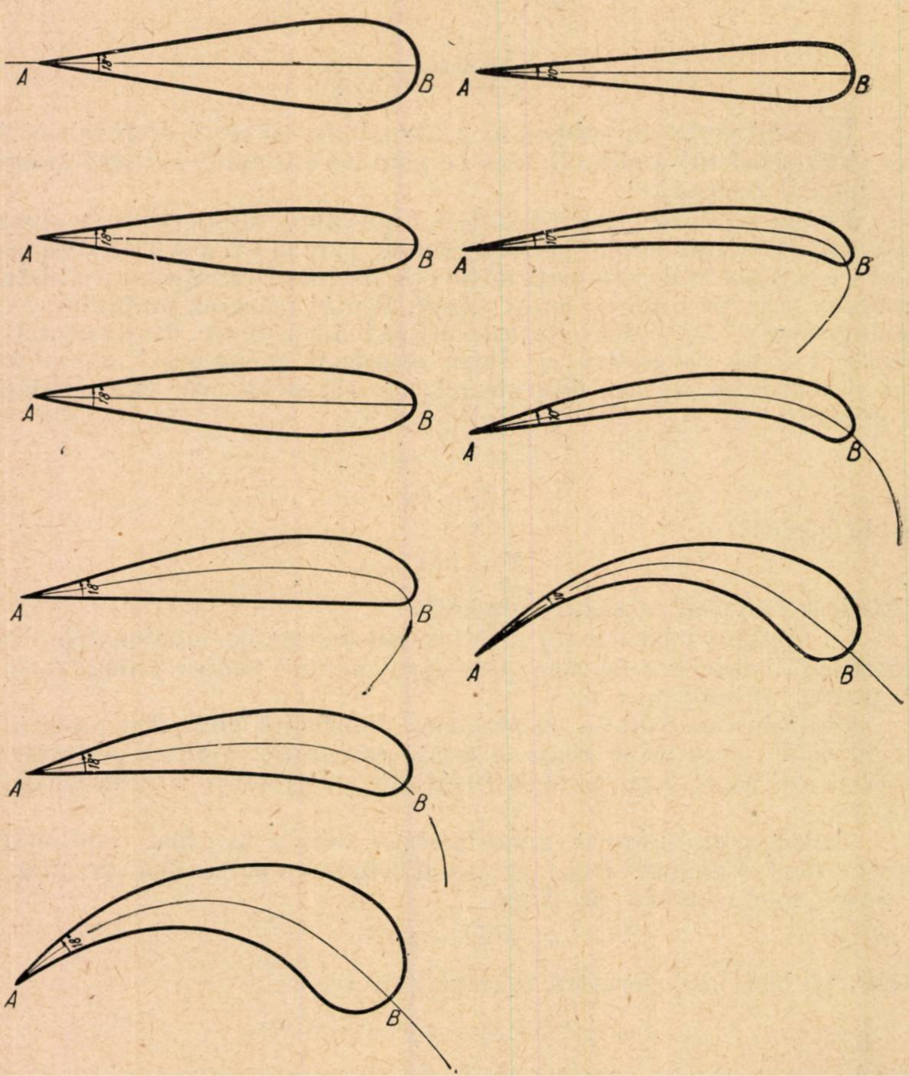


Fig. 2

Să considerăm funcţia de transformare

$$z_1 = \left(\frac{a+\zeta}{a+1}\right)^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{9}$$

unde a are semnificaţia din fig. 3, diferind de raza cercului cu valoarea δ.

Cu cît δ este mai mic, cu atît se obține o rază de curbură mai mică la bordul de fugă al profilului.

Aplicîndu-se într-un mod cu totul analog transformarea (4), se pot obține profile de diferite curburi cu bordul de fugă rotunjit *).

Pentru rezolvarea problemei torsiunii paletelor de turbină a căror secțiune transversală are forma profilelor prezentate mai sus, vom folosi o metodă aproximativă dată în [5].

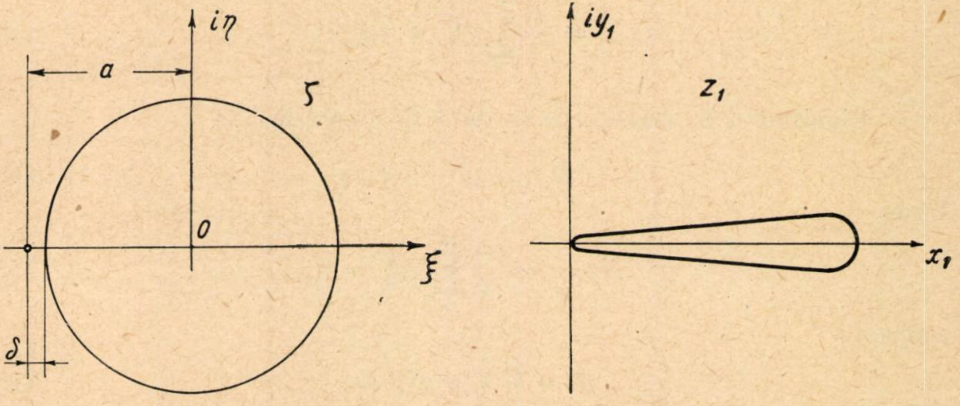


Fig. 3

Punînd funcția complexă de torsiune

$$f(\zeta) = \varphi + i\psi \tag{10}$$

(φ este funcția de răsucire iar ψ funcția de tensiune la torsiune) sub forma

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{0}^{\infty} C_n \zeta^n, \tag{11}$$

se arată că

$$C_n = \int_{\gamma} \frac{|Z(\sigma)|^2}{\sigma^{n+1}} d\sigma, \tag{12}$$

σ fiind afixa unui punct pe conturul cercului-unitate γ, pe interiorul căruia se reprezintă interiorul profilului real cu ajutorul funcției de reprezentare

$$Z = Z(\zeta). \tag{13}$$

---

*) Profilele cu bordul de fugă rotunjit au fost introduse în aerodinamică de E. Carafoli [3], p. 61 și [4].

Întrucît $\sigma = e^{i\theta}$, se poate pune

$$|Z(\theta)|^2 = k^2 |z(\theta)|^2 = k^2 \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta \right), \qquad (14)$$

ceea ce conduce la

$$C_n = k^2 \pi (\beta_n + i\alpha_n), \qquad (15)$$

respectiv

$$f(\zeta) = \frac{k^2}{2} \sum_{0}^{\infty} (\beta_n + i\alpha_n) \zeta^n . \qquad (16)$$

Rigiditatea la torsiune este dată de expresia [2]

$$D = \mu (D_0 + I), \qquad (17)$$

unde

$$D_0 = -\frac{k^4 \pi}{4} \sum_{0}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2), \qquad (18)$$

respectiv

$$I = \frac{k^4}{4} \int_{\Gamma} |z(\tau)|^4 \, d\tau. \qquad (19)$$

Am notat prin μ modulul de rezistenţă la lunecare, prin Γ conturul profilului în planul z ; τ are semnificaţia ce rezultă din figura 3, iar k reprezintă coeficientul de omotetie de care am amintit anterior.

Efortul complex se stabileşte cu ajutorul formulei cunoscute, iar unghiul de răsucire specifică cu formula

$$\omega = \frac{M_t}{D} .$$

Pentru rezolvarea practică a problemei, observăm, că cu ocazia trasării profilului, se poate reprezenta grafic funcţia $|z(\theta)|^2$ θ fiind unghiul polar în planul cercului, după care se stabilesc coeficienţii α_n şi β_n ai dezvoltării (14).

Totodată se trasează grafic şi $|z(\tau)|^4$ necesară pentru efectuarea integralei (19).

Cu aceasta se poate rezolva complet problema pe care ne-am propus-o.

Remarcăm că, în cazul de faţă, în locul rezolvării pe cale grafică, se poate rezolva analitic integrala (12), care se reduce la o sumă de integrale Euler de speţa I. Aceasta, deşi necesită calcule laborioase, conducînd la rezultate greu de manevrat, poate constitui o cale eficientă de soluţionare a problemei.

Primită la redacţie la 9 octombrie 1958.

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ТУРБИННЫХ ЛОПАТОК

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе дается обобщение решения задачи кручения турбинных лопаток, поперечное сечение которых представляет собой профиль, получаемый при помощи преобразующей функции $z=\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\gamma}$, примененной для этой же цели Яном Полащеком и Ладиславом Спачеком.

Таким образом расширяется класс применяемых в технике профилей. Указывается также способ получения профилей с округленной задней кромкой, аналогичных профилям, существующим в аэродинамике.

EXTENSION DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE LA TORSION DES AUBES DE TURBINE

RÉSUMÉ

Les auteurs donnent dans ce travail une extension de la solution du problème de la torsion des aubes de turbine, dont le profil de la section transversale est obtenu au moyen de la fonction de transformation $z = \left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\gamma}$ déjà employée à ces fins par Ian Polašek et Ladislav Spacek.

La classe des profils utilisables en technique se trouve ainsi élargie ; les auteurs indiquent en outre le moyen d'obtenir des profils à bord de fuite arrondi, analogues à ceux qu'on utilise en aérodynamique.

BIBLIOGRAFIE

1. Jan Polasek, Ladislav Spacek, *Prispevek k vypoctu momentu tuhosti v krouceni a strediska smyku lopatkovych profilu.* Rozpravy ceskoslovenske Academie ved rocnik, **V**, *66*, 1 (1956).
2. Н. И. Мушелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва, 1949.
3. E. Carafoli, *Aerodinamica.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1951.
4. L. N. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics.* Mac Millan and Co. Limited, London, 1948.
5. L. Hamburger, F. Dincă, V. Manea, *Asupra torsiunii unor bare cilindrice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
6. I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity.* New York, 1946.
7. G. P. Tolstov, *Serii Fourier.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.

CALCULUL DIRECT AL FRECVENȚELOR PROPRII LA CLĂDIRILE ACȚIONATE DE CUTREMURE

DE

MIHAIL IFRIM

Valoarea forțelor seismice, care acționează construcțiile în timpul cutremurelor de pămînt, depinde principial de doi factori și anume

I. *Proprietățile dinamice ale mișcării seismice* definite de *intensitatea cutremurelor* (magnitudinea, gradul de intensitate seismică, spectrele deplasărilor, vitezelor sau accelerațiilor relative) etc., *proprietățile fizico-mecanice ale terenului* de fundație și *energia de absorbție* a undelor seismice pentru zona în care este amplasată construcția respectivă.

II. *Proprietățile statice și dinamice ale structurii* sau caracteristicile structurale ce depind de *gama frecvențelor proprii* de vibrație, totalitatea *modurilor normale* și *amortizarea* structurii. Toate aceste mărimi sînt funcție de sistemul static și constructiv al clădirii respective.

În cadrul caracteristicilor structurale, *frecvențele* proprii de vibrație (ω) au un rol extrem de important, dar a căror determinare exactă din punct de vedere matematic, pentru sistemele cu mai multe grade de libertate, constituie o problemă dificilă și laborioasă.

Evitînd un asemenea mod de a calcula, vom prezenta în nota de față bazați pe unele observații anterioare [1], [2], o expresie simplă și ușor de aplicat pentru *frecvența fundamentală de oscilație* (ω_1). De asemenea, se propune o formulă aproximativă pentru *aprecierea frecvențelor proprii de ordin superior* (ω_r). Menționăm că pentru frecvența fundamentală, care prezintă de fapt cea mai mare importanță practică, formula propusă, în raport cu valorile ce s-ar obține printr-un calcul exact, dă diferențe foarte mici, în jur de 1%, practic neglijabile față de complexitatea fenomenului fizic. O bună aproximație prezintă de asemenea relația propusă pentru calculul frecvențelor de ordin superior.

În legătură cu importanța ce o prezintă frecvențele proprii în calculul dinamic al structurilor supuse acțiunii seismice, vom remarca mai întîi că nu poate exista niciodată pericolul de rezonanță, întrucît mișcarea produsă de cutremur este cu totul haotică, nearmonică, avînd perioade, amplitudini, accelerații și direcții foarte variabile în timp. Pe de altă parte, amortizarea structurii joacă un rol extrem de important, mai ales în apropierea zonei de rezonanță.

Cu toate acestea, cînd frecvența de oscilație a mișcării scoarței pămîntului (φ) coincide cu frecvența proprie a structurii, în construcție apar solicitări maxime care conduc la sporirea forțelor seismice.

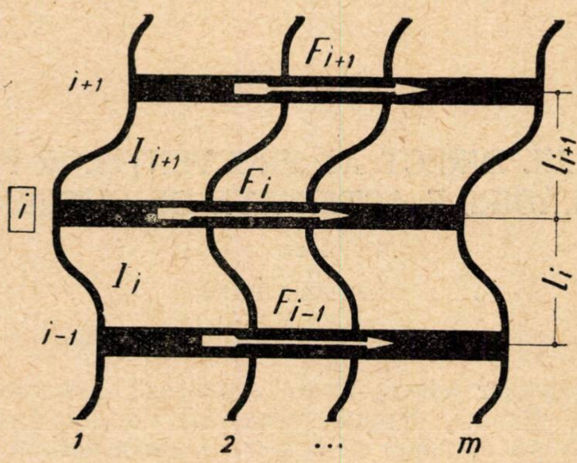


Fig. 1

Totuși importanța mare a frecvențelor proprii constă în aceea că precizează :

— rigiditatea dinamică a structurii,

— coeficienții dinamici $\mu = \dfrac{1}{1 - \varphi^2/\omega^2}$,

— modurile normale de vibrație din punct de vedere cantitativ,

— influența cedării terenului de fundație pe baza rotirilor suplimentare ce apar,

— răspunsul dinamic al structurii (deplasări relative față de teren, viteze, accelerații relative, forțele de inerție).

În cele ce urmează, ne vom referi la clădirile care preiau forțele seismice printr-un sistem de rezistență constituit din cadre elastice (fig. 1).

Se introduc următoarele ipoteze de calcul :

— masele construcției se consideră concentrate la nivelul fiecărui etaj ;

— clădirea este fundată într-un teren suficient de rigid ;

— scheletul de rezistență al clădirii este format din cadre elastice avînd riglele de rigiditate infinită și stîlpii elastici ;

— mișcarea clădirii se datorește numai încovoierii stîlpilor, deformațiile axiale ale acestora neglijîndu-se ;

— oscilațiile sînt orizontale și perfect plane.

Pentru construcţiile constituite din cadre care respectă ipotezele enunţate mai sus, în lucrările [1], [2], s-au stabilit pe bază energetică expresii simple care dau *limita inferioară* (ω_I) şi *limita superioară* (ω_S) a *frecvenţei fundamentale de oscilaţie* (ω_1) şi anume

$$\omega_I = \xi_I \sqrt{\frac{EI_0}{M_0 l_0^3}},$$

$$\omega_S = \xi_S \sqrt{\frac{EI_0}{M_0 l_0^3}},$$

unde

$$\xi_I = 3{,}465 \sqrt{\frac{m}{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_1 + q_2) + \ldots + \alpha_n (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)}},$$

$$\xi_S = 3{,}465 \sqrt{m \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} q_j \sum\limits_{k=j}^{n} \alpha_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left[\sum\limits_{j=1}^{i} q_j \sum\limits_{k=j}^{n} \alpha_k\right]^2}} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

sau

$$\xi_S = 6 \sqrt{\frac{m \cdot n}{(2n+1)\,[\alpha_1 \bar{q}_1 + \alpha_2 (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) + \ldots + \alpha_n (\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \ldots + \bar{q}_n)]}}$$

(cînd $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_i = \ldots = \lambda_n = 1$).

În aceste formule s-au utilizat notaţiile :

$l_i = \lambda_i l_0$ — înălţimea planşeului i faţă de planşeul $i - 1$;

$I_i = k_i I_0$ — momentul de inerţie al fiecărui stîlp la nivelul i;

$F_i = \alpha_i F_0$ — sarcina concentrată la nivelul etajului i provenită din încărcarea utilă şi permanentă a construcţiei;

l_0, I_0, F_0 — cantităţi arbitrare, constante, faţă de care se raportează valorile l_i, I_i, F_i prin coeficienţii λ_i, k_i, α_i corespunzători;

n — numărul etajelor, egal cu numărul gradelor de libertate dinamice ale sistemului;

m — numărul stîlpilor

$$q_i = \frac{\lambda_i^3}{k_i}; \qquad \bar{q}_i = \frac{1}{k_i}; \qquad M_i = \frac{F_i}{g} = \alpha_i M_0.$$

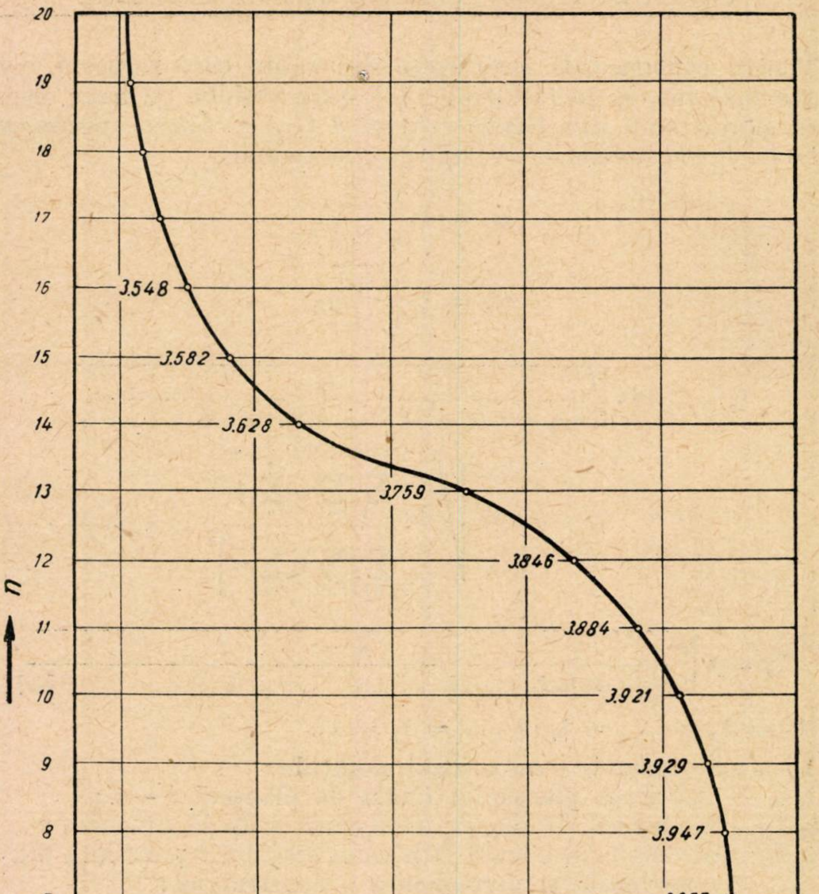
Bazaţi pe formulele de mai sus, pe studiul variaţiei intervalului în care este cuprinsă valoarea exactă a frecvenţei fundamentale [2] şi pe o serie de calcule numerice efectuate, se propune formula

$$\omega_1 = \xi_1 \sqrt{\frac{EI_0}{M_0 l_0^3}}, \tag{1}$$

în care

$$\xi_1 = \psi \sqrt{\frac{m}{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_1 + q_2) + \ldots + \alpha_n (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)}}, \tag{2}$$

iar ψ este un coeficient a cărei variaţie este dată în figura 2.



20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
n
3.548
3.582
3.628
3.759
3.846
3.884
3.921
3.929
3.947
3.957
3.951
3.936
3.918
3.863
3.770
3.465
3.500
3.600
3.700
3.800
3.900
4.000
ψ

Fig. 2

Pentru calculul aproximativ al *frecvenţelor de ordin superior* (ω_r) propunem relaţia de mai jos care dă valori mai apropiate de cele reale decît alte expresii similare

$$\omega_r = 1{,}3\, r\omega_1 \quad (r = 2,\, 3,\, \ldots), \tag{3}$$

de unde rezultă frecvenţa tehnică

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}.$$

Perioadele de oscilaţie vor fi

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} \simeq \frac{4{,}8}{r\omega_1} = \frac{T_1}{1{,}3r} \tag{4}$$

(r reprezintă ordinul frecvenţei de vibraţie).

În cadrul ipotezelor enunţate, expresiile stabilite aici pot fi privite, datorită aspectului lor simplu şi uşor de aplicat, axate pe linia formulărilor obţinute în diverse lucrări sau chiar pe o treaptă superioară unora

$$T_1 = (0{,}07 \div 0{,}09)\, n \qquad [3]$$

$$T_1 = 0{,}087 \frac{L}{\sqrt{B}} \qquad [4]$$

$$T_1 = 0{,}018\, L \qquad [5]$$

$$T_r = \frac{L}{150r} \qquad [6]$$

$$T_r = \frac{4}{2r-1}\sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^{n} M_i}{\overline{K}}} \qquad [7]$$

$$T_1 = (0{,}09 \div 0{,}10)\, [n + 1] \qquad [8]$$

$$T_1 = 0{,}1\, n \qquad [9]$$

unde

$\overline{K} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} Kl_i$ reprezintă valoarea medie a constantei elastice între două etaje,

$L = \sum_{i=1}^{n} l_i$ reprezintă înălţimea totală a clădirii, iar

B reprezintă lăţimea bazei clădirii în direcţia oscilaţiilor considerate.

În toate aceste formule forţele se introduc în kilograme, iar lungimile în metri.

De asemenea, determinarea frecvenţelor proprii de vibraţie prin relaţiile (1), (2) necesită, pentru cazul de faţă, un timp de lucru mai scurt în raport cu procedeele cunoscute ale lui H. Holzer sau N. M. Newmark.

Este de remarcat că formulele (1), (2) sînt aplicabile şi clădirilor ce au variaţie de formă pe înălţime, prin reducerea acestor tipuri de cadre la unul asemănător celui din figura 1, echivalent din punctul de vedere al rigidităţilor şi anume

$$k_i = \frac{1}{m} \sum_j k_{ij} ,$$

unde

$$k_{ij} = \frac{I_{ij}}{I_0} ,$$

iar

I_{ij} reprezintă momentul de inerţie al stîlpului situat pe linia i şi coloana j.

Formulele (1), (2) sînt aplicabile şi cadrelor zăbrelite.

★

Prin urmare, dacă proprietăţile statico-dinamice ale structurii (frecvenţe proprii, moduri normale, amortizare) sînt bine precizate, cunoscîndu-se mişcarea terenului de fundaţie (spectrul deplasărilor, vitezelor sau acceleraţiilor) se pot calcula acceleraţiile şi forţele ce acţionează construcţiile în timpul cutremurelor de pămînt.

Primită la redacţie la 15 octombrie 1958.

ПРЯМОЙ РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОДВЕРЖЕННЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯМ ЗДАНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В целях уточнения статических и динамических свойств сооружений, подверженных действию сейсмических нагрузок, предлагается простое соотношение (1) для расчета основной частоты колебаний зданий с каркасом из упругих рам.

Это соотношение получено путем исследования изменения интервала, включающего реальную величину основной частоты [1], [2].

Отклонения значений, полученных по этой формуле, по сравнению с точным расчетом невелики (около 1%) и практически незначительны, ввиду сложности физического явления.

Частоты высшего порядка могут быть рассчитаны с достаточной точностью при помощи формулы (3).

CALCUL DIRECT DES FRÉQUENCES PROPRES DES BÂTIMENTS SOUMIS À L'ACTION DES SÉISMES

RÉSUMÉ

En vue de préciser les propriétés statiques et dynamiques des constructions soumises à l'action sismique, l'auteur propose une relation simple (1), pour le calcul de la fréquence fondamentale de vibration des bâtiments formés de cadres élastiques.

Cette relation a été déduite en vertu d'une étude de la variation des limites entre lesquelles est comprise la valeur réelle de la fréquence fondamentale [1], [2].

Les différences très petites, de l'ordre de 1% environ, entre les valeurs données par la formule proposée et celles obtenues par un calcul exact, sont pratiquement négligeables si l'on tient compte de la complexité du phénomène physique.

Les fréquences d'ordre supérieur peuvent être obtenues avec une approximation suffisante à l'aide de la formule (3).

BIBLIOGRAFIE

1. MIHAIL IFRIM, *O formulare energetică privind calculul frecvenţei oscilaţiilor proprii ale cadrelor etajate.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII,** *7,* 649 (1957).
2. — *Delimitarea intervalului de existenţă a frecvenţelor fundamentale de oscilaţie la clădirile înalte supuse acţiunii seismice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX,** *3* (1958).
3. T. TANIGUCHI, *General principles of Aseismic Constructions.* Tokyo, 1934.
4. A. W. ANDERSON ş.a., *Lateral Forces of Earthquake and Wind.* Proceeding ASCE, **77,** aprilie (1951).
5. F. P. ULRICH, D. S. CARDER, *Vibration of Structures.* Proceedings of the Symposium on the Earthquake and Blast Effects, Los Angeles, California, 1952.
6. I. L. KORCINSKI, *Kolebaniia vîsotnîh zdanii.* Moskva, 1953.
7. M. G. SALVADORI, *Earthquake Stresses im Shear Buildings.* Proceedings ASCE, **79,** *177* (1953).
8. EMILIO ROSENBLUETH, *Estructuras a prueba de temblores cimentadas sobre terreno firme.* Ingenieros Civiles Asociados (ICA), México, *17* (1954).
9. * * * *U. S. Pacific Coast and Geodetic Survey,* 1934—1935.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

ASUPRA REGIMURILOR OPTIME DE AȘCHIERE CU CUȚITE DE STRUNG ARMATE CU PLĂCUȚE MINERALO-CERAMICE ȘI DIN CARBURI METALICE

DE

M. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU

Studiul comparativ al cuțitelor de strung armate cu plăcuțe mineralo-ceramice și din carburi metalice a fost început într-o lucrare anterioară [1], prin cercetarea parametrilor geometrici. Cu acest prilej s-au stabilit parametrii geometrici optimi în cazul strungirii oțelurilor OL 70 și OL 60 *).

În lucrarea de față se prezintă experiențele **) efectuate pe aceleași oțeluri, folosind rezultatele mai sus-amintite. S-au utilizat plăcuțe mineralo-ceramice ENC_1 (duritate 65 — 74 H_{RC}) produse în cadrul Institutului de cercetări științifice pentru construcții, materiale de construcții și industrializarea lemnului, și plăcuțe din carburi metalice S_1 (duritate 70—78 H_{RC}) de fabricație Harith. Plăcuțele din carburi metalice au fost fixate de suporți prin lipire, pe cînd cele mineralo-ceramice, prin prindere mecanică.

După ce s-au analizat condițiile în care evoluează uzura în cazul variației parametrilor geometrici și s-au stabilit valorile optime ale acestora, este supusă studiului cea de-a doua grupă a parametrilor așchierii [1], care conține ca elemente principale viteza de așchiere, adîncimea de tăiere, avansul cuțitului de strung și durabilitatea lui. Cercetarea se face pornind de la premisa că, pentru un domeniu limitat, interdependența grupelor de parametri ai așchierii, practic poate fi neglijată [1].

La fel ca și în lucrările [1], [2], [3], studiul de față se bazează pe urmărirea evoluției uzurii, alegîndu-se drept criteriu uzura de pe fața de așezare secundară, mărimea ei maximă admisă fiind $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm.

---

*) OL 70—STAS 500—49, probele experimentale avînd $\sigma_r = 79-87$ kgf/mm^2 OL 60—STAS 500—49, probele experimentale avînd $\sigma_r = 63-68{,}5$ kgf/mm^2.

**) La lucrările experimentale a luat parte și M. Calciu.

Trasarea curbelor de variaţie a diferiţilor parametri funcţie de durabilitate s-a făcut ţinîndu-se seama de valorile medii ale rezultatelor experimentale. Deoarece împrăştierea acestor rezultate prezintă importanţă în cadrul lucrării de faţă se va face o scurtă analiză a cauzelor care le-au dat naştere. Unul din factorii principali ai fenomenului de împrăştiere este lipsa de omogeneitate a materialului epruvetei. Într-adevăr, oţelul laminat chiar dacă este din aceeaşi şarjă, se observă că prezintă o variaţie a proprietăţilor sale mecanice de-a lungul axei şi razei barei. Încă un factor care contribuie la împrăştierea rezultatelor este şi neomogeneitatea plăcuţelor, observată nu numai în cadrul aceluiaşi tip sau lot, ci chiar la aceeaşi plăcuţă, constatîndu-se durităţi diferite în lungul ei. Odată cu creşterea numărului de reascuţiri, duritatea plăcuţei scade.

De asemenea, mai trebuie avute în vedere şi erorile accidentale ca defectele de ascuţire, cît şi erorile sistematice ca cele ale aparatelor de măsură etc.

a. Influenţa avansului şi adîncimii de tăiere asupra uzurii cuţitului de strung

Studierea acestei probleme este necesară pentru a se vedea dacă este posibilă liniarizarea în coordonate logaritmice a curbelor de variaţie a durabilităţii funcţiei de avans sau adîncime de tăiere, condiţii ce trebuie îndeplinite în vederea stabilirii formulelor vitezei optime de aşchiere.

Pentru studiul influenţei avansului asupra durabilităţii s-au făcut experienţe, menţinîndu-se constante viteza de aşchiere şi adîncimea de tăiere.

Corelaţiile $T = f(s)$ sînt prezentate în figurile 1 şi 2.

În cazul ambelor genuri de plăcuţe utilizate, se vede că curbele au aceeaşi alură. Astfel pentru avansuri mici, căderea durabilităţii este mare cu variaţia avansului, apoi ea scade pe măsură ce creşte avansul şi tinde către o asimptotă paralelă cu axa avansurilor.

Pentru studiul influenţei adîncimii de tăiere asupra durabilităţii se procedează în mod similar, păstrîndu-se de data aceasta constante viteza de aşchiere şi avansul. Rezultatele sînt redate în figurile 3 şi 4.

Se constată la fel ca şi în cazul precedent că toate curbele au aceeaşi alură, admiţînd o asimptotă paralelă cu axa adîncimilor de tăiere.

Ca observaţie generală, reţinem că toate curbele prezentate în figurile 1, 2, 3 şi 4, care reprezintă influenţa avansului şi a adîncimii de tăiere asupra durabilităţii, pot fi liniarizate în coordonate logaritmice, în domeniul de variaţie studiat al acestor parametri.

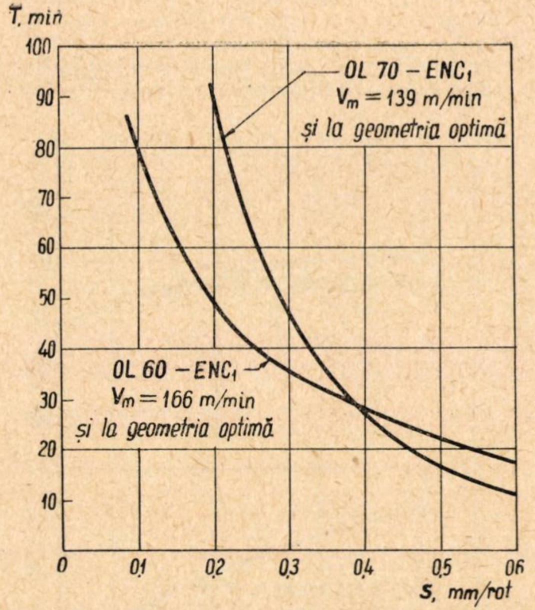


Fig. 1. — Variația durabilității funcție de avans pentru OL 60 și OL 70, la viteza medie de respectiv 166 m/min și 139 m/min, cu o adîncime de tăiere constantă $t = 0{,}5$ mm, utilizînd cuțitul de strung armat cu plăcuța ENC$_1$, ascuțit la geometria optimă.

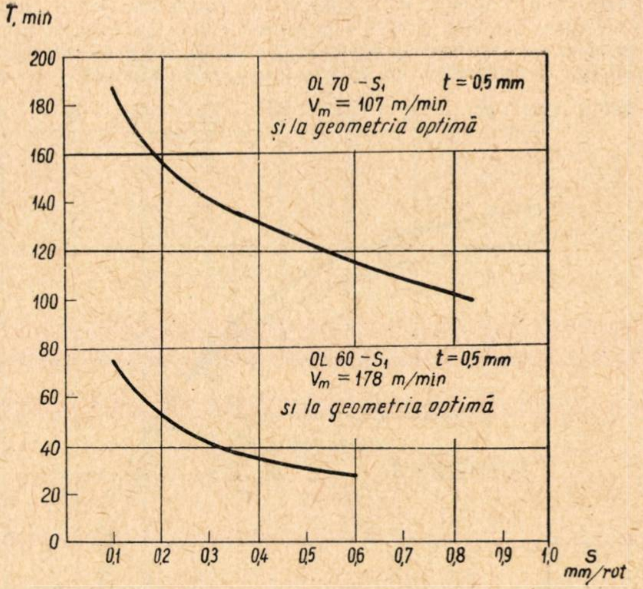


Fig. 2. — Variația durabilității funcție de avans pentru OL 60 și OL 70, la viteza medie de respectiv 178 m/min și 107 m/min, cu o adîncime de tăiere constantă $t = 0{,}5$ mm, utilizînd cuțitul de strung armat cu plăcuța S$_1$ și ascuțit la geometria optimă.

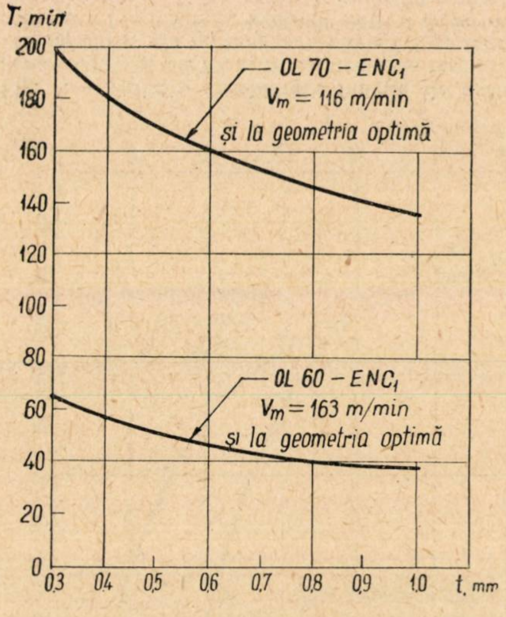


Fig. 3. — Variația durabilității funcție de adîncimea de tăiere pentru OL 60 și OL 70, la viteza medie de respectiv 163 m/min și 116 m/min, cu avans constant s = 0,20 mm/rot, utilizînd cuțitul de strung armat cu plăcuța ENC$_1$ și ascuțit la geometria optimă.

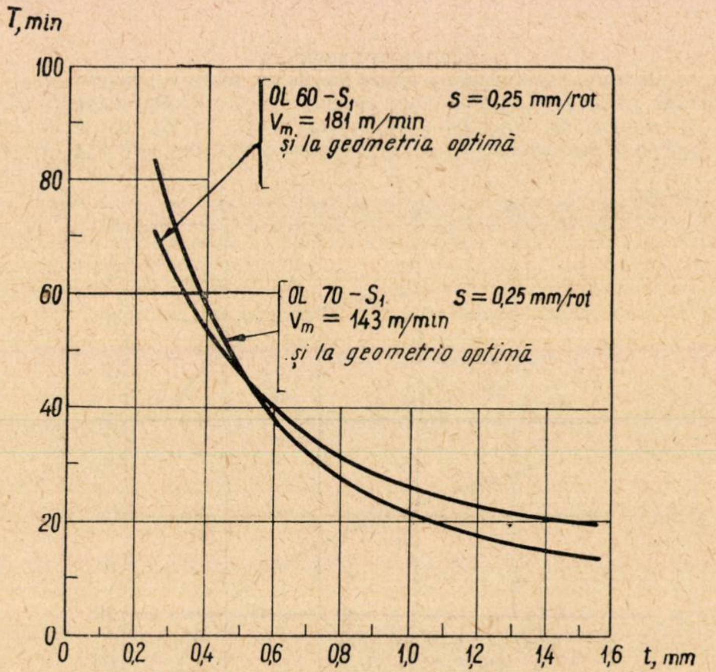


Fig. 4. — Variația durabilității funcție de adîncimea de tăiere pentru OL 60 și OL 70, la viteza medie de respectiv 181 m/min și 143 m/min, cu avans constant s = 0,25 mm/rot, utilizînd cuțitul de strung armat cu plăcuța S$_1$ și ascuțit la geometria optimă.

b. Influența vitezei asupra uzurii cuțitului de strung

Viteza de așchiere este un parametru al regimurilor de așchiere, care determină direct o serie de mărimi de primă importanță ca : forțele de așchiere, coeficientul dinamic de frecare, regimul termic etc. Ca atare, partea activă a cuțitului de strung fiind pusă să lucreze în condiții foarte diferite, evoluția uzurii ce se dezvoltă, va varia și ea de la caz la caz. Ca și pînă aici studiul uzurii se va face prin intermediul durabilității.

Pentru cuțitele de strung armate cu plăcuțe din carburi metalice, literatura de specialitate a consacrat legătura dintre viteză și durabilitate prin formula

$$vT^{n} = C_1. \tag{1}$$

Această relație poate cuprinde întregul domeniu de variație al vitezei, în cazul cînd exponentul n și constanta C_1 depind de materialul prelucrat, avans, adîncime de tăiere și viteză de așchiere. Domeniul de durabilități economice cel mai frecvent utilizat este însă mai restrîns, limitînd totodată și domeniul de viteze de așchiere. În interiorul acestui domeniu, exponentul n și constanta C_1 se pot considera că devin independente de viteză, deoarece influența ei este neglijabilă. În plus, exponentul n variază puțin cu avansul și adîncimea de tăiere, rămînînd în primul rînd dependent de material. Constanta C_1 depinde de avans, adîncimea de tăiere și material. Ca urmare, în intervalul de durabilitate cuprins între 50 și 120 min, care prezintă interes, admitem ipoteza că exponentul n variază doar cu materialul de prelucrat. Aceasta revine la a afirma că pentru domeniul sus-amintit se poate face în bune condiții liniarizarea în coordonate logaritmice a curbei experimentale pentru un anumit material, la un avans și o adîncime de tăiere date. De asemenea, mai rezultă că în condițiile delimitărilor expuse, curbele de variație a vitezei cu durabilitatea se pot trasa în coordonate logaritmice ca paralele între ele.

Pentru calculul valorii exponentului n s-au făcut experiențe la mai multe avansuri și adîncimi de tăiere și s-au luat în considerare valorile medii.

Cîteva din rezultatele experiențelor apar în figurile 5 și 6, unde sînt trasate atît curbele experimentale, cît și cele obținute cu valorile medii ale lui n. Este de reținut faptul că pentru intervalul de durabilitate cuprins între 50 și 120 min, curbele teoretice trasate cu valoarea medie a exponentului n, aproximează bine curbele experimentale.

Efectuînd experiențe pe aceleași oțeluri cu plăcuțe mineralo-ceramice și menținînd aceleași condiții de lucru, se constată că ipotezele admise și verificate în cazul plăcuțelor din carburi metalice se păstrează și în acest caz, cu alte cuvinte legătura dintre viteză și durabilitate este dată de relația (1) și pentru plăcuțele mineralo-ceramice. Astfel pentru domeniul de durabilitate cuprins între 50 și 120 min, care înglobează durabilitățile economice admise curent, constanta C_1 depinde de materialul piesei, avans și adîncime de tăiere, pe cînd exponentul n variază în primul rînd cu materialul și mult mai puțin cu avansul și adîncimea de tăiere. În consecință, se poate proceda ca mai înainte, adică se neglijează influența avansului și a adîncimii de tăiere asupra exponentului n, lucrîndu-se cu valoarea medie a acestuia. Ca atare, în domeniul amintit, se poate face liniarizarea curbelor experimentale în coordonate logaritmice, la fel ca pentru plăcuțele din carburi metalice.

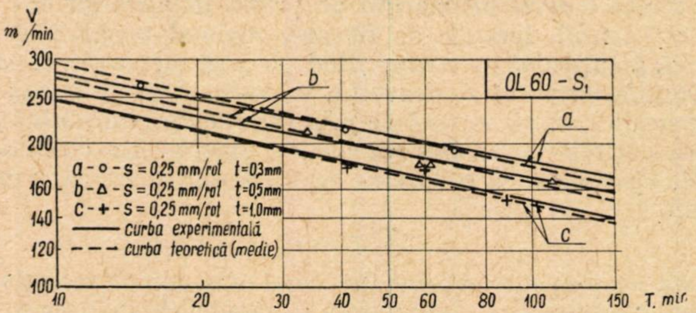


Fig. 5. — Variația vitezei în funcție de durabilitate pentru oțelul OL 60 la diferite avansuri și adîncimi de tăiere, în cazul așchierii cu plăcuța S_1.

O parte din rezultatele experimentale sînt prezentate în figurile 7 și 8, unde se constată că toate curbele teoretice aproximează mulțumitor curbele experimentale.

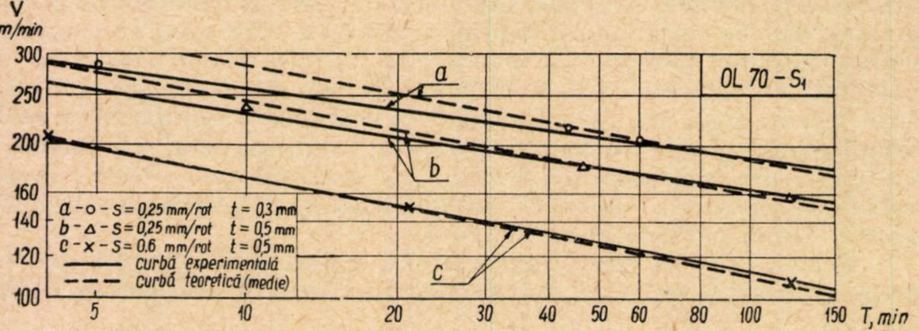


Fig. 6. — Variația vitezei în funcție de durabilitate pentru oțelul OL 70 la diferite avansuri și adîncimi de tăiere, în cazul așchierii cu plăcuța S_1.

Valorile exponentului n, calculate ca valori medii a mărimilor experimentale în cazul așchierii cu plăcuțe mineralo-ceramice, sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Materialul prelucrat	n	
	Plăcuța S_1	Plăcuța ENC_1
OL 60	0,220	0,331
OL 70	0,183	0,201

Din tabela 1 se vede că, admițînd pentru plăcuțele mineralo-ceramice aceeași relație (1) de legătură între viteza de așchiere și durabilitate ca și pentru plăcuțele din carburi metalice, exponentul n depinde pe lîngă materialul de prelucrat și de genul plăcuței utilizate.

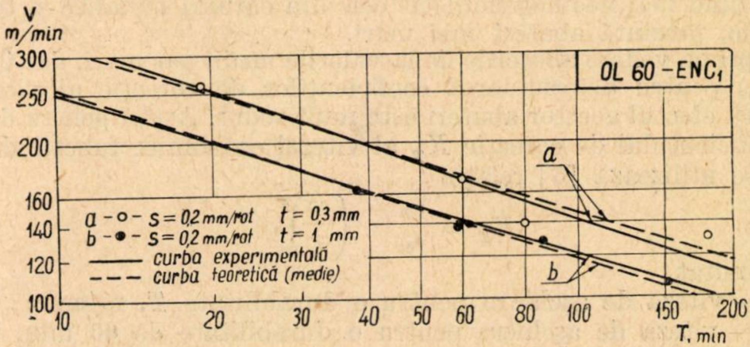


Fig. 7.— Variația vitezei în funcție de durabilitate pentru oțelul OL 60 la diferite avansuri și adîncimi de tăiere, în cazul așchierii cu plăcuța ENC_1.

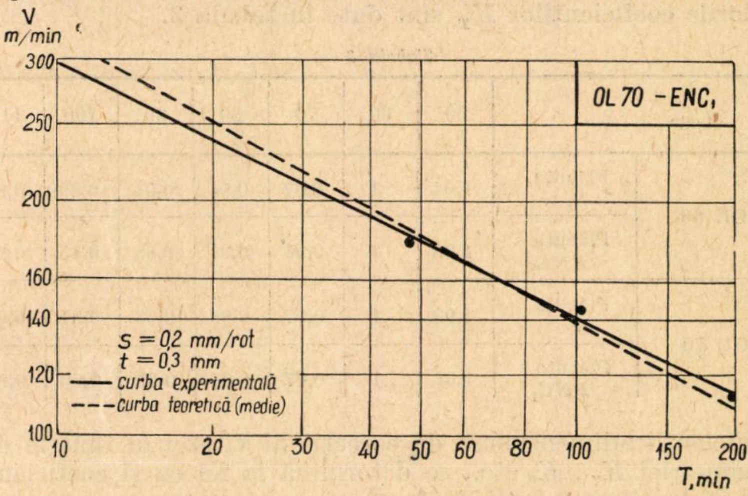


Fig. 8. — Variația vitezei în funcție de durabilitate pentru oțelul OL 70 la avansul de $s = 0{,}20$ mm/rot și adîncimea de tăiere $t = 0{,}3$ mm, în cazul așchierii cu plăcuța ENC_1.

Lucrînd cu valori medii, desigur că vor apare abateri ale valorilor experimentale ale exponentului n față de medie. În tabela 2 sînt date abaterile maxime $\Delta n_{\max}$ %.

Tabela 2

Materialul prelucrat	$\Delta n_{\max}$ %	
	Plăcuța S_1	Plăcuța ENC_1
OL 60	+26,0 −19,0	+36,7 −50,0
OL 70	+ 8,0 −15,0	+64,7 −39,8

Abaterile prezentate în tabela 2 se datoresc atît influenţei avansului şi adîncimii de tăiere, cît şi neomogeneităţii plăcuţelor. Plăcuţele mineraloceramice fiind mai neomogene decît cele din carburi metalice şi totodată mai fragile, prezintă abateri mai mari.

La prima vedere abaterile de la valorile medii par mari, dar utilizînd relaţia (1) pentru determinarea coeficienţilor de corecţie ai vitezei, se constată că efectul acestor abateri este mult redus. Astfel pentru determinarea coeficientului de corecţie K_T al vitezei economice funcţie de durabilitate, se utilizează [3] relaţia

$$K_T = \frac{v_T}{v_{60}} = \left(\frac{60}{T}\right)^n, \tag{2}$$

unde s-a notat

v_T — viteza de aşchiere pentru o durabilitate T, m/min;

v_{60} — viteza de aşchiere pentru o durabilitate de 60 min, m/min.

Relaţia (2) poate fi utilizată numai în cazul aceloraşi avansuri şi adîncimi de tăiere.

Valorile coeficienţilor K_T sînt date în tabela 3.

Tabela 3

$T_{\min}$			50	60	70	80	90	100	110	120
K_T	OL 60	Plăcuţa S_1	1,04	1	0,97	0,94	0,91	0,89	0,87	0,86
		Plăcuţa ENC_1	1,06	1	0,95	0,91	0,88	0,85	0,82	0,80
	OL 70	Plăcuţa S_1	1,03	1	0,97	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88
		Plăcuţa ENC_1	1,04	1	0,97	0,94	0,92	0,90	0,88	0,87

Coeficienţii adimensionali de corecţie ai vitezei în funcţie de parametrii geometrici K_γ, K_α etc., se determină la fel ca şi coeficientul K_T, utilizîndu-se la sfîrşit relaţii de forma

$$K_\gamma = (\tau_\gamma)^n. \tag{3}$$

După cum se vede, la calculul diverşilor coeficienţi de corecţie ai vitezei intervine exponentul n, care aşa cum s-a arătat este determinat cu abateri destul de mari. Desigur că abaterile valorii medii a exponentului n de la valorile experimentale vor influenţa precizia coeficienţilor K_i ($i = \gamma$, α, T etc.). Pentru a se scoate în evidenţă aceste abateri se prezintă pentru fiecare oţel în parte erorile maxime ce apar în calculul coeficienţilor K_i şi anume:

— Pentru oţelul OL 60 în cazul strungirii cu plăcuţe S_1, eroarea maximă o are coeficientul $K_{\varkappa 1}$ pentru $\varkappa_1 = 5°$ cînd

$$\Delta K_{\max} = \begin{cases} +\,7{,}3\% \\ -\,9{,}5\%. \end{cases}$$

— Pentru oţelul OL 60 în cazul strungirii cu plăcuţe ENC_1, eroarea maximă apare la coeficientul K_γ cînd $\gamma = -10°$, avînd valoarea

$$\Delta K_{\max} = \begin{cases} +19,2\% \\ -12,5\%. \end{cases}$$

— Pentru oţelul OL 70 cînd se strungeşte cu plăcuţe S_1, eroarea maximă o are coeficientul K_T pentru durabilitatea de 120 minute, cînd

$$\Delta K_{\max} = \begin{cases} +2,0\% \\ -1,3\%. \end{cases}$$

— Pentru oţelul OL 70 în cazul strungirii cu plăcuţe ENC_1, eroarea maximă o are coeficientul K_γ cînd $\gamma = -5°$, avînd valoarea

$$\Delta K_{\max} = \begin{cases} +11,4\% \\ -14,9\%. \end{cases}$$

Din valorile prezentate se poate observa că eroarea maximă a coeficienţilor adimensionali de corecţie ai vitezei este sensibil mai mică decît cea a exponentului n şi că ea se apropie de domeniul admisibil de erori. Trebuie menţionat că, cu cît valoarea pentru care trebuie făcută corecţia este mai departe de cea optimă, cu atît eroarea este mai mare. În imediata apropiere a valorilor optime eroarea este practic neglijabilă. În jurul durabilităţii de 60 minute, abaterea curbelor viteză-durabilitate, determinată experimental, este aproape nulă faţă de curbele trasate cu n_{med}, iar această abatere creşte cu cît ne depărtăm de durabilitatea de 60 min, ajungînd maximă la extremităţile intervalului ales. Micşorînd deci domeniul de valabilitate al relaţiei (1) se pot obţine abateri mult mai mici la determinarea exponentului n.

Aceste consideraţii dovedesc că ipoteza admisă pentru determinarea exponentului n este satisfăcătoare, permiţînd să se calculeze cu o eroare admisibilă valoarea coeficienţilor adimensionali de corecţie ai vitezei.

c. Influenţa avansului şi a adîncimii de tăiere asupra vitezei. Formule pentru viteze economice optime

Pentru cazul cuţitelor armate cu plăcuţe din carburi metalice este de reţinut din literatura de specialitate următoarea formulă pentru viteza de aşchiere, fiind cea mai cuprinzătoare :

$$v_T = \frac{C}{t^{x}\, s^{y}} K, \tag{4}$$

unde s-a notat

v_T — viteza de aşchiere optimă pentru o durabilitate economică T a cuţitului, m/min ;

t — adîncimea de tăiere, mm ;

s — avansul sculei, mm/rot;
C — constantă, funcție de materialul de prelucrat;
x și y — exponenți funcție de materialul prelucrat;
K — coeficientul global de corecție al vitezei, care are următoarea formă:

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_T \cdot K_m \cdot K_\gamma \cdot K_\alpha \cdot K_{\alpha_1} \cdot K_\varkappa \cdot K_{\varkappa_1} \cdot K_\lambda \tag{5}$$

în care

K_γ, K_α, K_{α_1}, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, K_λ — coeficienți de corecție geometrici funcție de unghiurile γ, α, α_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$, λ;

K_1 — coeficient de corecție funcție de caracteristicile mecanice ale materialului prelucrat;
K_2 — coeficient de corecție funcție de sistemul de răcire adoptat;
K_3 — coeficient de corecție funcție de modul de ascuțire al plăcuței;
K_4 — coeficient de corecție funcție de omogeneitatea stratului ecruisat etc.;
K_T — coeficient de corecție funcție de durabilitatea economică aleasă a cuțitului de strung;
K_m — coeficient de corecție funcție de materialul plăcuței.

Determinarea constantei C și a exponenților x și y s-a făcut pornind de la ipoteza că au valori constante într-un domeniu limitat al variației vitezei [3] și anume

$$\frac{v_{\max.}}{v_{\min}} \approx 1{,}5. \tag{6}$$

Prelucrarea datelor experimentale pentru determinarea constantei C și a exponenților x și y, a fost făcută considerîndu-se pentru fiecare oțel studiat în parte, coeficientul global de corecție $K = 1$. Aceasta este posibil deoarece K este o valoare comparativă ce poate căpăta orice valoare. Important este doar faptul că trebuie să se mențină mereu aceleași condiții experimentale ca și în cazul determinării diferiților coeficienți de corecție ce intră în valoarea coeficientului global de corecție K. Astfel s-au utilizat cuțite ascuțite la valoarea optimă a parametrilor geometrici, așa că $K_\gamma = K_\alpha = K_{\alpha_1} = K_\varkappa = K_{\varkappa_1} = K_\lambda = 1$; de asemenea, s-au menținut aceleași condiții de ascuțire a plăcuțelor, pregătirea epruvetelor, strungire fără răcire etc., încît $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$; se mai consideră $K_m = K_T = 1$, cînd se utilizează plăcuțe S_1 și se adoptă ca durabilitate economică 60 minute.

În aceste condiții se obține în cele din urmă în intervalul $t = 0{,}1 - 3$ mm, $s = 0{,}1 - 0{,}8$ mm/rot

— pentru OL 60 (plăcuța S_1)

$$v_{60} = \frac{98{,}4}{t^{0{,}15}\ s^{0{,}38}}; \tag{7}$$

— pentru OL 70 (plăcuța S_1)

$$v_{60} = \frac{77{,}2}{t^{0{,}32}\ s^{0{,}43}}. \tag{8}$$

Efectuînd experienţe cu plăcuţe mineralo-ceramice ENC_1 în aceleaşi condiţii ca şi cu plăcuţele din carburi metalice şi repetînd aceleaşi raţionamente, se constată că formula (5) pentru viteza optimă de aşchiere, poate fi extinsă şi la aşchierile făcute cu plăcuţe mineralo-ceramice. Ca rezultat al prelucrării datelor experimentale se obţin următoarele formule, valabile în intervalul $t = 0{,}1-3$ mm, $s = 0{,}1-0{,}8$ mm/rot

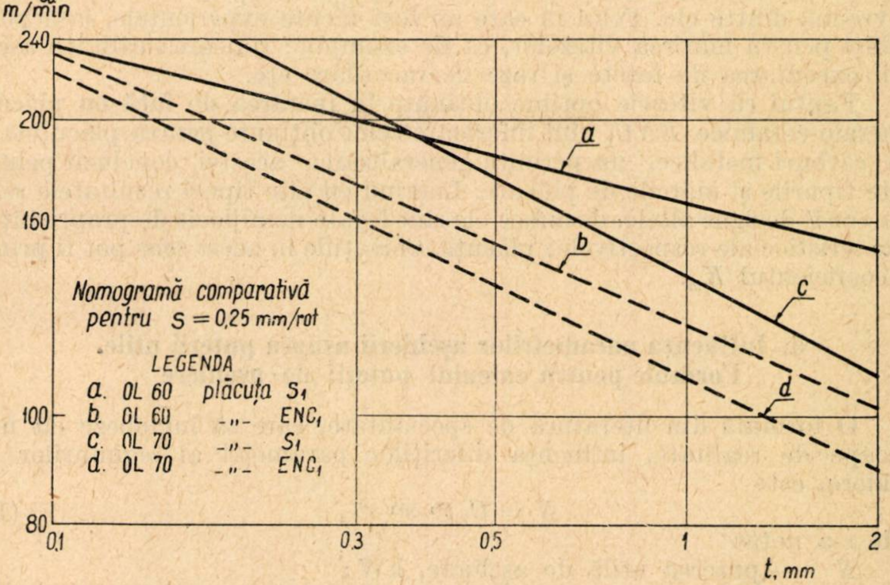


Fig. 9. — Nomogramă comparativă a regimului optim de lucru la strungirea oţelurilor OL 60 şi OL 70 cu avansul de $s = 0{,}25$ mm/rot.

— pentru OL 60 (plăcuţa ENC_1)

$$v_{60} = \frac{93{,}1}{t^{0{,}17}\ s^{0{,}26}}; \tag{9}$$

— pentru OL 70 (plăcuţa ENC_1)

$$v_{60} = \frac{76{,}6}{t^{0{,}30}\ s^{0{,}27}}. \tag{10}$$

Pentru uşurinţa efectuării calculelor, atît formulele (7), (8) cît şi (9), (10) pot fi prezentate sub formă de nomograme [3].

Comparînd rezultatele obţinute pentru constanta C şi exponenţii x şi y în cazul plăcuţelor mineralo-ceramice şi celor din carburi metalice, se poate spune că valorile numerice ale lor sînt diferite pentru acelaşi oţel şi anume pentru plăcuţele mineralo-ceramice sînt mai mici decît în cazul celor din carburi metalice. Cu alte cuvinte, vitezele optime de aşchiere pentru plăcuţele mineralo-ceramice ENC_1 sînt inferioare celor pentru plăcuţele din carburi metalice S_1 la avans şi adîncime de tăiere egale.

Pentru a ilustra mai bine această diferenţiere, în figura 9 este prezentată o nomogramă comparativă redusă numai la un avans. Din ea se constată că, diferenţa maximă dintre viteza de aşchiere optimă, pentru plăcuţele mineralo-ceramice şi pentru cele din carburi metalice este de cel mult 20 %.

Se accentuează faptul că atît formulele (7), (8) şi (9), (10), cît şi diferenţele ce rezultă din comparaţia lor, sînt date de valori medii obţinute cu ambele genuri de plăcuţe şi nicidecum performanţe deosebite, căpătate cu vreuna dintre ele. Felul în care au fost făcute experienţele, lasă posibilităţi pentru mărirea vitezelor, ca de exemplu : ridicarea calităţii ascuţirii, executarea de faţete şi raze de racordare etc.

Faptul că vitezele optime obţinute în lucrarea de faţă cu plăcuţe mineralo-ceramice ENC_1 sînt inferioare celor obţinute pentru plăcuţele S_1 din carburi metalice, nu permite generalizarea acestei concluzii pentru toate tipurile şi mărcile de plăcuţe. Lucrînd cu alte tipuri rezultatele relative vor fi desigur altele, deoarece ele sînt legate nemijlocit de proprietăţile caracteristice ale respectivelor plăcuţe. Corecţiile în acest sens pot fi prinse de coeficientul K_m.

d. Influenţa parametrilor aşchierii asupra puterii utile. Formule pentru calculul puterii de aşchiere

O formulă din literatura de specialitate, care să înglobeze cît mai aproape de realitate, influenţa diferiţilor parametri ai regimurilor de aşchiere, este

$$N = C_2 t^{x_1} s^{y_1} v^z , \tag{11}$$

unde s-a notat

N — puterea utilă de aşchiere, kW ;
C_2 — constantă, funcţie de materialul prelucrat şi de toţi ceilalţi parametri cuprinşi în coeficientul global de corecţie K ;
t — adîncimea de tăiere, mm ;
s — avansul sculei, mm/rot ;
v — viteza de aşchiere, m/min ;
x_1, y_1, z — exponenţi funcţie de materialul prelucrat.

Formula (11) este recomandată cînd aşchierea se face cu plăcuţe din carburi metalice.

Determinarea valorilor constantei C_2 şi a exponenţilor x_1, y_1, z s-a executat prin experienţe efectuate în condiţii similare cu cele făcute pentru stabilirea formulelor vitezei optime de aşchiere. De asemenea, se menţin aceleaşi ipoteze şi raţionamente în ceea ce priveşte domeniul de variaţie a parametrilor regimurilor de aşchiere.

În cazul cuţitelor de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice S_1, cu o uzură medie, adică o valoare la începutul palierului de uzură, s-au obţinut următoarele rezultate, pe bază de măsurători directe de putere :

— pentru OL 60 (plăcuţa S_1)

$$N = 0{,}0384\, t^{0.87} s^{0.73} v ; \tag{12}$$

— pentru OL 70 (plăcuţa S_1)

$$N = 0{,}0452\, t^{0.89} s^{0.68} v. \tag{13}$$

Formulele (12) şi (13) servesc pentru calculul puterii utile de aşchiere la orice regim ales arbitrar în cadrul limitelor experimentale admise.

În cadrul experienţelor efectuate cu plăcuţe mineralo-ceramice, urmărindu-se influenţa parametrilor regimurilor de aşchiere asupra puterii utile consumate, se constată că formula (11) stabilită pentru plăcuţele din carburi metalice, dă satisfacţie şi în cazul plăcuţelor mineralo-ceramice.

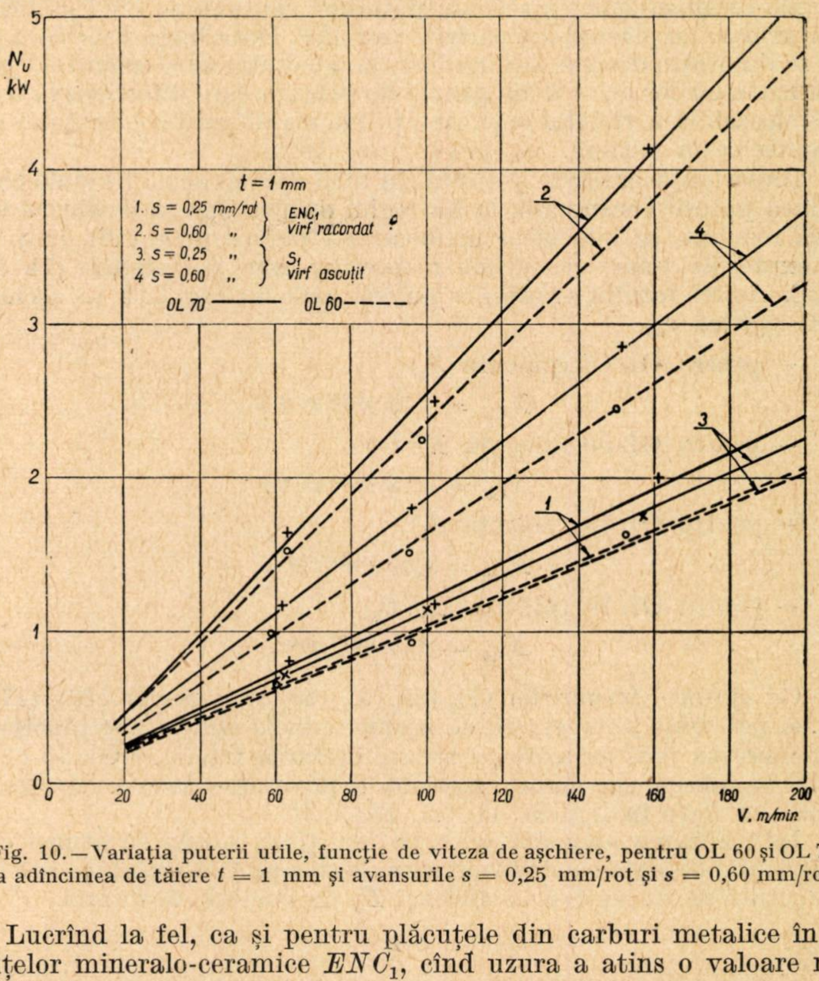


Fig. 10. — Variaţia puterii utile, funcţie de viteza de aşchiere, pentru OL 60 şi OL 70 la adîncimea de tăiere $t = 1$ mm şi avansurile $s = 0,25$ mm/rot şi $s = 0,60$ mm/rot.

Lucrînd la fel, ca şi pentru plăcuţele din carburi metalice în cazul plăcuţelor mineralo-ceramice ENC_1, cînd uzura a atins o valoare medie, s-a obţinut :

— pentru OL 60 (plăcuţa ENC_1)

$$N = 0{,}0387\, t^{0{,}93}\, s^{0{,}96}\, v\,; \tag{14}$$

— pentru OL 70 (plăcuţa ENC_1)

$$N = 0{,}0387\, t^{0{,}89}\, s^{0{,}84}\, v. \tag{15}$$

O comparaţie directă a puterilor utile consumate în cazul aşchierii aceluiaşi material la acelaşi regim, însă cu plăcuţe diferite, este prezentată în figura 10. Este vorba de nişte rezultate experimentale obţinute la două regimuri pe OL 60 şi OL 70 cu plăcuţe ENC_1 şi S_1. Se precizează că toate cuţitele cu care s-au făcut experienţele redate în figura 10, au avut o uzură $\delta_{\alpha_1} < 0{,}4$ mm.

Se constată că puterile utile consumate în cazul aşchierii cu plăcuţe mineralo-ceramice sînt superioare puterilor consumate, cînd se utilizează cuţite armate cu plăcuţe din carburi metalice. Deosebirea valorică a puterii utile se datoreşte desigur mai multor cauze, dintre care amintim : proprietăţile materialelor celor două genuri de plăcuţe care diferenţiază frecarea, forma deosebită a vîrfului cuţitului, prinderea diferită a plăcuţelor şi tipul de aşchie ce ia naştere.

Importanţă practică prezintă, în mod special acele formule care dau mărimea puterii consumate, la un regim optim. Spre a se obţine un asemenea rezultat, se înlocuiesc în formulele puterii utile (12), (13), (14) şi (15) expresiile vitezelor optime respective date de relaţiile (7), (8), (9) şi (10). Astfel rezultă expresiile puterii utile în cazul că se aşchiază cu viteza optimă v_{60}

— pentru OL 60 (plăcuţa S_1)

$$N_{v_{60}} = 3{,}78\, s^{0.35}\, t^{0.72}\,; \tag{16}$$

— pentru OL 60 (plăcuţa ENC_1)

$$N_{v_{60}} = 3{,}58\, s^{0.70}\, t^{0.76}\,; \tag{17}$$

— pentru OL 70 (plăcuţa S_1)

$$N_{v_{60}} = 3{,}49\, s^{0.25}\, t^{0.57}\,; \tag{18}$$

— pentru OL 70 (plăcuţa ENC_1)

$$N_{v_{60}} = 2{,}96\, s^{0.57}\, t^{0.59}. \tag{19}$$

Cu ajutorul formulelor (7), (8), (9), (10) şi respectiv (16), (17), (18), (19), se pot trasa nomograme de aşchiere, utile aplicaţiilor practice, cînd se prelucrează prin aşchiere pe strung oţelurile OL 60 şi OL 70 cu cuţite armate cu plăcuţe din carburi metalice şi mineralo-ceramice. Aceste nomograme sînt date în figurile 11, 12, 13 şi 14.

La utilizarea nomogramelor trebuie ţinut seama că atunci cînd nu sînt îndeplinite toate condiţiile în care acestea au fost stabilite, este necesar să se utilizeze respectivii coeficienţi K_i de corecţie ai vitezei.

★

Urmărindu-se rezultatele prezentate în această lucrare, ce se bazează pe aproximativ 4 000 determinări experimentale, făcute în paralele pe două oţeluri, se pot trage o serie de concluzii în privinţa comportării la regimuri variate a plăcuţelor mineralo-ceramice, în comparaţie cu plăcuţele din carburi metalice.

Ca observaţie generală se desprinde faptul că o serie de fenomene specifice cuţitelor de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice au loc în mod similar şi pentru cuţitele armate cu plăcuţe mineralo-ceramice. Astfel, curbele ce dau variaţia durabilităţii în funcţie de avans sau adîncimea de tăiere, au aceeaşi alură în cazul utilizării ambelor genuri de

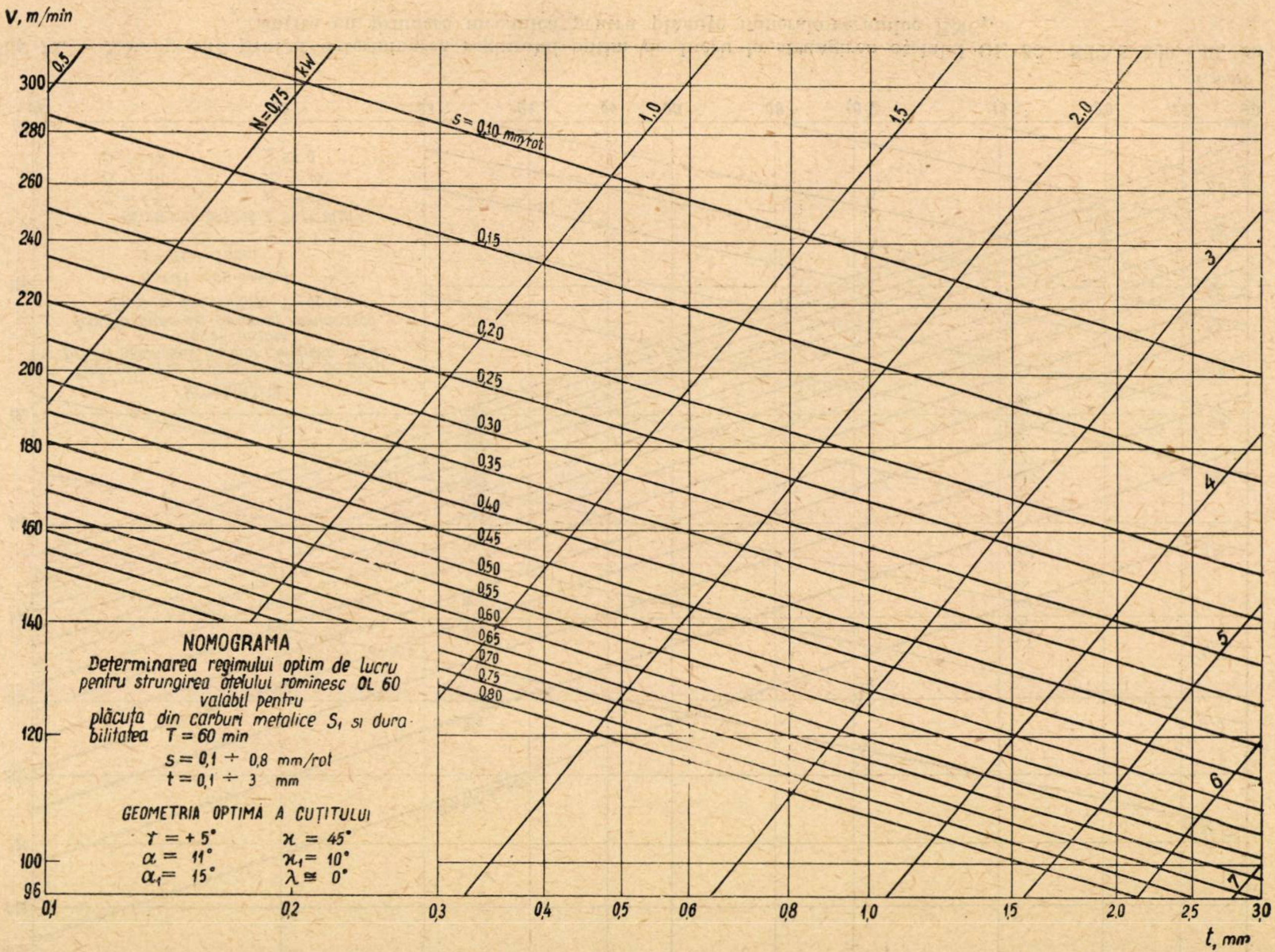


Fig. 11. — Nomogramă pentru determinarea regimului optim de lucru la strungirea oțelului OL 60—STAS 500—49, cu cuțite armate cu plăcuțe S_1 din carburi metalice.

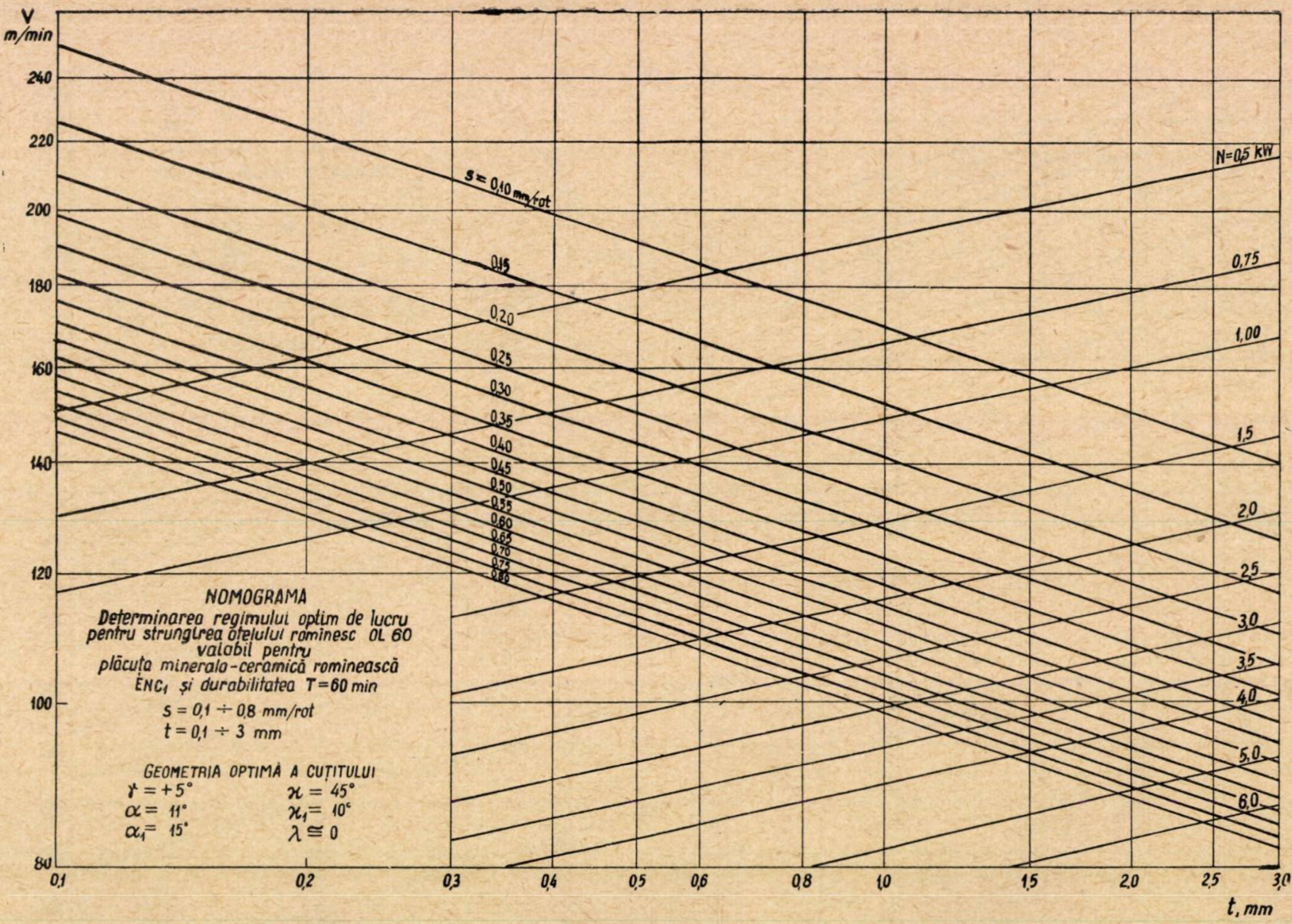


Fig. 12. — Nomogramă pentru determinarea regimului optim de lucru la strungirea oțelului OL 60—STAS 500—49, cu cuțite cu prindere mecanică pentru plăcuțe mineralo-ceramice ENC_1.

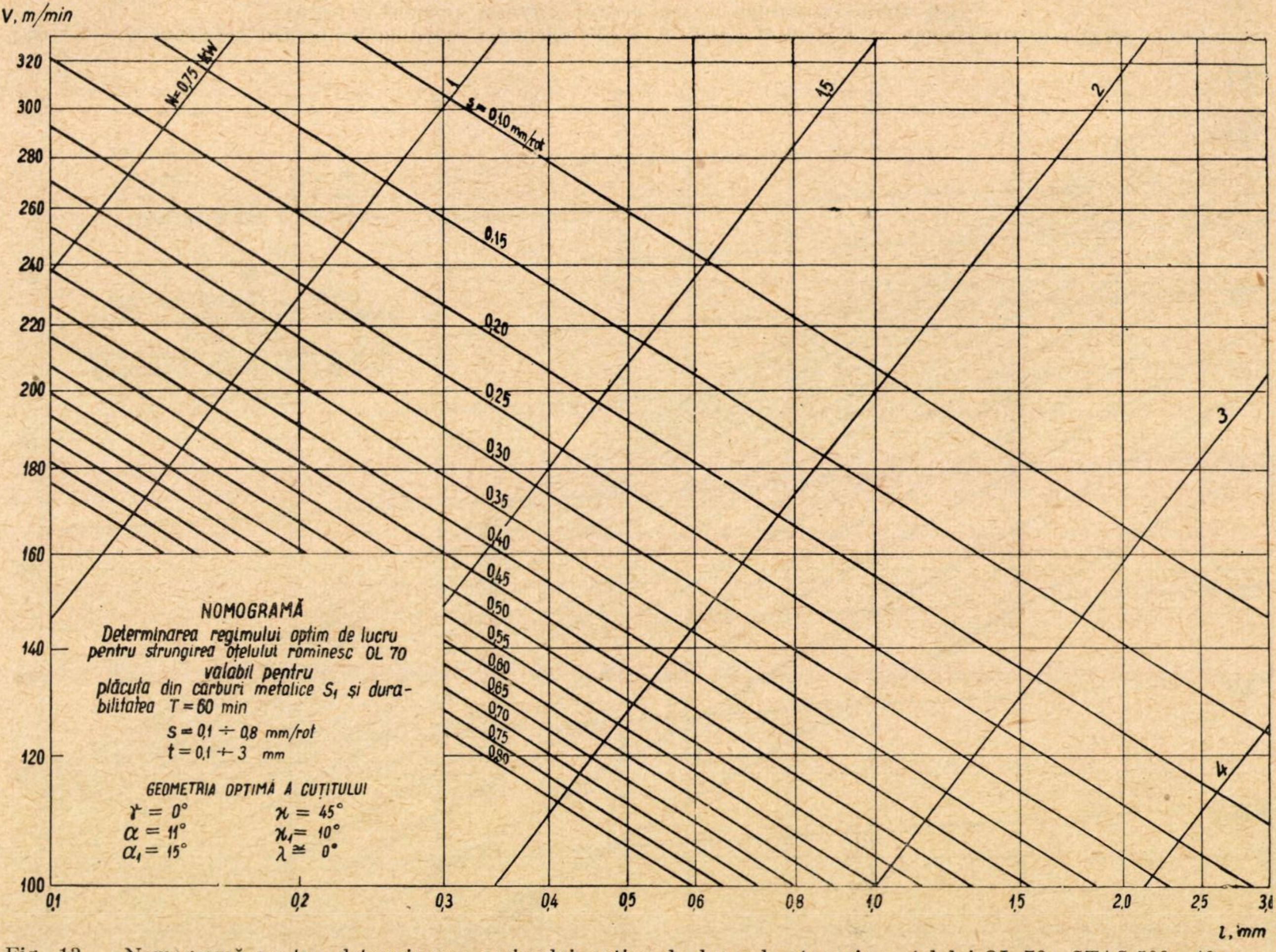


Fig. 13. — Nomogramă pentru determinarea regimului optim de lucru la strungirea oțelului OL 70—STAS 500—49, cu cuțite armate cu plăcuțe S_1 din carburi metalice.

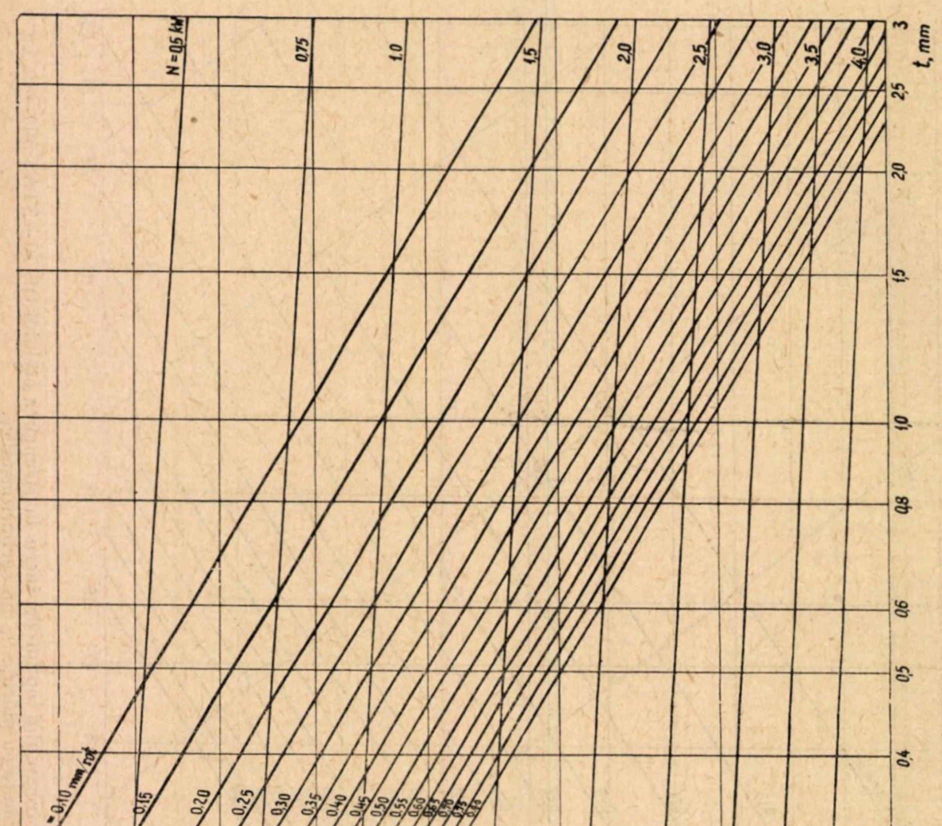


Fig. 14. — Nomogramă pentru determinarea regimului optim de lucru la strungirea oțelului OL 70—STAS 500—49, cu cuțite cu prindere mecanică pentru plăcuțe mineralo-ceramice ENC$_1$.

plăcuţe. De asemenea, legea de variaţie a durabilităţii în funcţie de viteză îşi păstrează aceeaşi formă, indiferent cu ce fel de plăcuţă se strungeşte.

Formulele generale (4) şi (11) ce dau valorile vitezei optime de aşchiere şi a puterii utile consumate, care sînt consacrate pentru plăcuţele din carburi metalice, îşi extind domeniul de valabilitate şi asupra prelucrărilor executate cu plăcuţe mineralo-ceramice. Faptul că valorile obţinute pentru un gen de plăcuţă sînt superioare, sau respectiv inferioare, nu trebuie să conducă la concluzii definitive în acest sens. Orice îmbunătăţire adusă proprietăţilor plăcuţelor se va reflecta în rezultatele finale, care pot fi corectate ca atare.

Menţionăm de asemenea, posibilitatea calculării coeficienţilor de corecţie şi în cazul plăcuţelor mineralo-ceramice ca în cazul plăcuţelor din carburi metalice, cu observaţia că pentru cele dintîi, abaterile sînt mai mari din cauza proprietăţilor lor. Aceste abateri pot fi însă reduse la valori convenabile printr-o judicioasă alegere a domeniului de variaţie a parametrilor aşchierii.

Cele prezentate pînă aici permit a se trage concluzia că şi pentru plăcuţele mineralo-ceramice, la fel ca pentru cele din carburi metalice, se pot stabili regimuri optime de lucru, care să aibă aplicaţii practice imediate.

În încheiere, este de subliniat că interdependenţa între parametrii ce constituie o grupă, precum şi interdependenţa între grupele parametrilor aşchierii [1], [2], a fost verificată mulţumitor prin experienţele efectuate.

Încă un element de comparaţie îl constituie calitatea suprafeţei prelucrate, care a fost întotdeauna superioară cînd s-au utilizat plăcuţele mineralo-ceramice.

În condiţii identice de prelucrare, în ceea ce priveşte parametrii optimi atît ai geometriei cît şi ai regimului, palierul curbelor de uzură are o pantă mai accentuată în cazul plăcuţelor mineralo-ceramice ENC_1 decît în cazul plăcuţelor din carburi metalice S_1. Acest lucru scoate în evidenţă faptul că uzura creşte în timp mai repede în cazul plăcuţelor ENC_1, ceea ce atrage după sine, la lungimi egale de prelucrare, o precizie mai mică decît atunci cînd se aşchiază cu plăcuţe S_1.

În sfîrşit, încă o posibilitate de comparaţie oferă şi piesele ce pot fi prelucrate în bune condiţii cu cuţite armate cu aceste două feluri de materiale. Spre deosebire de cuţitele de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice ce se utilizează la prelucrări foarte diferite şi în condiţii grele, cuţitele armate cu plăcuţe mineralo-ceramice se pretează doar la prelucrările pieselor fără suprafeţe întrerupte, praguri etc. care produc o concentrare locală a efortului de aşchiere pe muchia tăietoare şi care are ca efect o degradare rapidă a plăcuţei.

O concluzie a acestei lucrări o constituie ideea posibilităţii înlocuirii carburilor metalice prin materiale mineralo-ceramice, dacă nu total, cel puţin parţial.

Primită la redacţie la 7 iulie 1958

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ РЕЗАНИЯ МЕТАЛЛОВ РЕЗЦАМИ, ОСНАЩЕННЫМИ МИНЕРАЛО-КЕРАМИЧЕСКИМИ ПЛАСТИНКАМИ ИЛИ ПЛАСТИНКАМИ ИЗ ТВЕРДЫХ СПЛАВОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе дается сравнительная оценка результатов, полученных при резании сталей OL 60 и OL 70 при помощи минерало-керамических пластинок ENC$_1$, изготовленных в Румынии, и пластинок из твердых сплавов S$_1$.

Из экспериментальных результатов вытекает, что сделанные допущения и взаимосвязь параметров режима резания, полученных в случае пластинок из твердых сплавов, сохраняется и в случае минерало-керамических пластинок. В то же время формулы для оптимальной скорости резания и мощности резания, известные для пластинок из твердых сплавов, можно распространить и на минерало-керамические пластинки, причем расчет коэффициентов поправки возможен и в последнем случае.

Рассматриваются также отклонения различных коэффициентов поправки.

Окончательные результаты представлены в доступном для практических применений виде.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Зависимость стойкости от подачи для сталей OL 60 и OL 70 при средней скорости соответственно 166 м/мин и 139 м/мин с постоянной глубиной резания $t = 0{,}5$ мм для токарного резца, оснащенного пластинкой ENC$_1$, заточенного до оптимальной геометрии.

Рис. 2. — Зависимость стойкости от подачи для сталей OL 60 и OL 70 при средней скорости соответственно 178 м/мин и 107 м/мин с постоянной глубиной резания $t = 0{,}5$ мм для токарного резца, оснащенного пластинкой S_1, заточенного до оптимальной геометрии.

Рис. 3. — Зависимость стойкости от глубины резания для сталей OL 60 и OL 70 при средней скорости соответственно 163 м/мин и 116 м/мин с постоянной подачей $S = 0{,}20$ мм/об для токарного резца с пластинкой ENC$_1$, заточенного до оптимальной геометрии.

Рис. 4. — Зависимость стойкости от глубины резания для сталей OL 60 и OL 70 при средней скорости соответственно 181 м/мин и 143 м/мин с постоянной подачей $S = 0{,}25$ мм/об для токарного резца с пластинкой S_1, заточенного до оптимальной геометрии.

Рис. 5. — Зависимость скорости от стойкости для стали OL 60 при различных подачах и глубинах резания в случае пластинки S_1.

Рис. 6. — Зависимость скорости от стойкости для стали OL 70 при различных подачах и глубинах резания в случае пластинки S_1.

Рис. 7. — Зависимость скорости от стойкости для стали OL 60 при различных подачах и глубинах резания в случае пластинки ENC$_1$.

Рис. 8. — Зависимость скорости от стойкости для стали OL 70 при подаче $S = 0{,}20$ мм/об и глубине резания $t = 0{,}3$ мм в случае пластинки ENC$_1$.

Рис. 9. — Сравнительная номограмма оптимального режима работы при резании сталей OL 60 и OL 70 с подачей $S = 0,25$ мм/об.

Рис. 10. — Зависимость полезной мощности от скорости резания для сталей OL 60 и OL 70 при глубине резания $t = 1$ мм и подачах $S = 0,25$ мм/об и $S = 0,60$ мм/об.

Рис. 11. — Номограмма для определения оптимального режима работы при резании стали OL 60 — STAS 500 — 49 резцами, оснащенными пластинками S_1 из твердых сплавов.

Рис. 12. — Номограмма для опеделения оптимального режима работы при резании стали OL 60—STAS 500 — 49 резцами с механическим креплением минерало-керамических пластинок ENC_1.

Рис. 13. — Номограмма для определения оптимального режима работы при резании стали OL 70— STAS 500 — 49 резцами, оснащенными пластинками S_1 из твердых сплавов.

Рис. 14. — Номограмма для определения оптимального режима работы при резании стали OL 70 — STAS 500—49 резцами с механическим креплением минералокерамических пластинок ENC_1.

LES RÉGIMES OPTIMES DE COUPE DES MÉTAUX AVEC DES OUTILS DE COUPE EN CÉRAMIQUE OU CARBURES MÉTALLIQUES

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent les résultats comparatifs obtenus dans le cas de la coupe des aciers roumains OL 60 et OL 70, au moyen des plaquettes céramiques ENC_1, de fabrication roumaine, et de plaquettes de carbures métalliques S_1.

Les résultats expérimentaux prouvent que les hypothèses admises ainsi que l'interdépendance des paramètres du régime de coupe, valables pour les plaquettes de carbures métalliques, gardent également leur valeur lorsqu'il s'agit de plaquettes céramiques. En outre, les types de formules pour la vitesse optimum et la puissance de coupe admise pour les plaquettes de carbures métalliques peuvent être étendus aux plaquettes céramiques, le calcul des coefficients de correction étant possible dans ce cas aussi.

Les écarts des différents coefficients de correction sont également étudiés dans ce travail.

Les résultats finals sont présentés sous une forme convenable pour les applications pratiques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1.—Variation en fonction de l'avance de la durabilité des aciers roumains OL 60 et OL 70 aux vitesses moyennes respectives de 166 m/min et 139 m/min, pour une profondeur de coupe constante $t = 0,5$ mm, avec l'outil armé d'une plaquette ENC_1, dont le tranchant a une géométrie optime.

Fig. 2. — Variation en fonction de l'avance de la durabilité des aciers OL 60 et OL 70 aux vitesses moyennes respectives de 178 m/min et 107 m/min, pour une profondeur de coupe constante $t = 0,5$ mm, avec l'outil armé d'une plaquette S_1, dont le tranchant a une géométrie optime.

Fig. 3. — Variation en fonction de la profondeur de coupe de la durabilité des aciers OL 60 et OL 70, aux vitesses moyennes respectives de 163 m/min et 116 m/min, à une avance constante $s = 0{,}20$ mm/tour, l'outil étant armé d'une plaquette ENC_1, dont le tranchant a une géométrie optime.

Fig. 4. — Variation en fonction de la profondeur de coupe de la durabilité des aciers OL 60 et OL 70, aux vitesses moyennes respectives de 181 m/min et 143 m/min, à une avance constante $s = 0{,}25$ mm/tour, avec un outil armé d'une plaquette S_1, dont le tranchant à une géométrie optime.

Fig. 5. — Variation de la vitesse, fonction de la durabilité de l'acier OL 60, pour diverses avances et profondeurs de coupe — plaquette S_1.

Fig. 6. — Variation de la vitesse en fonction de la durabilité de l'acier OL 70, pour diverses avances et profondeurs de coupe — plaquette S_1.

Fig. 7. — Variation de la vitesse en fonction de la durabilité de l'acier OL 60, pour diverses avances et profondeurs de coupe — plaquette ENC_1.

Fig. 8.— Variation de la vitesse en fonction de la durabilité de l'acier OL 70, pour l'avance $s = 0{,}20$ mm/tour et pour une profondeur de coupe $t = 0{,}3$ mm — plaquette ENC_1.

Fig. 9. — Nomogramme comparatif du régime optime de travail lors du tournage des aciers OL 60 et OL 70 pour une avance $s = 0{,}25$ mm/tour.

Fig. 10. — Variation de la puissance utile, fonction de la vitesse de coupe, pour les aciers OL 60 et OL 70 et pour une profondeur de coupe $t = 1$ mm et des avances $s = 0{,}25$ mm/tour et 0,60 mm/tour.

Fig. 11. — Nomogramme pour déterminer le régime optime de travail lors du tournage de l'acier OL 60—STAS 500—49 — avec des outils armés de plaquettes S_1, en carbures métalliques.

Fig. 12. — Nomogramme pour déterminer le régime optime de travail lors du tournage de l'acier OL 60—STAS 500—49 — à l'aide d'outils à fixation mécanique pour des plaquettes céramiques ENC_1.

Fig. 13. — Nomogramme pour déterminer le régime optime de travail lors du tournage de l'acier OL 70—STAS 500—49 — au moyen d'outils armés de plaquettes S_1 de carbures métalliques.

Fig. 14. — Nomogramme pour déterminer le régime optime de travail lors du tournage de l'acier OL 70—STAS 500—49 — au moyen d'outils à fixation mécanique pour plaquettes céramiques ENC_1.

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuțitelor de strung armate cu plăcuțe mineralo-ceramice și din carburi metalice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 1077 (1958).
2. M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU, N. PASCU, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuțitului armat cu plăcuțe de carburi metalice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2*, 423 (1957).
3. M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU, N. PASCU, *Despre regimul optim de așchiere cu cuțite de strung armate cu plăcuțe din carburi metalice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3*, 915 (1957).
4. A. I. ISAEV, N. N. ZOREV, L. K. KUCIMA, *Așchierea metalelor cu scule armate cu plăcuțe mineralo-ceramice.* Ed. tehnică, București, 1954.
5. А. М. РОЗЕНБЕРГ, А. Н. ЕРЕМИН, *Элементы теории процесса резания металлов.* Машгиз, Москва-Свердловск, 1956.
6. М. И. КЛУШИН, *Резание металлов.* Машгиз, Москва, 1953.
7. L. J. ST. CLAIR, *Etude et emploi de l'outil de coupe.* Ed. Dunod, Paris, 1956.
8. E. BLANPAIN, *Théorie et pratique des outils de coupe.* Ed. Eyrolles, Paris, 1955.
9. * * * *Энциклопедия Машиностроение.* **VII**, Машгиз, Москва, 1947.

NOTE

ASUPRA UNOR FORMULE DE RECURENȚĂ REFERITOARE LA CALCULUL COEFICIENȚILOR VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE PENTRU MIȘCĂRILE OMOGENE DE ORDIN SUPERIOR

DE

ADRIANA NĂSTASE

Să considerăm o aripă triunghiulară raportată la un sistem de referință $Ox_1\,x_2\,x_3$ cu originea în vîrful aripii cu axa Ox_1 dirijată după direcția curentului neperturbat U_∞, planul $Ox_1\,x_2$ fiind definit de bordurile de atac OA_1 și OA_2 în care se socotește aplatisată aripa. Vom presupune o scurgere omogenă de ordin n în jurul aripii. În acest caz, viteza verticală de perturbație w este reprezentată sub forma unui polinom omogen de ordin $(n-1)$

$$w_{(x_1 x_2)} = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^{q}\,. \tag{1}$$

În cele ce urmează vom considera aripa simetrică din punct de vedere geometric. În acest caz w se bucură de proprietatea

$$w_{(x_1,\,x_2)} = w_{(x_1\,-\,x_2)}\,. \tag{2}$$

Această simetrie se poate obține fie luînd în (1) numai termeni cu puteri pare ($q = 2\,\chi$)

$$w_{(x_1,\,x_2)} = \sum_{\chi=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} w_{n-2\chi-1,\,2\chi}\, x_1^{n-2\chi-1}\, x_2^{2\chi}\,, \tag{3}$$

caz care definește aripa cu simetrie naturală; fie luînd numai termenii impari ($q = 2\chi + 1$), iar coeficienții lui w să schimbe de semn la traversarea originii

$$w_{(x_1,\,x_2)} = \sum_{\chi=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} (\pm)\, w_{n-2\chi-2,\,2\chi+1}\, x_1^{n-2\chi-2}\, x_2^{2\chi+1}\,. \tag{4}$$

Acest caz definește aripa cu simetrie forțată.

Conform unor rezultate anterioare [1], componenta axială a vitezei de perturbație în cazul aripilor simetrice (natural sau forțat) subțiri cu borduri subsonice are următoarea expresie :

$$u = x_1^{n-1}\,\mathcal{R}e\left[\frac{\sum\limits_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\, x^{2q}}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2q}\, x^{2q} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right]. \tag{5}$$

În această formulă s-a ținut seamă ca $A_0 = 0$ deoarece u trebuie să fie finit pe centru.

În cursul lucrării vom folosi observațiile și notațiile din [1], [2] și din [3].

Conform cu [1], constantele A_{2q} și C_{2q} din (5), se determină cu ajutorul următoarelor relații :

$$\mathcal{R}e\, i(-1)^{n-q}\int_{\Gamma} x^{n-q-2}\sqrt{1 - B^2 x^2}\,\frac{d^n\, U_{n-1}}{dx^n}\,dx = \frac{(n-1)!\,\Delta w_{n-q-1,q}}{C_{n-1}^{q}} \tag{6}$$

și

$$\mathcal{R}e\, i(-1)^{n-q}\int_{x_0}^{x_d} x^{n-q-2}\sqrt{1 - B^2 x^2}\,\frac{d^n\, U_{n-1}}{dx^n}\,dx = \frac{(n-1)!\,w_{n-q-1,q}^{(d)}}{C_{n-1}^{q}} \tag{7}$$

unde

q = $0,1,2\ldots(n-1)$,

Γ = un semicerc în jurul orginei de rază ε,

x_0 = un punct de viteză verticală nulă,

x_d = un punct pe aripă la dreapta muchiei din origină,

iar

$$\mathcal{R}e\, U_{n-1} = \frac{u}{x_1^{n-1}}. \tag{8}$$

Drumul de integrare din (7) îl alegem ca și în [3] pe axa reală.

Scopul pe care îl urmărim este acela de a simplifica relațiile (6) și (7) și de a vedea cum se obțin aceste relații pentru mișcarea omogenă de ordin n, cînd le cunoaștem pentru mișcarea omogenă de ordin $(n-1)$, adică să stabilim o relație de recurență. Pentru aceasta vom observa că atît în (6) cît și în (7) intervine funcția $U_{n-1}^{(n)}$. Se poate simplifica calculul derivatei de ordin n a lui U_{n-1}, dacă cunoaștem $U_{n-2}^{(n-1)}$, după cum urmează

a. $n = 2\chi + 1$,

$$U_{2\chi}^{(2\chi+1)} = \left(U_{2\chi-1}^{(2\chi)}\right)' + \left(A_{2\chi}\, x^{2\chi} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right)^{(2\chi+1)}. \tag{9a}$$

b. $n = 2\chi$,

$$U_{2\chi-1}^{(2\chi)} = \left(U_{2\chi-2}^{(2\chi-1)}\right)' + \left(\frac{C_{2\chi}\, x^{2\chi}}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right)^{(2\chi)}. \tag{9b}$$

Dacă ținem seamă de (5) se poate vedea că $U_{(n-1)}^{(n)}$ este de forma

$$U_{n-1}^{(n)} = \frac{D_0 + D_2 x^2 + ... + D_{2(n-1)} x^{2(n-1)}}{x^{n-2} (l^2 - x^2)^n \sqrt{l^2 - x^2}} . \tag{10}$$

Într-adevăr

a) Se vede ușor că

$$\left(\frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right)^{(n)} = \frac{Q_{(x)}}{(l^2 - x^2)^{n + \frac{1}{2}}} . \tag{11}$$

$$\left(\operatorname{argch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right)' = - \frac{l}{x \sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{11'}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-3)} = \frac{\text{const.}}{x^{n-2}} \tag{11''}$$

In (11″) s-a luat în considerație derivata de ordinul $(n-3)$ a lui $\frac{1}{x}$, deoarece primele două derivate ale lui U_{n-1} nu conțin pe x la numitor deoarece $A_0 = 0$. Această observație justifică forma numitorului din (10).

b) În (10) x^{n-2} este de aceeași paritate cu n iar restul factorilor de la numitor fiind pari, tot numitorul lui (10) este de aceeași paritate cu n. Cum derivata de ordinul n a unei funcții pare este de aceeași paritate cu n, rezultă că în (10), care este derivata de ordin n a unei funcții pare (5), numărătorul trebuie să fie par. Deci termenii impari ai polinomului de la numărătorul lui (10) trebuie să lipsească.

c) În (10) gradul polinomului de la numărător rezultă ținînd seamă că

$$\left(\frac{x^{2k}}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right)^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(l^2 - x^2)^{n + \frac{1}{2}}} \qquad (2k \leqslant n) \tag{11'''}$$

unde $P_n(x)$ este un polinom de gradul n în x. Această relație s-a dedus în modul următor : s-a demonstrat printr-un procedeu de inducție completă că în cazul $(n = 2k)$,

$$E_{(x)} = \left(\frac{x^{2k}}{\sqrt{l^2 x^2}}\right)^{(2k)} = \frac{P_{2k}(x)}{(l^2 - x^2)^{2k + \frac{1}{2}}}, \tag{11''''}$$

gradul polinomului de la numărător fiind $2k$; apoi fiecare derivare suplimentară a lui $E_{(x)}$ crește gradul polinomului de la numărător cu o unitate.

d) Se constată că numărul coeficienților D_{2k} din (10) este egal cu numărul coeficienților A_{2q} și C_{2q} din (5). Într-adevăr numărul termenilor A_{2q} și C_{2q} este

$$N = E\left(\frac{n-1}{2}\right) + E\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = n.$$

e) Prin derivarea efectivă a lui U_{n-1} din (5) de n ori și prin identificare cu (10), vom obține un sistem liniar (T) care exprimă coeficienții A_{2q} și C_{2q} în funcție de coeficienții D_{2k} în mod unic.

f) Dacă ținem seamă de relațiile (11) observăm că numai termenii care conțin pe argch dau prin derivare x la numitor. În consecință coeficienții D_{2k} ai polinomului de la numărătorul lui (10), care înmulțesc puteri ale lui x mai mici decît $(n - 2)$, nu depind decît de coeficienții A_{2q}.

În cele ce urmează ne vom preocupa de găsirea coeficienților D_{2k}. În acest scop vom face următoarele notații :

$$P_{(x)} = \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{(l^2 - x^2)^{n + \frac{1}{2}}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} P_{(0)}^{(2p)}, \tag{12}$$

$$Q_{2k} = P_{(0)} D_{2k} + \frac{P''_{(0)}}{2!} D_{2(k-1)} + \ldots + \frac{P_{(0)}^{(2k)}}{(2k)!} D_0 \tag{13}$$

și, ținînd seamă și de (10) se observă că în (6) la relația de ordin K singurul termen care dă reziduu este Q_{k-1} unde

$$k = 1,3,5 \ldots (2p + 1), \; p = E\left(\frac{n-2}{2}\right). \tag{14}$$

În consecință, relațiile (6) devin după niște calcule simple

$$Q_{k-1} = (-1)^n \frac{(n-1)! \; \Delta w_{n-k-1,k}}{\pi C_{n-1}^{k}}, \tag{15}$$

unde k ia valorile din (14). Din relațiile (15) se determină constantele $D_0, D_2 \ldots D_{2p}$ cu p din (14).

Mai departe vom nota

$$I_q^{[n]} = \int^{\frac{1}{B}} \frac{x^q \, dx}{(x^2 - l^2)^n Y}, \quad I_{-q}^{[n]} = \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^q (x^2 - l^2)^n Y}, \quad I_0^{[n]} = \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{(x^2 - l^2)^n Y}, \tag{16}$$

$$\varpi_{2k}^{[n]} = l^{2(n-k-1)} \left[l^2 I_{2k}^{[n]} - \mu^2 I_{2(k+1)}^{[n]} \right], \tag{17}$$

unde

$$Y = \sqrt{(x^2 - l^2)(1 - B^2 x^2)}, \qquad \mu = Bl. \tag{18}$$

Cu aceste notații relațiile (7) devin

$$\varpi_{2(p+1-q)} D_{2(p+1)} + \ldots + l^{2(n-p-1)} \varpi_{2(n-1-q)} D_{2(n-1)} = N_{2q} \tag{19}$$

în care $q = 0,1,2 \ldots (\mathrm{n} - \mathrm{p} - 2)$, p are valoarea dată de (14), iar

$$N_{2q} = \frac{1}{l^{2(p+1)}} \left\{ \frac{(n-1)! \, l^{2(n+q)} \, w_{n-2q-1,2q}}{C_{n-1}^{2q}} - \left[\varpi_{2(0-q)} D_0 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \varpi_{2(1-q)} l^2 D_2 + \ldots + \varpi_{2(p-q)} l^{2p} D_{2p} \right] \right\}. \tag{20}$$

Din (19) se determină constantele rămase $D_{2(p+1)}, \; D_{2(p+2)}, \ldots D_{2(n-1)}$ p avînd valoarea din (14).

Calculul efectiv al expresiilor ϖ_{2k} ce intervin în (19) este, sub forma prezentată, destul de laborios deoarece fiecare din ele necesită calculul unei integrale $I_q^{[n]}$. Or, din notațiile (16) se vede că în $I_q^{[n]}$ pentru ($q = 2k$) obținem toate integralele de tip eliptic. Coeficienții ϖ_{2k} se bucură însă de proprietăți interesante de recurență

$$\varpi_{2k}^{[n]} = \varpi_{2(k-1)}^{[n-1]} + \varpi_{2(k-1)}^{[n]}, \tag{21}$$

$$\varpi_{-2k}^{[n]} = \varpi_{-2(k-1)}^{[n]} - \varpi_{-2k}^{[n-1]}, \tag{21'}$$

iar

$$\varpi_0^{[n]} = l^{2(n-1)} \left[l^2 (1 - \mu^2) I_0^{[n]} - \mu^2 I_0^{[n-1]} \right]. \tag{21''}$$

Aceste relații sînt aproape evidente

$$\varpi_{2k}^{[n]} = l^{2(n-k-1)} \left[l^2 I_{2k}^{[n]} - \mu^2 I_{2(k+1)}^{[n]} \right] =$$

$$= l^{2(n-k-1)} \left[l^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{x^{2k}\, dx}{(x^2 - l^2)^n\, Y} - \mu^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{x^{2(k+1)}\, dx}{(x^2 - l^2)^n\, Y} \right] =$$

$$= l^{2(n-k-1)} \left\{ l^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{[x^{2(k-1)} (x^2 - l^2) + l^2 x^{2(k-1)}]\, dx}{(x^2 - l^2)^n\, Y} - \right.$$

$$\left. - \mu^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{[x^{2k} (x^2 - l^2) + l^2 x^{2k}]\, dx}{(x^2 - l^2)^n\, Y} \right\} = l^{2(n-k-1)} \left\{ l^2 \left(l^2 I_{2(k-1)}^{[n]} - \mu^2 I_{2k}^{[n]} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(l^2 I_{2(k-1)}^{[n-1]} - \mu^2 I_{2k}^{[n-1]} \right) \right\} = \varpi_{2(k-1)}^{[n]} + \varpi_{2(k-1)}^{[n-1]} .$$

Analog se demonstrează și relația (21′)

$$\varpi_{-2k}^{[n]} = l^{2(n+k-1)} \left[l^2 I_{-2k}^{[n]} - \mu^2 I_{-2(k-1)}^{\,n]} \right] = l^{2(n+k-1)} \left[l^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^{2k} (x^2 - l^2)^n\, Y} - \right.$$

$$\left. - \mu^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^{2(k-1)} (x^2 - l^2)^n\, Y} \right] = l^{2(n+k-1)} \left[l^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{[(x^2 - l^2) - x^2]\, dx}{(-l^2)\, x^{2k} (x^2 - l^2)^n\, Y} - \right.$$

$$\left. - \mu^2 \int^{\frac{1}{B}} \frac{[(x^2 - l^2) - x^2]\, dx}{(-l^2)\, x^{2(k-1)} (x^2 - l^2)^n\, Y} \right] = l^{2(n+k-1)} \left[\left(\int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^{2(k-1)} (x^2 - l^2)^n\, Y} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\mu^2}{l^2} \int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^{2(k-2)} (x^2 - l^2)^n\, Y} \right) - \left(\int^{\frac{1}{B}} \frac{dx}{x^{2k} (x^2 - l^2)^{n-1}\, Y} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\mu^2}{l^2} \int \frac{dx}{x^{2(k-1)} (x^2 - l^2)^{n-1}\, Y} \right) \right] = \varpi_{-2(k-1)}^{[n]} - \varpi_{-2k}^{[n-1]}.$$

Cu formulele de recurență (21) și (21′) se constată că coeficienții $\varpi_{\pm k}^{[n]}$ din sistemul (19) pentru mișcarea omogenă de ordinul n se obțin din coeficienții $\varpi_{\pm q}^{[n-1]}$ ai sistemului (19) scris pentru mișcarea omogenă de ordinul $(n-1)$ prin simple operații de adunări și scăderi, cu excepția unui singur coeficient $\varpi_0^{[n]}$ pentru obținerea căruia trebuie să calculăm o singură integrală denumită de bază: integrala $I_0^{[n]}$ definită la (16′).

În rezumat, pentru calculul practic al coeficienților A_{2q} și C_{2q} se urmărește următorul algoritm de calcul cînd trecem de la mișcarea de ordinul $(n-1)$ la mișcarea de ordinul n.

1. Se calculează derivata $U_{n-1}^{(n)}$ folosind pentru simplificare relațiile (9).

2. $U_{n-1}^{(n)}$ astfel calculat, se identifică cu expresia sa din (10) și obținem astfel un sistem liniar (T) care va exprima în mod unic (conform observațiilor de la punctul *d*) coeficienții A_{2q} și C_{2q} în funcție de coeficienții D_{2k}.

3. Coeficienții $D_0, D_2, \ldots D_{2p}$ cu p din (14) se află din relațiile (15).

4. Se calculează integrala de bază $I_0^{[n]}$ și obținem $\varpi_0^{[n]}$.

5. Dacă ținem seamă de relațiile de recurență (21) și (21′) se pot obține coeficienții $\varpi_{\pm k}^{[n]}$ din relațiile (19) scrise pentru mișcarea omogenă de ordinul n din coeficienții $\varpi_{\pm q}^{[k-1]}$ ai acelorași relații scrise pentru mișcarea omogenă de ordinul $(n-1)$, utilizînd și valoarea lui $\varpi_0^{[n]}$ calculată mai sus. Acest sistem liniar ne furnizează prin rezolvare celelalte constante $D_{2(p+1)}, D_{2(p+2)}, \ldots, D_{2(n-1)}$.

6. Înlocuind valorile astfel obținute pentru D_{2k} în sistemul (T) rezultă valorile constantelor A_{2q} și C_{2q}.

După cum se poate ușor observa, în considerațiile făcute pînă în prezent s-au socotit aripile simetrice, indiferent dacă simetria era naturală sau forțată. Vom face acum particularizări:

a. Aripi cu simetrie naturală

În expresia (5) a vitezei axiale de perturbație, coeficienții $A_{2q} = 0$, deoarece în acest caz nu există muchie pe centru. Anularea acestor coeficienți reiese și prin calcul. Într-adevăr, în acest caz, $\Delta w_{n-q-1,q} = 0$ deci din (15) rezultă că $D_0 = D_2 = \ldots = D_{2p} = 0$. Cum acești coeficienți, conform observației *e*), nu se exprimă decît în funcție de A_{2q} (liniar și omogen) rezultă că anularea lor atrage și anularea coeficienților A_{2q} așa cum ne așteptam. Constantele nenule $D_{2(p+1)}, D_{2(p+2)}, \ldots, D_{2(n-1)}$ rămase se determină din relațiile (19) unde însă

$$N_{2q} = \frac{(n-1)!\, l^{2(n+q-p-1)} \quad w_{n-2q-1,2q}}{C_{n-1}^{q}}, \tag{20'}$$

iar $q = [0,1, \ldots, (n-p-2)]$ cu p dat de (14).

b. Aripi cu simetrie forţată

În acest caz $w_{n-2q-1,2q} = 0$ dar $\Delta\, w_{n-2q-2,2q+1} = 2\, w_{n-2q-2,2q+1}$ deci primii $(p+1)$ coeficienţi $D_0, D_2, \ldots, D_{2p}$ nu se mai anulează, valorile lor fiind date de relaţiile (10). Ţinînd seamă de observaţia e) se constată că aceşti coeficienţi caracterizează aripile cu simetrie forţată deoarece ei sînt direct legaţi de saltul de pe centru. Ceilalţi coeficienţi $D_{2(p+1)}, \ldots$ $\ldots, D_{2(n-1)}$ se obţin tot din relaţiile (19) unde însă

$$N_{2q} = -\frac{\tilde{\varpi}_{2(0-q)}\, D_0 + \tilde{\varpi}_{2(1-q)}\, l^2 D_2 + \cdots + \tilde{\varpi}_{2(p-q)}\, l^{2p} D_{2p}}{l^{2(p+1)}}, \qquad (20'')$$

iar p şi q au semnificaţia indicată mai sus.

Primită la redacţie la 4 iulie 1958.

О НЕКОТОРЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛАХ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОСЕВОЙ СКОРОСТИ ВОЗМУЩЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе дается алгорифм для расчета коэффициентов осевой скорости возмущения u для тонкого симметричного треугольного крыла, обтекаемого сверхзвуковым потоком.

Из граничных условий задачи получаются линейные соотношения, определяющие эти коэффициенты.

В эти соотношения входят интегральные выражения, обозначенные через $\omega_{\pm k}^{[n]}$, и задача сводится, в конечном счете, к их вычислению.

Однако выражениям $\omega_{\pm k}^{[n]}$ присущи простые рекуррентные свойства, дающие возможность получить их при помощи аналогичных выражений $\omega_{\pm q}^{[n-1]}$, написанных для однородного движения порядка $(n-1)$ путем простых сложений и вычитаний, за исключением лишь выражений $\omega_{o}^{[n]}$, для получения которого надо еще вычислить интеграл $I_{0}^{[n]}$, именуемый основным интегралом.

Изложенные соображения действительны для симметричных крыльев независимо от того, является ли симметрия естественной или вынужденной (в последнем случае крыло имеет в центре ребро). Путем рассмотрения частных случаев получаются характеристики обоих типов симметричных крыльев.

SUR CERTAINES FORMULES DE RÉCURRENCE POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA VITESSE AXIALE DE PERTURBATION, LORS DES MOUVEMENTS HOMOGÈNES D'ORDRE SUPÉRIEUR

RÉSUMÉ

L'auteur indique dans ce travail un algorithme pour le calcul des coefficients de la vitesse axiale de perturbation u, pour une aile triangulaire mince, symétrique, située en courant supersonique.

En imposant les conditions à la limite du problème, on obtient des relations linéaires qui déterminent les coefficients cherchés.

Puisque, dans ces relations, apparaissent les expressions intégrales notées par $\omega_{\pm k}^{[n]}$, le problème se réduit, en dernière analyse, à leur calcul.

Mais, les expressions $\omega_{\pm k}^{[n]}$ jouissent de propriétés de récurrence simples, ce qui permet de les calculer au moyen des expressions analogues $\omega_{\pm q}^{[n-1]}$, écrites pour le mouvement homogène d'ordre $(n-1)$, par des opérations simples, d'addition et de soustraction, à l'exception toutefois de la seule expression $\omega_{0}^{[n]}$; pour obtenir cette dernière expression, il faut en outre calculer une seule intégrale $I_{0}^{[n]}$, appelée intégrale de base.

Ces considérations restent valables pour les ailes symétriques, que leur symétrie soit naturelle ou forcée. (Dans ce dernier cas, l'aile a une arête qui passe par le centre). En faisant des applications à des cas particuliers, on obtient les caractéristiques spécifiques des deux types d'ailes symétriques.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, M. IONESCU. *Écoulements coniques d'ordre superieur autour des ailes triangulaires minces ou à epaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, **II,** *1,* 5 (1957).
2. PAUL GERMAIN, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes Delta en regime supersonique.* La Recherche Aéronautique, *7* (1949).
3. E. CARAFOLI, A. NASTASE, *Studiul aripilor triunghiulare subţiri cu simetrie forţată în curent supersonic.* Studii şi cercetări de Mecanică aplicată, **IX,** *4,* 833 (1958).

SURSA CONTINUU REPARTIZATĂ SITUATĂ ÎNTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ

DE

DAN GH. IONESCU

Mişcarea fluidelor perfecte incompresibile în jurul corpurilor axial-simetrice, situate în conducte circulare, poate fi studiată folosind metoda Rankine-Fuhrmann, adică suprapunînd un curent paralel peste un sistem de surse sau dublete, punctiforme sau liniforme. Expresia sursei punctiforme, situată în axa unei conducte circulare, a fost dată de H. Lamb [3], D. Dumitrescu [2], S. N. Barua [1] şi Ph. Levine [4] sub forma

$$\frac{2\pi R^2}{Q}\Phi = \begin{cases} x - R\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{-\beta_n \frac{x}{R}}, & (x > 0), \\ -x - R\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{\beta_n \frac{x}{R}}, & (x < 0), \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{2\pi R^2}{Q}\Psi = \begin{cases} \frac{1}{2}(y^2 - R^2) + y R\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{-\beta_n \frac{x}{R}}, & (x > 0), \\ -\frac{1}{2}(y^2 - R^2) - y R\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{\beta_n \frac{x}{R}}, & (x < 0), \end{cases} \tag{2}$$

unde (x,y) este sistemul de axe rectangulare din planul meridian al mişcării, Ox axa de simetrie, R raza conductei, Q debitul sursei, J_0, J_1 sînt funcţiile Bessel de speţa întîi şi de ordinele zero respectiv unu, β_n rădăcinile funcţiei J_1, iar $A_n = 1/\beta_n J_0^2(\beta_n)$.

Ne propunem să găsim soluţia pentru cazul unei surse liniforme, continuu repartizată pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant a$ al axei de simetrie. Expresia unei surse elementare, situată pe axa de simetrie la distanța s de origine $(0 \leqslant s \leqslant a)$, este

$$d\Phi = \begin{cases} d\Phi_1 \equiv \dfrac{q(s)\,ds}{2\pi R^2}\left[(x-s) - R\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{-\beta_n \frac{x-s}{R}}\right], & (s < x), \\ d\Phi_2 \equiv \dfrac{q(s)\,ds}{2\pi R^2}\left[-(x-s) - R\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{\beta_n \frac{x-s}{R}}\right], & (s > x), \end{cases} \tag{3}$$

$$d\Psi = \begin{cases} d\Psi_1 \equiv \dfrac{q(s)\,ds}{2\pi R^2}\left[\dfrac{1}{2}(y^2 - R^2) + y R\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{-\beta_n \frac{x-s}{R}}\right], & (s < x), \\ d\Psi_2 \equiv \dfrac{q(s)\,ds}{2\pi R^2}\left[-\dfrac{1}{2}(y^2 - R^2) - y R\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\beta_n \frac{y}{R}\right) e^{\beta_n \frac{x-s}{R}}\right], & (s > x). \end{cases} \tag{4}$$

Dacă sursa este continuu repartizată pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant a$, expresiile potențialului de viteze și funcției de curent sînt

$$\Phi = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x d\Phi_1 + \int_x^a d\Phi_2, \\ \displaystyle\int_0^a d\Phi_1, \\ \displaystyle\int_0^a d\Phi_2, \end{cases} \qquad \Psi = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x d\Psi_1 + \int_x^a d\Psi_2, & (0 < x < a), \\ \displaystyle\int_0^a d\Psi_1, & (x > a), \\ \displaystyle\int_0^a d\Psi_2, & (x < 0). \end{cases} \tag{5}$$

Dacă sursa este uniform repartizată pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant a$, $Q = aq$, $q = \text{const.}$, formulele (5) devin

$$\frac{2\pi a R^2}{Q}\Phi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2 + (x-a)^2}{2} - R^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right)\left[2 - e^{\beta_n \frac{x-a}{R}} - e^{-\beta_n \frac{x}{R}}\right], & (0 < x < a), \\ a\left(x - \dfrac{a}{2}\right) - R^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right)\left[e^{-\beta_n \frac{x-a}{R}} - e^{-\beta_n \frac{x}{R}}\right], & (x > a), \\ -a\left(x - \dfrac{a}{2}\right) + R^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\beta_n \frac{y}{R}\right)\left[e^{\beta_n \frac{x-a}{R}} - e^{\beta_n \frac{x}{R}}\right], & (x < 0), \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{2\pi a R^2}{Q}\Psi =$$

$$= \begin{cases} (y^2-R^2)\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{a R^2}{2}+yR^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_nJ_1\left(\beta_n\frac{y}{R}\right)\left[e^{\beta_n\frac{x-a}{R}}-e^{-\beta_n\frac{x}{R}}\right], & \left(0<x<\frac{a}{2}\right), \\ (y^2-R^2)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{a R^2}{2}+yR^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_nJ_1\left(\beta_n\frac{y}{R}\right)\left[e^{\beta_n\frac{x-a}{R}}-e^{-\beta_n\frac{x}{R}}\right], & \left(\frac{a}{2}<x<a\right), \\ \frac{a y^2}{2}+y R^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_nJ_1\left(\beta_n\frac{y}{R}\right)\left[e^{-\beta_n\frac{x-a}{R}}-e^{-\beta_n\frac{x}{R}}\right], & (x>a), \\ -\frac{a y^2}{2}+y R^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_nJ_1\left(\beta_n\frac{y}{R}\right)\left[e^{\beta_n\frac{x-a}{R}}-e^{\beta_n\frac{x}{R}}\right], & (x<0), \end{cases} \tag{7}$$

unde $B_n = A_n/\beta_n$. Această soluţie satisface condiţiile la limită

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad v_y = 0, && \text{pentru } y = R, \\ &(\mathrm{II}) \quad v_x = 0, && \text{pentru } x = \frac{a}{2}, y \neq 0, \\ &(\mathrm{III}) \quad v_y = 0, && \text{pentru } x \to \pm\infty, \\ &(\mathrm{IV}) v_x = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi R^2}, & \text{pentru } x \to +\infty, \\ \frac{-Q}{2\pi R^2}, & \text{pentru } x \to -\infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

De asemenea, avem $\Psi = 0$ pentru $y = 0$, $x > a$, $x < 0$. Pentru $x = a/2$, funcţia de curent este discontinuă

$$\frac{2\pi a R^2}{Q}\Psi = \begin{cases} -\frac{a R^2}{2} & \text{pentru } x = \frac{a}{2} - 0, \\ \frac{a R^2}{2} & \text{pentru } x = \frac{a}{2} + 0. \end{cases} \tag{9}$$

Aplicarea acestor formule la studiul unor cazuri concrete va face obiectul unui articol ulterior.

Primit la redacţie la 27 septembrie 1958

НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ИСТОЧНИК В КРУГЛОМ ТРУБОПРОВОДЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается выражение линейного непрерывного источника, находящегося на конечном отрезке оси симметрии в круглом трубопроводе.

SOURCE À RÉPARTITION CONTINUE SITUÉE DANS UNE CONDUITE CIRCULAIRE

RÉSUMÉ

L'auteur donne dans ce travail l'expression d'une source continue, de forme linéaire, située sur un segment fini de l'axe de symétrie, dans une conduite circulaire.

BIBLIOGRAFIE

1. S. N. BARUA, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., **VIII,** 22—29 (1955).
2. D. T. DUMITRESCU, Mitteilungen d. Techn. Hochsch. Bukarest, **XV,** 70—76 (1944).
3. H. LAMB, Reports and Memoranda, London, 1010 (1926).
4. PHILIP LEVINE, Journ. of the Aeron. Sci., 33—36 (1958).

ASUPRA EXPLOATĂRII SIMULTANE A UNUI SISTEM DE STRATE PRINTR-O SINGURĂ SONDĂ ÎN REGIM ELASTIC

DE

PAUL IONESCU

Deoarece în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide în multe cazuri mediul poros este alcătuit dintr-o succesiune de strate permeabile, separate prin intercalații impermeabile, în lucrarea de față s-a indicat soluționarea problemei curgerii nestaționare a unui fluid omogen și compresibil printr-un sistem de strate paralele, de permeabilități diferite, spre o sondă perfectă hidrodinamic. Pentru simplificare, stratele se admit paralele, separate hidrodinamic și de dimensiuni infinite.

Considerînd sonda ca o sursă punctiformă și utilizînd soluțiile corespunzătoare precum și condițiile problemei (căderea de presiune în sondă aceeași pentru toate stratele, neglijînd efectul gravitației și debitul total egal cu suma debitelor fiecărui strat), se obține un sistem de ecuații integrale tip Volterra, de speța întîi. Deoarece nucleele ecuațiilor integrale sînt de tip special, s-a utilizat transformarea Laplace pentru aflarea funcțiilor necunoscute $q_i\,(t)$, impunînd cunoscut fie debitul sondei, fie căderea de presiune în sondă. După precizarea condițiilor privitoare la debit, respectiv căderea de presiune, originalele funcțiilor transformate $\overline{q}_i\,(s)$ se determină utilizînd teorema inversiunii.

Căderea de presiune la distanța r de centrul unei sonde cu raza r_s, dacă notăm cu h grosimea stratului, cu k permeabilitatea și introducem coeficientul de piezoconductibilitate a*), este dată de relația [1]

$$\Delta p\,(r,t) = \frac{\eta}{4\pi\,kh}\int_0^t \frac{(q\,\lambda)}{t-\lambda}\, e^{-\frac{r_s^2+r^2}{4a\,(t-\lambda)}}\, I_0\left[\frac{r_s\,r}{2a\,(t-\lambda)}\right] d\lambda, \qquad (1)$$

unde η este viscozitatea dinamică a fluidului, iar $I_0\,(x)$ — funcția Bessel de speța întîi, de ordin zero și argument imaginar.

---

*) Coeficientul de piezoconductibilitate reprezintă raportul $a = \dfrac{k}{m\beta\eta}$, unde β este coeficientul de compresibilitate al fluidului și m porozitatea.

Pentru cele n strate, ţinînd seama de (1) şi presupunînd $r = r_s$, se pot scrie următoarele relaţii referitoare la căderea de presiune pe peretele găurii de sondă

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_1(t) &= C_1 \int_0^t \frac{q_1(\lambda)}{2(t-\lambda)} e^{-\frac{\alpha_1^2}{2(t-\lambda)}} I_0\left[\frac{\alpha_1^2}{2(t-\lambda)}\right] d\lambda, \\ \Delta p_2(t) &= C_2 \int_0^t \frac{q_2(\lambda)}{2(t-\lambda)} e^{-\frac{\alpha_2^2}{2(t-\lambda)}} I_0\left[\frac{\alpha_2^2}{2(t-\lambda)}\right] d\lambda, \\ &\vdots \\ \Delta p_n(t) &= C_n \int_0^t \frac{q_n(\lambda)}{2(t-\lambda)} e^{-\frac{\alpha_n^2}{2(t-\lambda)}} I_0\left[\frac{\alpha_n^2}{2(t-\lambda)}\right] d\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

în care s-au notat $\alpha^2 = \frac{r_s}{a}$ şi $C = \frac{\eta}{2\pi k h}$ (indicele reprezentînd numărul de ordine al stratului).

Pe de altă parte, debitul sondei Q (t) este egal cu suma debitelor fiecărui strat în parte q (t) şi deci

$$Q\,(t) = q_1\,(t) + q_2\,(t) + \dots + q_n\,(t). \qquad (3)$$

De asemenea, deoarece stratele comunică prin sondă, căderea de presiune pe peretele acesteia, neglijînd efectul gravitaţiei, va fi aceeaşi

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_2(t) = \dots = \Delta p_n(t) = \Delta p(t). \qquad (4)$$

Ţinînd seama de relaţiile (2), (3) şi (4) se obţine următorul sistem de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} \Delta p\,(t) &= C_i \int_0^t \frac{q^i(\lambda)}{2(t-\lambda)} e^{-\frac{\alpha_i^2}{2(t-\lambda)}} I_0\left[\frac{\alpha_i^2}{2(t-\lambda)}\right] d\lambda, \\ Q(t) &= \sum_{i=1}^{h} q_i(t). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Dacă se admite debitul sondei Q (t) cunoscut în timp, problema se reduce la soluţionarea sistemului de ecuaţii (5) în raport cu funcţiile necunoscute q_i (t) şi Δp (t). În mod analog dacă se presupune căderea de presiune Δp (t) cunoscută, rezolvarea sistemului amintit conduce la determinarea debitului fiecărui strat q_i (t) şi a debitului sondei $Q(t)$.

În ambele cazuri deci, este necesară rezolvarea sistemului de ecuaţii (5). După cum se vede, primele n ecuaţii sînt ecuaţii integrale de tip Volterra de speţa întîi, cu nuclee de tip special, iar pentru rezolvarea acestora în raport cu funcţiile necunoscute q_i (t) se va utiliza transformarea

Laplace [2]*). Aplicînd transformarea Laplace sistemului de ecuaţii (5) şi utilizînd teorema convoluţiei

$$\bar{f}_1(s)\cdot\bar{f}_2(s) \mathrel{\underset{\cdot}{\longrightarrow}} \int_0^t f_1(\lambda)\cdot f_2(t-\lambda)\,d\lambda,$$

se obţine sistemul de ecuaţii liniare în raport cu funcţiile transformate

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\bar{p}(s) = C_i\,\bar{q}_i(s)\cdot I_0(\alpha_i\sqrt{s})\,K_0(\alpha_i\sqrt{s}),\\ &\bar{Q}(s) = \sum_{i=1}^{n}\bar{q}_i(s), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

unde s-a ţinut seama de relaţia [3]

$$I_0(\alpha\sqrt{s})\,K_0(\alpha\sqrt{s}) \mathrel{\underset{\cdot}{\longrightarrow}} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2t}}}{2t}\,I_0\left(\frac{\alpha^2}{2t}\right),$$

K_0(x) fiind funcţia Bessel de speţa a doua, ordinul zero şi argument imaginar.

Precizînd natura funcţiilor $Q\ (t)$ sau $\Delta p\ (t)$, se pot obţine funcţiile transformate necunoscute $q_i\ (s)$ şi cu ajutorul formulei de inversiune a lui Mellin se determină valorile originalelor $q_i\ (t)$; cunoscînd originalele prin intermediul uneia din primele relaţii (5), se determină valoarea căderii de presiune $\Delta p\ (t)$ sau, în cazul în care se presupune cunoscută căderea de presiune $\Delta p\ (t)$, cu ajutorul ultimei relaţii (5), debitul de fluid $Q(t)$. În mod analog, utilizînd relaţia (1) se poate determina distribuţia presiunii în întregul sistem de strate.

Trebuie menţionat faptul că soluţiile se pot aplica şi în probleme similare de transmiterea căldurii.

Primită la redacţie la 27 septembrie 1958.

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЛАСТОВ ОДНОЙ СКВАЖИНОЙ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной работе автор рассматривает приток сжимаемой жидкости через пористую среду, сложенную рядом параллельных пластов разной проницаемости, к гидродинамически идеальной скважине. Предполагая

---

* Dacă $f(t)$ este o funcţie de timp, transformarea Laplace a acesteia este $f(s) = \\ = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$.

известным дебит скважины в зависимости от времени или перепада давления, автор соответственно устанавливает систему интегральных уравнений типа Вольтерра первого порядка, для решения которых применяется преобразование Лапласа.

SUR L'EXPLOITATION SIMULTANÉE D'UN SYSTÈME DE COUCHES PAR UNE SEULE SONDE, EN RÉGIME ÉLASTIQUE

RÉSUMÉ

Dans cette note, l'auteur considère l'écoulement vers une sonde, parfaite au point de vue hydrodynamique, d'un fluide compressible, à travers un milieu poreux, formé d'une succession de couches parallèles de différentes perméabilités. En supposant connu le débit de la sonde, fonction du temps ou de la chute de pression, on établit un système d'équations intégrales du type de Volterra de première espèce, pour la résolution desquelles on applique la transformation de Laplace.

BIBLIOGRAFIE

1. M. MUSCAT, *The Flow of Homogeneus Fluids through Porous Media.* Mc Graw Hill Book Co., New York — London, 1937, 668.
2. V. K. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare.* IV, Ed. tehnică, București, 1956, 161.
3. В. А. ДИТКИН, П. И. КУЗНЕЦОВ, *Справочник по операционному исчислению.* Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951, 227.

ASUPRA POSIBILITĂŢII STABILIRII UNOR FORMULE DE DIMENSIONARE LA FLAMBAJ

DE

MIRCEA SOARE

Normele oficiale de construcţii din diferite ţări impun verificarea elementelor de construcţie supuse diferitelor solicitări. Dimensionarea secţiunilor este lăsată pe seama proiectantului, urmînd ca la verificare, eforturile unitare să fie cît mai apropiate de rezistenţele admisibile corespunzătoare. De cele mai multe ori, dimensionarea se face pe bază de încercări, care, ţinînd seama de experienţa proiectantului, se pot reduce chiar la una singură sau cel mult la două.

În cazul flambajului, cînd materialul poate fi solicitat în domeniul elastic sau plastic şi la care o creştere mică a sarcinii poate atrage creşteri mari ale eforturilor unitare în secţiune, problema dimensionării prin încercări devine mai complicată.

Încercările din literatura tehnică de a găsi o metodă de dimensionare la flambaj pot fi grupate în următoarele trei :

a) metoda coeficienţilor de profil k,

b) metoda razelor de inerţie,

c) metoda coeficienţilor ζ.

Dintre cele trei metode enumerate mai sus, prima este susceptibilă de discuţii şi rezultate interesante, de aceea ne vom ocupa mai de aproape de ea.

★

În cele ce urmează, vom utiliza următoarele notaţii :

P — forţa de compresiune aplicată la capetele barei,

A — aria secţiunii transversale a barei,

A_{nec} — secţiunea brută necesară,

I — momentul de inerţie al secţiunii,

i — raza de inerţie minimă a secţiunii,

l — lungimea barei, presupusă dublu articulată (pentru alte moduri de rezemare la capete, se consideră lungimea de flambaj l_f),

$k = A^2/I$ — coeficient de profil al secțiunii (pentru o aceeași formă de secțiune, k variază puțin — cînd dimensiunile variază — astfel încît, cel puțin într-o primă aproximație el poate fi considerat constant),

$\lambda = l/i$ — coeficientul de subțirime a barei,

λ_e — coeficientul de subțirime la limita elastică,

φ — coeficient de flambaj,

σ_{ac} — rezistența admisibilă la compresiune (pură),

σ_{af} — rezistența admisibilă la flambaj,

σ_{afe} — rezistența admisibilă la flambaj, la limita elastică.

Ținînd seama de notațiile precedente, λ poate fi scris succesiv

$$\lambda = \frac{l}{i} = l\sqrt{\frac{A}{I}} = l\sqrt{\frac{A^2}{AI}},$$

sau final

$$\lambda = \frac{l\sqrt{k}}{\sqrt{A}} \cdot \tag{1}$$

Rezistențele admisibile la flambaj și la compresiune sînt legate prin relația

$$\sigma_{af} = \varphi \cdot \sigma_{ac}.$$

Influența anumitor excentricități inițiale poate fi înglobată în valorile coeficientului de flambaj φ, care depinde în ultima analiză de λ [1].

Ținînd seama de observația precedentă, vom putea admite că bara este solicitată la flambaj centric; dimensionarea va fi economică atunci cînd, la limită, efortul unitar din secțiune va fi egal cu rezistența admisibilă la flambaj, adică

$$\frac{P}{A} = \sigma_{af}. \tag{2}$$

Cum între λ și σ_{af} subsistă o relație de forma

$$F\,(\lambda,\ \sigma_{af}) = 0, \tag{3}$$

indiferent dacă materialul este solicitat în domeniul elastic sau plastic, este posibil să eliminăm pe λ și σ_{af} între relațiile (1), (2), (3).

Rezultă astfel o ecuație

$$F\left(\frac{l\sqrt{k}}{\sqrt{A}},\ \frac{P}{A}\right) = 0, \tag{4}$$

care determină *secțiunea necesară* A_{nec}. Aceasta este formula de dimensionare căutată.

Evident că forma generală (4) nu este proprie unor scopuri practice, de aceea, vom da mai jos particularizările cele mai importante, cu exprimarea *explicită* a lui A_{nec}. Cazurile studiate înglobează ca niște cazuri particulare rezultatele cunoscute pînă acum în literatura despre flambaj.

1. σ_{af} se exprimă explicit funcție de λ

Considerăm o dezvoltare în serie limitată—adică aproximăm funcția (3) cu o curbă de interpolare — de forma

$$\sigma_{af} = f\,(\lambda) = \frac{B_{-m}}{\lambda^m} + \frac{B_{1-m}}{\lambda^{m-1}} + \dots + \frac{B_{-2}}{\lambda^2} + \frac{B_{-1}}{\lambda} + $$

$$+ B_0 + B_1\lambda + B_2\,\lambda^2 + \dots B_n\,\lambda^n \tag{5}$$

unde coeficienții B_{-m}, B_0, B_n sînt cunoscuți ; cu aceasta, relația (4) devine :

$$\frac{P}{A} = B_{-m}\cdot\frac{A^{\frac{m}{2}}}{l^m\,k^{\frac{m}{2}}} + B_{1-m}\cdot\frac{A^{\frac{m-1}{2}}}{l^{m-1}\cdot\,k^{\frac{m-1}{2}}} + \dots + B_{-2}\cdot\frac{A}{l^2k} + B_{-1}\cdot\frac{\sqrt{A}}{l\sqrt{k}} + $$

$$+ B_0 + B_1\frac{l\sqrt{k}}{\sqrt{A}} + B_2\frac{l^2k}{A} + \dots + B_n\frac{l^n\,k^{\frac{n}{2}}}{A^{\frac{n}{2}}}\,.$$

Notînd, pentru simplificare,

$$A = x^2 \tag{6}$$

și ordonînd termenii ecuației precedente, rezultă final

$$\frac{B_{-m}}{l^m\,k^{\frac{m}{2}}}\cdot x^{m+n} + \frac{B_{1-m}}{l^{m-1}\cdot\,k^{\frac{m-1}{2}}}\cdot x^{m+n-1} + \dots + \frac{B_{-2}}{l^2k}\,x^{n+2} + \frac{B_{-1}}{l\sqrt{k}}\,x^{n+1} + B_0\,x^n + $$

$$+ B_1\,l\sqrt{k}\cdot x^{n-1} + (B_2\,l^2\,k - P)\,x^{n-2} + B_3\,l^3\,k^{\frac{3}{2}}\,x^{n-3} + \dots$$

$$\dots + B_{n-1}.\,l^{n-1}\cdot k^{\frac{n-1}{2}}\,x + B_n\,l^n\,k^{\frac{n}{2}} = 0. \tag{7}$$

Forma generală a ecuației (7) nu permite o discuție a rădăcinilor, însă se poate afirma cu siguranță că există cel puțin o rădăcină pozitivă. O dată cunoscută această rădăcină, secțiunea necesară rezultă din (6).

Cazuri particulare

a) Fie $m = 0$ și $n = 1$.

Relația (5) are forma liniară

$$\sigma_{af} = B_0 + B_1\;\lambda \;\text{ sau }\; \sigma_{af} = a - b\lambda \;\; (a,\; b > 0), \tag{8}$$

adică este de *tip Tetmajer*.

Ecuația (7) se scrie

$$B_0x^2 + B_1\,l\sqrt{k}\cdot x - P = 0 \;\text{ sau }\; ax^2 - b\,l\sqrt{k}\cdot x - P = 0, \tag{9}$$

cu rădăcina convenabilă

$$x = \frac{bl\sqrt{k} + \sqrt{b^2\, l^2\, k + 4\, Pa}}{2a},$$

$$A_{nec} = \frac{b^2\, l^2\, k + 2Pa + b\, l\sqrt{k}\cdot\sqrt{b^2\, l^2\, k + 4Pa}}{2a^2}. \tag{10}$$

Particularizînd formula (8) cu valorile numerice $B_0 = 1\,600$ kg/cm^2 şi $B_1 = -8$ kg/cm^2 regăsim formula

$$\sigma_{af} = 1\,660 - 8\lambda,$$

discutată în [1].

Introducînd aceste valori în (10) şi schimbînd convenabil unităţile de măsură, rezultă

$$A_{nec} = \frac{P}{1{,}66} + \frac{l^2 k}{8{,}61125}\left(1 + \sqrt{1 + 10{,}375\,\frac{P}{l^2 k}}\right)$$

(P în tone, l în metri, A_{nec} în cm^2).

Formule similare se găsesc în [2].

b) Fie $m = 0$ şi $n = 2$.

Relaţia (5) are forma parabolică

$$\sigma_{af} = B_0 + B_1\,\lambda + B_2\lambda^2. \tag{11}$$

Ecuaţia (7) se scrie

$$B_0 x^2 + B_1\, l\sqrt{k}\cdot x - P + B_2\, l^2 k = 0 \tag{12}$$

şi are aceeaşi formă ca (9), cu excepţia termenului constant.

Determinînd rădăcina convenabilă a ecuaţiei, secţiunea necesară este dată de formula

$$A_{nec} = \frac{B^2\, l^2\, k + 2B_0\,(P - B_2\, l^2\, k) - B_1\, l\sqrt{k}\sqrt{B_1^2\, l^2\, k + 4B_0\,(P - B_2\, l^2\, k)}}{2B_0^2}. \tag{13}$$

Dacă $B_1 = 0$, relaţiile precedente se reduc la o formă mult mai simplă

$$\sigma_{af} = B_0 + B_2\,\lambda^2, \tag{14}$$

$$A_{nec} = \frac{P}{B_0} - \frac{B_2}{B_0}\,kl^2, \tag{15}$$

prescrisă de vechile norme germane pentru poduri metalice (BE 1934). O formulă similară se obţine pentru construcţii de lemn, plecînd de la formula propusă de Kocetkov (citat după [3]).

Coeficienţii B_0 şi B_2 se pot determina astfel încît curba (14) să satisfacă următoarele condiţii :

— pentru $\lambda = 0 \rightarrow \sigma_{af} = \sigma_{ac}$,

— pentru $\lambda = \lambda_e \rightarrow \sigma_{af} = \sigma_{afe}$.

Rezultă astfel

$$B_0 = \sigma_{ac}\,; \quad B_2 = -\frac{\sigma_{ac} - \sigma_{afe}}{\lambda_e^2},$$

$$\sigma_{af} = \sigma_{ac} - \frac{\sigma_{ac} - \sigma_{afe}}{\lambda_e^2}\lambda^2, \tag{14'}$$

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{ac}} - \frac{\sigma_{ac} - \sigma_{afe}}{\sigma_{ac}\,\lambda_e^2} k l^2. \tag{15'}$$

Aplicînd soluția precedentă pentru OL 38 și OL X 52 și aproximînd curbele rezistențelor admisibile (pe baza cărora s-au calculat coeficienții de flambaj în STAS 764—49 și STAS 1909—54 pentru aceste oțeluri), autorul a stabilit următoarele formule simple de dimensionare [4], [5]:

— pentru OL 38, în domeniul plastic ($20 \leqslant \lambda \leqslant 105$)

$$A_{nec} = \frac{P}{1{,}4} + 0{,}4 k\, l^2,$$

— pentru OL X 52, în domeniul plastic ($20 \leqslant \lambda \leqslant 85$)

$$A_{nec} = \frac{P}{2{,}1} + 0{,}6 k\, l^2$$

(P în tone, l în metri, A_{nec} în cm^2).

c) Fie $m = 2$ și $n = 0$.

Luînd $B_{-2} = \frac{\pi^2 E}{c_f}$ se regăsește *formula lui Euler*. Din (7) se deduce

$$A_{nec} = \frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{c_f P k}{E}}\,. \tag{16}$$

Introducînd valorile numerice $c_f = 2{,}4$ și $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2, rezultă

$$A_{nec} = 1{,}08\, l \sqrt{Pk}$$

(P în tone, l în metri, A_{nec} în cm^2) stabilită în [4], cu valabilitate în domeniul elastic ($\lambda_e \leqslant \lambda \leqslant 250$).

d) Fie $m = 0$ și $n = 4$.

Ecuația curbei rezistențelor admisibile este de forma

$$\sigma_{af} = a - b\,\lambda^4 \qquad (a,\, b > 0). \tag{17}$$

Pentru diferite valori numerice ale lui a și b, formula (17) se găsește în [2]. Din (7) se deduce final

$$A_{nec} = \frac{P}{2a}\left(1 + \sqrt{1 + 4ab\frac{l^4 k^2}{P^2}}\right)\cdot \tag{18}$$

2. λ se exprimă explicit funcţie de σ_{af}

Considerăm o dezvoltare în serie limitată —adică aproximarea funcţiei (3) cu o curbă de interpolare — de forma

$$\lambda = f\,(\sigma_{af}) = \frac{B_{-m}}{\sigma^m} + \frac{B_{1-m}}{\sigma^{m-1}} + \ldots + \frac{B_{-2}}{\sigma^2} + \frac{\beta_{-1}}{\sigma} + B_0 + B_1\sigma +$$

$$+ B_2\sigma^2 + \ldots + B_n\,\sigma^n. \tag{19}$$

Notînd pentru simplificare

$$A = \frac{P}{y^2} = \frac{P}{\sigma_{af}} \tag{20}$$

şi introducînd noua variabilă în (19) şi (1), rezultă

$$B_n y^{2m+2n} + B_{n-1}\,y^{2m+2n-2} + \ldots + B_1 y^{2m+2} + B_0 y^{2m} + B_{-1} y^{2m-2} + \ldots$$

$$\ldots + B_{1-m}\,y^2 - \frac{l\sqrt{k}}{\sqrt{P}}\,y + B_{-m} = 0. \tag{21}$$

Forma generală a ecuaţiei (21) nu permite o discuţie a rădăcinilor, însă se poate afirma cu siguranţă că există cel puţin o rădăcină pozitivă. O dată cunoscută această rădăcină, secţiunea necesară rezultă din (20).

Şi aici se pot face diferite particularizări. De exemplu, limitîndu-ne la termenii B_0, $B_1 \neq 0$, se obţine din nou soluţia tip Tetmajer, de care ne-am ocupat precedent.

3. λ^2 se exprimă explicit funcţie de σ_{af}

Considerăm legea de variaţie

$$\lambda^2 = f(\sigma_{af}) = \frac{B_{-m}}{\sigma^m} + \frac{B_{1-m}}{\sigma^{m-1}} + \ldots + \frac{B_{-2}}{\sigma^2} + \frac{B_{-1}}{\sigma} B_0 + B_1\,\sigma + B_2\sigma^2 + \ldots + B_n\sigma^n. \tag{22}$$

Procedînd ca mai sus, A_{nec} va rezulta din rezolvarea ecuaţiei

$$\frac{B_m}{P^m} A^{m+n} + \frac{B_{1-m}}{P^{m-1}} A^{m+n-1} + \ldots + \frac{B_{-1}}{P} A^{n+1} + B_0 A^n + (B_1 P - l^2 k)A^{n-1} +$$

$$+ B_2 P^2 A^{n-2} \ldots + B_{n-1}\,P^{n-1}\,A + B_n\,P^n = 0. \tag{23}$$

Cazuri particulare

a) Fie $m = 0$ şi $n = 1$.

Se recade peste relaţia (14) transcrisă cu alţi coeficienţi.

b) Fie $m = 2$ şi $n = 0$.

Se regăsește formula Euler.

c) Fie $m = 1$ și $n = 0$.

Relația (22) se reduce la

$$\lambda^2 = B_0 + \frac{B_{-1}}{\sigma_{af}} \tag{24}$$

sau explicitînd pe σ_{af} și alegînd alte constante ($B_0 = -a$, $B_1 = a\,\sigma_0$)

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_0}{1 + a\lambda^2} \quad (a > 0), \tag{24'}$$

adică o *formulă de tip Navier-Schwarz-Rankine*. Formule de acest tip sînt recomandate de prescripții americane pentru oțel de construcții, în domeniul elastic ($\lambda > 120$) [2].

Ecuația (23) se reduce la

$$A^2 - \frac{P}{\sigma_0} A - \frac{Pl^2 k}{a\,\sigma_0} = 0, \tag{25}$$

cu rădăcina convenabilă

$$A_{nec} = \frac{P}{2\sigma_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_0}{a} \cdot \frac{l^2 k}{P}}\right) \cdot \tag{26}$$

d) Fie $m = 0$ și $n = 2$.

Relația (22) se scrie

$$\lambda^2 = B_0 + B_1\,\sigma_{af} - B_2\,\sigma_{af}^{2}\,. \tag{27}$$

După cum $B_2 \lessgtr 0$, curba reprezentativă σ_{af}, λ este o hiperbolă sau o elipsă.

Ecuația (23) se reduce la

$$B_0 A^2 - (B_1 P - l^2 k)\,A - B_2 P^2 = 0, \tag{28}$$

cu rădăcina

$$A_{nec} = \frac{l^2 k - B_1 P \pm \sqrt{(l^2 k - B_1 P)^2 - 4 B_0 B_2 P^2}}{2 B_0} \tag{29}$$

(dacă $B_0 B_2 < 0$ se ia semnul + înaintea radicalului).

★

Pentru alte moduri de exprimare a corelației λ, σ_{af}, problema determinării secțiunii necesare se va examina de la caz la caz, urmînd principiul general expus la începutul prezentului studiu.

Primită la redacție la 18 iulie 1958

О ВОЗМОЖНОСТИ УСТАНОВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ РАСЧЕТА НА ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

При помощи метода профильного коэффициента *k* устанавливается уравнение, определяющее необходимое сечение стержня, работающего на продольный изгиб. Общие формулы, полученные в этой работе, объединяют все частные классические случаи.

DE LA POSSIBILITÉ D'ÉTABLIR DES FORMULES POUR DÉTERMINER LES DIMENSIONS DE RÉSISTANCE AU FLAMBAGE

RÉSUMÉ

L'auteur établit l'équation qui détermine la section nécessaire d'une barre soumise au flambage, en partant de la méthode du coefficient de profil *k*. Les formules générales développées dans ce travail embrassent tous les cas particuliers classiques.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BELEŞ, M. SOARE, *Probleme de instabilitate elastică în construcţiile metalice.* Standardizarea, *1* şi *2* (1958).
2. R. J. ROARK, *Formulas for Stress and Strain.* Ed. a II-a, Mc Graw-Hill Book Company — London, 1943.
3. A. I. OTRESKO, *Construcţii de lemn*, OPED, Bucureşti, 1952.
4. M. SOARE, *Dimensionarea barelor metalice supuse la flambaj.* Industria construcţiilor, *4—5*, 30—34 (1952).
5. M. SOARE, *Construcţii metalice. Comentarii STAS*, E.S.A.C., Bucureşti 1955.

ASUPRA TORSIUNII UNOR BARE CILINDRICE NEOMOGENE

DE

FLOREA DINCĂ și NICOLAE BOICU

Problema torsiunii unei bare cilindrice cu incluziuni cilindrice de materiale diferite, în formulare generală este următoarea:

Fie o secțiune normală la generatoare (fig. 1). Să notăm cu C_1 urma suprafeței cilindrice exterioare în planul de secțiune, cu C_i urma suprafeței cilindrice ce separă materialul caracterizat prin modulul de forfecare μ_i, în același plan. Fie S_1 domeniul interior al curbei C_1 și exterior curbelor C_i, iar S_i domeniul interior curbei C_i. Problema este rezolvată prin determinarea unei funcții φ armonică în $\sum\limits_{1,2,3...} S_i$ astfel încît pe frontiera liberă și pe liniile de separație să fie îndeplinite următoarele condiții:

$$\frac{d\varphi}{dn} = ye - xm \text{ în } C_1$$

$$\varphi \text{ continuă în } S = \sum_{1,\,2...} S_i \qquad (1)$$

$$\mu_1\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 - \mu_i\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i = (\mu_1 - \mu_i)(yl - xm)\,\mu C_i,\ i = 1,2\ ...$$

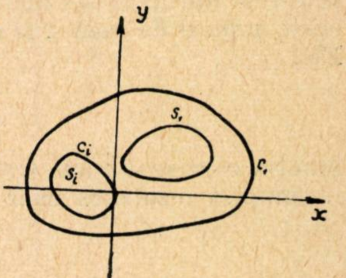


Fig. 1

S-a notat cu $\left(\frac{d}{dn}\right)_i$ derivata pe direcția normalei exterioare față de S_1 la conturul C_i, cu l, m cosinușii directori ai aceleiași normale. Prima relație din (1) reprezintă condiția ca suprafața exterioară să fie liberă de tensiuni, cea de-a doua impune continuitatea deplasărilor, iar cea de-a treia egalitatea eforturilor în lungul liniilor C_i.

Dacă funcția φ este cunoscută, atunci toate mărimile care caracterizează torsiunea se pot determina prin operații elementare, conform formulelor de mai jos

$$x_z = \tau\mu_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)_i,$$

$$y_z = \tau\mu_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)_i,$$

$$D = \sum_{i=1,\,2,\dots} \iint_{S_i} \mu_i\left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\, dy. \tag{2}$$

Soluţii efective în această problemă au fost date între alţii de către

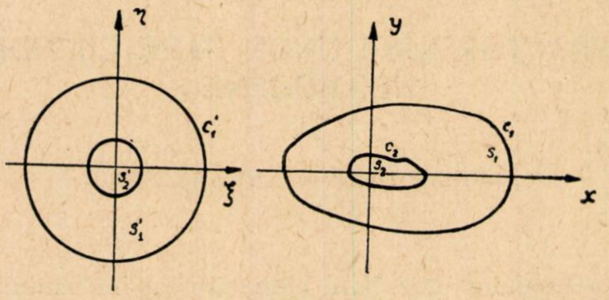


Fig. 2

I. N. Vecua [4], A. K. Ruhadze [3], [4] şi N. I. Mushelişvilli [2].

În lucrarea de faţă se determină funcţia complexă a cărei parte reală satisface condiţiile (1) în cazul particular a două materiale diferite, dacă este cunoscută funcţia care transformă conform domeniul $S_1 + S_2$ în cercul unitar astfel încît C_1 şi C_2 se transformă în două cercuri concentrice, primul de rază 1 şi celălalt de rază $a < 1$ (fig. 2.)
Fie,

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, \zeta^n, \tag{3}$$

funcţia care realizează transformarea conformă de mai sus. Problema va fi complet rezolvată dacă se va determina o funcţie $f(\zeta)$ definită de

$$f(\zeta) = \begin{cases} f_1(\zeta) & \zeta \in S'_1, \\ f_2(\zeta) & \zeta \in S'_2, \end{cases} \tag{4}$$

astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiţii (echivalente condiţiilor (1)) :

$$\mathcal{I}m\, f_1(\zeta) = \frac{z\bar{z}}{2} + K_1 \text{ pe } C'_1,$$

$$\mathcal{R}e\, f_1(\zeta) = \mathcal{R}e\, f_2(\zeta) \text{ pe } C'_2,$$

$$\mu_1[\mathcal{I}m\, f_1(\zeta)] - \mu_2[\mathcal{I}m\, f_2(\zeta)] = (\mu_1 - \mu_2)\frac{z\bar{z}}{2} + K_2 \text{ pe } C'_2. \tag{5}$$

Încercăm o soluție de forma

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \sum_0^\infty \left(a_n \zeta^n + \frac{b_n}{\zeta^n} \right), \\ f_2(\zeta) &= \sum_0^\infty c_n \zeta^n , \end{aligned} \tag{6}$$

cu coeficienții

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n + i\beta_n , \\ b_n &= \gamma_n + i\,\delta_n , \\ c_n &= \eta_n + i\nu_n . \end{aligned} \tag{7}$$

Introducînd funcțiile (6) în condițiile la limită (5) se obține pentru determinarea constantelor (7) un sistem infinit de ecuații algebrice liniare, de o formă particulară. Prin rezolvarea acestui sistem se obține

$$\begin{aligned} \delta_n &= -\frac{1}{2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)(a^n L_{1n} - L_{2n})}{a^{-n}(\mu_1 + \mu_2) - a^n(\mu_1 - \mu_2)}, \\ \nu_n &= \frac{1}{2} L_{1n} - \delta_n (1 + a^{-2n}), \\ \beta_n &= \frac{1}{2} L_{1n} - \delta_n , \\ \gamma_n &= \frac{1}{2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)(a^n M_{1n} - M_{2n})}{a^{-n}(\mu_1 + \mu_2) - a^n(\mu_1 - \mu_2)}, \\ \eta_n &= \frac{1}{2} M_{1n} + \gamma_n (1 + a^{-2n}), \\ \alpha_n &= \frac{1}{2} M_{1n} + \gamma_n , \end{aligned} \tag{8}$$

unde L_{1n}, M_{1n}, L_{2n}, M_{2n} sînt coeficienții Fourier ai funcției $z\bar{z}$ pe C_1' respectiv pe C_2' și care se deduc din (3). Funcția definită de (4) cu ajutorul seriilor (6) satisface formal tuturor condițiilor impuse. Seriile (6) cu coeficienții dați de formulele (8) sînt absolut și uniform convergente, fiind majorate de o combinație liniară, cu coeficienți constanți formată cu termenii generali ai unor serii numerice absolut convergente*). Prin urmare, aceste serii reprezintă soluția efectivă a problemei. Dacă mărimea

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} << 1, \tag{9}$$

---

*) Un calcul simplu conduce la inegalitățile

$$|\gamma_n| \leqslant c_1 |M_{1n}| + C_2 |M_{2n}| \quad \text{și} \quad |S_n| \leqslant C_1' |L_{1n}| + C_2' |L_{2n}|$$

unde C_i și C_i' sînt constante față de n $(i = 1,2)$.

astfel încît λ_1^n pentru $n \geqslant 2$ poate să fie neglijată în raport cu λ_1*) atunci prima și a patra formulă (8) capătă aspectul mai simplu

$$\begin{aligned} \delta_n &= -\frac{1}{2} a^n (a^n L_{1n} - L_{2n}) \lambda_1 \\ \gamma_n &= \frac{1}{2} a^n (a^n M_{1n} - M_{2n}) \lambda_1 \end{aligned} \tag{10}$$

În mod analog, în cazul în care

$$\lambda_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} < < 1, \tag{11}$$

astfel încît λ_2^n poate fi neglijat pentru $n \geqslant 2$ față de λ_2**) aceleași mărimi se pot exprima prin formulele următoare :

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{(a^n L_{1n} - L_{2n}) a^n}{2(1 + a^{2n})} \left(1 - \frac{2\lambda_2}{1 + a^{2n}}\right), \\ \gamma_n &= \frac{(a^n M_{1n} - M_{2n}) a^n}{2(1 + a^{2n})} \left(1 - \frac{2\lambda_2}{1 + a^{2n}}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Formulele (10) și (12) sînt comode în aplicațiile practice. Aplicînd a treia formulă (2) se găsește rigiditatea barei

$$\begin{aligned} D = \mu_1 I_{p_1} + \mu_2 I_{p_2} + \frac{\pi\mu_1}{2} \sum_1^\infty n \, [L_{1n} (\delta_n - \beta_n) - M_{1n} (\alpha_n + \gamma_n)] \\ + \frac{\pi (\mu_1 - \mu_2)}{2} \sum^\infty n a^n \, [M_{2n} \gamma_n + L_{2n} \nu_n]. \end{aligned} \tag{13}$$

În formula (13) s-a notat cu I_{p_1} și I_{p_2} momentele de inerție ale secțiunii S_1 respectiv S_2.

Tensiunile se calculează prin simple derivări conform primelor formule (2).

Dacă în formulele precedente se face $\mu_1 = \mu_2$ se regăsesc formulele stabilite de I. S. Sokolnikof [5] pentru bara cilindrică omogenă.

Aplicație.

Luînd pentru funcția de transformare (3) seria dată de formula lui Schwartz-Christoffel, care transformă conform cercul unitar pe poligonul cu p laturi, se obține

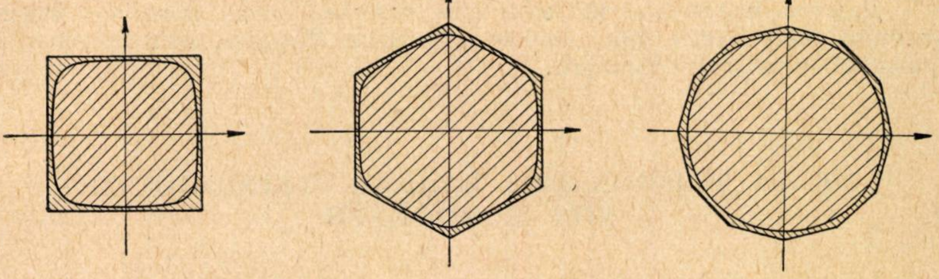
$$d_{kp+1} = \left[1 - \frac{p-2}{2} - \ldots \frac{(p-2)2 \ldots (|p(2-k) - 2|)}{p^k \, k!}\right] \frac{1}{kp+1} \cdot \tag{14}$$

---

*) Cazul barei compuse din materiale cu proprietăţi elastice foarte apropiate.

**) Cazul barei compuse din materiale cu proprietăţi elastice foarte diferite.

Luînd succesiv $p = 4, 6, 12$ şi $a = 0{,}95$ se obţin rezultatele date în tabela de mai jos. Secţiunile barelor se dau în figura 3 (*a*), (*b*), (*c*).



a) b) c)

Fig. 3

În tabelă sînt date rigidităţile în ipoteza în $\lambda_1 << 1$. Cu r s-a notat raza cercului circumscris figurii.

Conturul exterior	$\frac{1}{r^4} D$	Grosimea secţiunii exterioare la mijlocul laturii
Patrat	$0{,}1621\mu_1 + 0{,}1579\mu_2 -$ $-(0{,}000862\mu_1 + 0{,}000577\mu_2)\lambda_1$	$0{,}029\, r$
Exagon	$0{,}2416\, \mu_1 + 0{,}8325\, \mu_2$	$0{,}037\, r$
Duodecagon	$0{,}2894\mu_1 + 1{,}1781\mu_2$	$0{,}050\, r$
Cerc	$0{,}2912\mu_1 + 1{,}279\mu_2$	$0{,}050\, r$

Se vede din tabelă că dacă p creşte, termenii în λ_1 nu aduc contribuţii substanţiale în expresia lui D.

Primită la redacţie la 1 august 1958.

О КРУЧЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе дается общее решение задачи кручения цилиндрического стержня, состоящего из двух различных материалов, разделенных цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными образующим боковой поверхности. Решение получается при помощи

метода Фурье при заданной функции, конформно преобразующей область сечения на единичном круге, причем линии раздела соответствует концентрический круг.

Даются численные расчеты для случая, когда преобразующая функция получается при помощи формулы Шварца, относящейся к правильным многоугольникам.

DE LA TORSION DES BARRES CYLINDRIQUES NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

Les auteurs donnent dans ce travail la solution générale du problème de la torsion d'une barre cylindrique, composée de deux matériaux différents, séparés par une surface cylindrique aux génératrices parallèles à celles de la surface latérale. La solution est élaborée au moyen de la méthode de Fourier, dans le cas où l'on connaît la fonction de transformation conforme du domaine de la section sur le cercle unitaire, de manière qu'un cercle concentrique corresponde à la ligne de séparation.

Des applications numériques sont faites pour le cas où la fonction de transformation est obtenue à l'aide de la formule de Schwartz relative aux polygones réguliers.

BIBLIOGRAFIE

1. MACDONALD H. M., *On the torsional strength of a hollow shaft.* Proc. Cambridge Phylosoph. Soc., **8** (1893).
2. MUSHELISVILLI N. I., *Sur le problême de torsion des poutres élastiques composées.* C. R. Sci. Paris, **194** (1932).
3. РУХАДЗЕ А. К., *Кручения и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов ограниченных эпитрохоидами.* Труды Тбилиского Мат. ин-та, **I** (1937).
4. РУХАДЗЕ А. К., ВЕКУА И. Н., *Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным стержнем.* Известия АН СССР, **3** (1933).
5. SOKOLNIKOF I. S., *Mathematical Théory of Elasticity.* New York-London, 1946.

TUBUL DE ŞOC PENTRU CERCETĂRI DE AERODINAMICĂ

DE

LUCIAN DUMITRESCU

Introducere

Utilizarea tubului de şoc pentru producerea unei scurgeri de aer cu viteză mare, servind la cercetări de aerodinamică, prezintă însemnate avantaje, faţă de sufleriile aerodinamice clasice. În primul rînd, construcţia unui tub de şoc este mult mai simplă decît a unei suflerii avînd aceleaşi dimensiuni ale camerei de experienţe; apoi, puterea instalată necesară obţinerii unei scurgeri supersonice este de aproximativ de o mie de ori mai redusă în primul caz. Pe de altă parte, este adevărat că înregistrarea fenomenelor din tubul de şoc necesită o aparatură electronică special concepută; totuşi, aceste instalaţii nu sînt mult mai complicate decît echipamentul automat al unei suflerii moderne. În afară de folosirea ca suflerie aerodinamică, tubul de şoc are şi alte domenii de utilizare: pentru cercetări de dinamica gazelor, a combustiei etc.

Ţinînd seama de cele de mai sus, la Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R. s-a studiat şi realizat un tub de şoc pentru cercetări de aerodinamică. În lucrarea de faţă se descrie instalaţia realizată, sînt discutate unele probleme în legătură cu proiectarea şi construcţia tubului şi se prezintă rezultatele probelor tehnice şi ale primelor experienţe de vizualizare efectuate cu tubul de şoc.

Autorul mulţumeşte pe această cale acad. prof. E. Carafoli, pentru sprijinul şi îndrumarea acordate încă din faza iniţială a lucrării, care au fost decisive pentru reuşita realizării; de asemenea, aduce mulţumiri colegilor care au colaborat la lucrări: ing. M. Paloş, la proiectarea tubului, şi H. Gab, la punerea la punct a instalaţiei şi efectuarea tuturor lucrărilor experimentale.

1. Consideraţii teoretice

Principiul de funcţionare al unui tub de şoc este cunoscut, fiind expus şi în lucrări anterioare [1], [2]; vom reaminti pe scurt că în esenţă un tub de şoc este un rezervor cilindric sau prismatic alungit, despărţit, printr-o diafragmă, într-o cameră în care se produce o suprapresiune, şi alta în care se face vid (fig. 1). Distrugerea bruscă a diafragmei — cu ajutorul unui dispozitiv de percuţie — face ca echilibrul presiunilor să se restabilească printr-o serie de unde de compresiune şi rarefiere, care se propagă de-a lungul tubului. Aceste fenomene sînt puse în evidenţă foarte convenabil prin reprezentarea lor într-o diagramă avînd în abscisă diferitele secţiuni ale tubului, iar în ordonată, timpul (fig. 2). După cum se poate arăta, în primele momente se propagă în camera de vid, o undă de şoc (*OA* în fig. 2), avînd o viteză de deplasare constantă; în spatele acesteia, aerul din camera de vid este pus în mişcare, luînd astfel naştere o scurgere cu număr Mach M_1. Tot în acelaşi sens, dar mai tîrziu, se deplasează în tub o a doua perturbaţie (linia *OB* în fig. 2), care este suprafaţa de separaţie dintre gazul care iniţial se afla în camera de presiune şi cel din camera de vid; această suprafaţă (care îşi pierde treptat caracterul net prin difuzie) este sediul unei discontinuităţi de temperaturi, dar nu şi de presiuni sau viteze. În consecinţă, în spatele acestei unde, scurgerea va avea un alt număr Mach, M_2. Ulterior se mai propagă şi alte unde — unda de rarefiere *OC*, undele reflectate de capetele tubului etc. — dar, după cum se poate vedea în figura 2, într-o secţiune oarecare *X* a camerei de vid, există un interval de timp, între trecerea a două unde succesive, în care are loc o scurgere uniformă, fie cu numărul Mach M_1, fie cu M_2. Aceste intervale au fost notate cu t_* şi t_{**}, şi în practică sînt de ordinul milisecundelor; totuşi durata scurgerii este suficientă pentru ca fenomenele aerodinamice să se dezvolte complet, încît să putem vorbi de o scurgere staţionară; cu o aparatură convenabilă, scurgerea se poate fotografia şi se pot face şi experienţe cantitative.

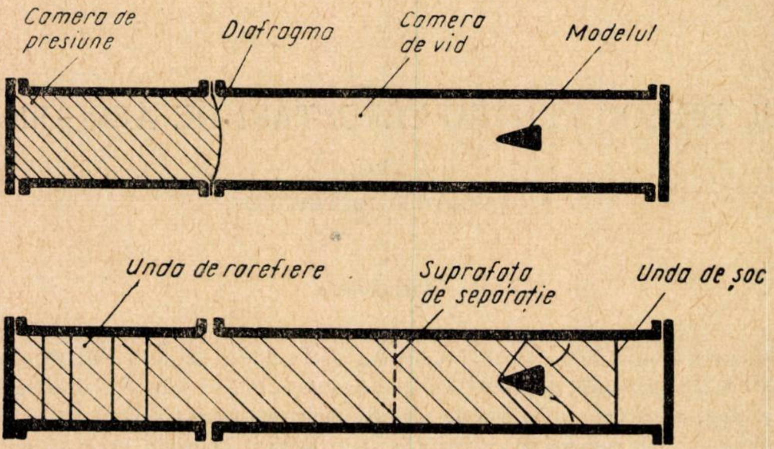


Fig. 1

Unul din marile avantaje ale tubului de şoc este posibilitatea de a varia foarte uşor numărul Mach al scurgerii (fie M_1, fie M_2), prin simpla modificare a raportului de presiuni iniţial între cele două feţe ale diafragmei; variaţia numărului M_1 este limitată (teoretic) la aproximativ 1,73, dar numărul M_2 creşte indefinit cu raportul de presiuni. Se pot obţine astfel scurgeri subsonice, transonice şi supersonice în aceeaşi instalaţie.

Printr-o alegere convenabilă a lungimii camerelor de presiune şi de vid, precum şi a poziţiei zonei experimentale (*X* în fig. 2), se realizează o durată maximă a scurgerii uniforme dorite (t_* sau t_{**}). Aceast studiu a fost făcut într-o lucrare anterioară [2], iar valorile numerice obţinute au stat la baza proiectului realizat. Cum lungimea optimă a elementelor depinde de numărul

Mach al scurgerii, s-a prevăzut posibilitatea tehnică a amplasării camerei de experienţe în diferite poziţii de-a lungul tubului, precum şi a varierii lungimii camerelor de presiune şi de vid, dimensiunea totală a tubului rămînînd aceeaşi.

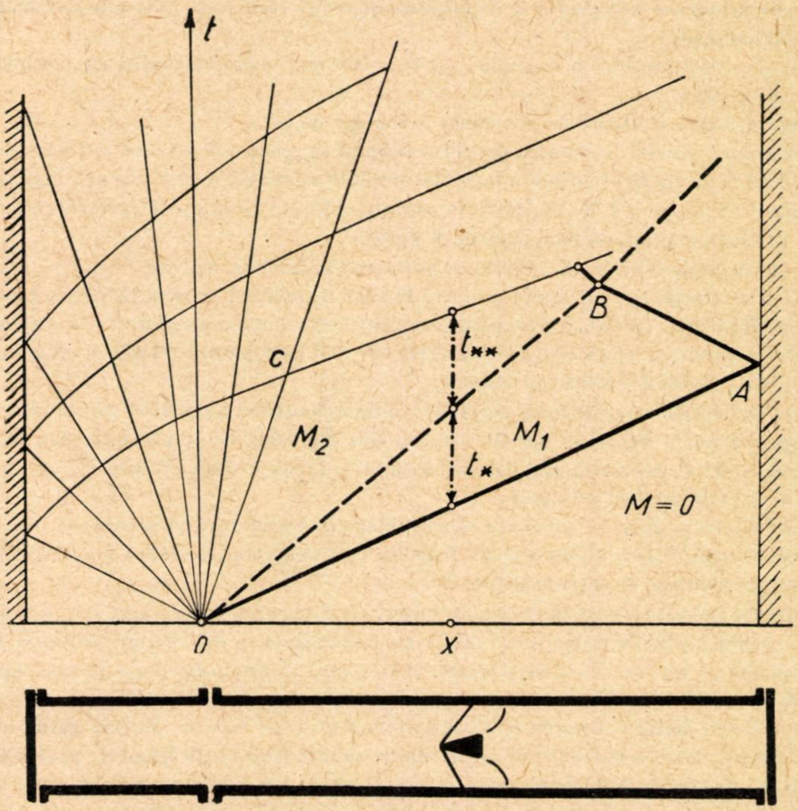


Fig. 2

Consideraţiile de mai sus au stat la baza proiectului tubului de şoc care face obiectul lucrării de faţă.

2. Descrierea instalaţiei

2.1. *Caracteristicile principale ale instalaţiei.* Lungimea totală a tubului de şoc a fost aleasă ţinînd seama de spaţiul disponibil în laboratoare şi de considerente economice; s-a ajuns astfel la un tub de 11 m lungime, compus din 12 tronsoane de cîte 840 mm lungime fiecare şi 2 tronsoane de 450 mm. Acestea din urmă au destinaţii speciale, şi anume unul foloseşte drept cameră de experienţe (avînd montate geamuri de vizualizare), iar cel de-al doilea poartă dispozitivul de percuţie a diafragmei.

Lungimea tronsoanelor s-a ales avînd în vedere manipularea uşoară şi accesul comod în interior, pentru curăţarea tubului de resturile diafragmei, după fiecare experienţă.

Secţiunea interioară a tubului de şoc a fost apoi determinată prin condiţia ca între diafragmă şi camera de experienţe, distanţa să fie de aproximativ 20 de ori mai mare decît dimensiunea transversală a tubului; prin aceasta se asigură amortizarea perturbaţiilor parazite produse de spargerea neregulată a diafragmei, şi astfel realizarea unei scurgeri uniforme în zona experimentală.

S-a ales în consecinţă o secţiune de 190 × 300 mm, corespunzînd şi cu posibilităţile de execuţie economică.

Figura 3 este o vedere de ansamblu a tubului de şoc.

Evacuarea aerului în camera de vid a tubului se realizează cu ajutorul unei pompe de vid, avînd un debit de 60 m^3/h sub o presiune absolută nominală de 0,3 mm col. Hg, antrenată de un motor electric de 1 kW. Suprapresiunea este obţinută de la un compresor care consumă 1 kW şi produce o presiune nominală de 6 kgf/cm^2.

Performanţele tehnice ale tubului de şoc vor fi prezentate mai jos.

2.2. *Construcţia tubului.* La proiectarea întregii instalaţii s-au avut în vedere următoarele criterii: performanţe optime, construcţie economică şi simplă, comoditate în exploatare şi manevrare, şi în sfîrşit, asigurarea posibilităţilor cît mai largi pentru modificări şi perfecţionări ulterioare, ca şi pentru diverse amenajări.

Pe baza acestor considerente s-a ales o soluţie constructivă pentru construcţia tronsoanelor, reprezentată în figura 4: pereţii verticali sînt din tablă de oţel frezată plan în interior (rectificarea n-a fost necesară), iar pereţii orizontali din două fiare profilate ⊏ 20, frezate pe laturi şi pe faţa în contact cu aerul.

Asamblarea se face cu şuruburi, etanşeitatea fiind asigurată prin cordoane de cauciuc.

Prin aceasta, fiecare tronson poate fi foarte uşor demontat, în scopul montării diferiţilor suporţi, dizpozitive etc. în interiorul tubului.

Întregul tub este aşezat pe o cale de rulare, iar fiecare tronson se sprijină pe patru roţi, ale căror axe sînt reglabile în înălţime; astfel, se poate ajusta în mod simplu alinierea tronsoanelor. Montarea pe roţi uşurează considerabil manevrarea tronsoanelor după fiecare experienţă, pentru curăţirea interiorului tubului.

La capetele fiecărui tronson sînt amenajate flanşe, pe care se sprijină garniturile care asigură etanşarea între tronsoane; în aceste flanşe se află cuie de poziţionare, pentru alinierea tronsoanelor. În figura 5 se poate vedea aspectul unuia din tronsoanele tubului de şoc.

Modul de construcţie descris permite realizarea oricărei configuraţii a tubului de şoc, prin simpla intervertire a ordinei de aşezare a diferitelor tronsoane ale tubului şi plasarea camerei de experienţe în poziţia dorită.

Strîngerea tronsoanelor se face cu ajutorul unui dispozitiv care uşurează foarte mult exploatarea: un sistem de presare cu şurub, antrenat printr-un mecanism de demultiplicare, strînge toate tronsoanele dintr-odată (fig. 6). În acest mod, tronsoanele tubului se autoaliniază la strîngere, iar după desfacerea dispozitivului, rămîn libere şi pot fi manevrate foarte uşor pe calea de rulare.

Diafragma de separaţie dintre camera de presiune şi cea de vid este confecţionată dintr-una sau mai multe foi de acetat de celuloză — după necesităţi.

În scopul uşurării montajului tubului înaintea fiecărei experienţe, diafragmele se fixează într-o ramă metalică care se pregăteşte dinainte, iar în momentul strîngerii tubului nu mai trebuie decît să se insereze între camera de vid şi cea de presiune.

Aspectul ramei este arătat în figura 7.

Ferestrele de vizualizare ale camerei de experienţe (fig. 8) sînt din sticlă cristal cu grosimea de 23 mm şi sînt montate în rame metalice; şuruburi de reglaj permit să se varieze poziţia ramei, astfel încît să nu existe denivelări ale suprafeţei interioare a tubului, care ar pro-

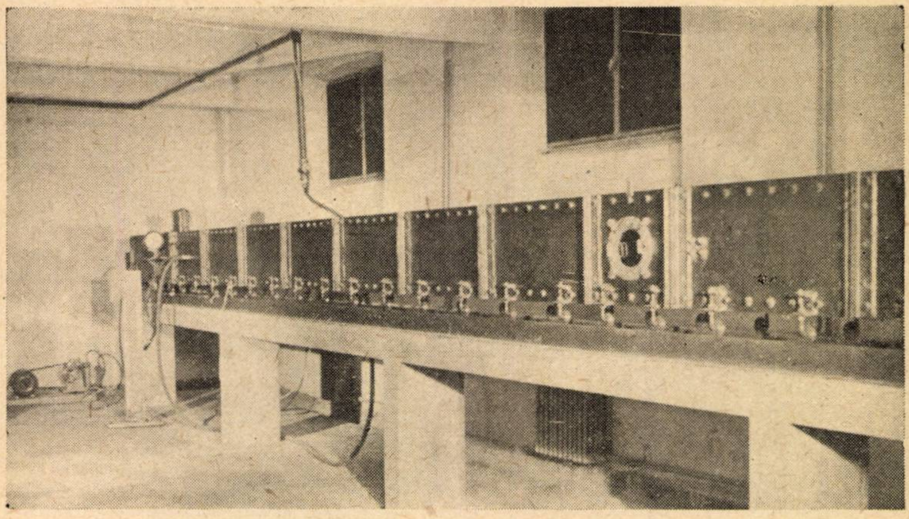


Fig. 3

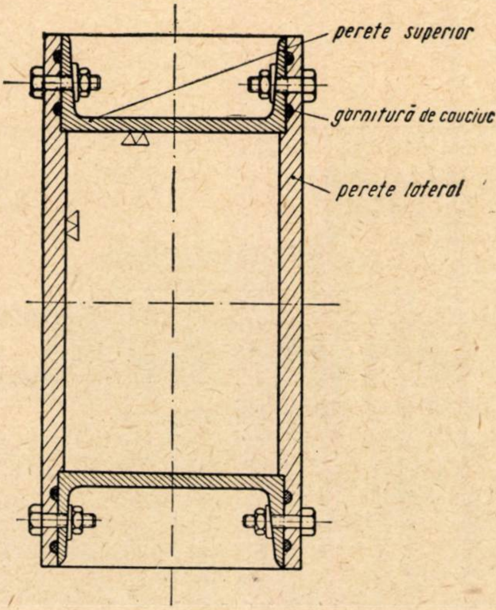

perete superior
garnitură de cauciuc
perete lateral

Fig. 4

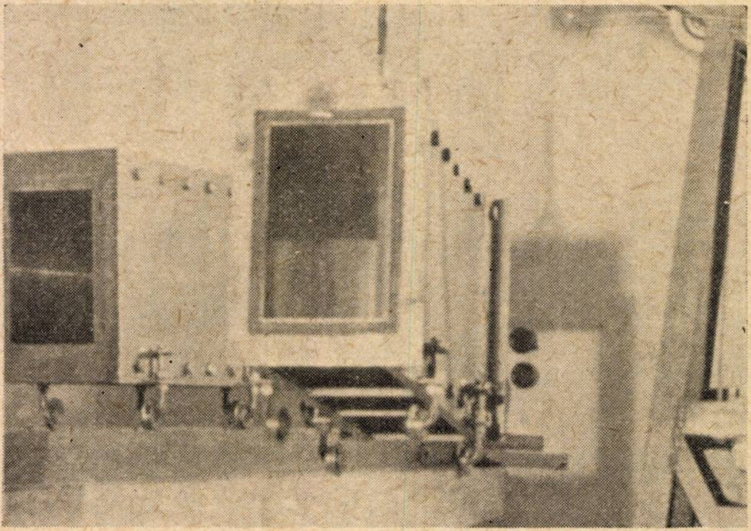


Fig. 5

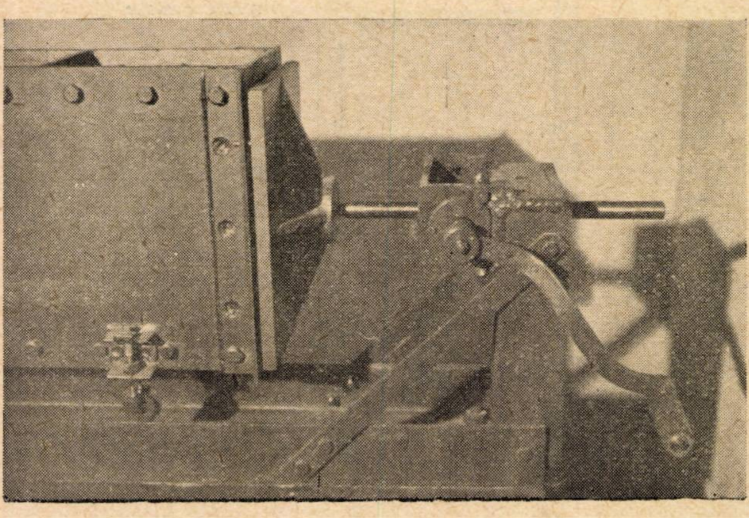


Fig. 6

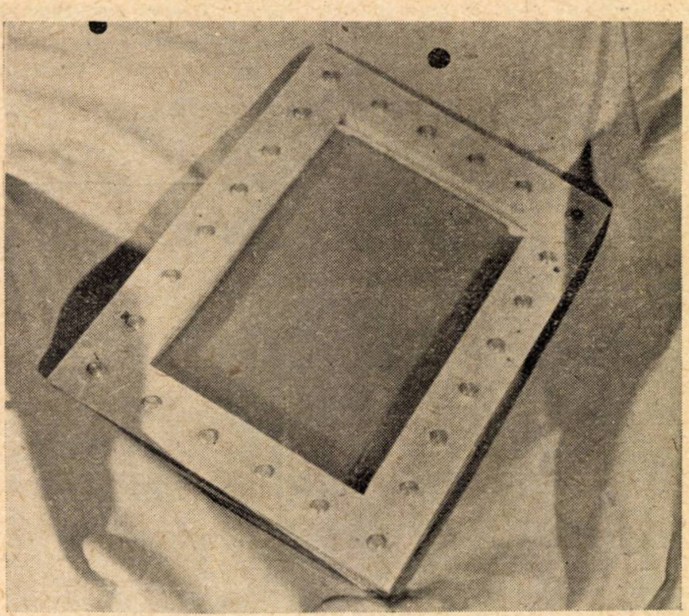


Fig. 7

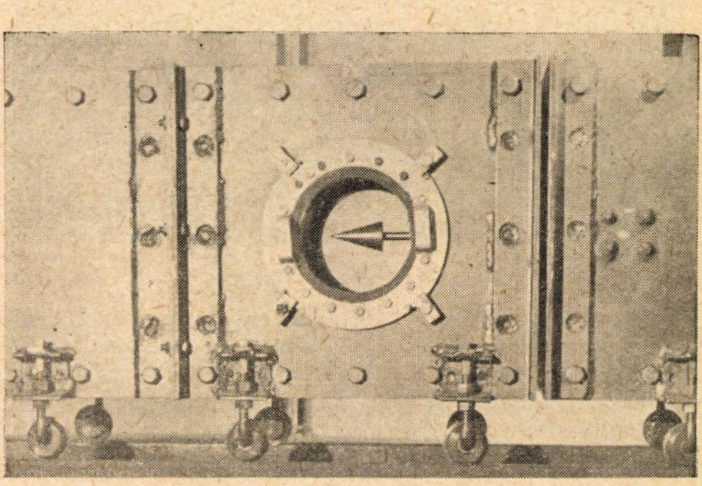


Fig. 8

duce perturbaţii ale scurgerii. Se folosesc două perechi de geamuri : două sînt simple, iar două sînt prevăzute în centru cu găuri de 6 mm diametru, pentru fixarea modelelor bidimensionale.

2.3. *Instalaţiile anexe şi aparatura tubului de şoc.* Majoritatea aparatelor de măsură şi instalaţiilor anexe ale tubului [se află concentrate în apropierea zonei diafragmei (fig. 9). În stadiul actual ele constau din dispozitivul de percuţie, suportul modelului, dispozitivul de comandă a instalaţiei de iluminat, instalaţia de iluminat cu scîntei şi aparatele pentru măsurarea şi reglajul presiunii şi vacuummului.

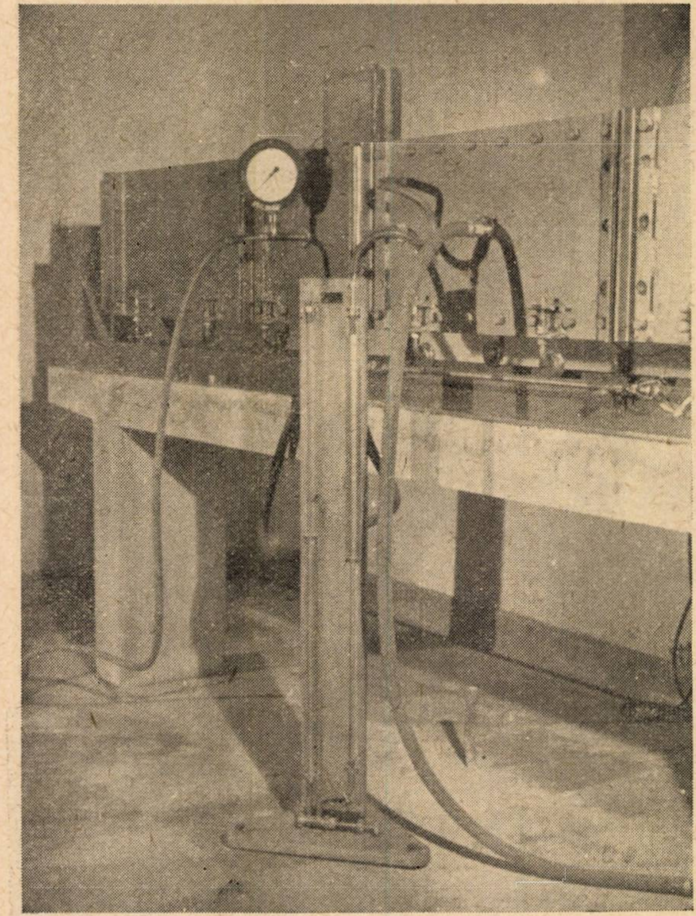


Fig. 9

Dispozitivul de percuţie este închis într-o cutie montată deasupra camerei de presiune (fig. 9 în stînga). Iniţierea spargerii diafragmei este provocată de un ac metalic acţionat de un resort ; comanda dispozitivului este electrică.

Suportul modelului este vizibil în figura 10.

Pentru comoditatea schimbării modelelor, suportul este fixat de tronsonul alăturat camerei de experienţe, astfel încît după o experienţă, prin desfacerea tubului, modelul devine imediat accesibil, şi nu mai este necesară deschiderea ferestrelor.

Dispozitivul de comandă a iluminării este foarte simplu şi a dat completă satisfacţie în utilizare. El se compune dintr-un tub de lungime variabilă, racordat la tubul de şoc printr-un orificiu practicat în peretele acestuia, imediat în aval de diafragmă; celălalt capăt este închis cu o membrană metalică deformabilă. În momentul percurtării diafragmei în tubul de şoc, se propagă o undă de şoc slabă şi în tubul dispozitivului; ajungînd la capătul acestuia, unda deformează membrana metalică şi închide un contact electric, care la rîndul său comandă, prin intermediul unui comutator electronic cu thyratron, scînteia luminoasă a dispozitivului de vizualizare

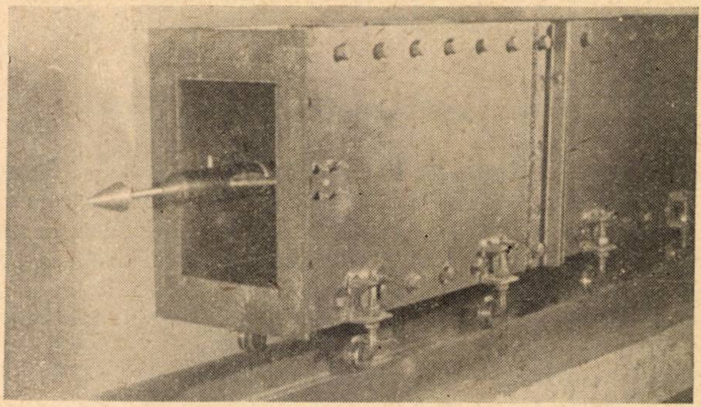


Fig. 10

Variaţia lungimii dispozitivului de comandă face ca unda de şoc să ajungă la capătul său după intervale de timp diferite, ceea ce permite reglarea momentului cînd se execută fotografia.

Pentru realizarea lungimii variabile, tubul dispozitivului de comandă este constituit din mai multe elemente de diferite lungimi, din furtun de cauciuc, care pot fi asamblate cap la cap; ultima porţiune este formată din două ţevi metalice, care culisează una într-alta, permiţînd un reglaj continuu al lungimii. Acest reglaj este foarte fin, la o deplasare de 1 mm a capătului tubului corespunzînd o întîrziere de aproximativ 3 microsecunde a declanşării scînteii luminoase.

Trebuie amintit aici că alte dispozitive de comandă mult mai complicate — relee electronice de întîrziere cu circuit Phantastron — întîlnite în literatură, nu aduc avantaje sensibile faţă de dispozitivul extrem de simplu descris mai sus. Tubul de comandă se poate observa în figura 9, fiind fixat de calea de rulare a tubului de şoc, dedesubtul acestuia.

Instalaţia de iluminat cu scîntei, care a fost folosită pentru experienţele preliminare, de control al funcţionării tubului de şoc, este foarte simplă, şi foloseşte metoda umbrelor, pentru vizualizarea undelor de şoc în scurgerea supersonică.

S-a folosit un generator de scîntei de tip industrial avînd o tensiune la electrozi de 4 500 V, care produce scîntei luminoase cu o durată de aproximativ 1,5 microsecunde.

Comutarea circuitului de înaltă tensiune, se face cu un tub electric cu gaze (thyratron) care se află montat în corpul aparatului; grila acestui tub este comandată direct de contactul electric al dispozitivului de comandă descris mai sus.

Lumina care traversează camera de experienţe a tubului de şoc impresionează o placă fotografică aşezată în partea opusă a tubului, înregistrînd fenomenele aerodinamice din interior

Dispozitivele de reglaj ale presiunii și vidului. Pe conductele care leagă camera de presiune și cea de evacuare, cu compresorul și pompa de vid, se află robineți servind la reglajul presiunii, precum și aparatele de măsură: un manometru metalic de precizie pentru măsurarea suprapresiunilor iar pentru înregistrarea vacuumului un manometru *U* cu mercur și un manometru McLeod. Presiunea atmosferică de referință este dată de un barometru de precizie. O parte din aceste aparate sînt vizibile pe fotografia din figura 9.

O dată cu dezvoltarea cercetărilor de aerodinamică cu tubul de șoc, aparatura cu care este dotat acesta va fi completată; de asemenea, se prevede automatizarea tuturor operațiilor și centralizarea aparatelor de măsură pe un tablou de comandă unic.

3. Lucrări preliminare efectuate cu tubul de șoc

3.1. *Probele tehnice ale instalației.* Înainte de darea tubului de șoc în exploatare, elementele sale, ca și întregul ansamblu, au fost supuse unei serii de probe și ajustări.

Astfel, fiecare tronson a fost închis la capete și i s-a încercat etanșeitatea cu ajutorul aerului comprimat, pe un banc de probă ad-hoc. Aceste probe au confirmat justețea principiului constructiv ales, căci în general nu s-au constatat aproape deloc scăpări de aer și n-au fost necesare decît ușoare ajustări la unele tronsoane și la geamurile camerei de experiențe.

Apoi, tubul de șoc a fost asamblat complet și închis, și s-au făcut probele de etanșeitate pentru întreaga instalație.

Rezultatele acestor probe sînt concretizate în diagramele din figurile 11 și 12. În figura 11 este reprezentată variația presiunii în tubul de șoc, cu timpul, în timpul funcționării pompei de vid, și după oprirea acesteia. Se vede că se atinge o presiune absolută de 2 mm col. Hg, în 15 minute de funcționare a pompei; după o oră de la oprirea pompei, presiunea atinge 78 mm col Hg.

Proba ale cărei rezultate sînt înscrise în diagrama din figura 11, a fost efectuată cu întreg tubul, inclusiv camera de experiențe și camera de presiune (diafragma n-a fost montată).

Rezultatele obținute cu instalația prezentată aici se compară extrem de favorabil cu cele publicate de autori străini. Într-adevăr, un tub de șoc avînd volumul de 6 ori mai redus, evacuat de un grup de pompe al căror debit total este egal cu cel al pompei de vid care echipează instalația noastră, nu atinge decît o presiune absolută de 55 mm col. Hg [3] iar alt tub, cu volumul de 20 de ori mai mic, este evacuat la 1 mm col. Hg de o pompă de 8 ori mai puternică [3].

Performanțele realizate sus sînt cu atît mai semnificative, cu cît tubul de șoc descris mai sus, este demontabil într-o măsură foarte avansată; lungimea desfășurată a garniturilor de etanșare însumează aproximativ 100 m.

Mai trebuie menționat că performanțele obținute nu reprezintă un plafon, întrucît pentru realizarea lor nu s-au luat măsuri prea riguroase de eliminare a tuturor micilor pierderi de aer; dacă va fi necesar în viitor, este pe deplin posibil să se coboare cu vidul sub 2 mm col. Hg. Pentru experiențele ce se au în vedere actualmente însă, această valoare este complet acoperitoare, și în practică tubul a funcționat la presiuni peste 5 mm col. Hg absolut.

Diagrama din figura 12 redă evoluția presiunii în camera de presiune a tubului de șoc, în timpul funcționării compresorului și după oprirea acestuia. Menționăm că presiunea de 5,65 atmosfere absolute, care a fost atinsă, nu este un maxim, dar depășește necesitățile experiențelor.

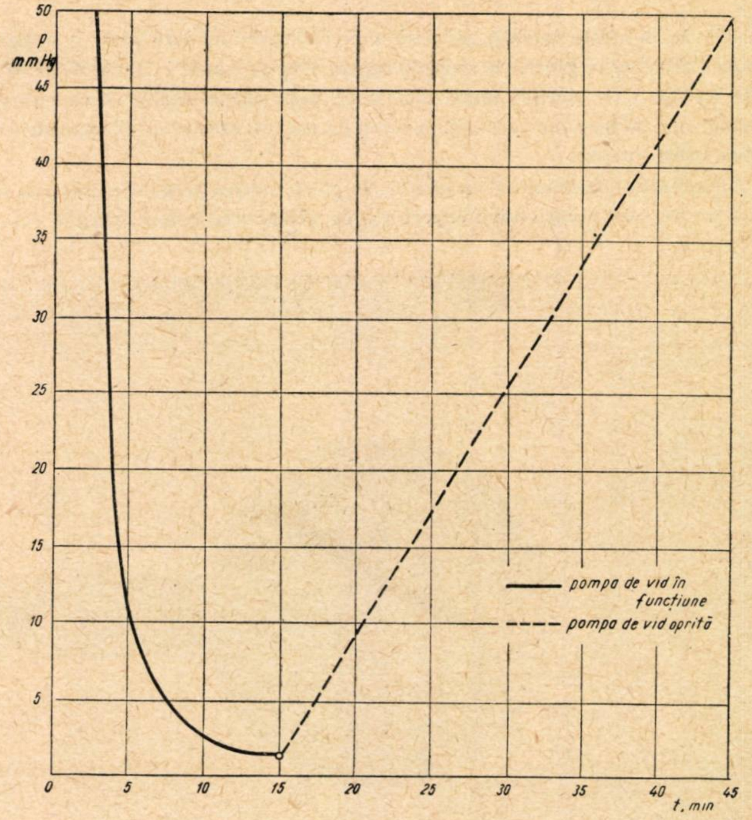

50
p
mm Hg
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
t, min
pompa de vid în funcțiune
pompa de vid oprită

Fig. 11

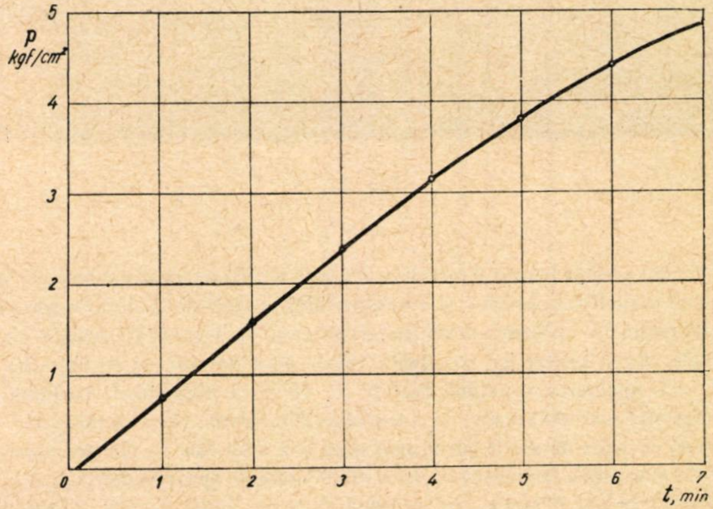

5
p
kgf/cm²
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
t, min

Fig. 12

Într-adevăr, în aceste condiţii, raportul maxim de presiuni care poate fi realizat în tubul de şoc, este de 2 150 ceea ce generează scurgeri supersonice cu numere Mach M_1 şi M_2 teoretice, respectiv de 1,45 şi 5,37. Mărirea numărului Mach peste aceste valori se va putea face prin adaptarea unei zone de secţiune variabilă în tubul de şoc [4], ceea ce ne propunem să încercăm în cadrul lucrărilor viitoare.

3.2. *Experienţe preliminare de vizualizare.* După efectuarea probelor tehnice de funcţionare a întregii instalaţii, s-au făcut cîteva experienţe de vizualizare a unei scurgeri supersonice în tubul de şoc. Scopul acestor lucrări a fost de a controla funcţionarea dispozitivului de comandă şi a instalaţiei de vizualizare, precum şi a ansamblului aparaturii. Tubul de şoc s-a dovedit a da deplină satisfacţie în utilizare, permiţînd realizarea de vizualizări reuşite ale scurgerilor supersonice. Cele cîteva cazuri de experienţe ratate s-au dovedit că se datoresc unor cauze fortuite, cum ar fi spargerea spontană înainte de vreme a diafragmei, voalarea plăcii fotografice dintr-o greşită manipulare etc. În fotografiile din figurile 13 şi 14, se poate vedea scurgerea supersonică cu unde de şoc în jurul unei sfere şi a unui con de 60° deschidere; numărul Mach, dedus din măsurarea înclinaţiei undelor de şoc, este de aproximativ 2,4.

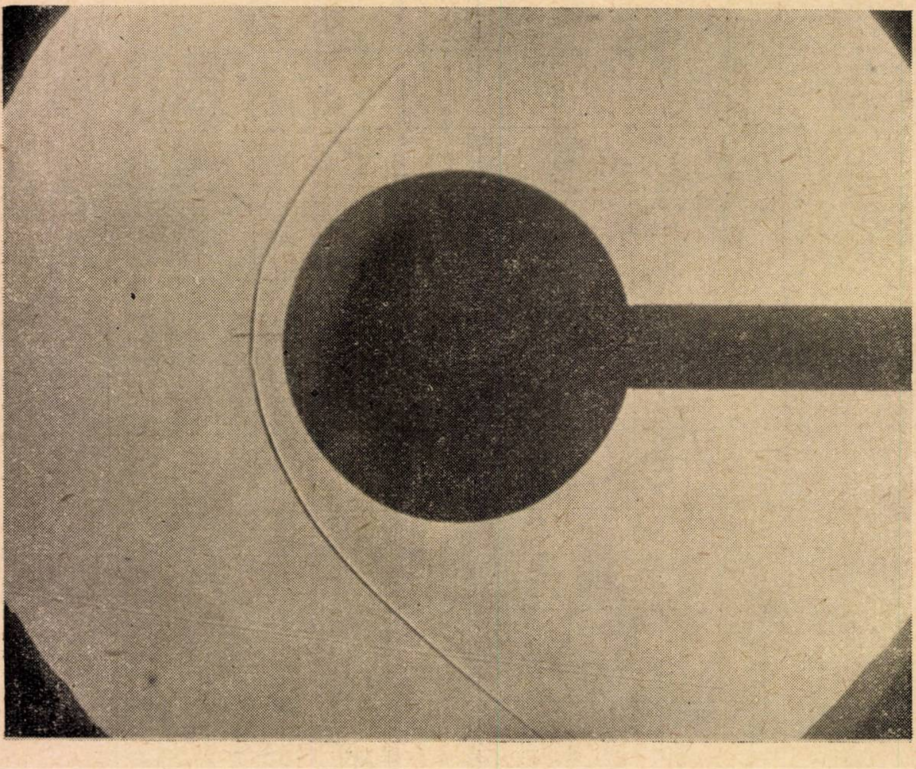


Fig. 13

În figura 13 se pot observa mici neregularităţi ale undei de şoc, în apropierea sferei. Acestea sînt provocate de prezenţa în tub a unor particule de acetat de celuloză sau praf, rămase de la experienţele anterioare ; se vede astfel importanţa unei curăţiri atente a tubului de şoc după fiecare încercare.

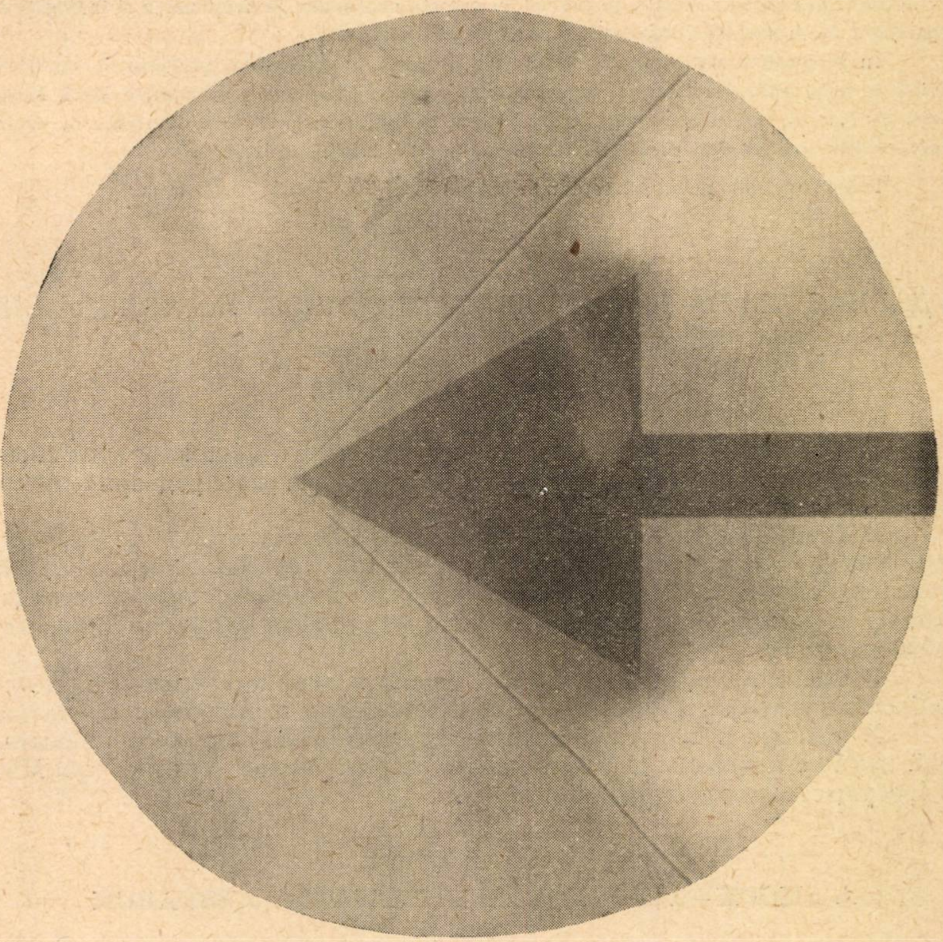


Fig. 14

În programul lucrărilor viitoare cu tubul de şoc ne-am propus şi efectuarea altor experienţe de vizualizare, atît prin metoda umbrelor, cît şi prin strioscopie.

Concluzii

În cadrul preocupărilor legate de folosirea tuburilor de şoc, o primă serie de cercetări are ca obiectiv realizarea şi exploatarea unui tub de şoc care să producă scurgeri de aer subsonice şi supersonice, înlocuind astfel într-o oarecare măsură sufleria aerodinamică obişnuită. Prima etapă a acestor cercetări a constat din realizarea şi darea în exploatare a tubului de şoc ; articolul de faţă reprezintă încheierea acestei etape. După punerea în evidenţă a scurgerii supersonice din tubul de şoc, este în curs acum o a doua fază de cercetare, avînd ca obiect exploatarea tubului prin efectuarea de cercetări experimentale de aerodinamică supersonică cu ajutorul instalaţiei realizate, în paralel cu aceasta continuînd perfecţionarea şi îmbogăţirea aparaturii de măsură şi a instalaţiilor anexe ale tubului.

În perspectiva viitorului, figurează apoi atacarea unui al doilea program de cercetări, avînd ca scop realizarea în tubul de şoc a unor scurgeri hipersonice, cu numere Mach foarte mari (10 . . . 15), care nu mai pot fi obţinute prin metodele clasice. Toate domeniile de cercetare amintite mai sus sînt deosebit de interesante şi pot duce la rezultate utile.

Primit la redacţie la 12 septembrie 1958

УДАРНАЯ ТРУБА ДЛЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье описываются ударная труба, сконструированная в Институте прикладной механики, и проведенные предварительные опыты.

В первой части излагается принцип работы ударной трубы, причем указывается, что сверхзвуковое течение, происходящее в такой установке, может быть использовано для аэродинамических исследований, заменяя более дорогую и сложную классическую аэродинамическую трубу.

Затем описываются составные части и вспомогательные приспособления ударной трубы, фотоснимки которых приводятся в статье.

В последней части представлены результаты технических испытаний трубы и показаны два фотоснимка сверхзвукового течения при $M = 2{,}4$, осуществленного в ударной трубе.

A SHOCK-TUBE FOR AERODYNAMIC RESEARCH

ABSTRACT

The paper deals with the shock-tube of the Applied Mechanics Institute "Traian Vuia", and with the preliminary experiments undertaken.

In the first part of the paper, the functioning mechanism of the shock-tube is presented, and it is shown that such a device, generating a supersonic flow of variable Mach number, may advantageously replace much costlier installations (i.e. conventional supersonic wind-tunnels).

The elements of the tube and the auxiliary equipment are then described, and are to be seen on the adjoining photographs.

The last part of the paper deals with the results of the preliminary tests of the shock-tube; two visualisations of supersonic flows with a Mach number of 2.4 are also included.

BIBLIOGRAFIE

1. LUCIAN DUMITRESCU, *Tubul de şoc şi aplicaţiile sale* (Referat). Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **7**, *1* (1956).
2. — *Calculul lungimii elementelor componente ale unui tub de şoc pentru o durată de funcţionare dată.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **7**, *3* (1956).
3. B. D. HENSHALL, *On some aspects of the use of shock-tubes for aerodynamic research.* R. & M. 3044, Londra, 1957.
4. A. HERTZBERG, *A shock-tube method of generating hypersonic flows.* Journal of the Aeronautical Sciences, *12* (1951).

ASUPRA UNEI SUFLERII SUPERSONICE CU FUNCŢIONARE CONTINUĂ ÎN CIRCUIT DESCHIS

DE

ION NEDELESCU

Realizarea unei instalaţii de cercetări aerodinamice experimentale la viteze supersonice a fost încă de la înfiinţarea Institutului de mecanică aplicată una din problemele de bază legate de dezvoltarea bazei sale materiale. Datorită greutăţilor inerente oricărui început s-a construit în primul rînd o instalaţie de proporţii reduse, urmînd ca pe baza experienţei obţinute şi pe măsura dezvoltării generale a Institutului să se treacă la instalaţii mai importante.

Concepută iniţial ca o simplă machetă, această suflerie s-a dovedit apoi aptă şi pentru o serie de cercetări efective, cercetări astăzi în curs de desfăşurare. De asemenea, din încercările de funcţionare ale sufleriei s-a putut desprinde posibilitatea realizării pe aceleaşi principii a unei instalaţii mai importante.

Ideea fundamentală care a făcut posibilă realizarea sufleriei a fost aceea de a folosi ca organ de antrenare a aerului un compresor de motor de avion. Această idee ne-a fost sugerată de acad. prof. E. Carafoli de al cărui preţios sprijin ne-am bucurat de altfel în tot cursul realizării instalaţiei.

★

Sufleria este cu circuit deschis. Aerul este absorbit din camera laborator, trece prin ajutajul Laval, zona experimentală, difuzor şi compresor fiind apoi refulat spre exteriorul clădirii.

Ajutajul Laval, zona experimentală şi o primă parte a difuzorului sînt situate într-un canal rectangular avînd dimensiunile interioare de 163 × 50 mm (fig. 1). Doi longeroni de oţel *1* realizează pereţii superiori şi inferiori ai canalului, iar patru plăci de oţel *2* cîte două de fiecare parte a sufleriei, spre cele două capete ale longeronilor, menţin poziţia relativă a acestora. Longeronul superior este prevăzut cu prize ce permit măsurarea presiunilor în lungul circuitului. Pereţii laterali ai canalului între plăcile *2* sînt constituiţi din două plăci de cristal *3* de 22 mm grosime, montate în ramele metalice *4*. Dimensiunea liberă de 160 × 1 340 mm a cristalelor permite vizualizarea scurgerii pe întregul domeniu supersonic. Toate piesele sînt asamblate cu şuruburi sau prezoane cu piuliţe fiind prevăzut un sistem special de etanşare cu garnituri de cauciuc.

Intrarea aerului în suflerie se face printr-un colector *5*. Printr-un difuzor a cărui secţiune trece de la dreptunghi la pătrat *6*, un burduf de cauciuc cu inserţie şi o piesă de trecere de

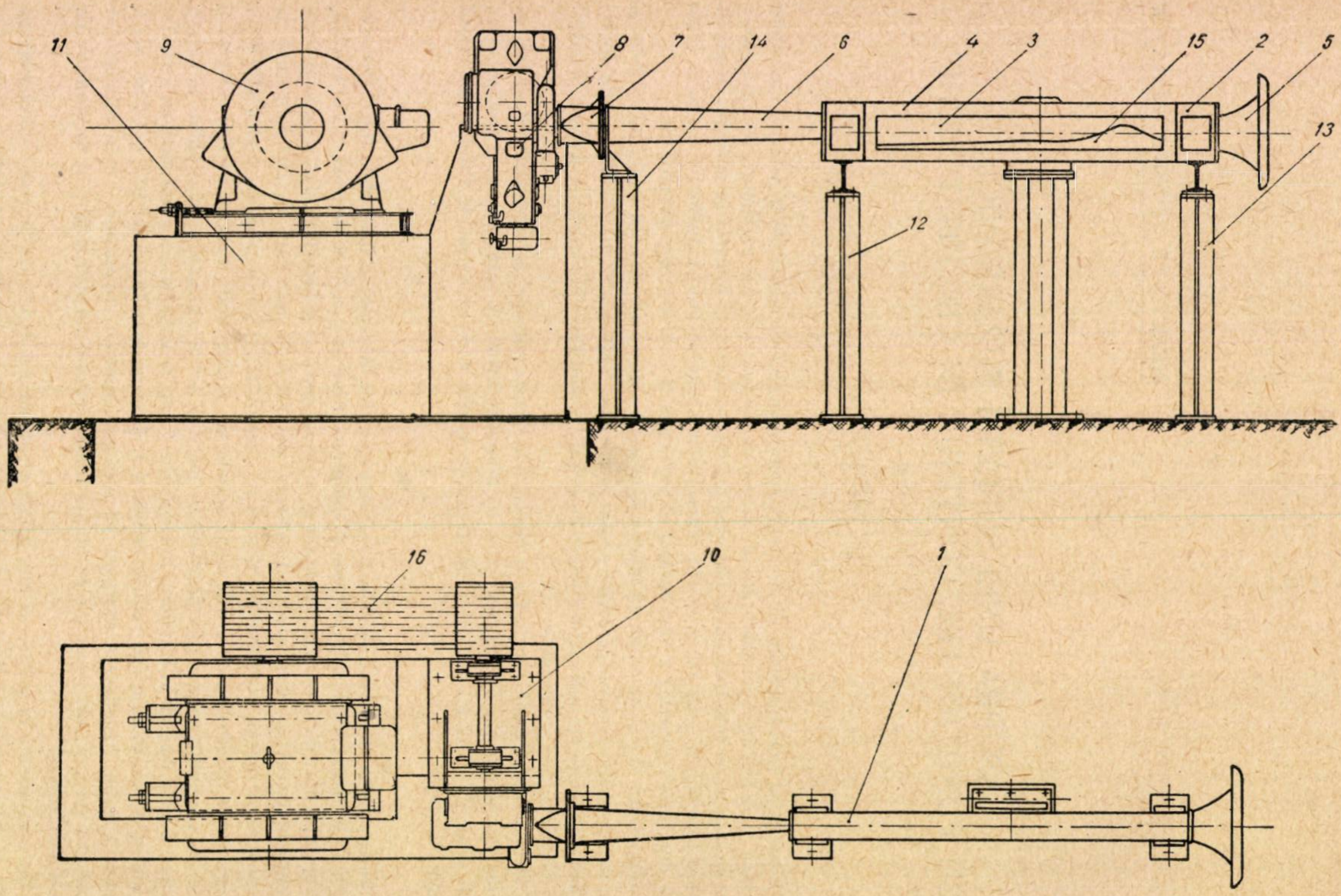

11
9
8
7
14
6
4
3
15
2
5
13
12
16
10
1

Fig. 1. — Vedere generală a sufleriei supersonice (desen).

la patrat la cerc *7* aerul ajunge la compresor. Colectorul şi difuzorul sînt construiţi din tablă de oţel de 3 mm sudată, iar piesa de trecere din aluminiu turnat.

Aerul refulat de compresor este evacuat spre exterior printr-o conductă metalică din tablă de 1 mm grosime cu flanşe din oţel cornier.

Sufleria este montată pe trei picioare metalice, două *12, 13* suportînd longeronul inferior, iar al treilea *14* extremitatea dinspre compresor a difuzorului. Coloana de evacuare a aerului este suspendată de grinzile tavanului din laborator.

Compresorul folosit este cel al motorului de avion Jumo 211. Acesta poate funcţiona cu două viteze de rotaţie graţie sistemului său de angrenaje prevăzut cu un ambreiaj. Astfel, pentru o turaţie de 2 400 rot/min a vibrochenului motorului (turaţie de urcare şi luptă), compresorul se roteşte cu 21 120 rot/min în prima treaptă de viteze şi 29 760 rot/min în cea de-a doua treaptă. Schimbarea vitezelor se face hidraulic folosind presiunea uleiului din sistemul de ungere.

Compresorul *8* a fost demontat de pe motorul de avion împreună cu angrenajele aferente şi montat pe un suport special *10*. Acesta închide carterul angrenajelor, permite fixarea compresorului pe fundaţie în poziţia de funcţionare şi suportă cele două lagăre cu rulmenţi ale axului de angrenare, care este cuplat la compresor corespunzător vibrochenului motorului. S-a eliminat comanda altimetrică a treptelor de viteză păstrîndu-se numai comanda manuală.

Antrenarea compresorului se face cu un electromotor asincron trifazat *9*, cu rotorul în dublă colivie, avînd o putere nominală de 125 kW la 1 460 rot/min, instalat pe o fundaţie *11* comună cu compresorul.

Transmisia puterii de la electromotor la compresor cu amplificarea necesară de turaţie (1 460/2 400 rot/min) se face prin curele trapezoidale *16*.

Ungerea compresorului este asigurată de pompa de ulei conţinută în interiorul carterului angrenajelor, pompă ce absoarbe uleiul din rezervorul montat pe fundaţie alături de compresor. Golirea carterului de ulei şi readucerea uleiului în rezervor este realizată de o pompă separată acţionată de un mic motor electric (1,7 kW 2 900 rot/min), motor ce este pornit simultan cu motorul de antrenare al compresorului. Pentru buna funcţionare a ungerii în compresorul detaşat de restul motorului de avion au fost făcute unele modificări ale circuitelor de ungere. Nu s-a dovedit necesară o răcire a uleiului într-un radiator.

În timpul funcţionării se măsoară presiunea la refularea pompei de ulei, temperatura uleiului în rezervor, turaţia axului de antrenare. Un manometru şi un turometru sînt montate direct pe compresor, iar pe tabloul de pornire a electromotorului sînt montate aparate electrice cu citire la distanţă : un manometru, un termometru şi un turometru.

Ajutajul Laval *15*, conceput astfel încît să realizeze o mişcare supersonică plană şi uniformă în zona experimentală, este constituit din trei pereţi plani şi unul curb. Pereţii plani sînt, pe de o parte, feţele interioare ale celor două plăci de cristal, iar pe de altă parte, faţa interioară a longeronului superior. Peretele curb este realizat de un bloc masiv din lemn. profilat în mod corespunzător, montat între cele două cristale pe longeronul inferior. Acesta este prelungit în aval realizînd şi peretele inferior al zonei experimentale.

Ajutajul astfel realizat este nesimetric, faţa lui superioară plană corespunzînd axei unui ajutaj simetric. S-a preferat această construcţie, pe de o parte, pentru a reduce la jumătate problemele de execuţie a profilului curb al ajutajului, cît şi pentru a avea la dispoziţie o suprafaţă plană pe care să se poată face măsurători de presiune sau fixa suporţi de machete sau balanţe, feţele laterale destinate vizualizărilor neputînd în general servi în acest scop.

În acelaşi mod ca ajutajul Laval a fost realizată prima parte a difuzorului, blocul de lemn fiind de data aceasta plan.

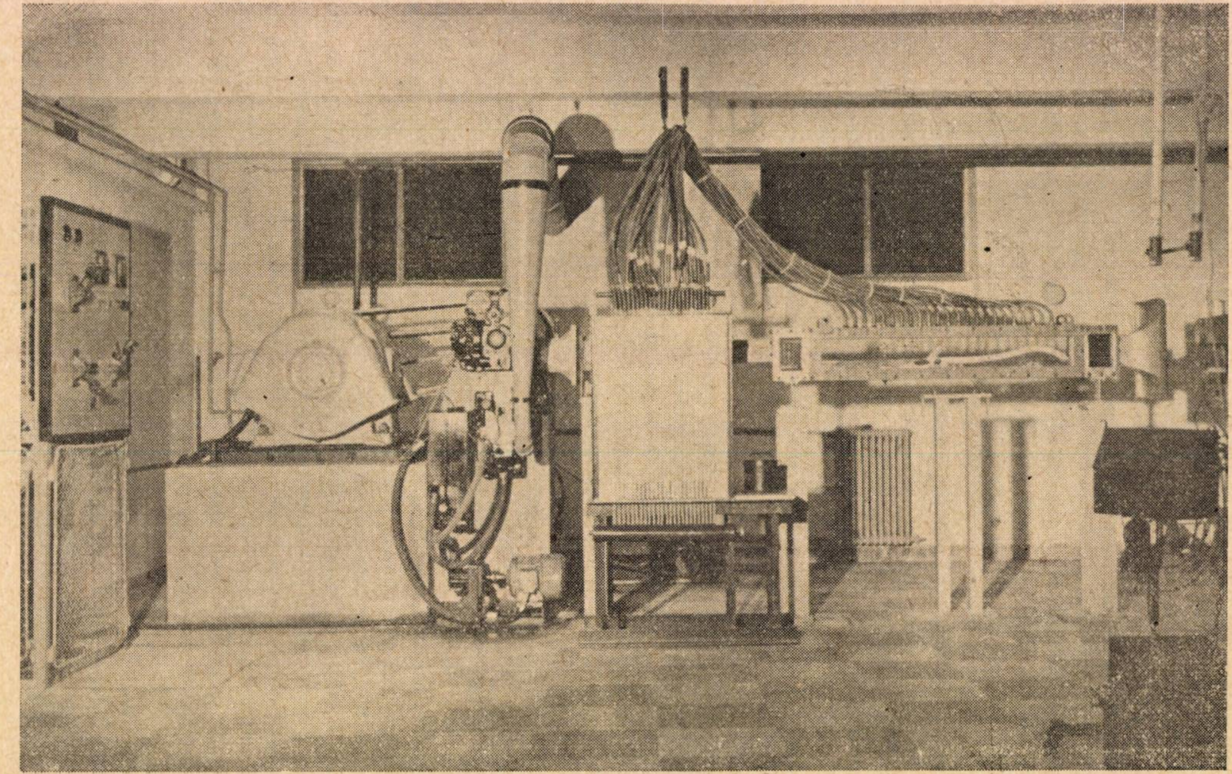


Fig. 2. — Vedere generală a sufleriei supersonice (fotografie).

Cele două blocuri de lemn sînt asamblate pe longeronul inferior prin armături metalice speciale, cu prezoane și piulițe.

În fotografia din figura 2 este redată o vedere generală a sufleriei.

★

Cînd au fost făcute calculele pentru această suflerie, în vederea realizării ei, nu am fost în posesia unor date complete și certe asupra caracteristicilor compresorului. Puținele date cuprinse în notița tehnică a motorului Jumo 211 precum și datele din literatură [1], [2] cu privire la rapoartele de presiune necesare realizării scurgerii în tunele supersonice au arătat ca realizabil un număr Mach $M = 2{,}2$ într-o secțiune experimentală de 50 × 107 mm. Aceasta la o turație a axului de antrenare a compresorului de 2 400 rot/min, compresorul lucrînd în treapta a doua de viteze. Puterea necesară pentru antrenare calculată era de aproximativ 95 kW.

În baza acestor calcule am realizat sufleria obținînd efectiv în zona experimentală cu secțiunea de 50 × 107 mm numărul Mach egal $M = 2{,}2$, puterea absorbită de electromotor fiind 102 kW, la o presiune atmosferică de 755 mm Hg și o temperatură ambiantă de 24°C. După cum se va arăta în cele ce urmează există posibilitatea reală de a mări simțitor dimensiunile zonei experimentale.

Împreună cu N. Cămărășescu, adaptînd ca sursă de iluminare un aparat de proiecție pentru filme de 8 mm, am realizat prin metoda umbrelor o serie de vizualizări a scurgerilor supersonice în jurul diverselor modele montate în curent.

În figura 3 este reprodusă fotografia vizualizării scurgerii supersonice în jurul unei sfere cu diametrul de 15 mm, iar în figura 4 în jurul unui con circular cu o deschidere de 30°. Ambele vizualizări au fost făcute la un număr Mach $M = 2{,}2$.

★

O dată sufleria în funcțiune ne-am pus problema completării cunoștințelor noastre referitoare la compresorul folosit pentru antrenare, aceasta cu scopul de a obține cele mai bune performanțe ale sufleriei, folosind la maxim resursele posibile ale compresorului.

Am determinat astfel prin măsurători, la cele două trepte de viteze ale compresorului, pentru diverse debite-greutate de aer ce trec în compresor, G kg/s, următoarele mărimi :

— raportul de compresie :

$$\pi = \frac{\text{presiunea aerului la ieșirea din compresor}}{\text{presiunea aerului la intrarea în compresor}};$$

— randamentul global al instalației de comprimare :

$$\eta_g = \frac{\text{puterea necesară comprimării ideale cu raportul } \pi}{\text{puterea efectivă absorbită de electromotor}};$$

— randamentul compresorului :

$$\eta = \frac{\text{puterea necesară comprimării ideale cu raportul } \pi}{\text{puterea efectiv necesară compresorului pentru comprimare}};$$

— puterea efectiv absorbită de electromotor W, în kW.

Debitul a fost determinat cu o diafragmă normală montată la ieșirea coloanei de evacuare a aerului din compresor, diferențele de presiune respective fiind măsurate cu un micromanometru cu alcool.

Presiunea statică la intrarea în compresor a fost măsurată față de presiunea atmosferică cu un manometru U cu mercur, de la o priză specială dispusă pe piesa de trecere de la intrarea în compresor.

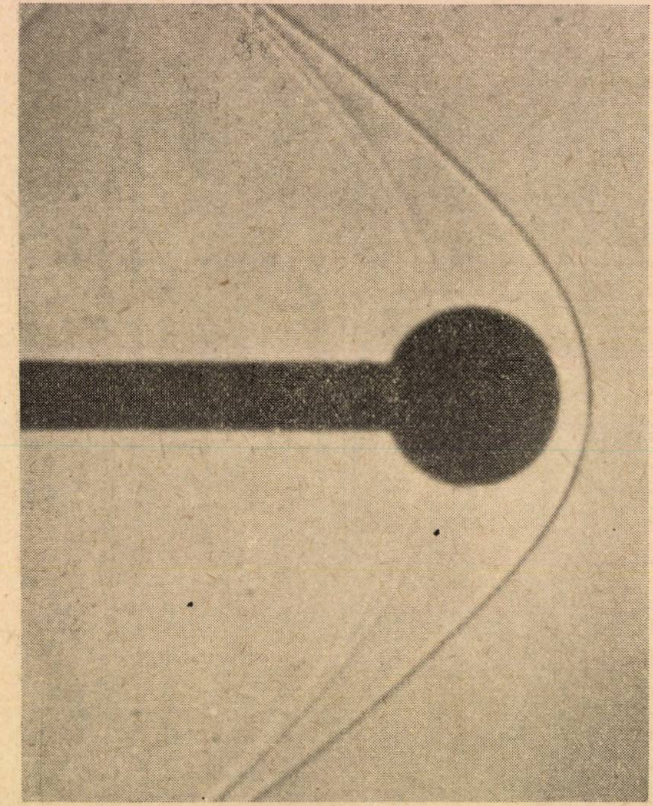


Fig. 3. — Vizualizarea scurgerii în jurul unei sfere, la $M = 2{,}2$ obținută prin metoda umbrelor.

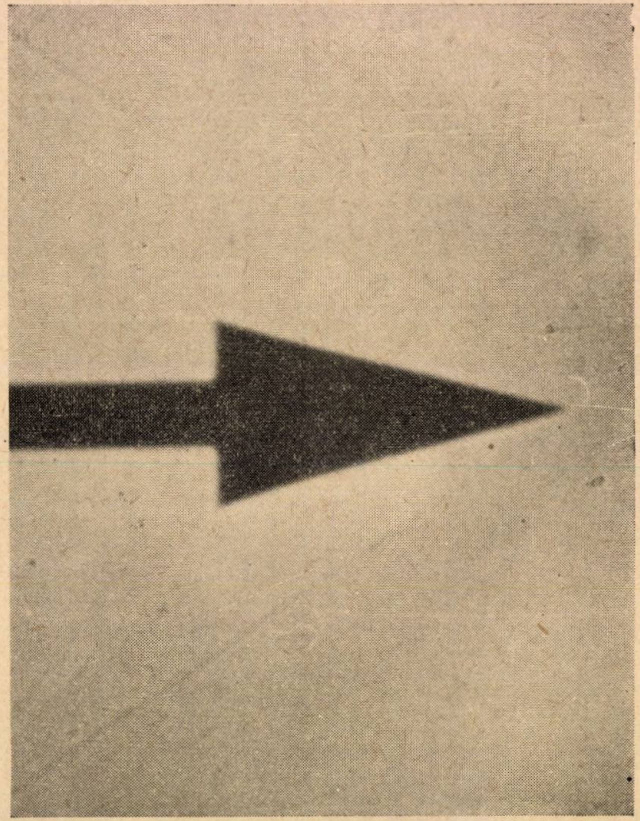


Fig. 4. — Vizualizarea scurgerii în jurul unui con circular cu deschiderea de 30° la $M=2{,}2$, obținută prin metoda umbrelor.

Temperatura la refulare s-a măsurat cu un termometru cu mercur montat în coloana de evacuare a aerului.

Temperatura la absorbție s-a considerat egală cu cea ambiantă datorită pierderilor mici de căldură prin pereții sufleriei și vitezei mici a aerului la intrarea în compresor.

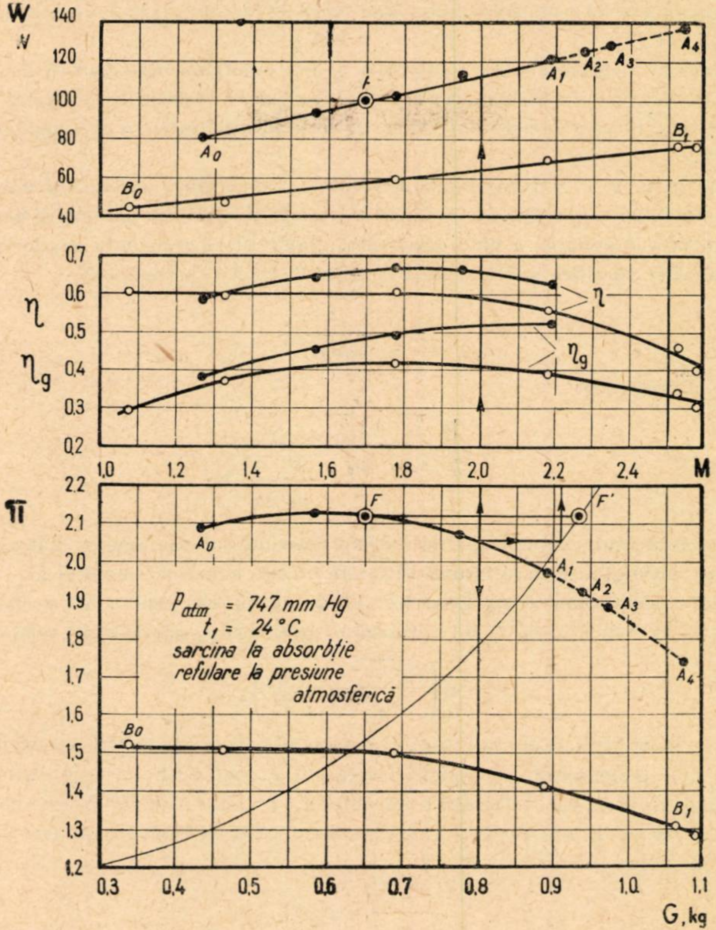


Fig. 5. — Curbele caracteristice ale compresorului sufleriei. Curba $\pi = \pi(M)$.

Presiunea atmosferică s-a măsurat cu un barometru normal cu mercur, împreună cu temperatura aerului ambiant.

Puterea absorbită de electromotorul de antrenare s-a determinat cu un wattmetru de laborator.

Practic în tot timpul încercărilor compresorul refulează aerul la presiunea atmosferică, absorbția făcîndu-se din interiorul sufleriei.

Pentru a varia sarcina s-au adaptat în locul ajutajului Laval o serie de ajutaje interșanjabile cu deschideri diferite (secțiuni sonice diferite).

Rezultatele obținute, la o presiune atmosferică de 747 mm Hg și o temperatură a aerului ambiant de 24°C, sînt date în figura 5 sub forma curbelor $\pi = \pi(G)$, $\eta = \eta(G)$, $\eta_g = \eta_g(G)$ și

$W = W(G)$. Curbele ce corespund cercurilor reprezintă rezultatele încercărilor în treapta întîia de viteze, iar cele corespunzătoare punctelor negre încercărilor în treapta a doua. Porţiunile de curbe trase întrerupt sînt extrapolate.

Pe o aceeaşi diagramă, cu o linie mai subţire, s-a trasat curba $\pi = \pi(M)$, raportul de compresie necesar pentru realizarea unui număr Mach M într-un tunel aerodinamic, după datele din literatură [1] [2].

Cu ajutorul diagramei astfel completate se pot determina uşor pentru fiecare punct al curbei caracteristice $\pi = \pi(G)$ numărul Mach M realizabil, debitul G şi puterea W necesară pentru antrenare. Cu aceste date determinarea secţiunii realizabile a secţiunii experimentale este imediată.

Notînd cu p, ρ, T şi a presiunea, densitatea, temperatura absolută şi viteza sunetului în zona experimentală cu secţiunea A, iar cu p_0, ρ_0, T_0 şi a_0 aceiaşi parametrii pentru aerul în repaus la intrarea în suflerie, g fiind acceleraţia gravităţii, R constanta gazelor perfecte şi x raportul căldurilor specifice scriem pentru secţiunea zonei experimentale

$$A = \frac{G}{g\rho a M}, \tag{1}$$

din care se deduce uşor

$$A = \sqrt{\frac{R}{xg}}\,\frac{G\sqrt{T_0}}{p_0}\,\frac{1}{\frac{\rho}{\rho_0}\frac{a}{a_0}M}. \tag{2}$$

Dacă considerăm, ceea ce este destul de apropiat de realitate, scurgerea în ajutajul Laval ca izentropică, ultimul termen al formulei (2) este funcţie numai de numărul M.

Studiul similitudinii compresoarelor [3] ne arată că pentru un acelaşi compresor ce absoarbe aer la temperatura T_0 şi-l refulează la presiunea p_0 este valabilă relaţia

$$\pi = \pi\left(\frac{G\sqrt{T_0}}{p_0},\ \frac{u_2}{\sqrt{T_0}}\right), \tag{3}$$

în care u_2 este viteza periferică a rotorului. Compresorul lucrează la suflerie cu turaţie constantă ($u_2 = \text{const.}$), iar temperatura T_0 variază foarte puţin, fiind egală cu temperatura interioară a laboratorului. În acest caz, influenţa termenului $u_2/\sqrt{T_0}$ din formula (3) este neînsemnată şi pentru oricare punct de funcţionare, anumit număr Mach în zona experimentală a sufleriei, deci raport π, avem relaţia

$$\frac{G\sqrt{T_0}}{p_0} = \text{const.} \tag{4}$$

Această relaţie arată cum variază debitul-greutate cu parametrii T_0 şi p_0 pentru $\pi = \text{const.}$

În baza relaţiilor (4) şi (2) rezultă că secţiunea zonei experimentale este funcţie numai de numărul Mach, independent de condiţiile mediului ambiant.

Calculele făcute cu formula (2) pentru datele obţinute din figura 5 sînt reprezentate pe diagrama din figura 6.

Aici s-a reprezentat în funcţie de numărul Mach realizabil înălţimea zonei experimentale h în mm, corespunzătoare lăţimii fixe de 50 mm, egală cu distanţa dintre cele două plăci de cristal ce formează pereţii laterali ai sufleriei.

Curba B_0B_1 corespunde funcţionării compresorului în treapta întîia de viteză, curba $A_0A_1A_4$ funcţionării în treapta a doua. Ramura A_1A_4 este extrapolată. În punctul A_2 puterea absorbită de la motor este cea nominală. Punctul A_3 corespunde secțiunei maxime realizabile în suflerie, puterea absorbită depășind în acest caz pe cea nominală numai cu 2,2%. La o suprasarcină a motorului de 10% corespunde în diagrame situația reprezentată de punctul A_4.

Notații identice au fost făcute pe figura 5.

Funcționarea în treapta întîia pe curba B_0B_1 nu este în general interesantă deși permite realizarea unor numere Mach care nu se pot obține în treapta a doua, deoarece secțiunile posibile sînt prea reduse.

Pentru realizarea unui curent supersonic cu un număr Mach inferior lui 2, menținînd totodată dimensiuni cît mai mari pentru zona experimentală, în lipsa posibilității de a reduce viteza motorului de acționare, urmează să funcționăm mereu corespunzător debitului maxim realizabil cu puterea disponibilă (punctele A_2, A_3 sau A_4). Debitul disponibil determină secțiunea critică, iar aceasta secțiunea experimentală corespunzătoare numărului Mach. Excesul de putere se consumă în sistemul de salturi de compresie din avalul zonei experimentale.

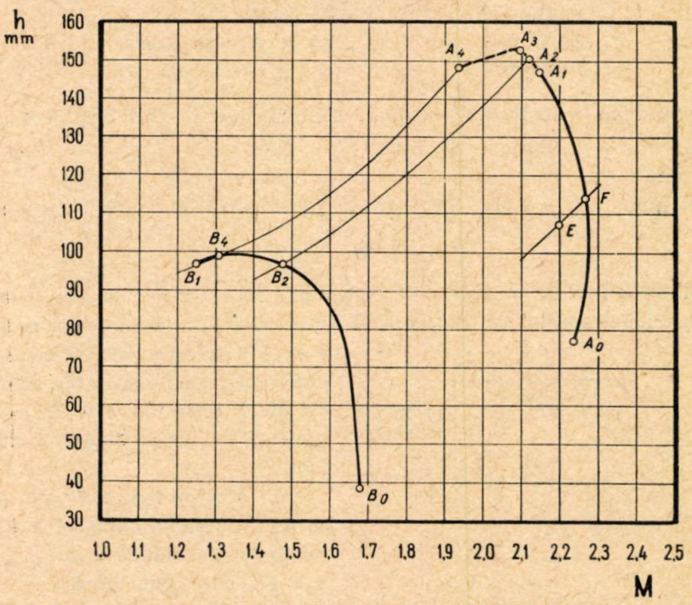


Fig. 6. — Dimensiunile zonei experimentale a sufleriei la diverse numere Mach.

Rezultatele calculelor sînt reprezentate grafic pe diagrama din figura 6. Motorul funcționînd la putere nominală, înălțimea *h* realizabilă funcție de numărul Mach este dată de curba A_2B_2. Dacă motorul funcționează cu o suprasarcină de 10% se pot realiza mărimile *h* date de curba A_4B_4. Evident, se pot avea în vedere și curbe intermediare curbelor A_2B_2, A_4B_4 sau chiar superioare curbei A_4 B_4. Ultimul caz este limitat însă de suprasarcina care poate fi suportată de motorul electric precum și de faptul că astfel sînt suprasolicitate organele compresorului.

Rezumînd, precizăm situațiile cele mai favorabile :

— Numărul Mach maxim realizabil este $M = 2{,}28$ într-o secțiune de 50 × 108 mm pentru o putere consumată de 94 kW.

— Secțiunea maximă realizabilă este de 50 × 153 mm la un număr Mach $M = 2{,}1$ cu o putere consumată de 128 kW (suprasarcina motorului de 2,2%). Considerăm că acesta este cel mai interesant regim de funcționare.

— Puterea absorbită de motorul electric rămînînd cea nominală, 125 kW, se pot realiza următoarele secţiuni la diverse numere Mach:

M	2,0	1,8	1,6	1,5
secţiune mm × mm	50 × 138	50 × 120	50 × 104	50 × 98

— Pentru numere Mach mai mici devine avantajoasă funcţionarea cu treapta întîia a compresorului. Se pot realiza astfel

M	1,5	1,4	1,25
secţiune mm × mm	50 × 95	50 × 99	50 × 97
W, kW	68	72	76

Cu o suprasarcină a motorului constantă de 10% situaţia va fi după cum urmează:

M	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2
secţiune mm × mm	50 × 150	50 × 133	50 × 115	50 × 103	50 × 95

★

Sufleria fiind în funcţie, cu ajutajul Laval pentru $M = 2{,}2$ instalat, am determinat prin măsurători de presiune raportul de compresie al compresorului la acest regim de funcţionare: $\pi = 2{,}12$. Acestei valori îi corespunde punctul F pe caracteristica din figura 5. Numărul Mach realizabil este $M = 2{,}27$ dat de punctul F', iar pe figura 6 citim $h = 114$ mm.

Trasînd pe figura 6 prin punctul F o curbă din familia curbelor A_2B_2, A_4B_4 obţinem pentru numărul $M = 2{,}2$ înălţimea $h = 107$ mm (punctul E).

Rezultă de aici că după ce numărul Mach $M = 2{,}2$ este atins efectiv în zona experimentală unde $h = 107$ mm, viteza curentului de aer continuă să crească în aval pînă la $M = 2{,}27$ într-o secţiune pentru care $h = 114$ mm. Acest rezultat a fost de altfel confirmat de măsurătorile de presiune în lungul difuzorului.

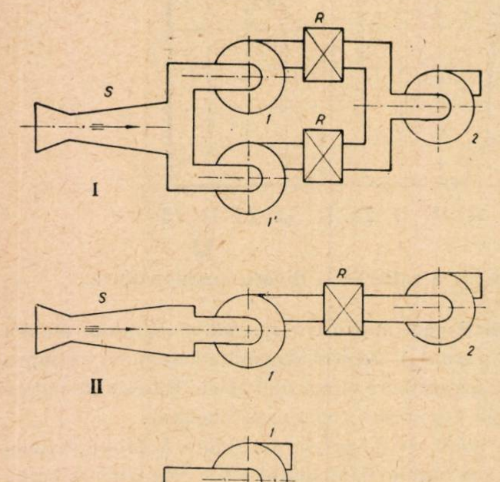


Fig. 7. — Trei scheme de grupare a compresoarelor pentru funcţionare la o suflerie supersonică.

★

Încă din anul 1953, cînd s-au făcut calculele pentru sufleria prezentată aici, am avut ideea folosirii unui grup de compresoare identice, funcţionînd în comun, cu scopul de a realiza o suflerie supersonică cu dimensiuni mai importante şi număr Mach eventual mai ridicat.

Se pot concepe diferite moduri de grupare a compresoarelor, dar considerăm ca potrivite scopului urmărit cele trei combinaţii prezentate în figura 7.

În gruparea I aerul trece din sufleria *S* este absorbit de cele două compresoare *1* şi *1'*, lucrînd în paralel, este răcit în radiatoarele *R*, absorbit de compresorul *2* şi apoi refulat în atmosferă.

În gruparea II aerul trece prin sufleria *S* este absorbit de compresorul *1*, răcit în radiatorul *R*, absorbit de compresorul *2* şi refulat apoi în atmosferă.

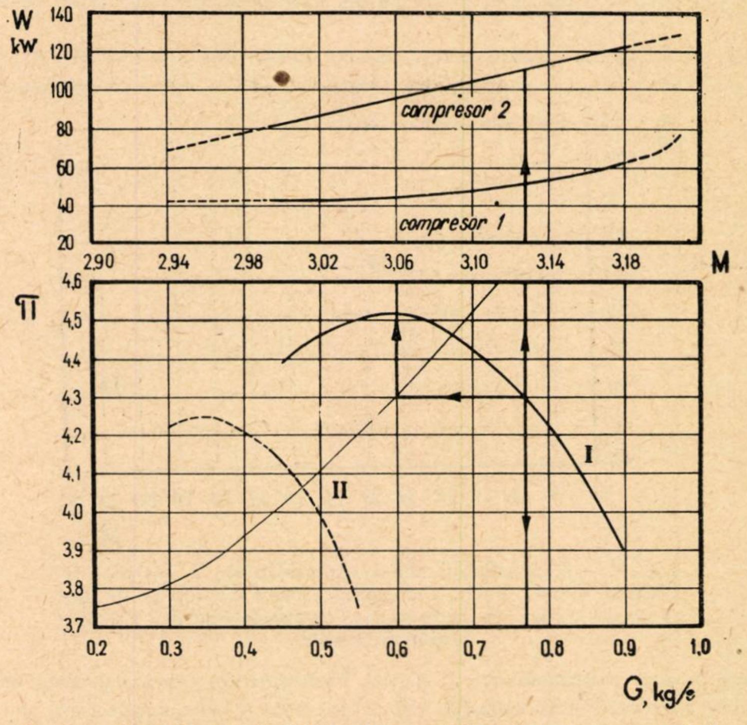


Fig. 8. — Curbele caracteristice ale grupărilor de compresoare I şi II reprezentate în figura 7. Curba $\pi = \pi(N)$.

Radiatoarele *R* sînt astfel dimensionate încît temperatura aerului la intrarea în toate compresoarele să fie aceeaşi.

În gruparea III cele două compresoare *1* şi *1'* lucrează în paralel absorbind aerul prin sufleria *S*. De data aceasta răcitoarele nu mai sînt necesare.

Se pot concepe scheme de funcţionare în care o parte din compresoare să absoarbă aerul din atmosferă şi să-l refuleze în suflerie. Acest mod de funcţionare al compresorului nu este convenabil deoarece debitul greutate crescînd după formula (4) proporţional cu presiunea la refulare, creşte în mod corespunzător şi consumul de putere necesar pentru antrenare. Această creştere a puterii (pentru compresorul nostru aproximativ dublarea puterii) va duce la o suprasolicitare nepermisă a transmisiei şi a pieselor compresorului făcînd imposibilă funcţionarea compresorului. Trebuie ţinut seama de faptul că pe motorul de avion compresorul lucrează în treapta a doua de viteză numai la înălţimi mari, unde aerul este rarefiat, deci în condiţii apropiate schemelor din figura 7.

În baza curbelor caracteristice ale compresorului din figura 5, a formulei (4) şi a principiilor cunoscute cu privire la funcţionarea în serie şi paralel a compresoarelor identice am determinat curbele $\pi = \pi\ (G)$ pentru grupările I şi II, curbe ce sînt reprezentate în diagrama din figura 8, împreună cu curbele puterii absorbite $W = W\ (G)$ pentru antrenarea compresoarelor *1* şi *2*.

Compresoarele grupate conform schemei III funcţionează în paralel, fiecare conform caracteristicii de bază din figura 5. Caracteristica globală se obţine elementar din aceasta dublînd citirile pe abscisă şi din acest motiv nu am mai considerat necesar s-o reprezentăm în figura 8.

Pe aceeaşi diagramă s-a reprezentat pe baza datelor din literatură [1], [2] şi curba raportului de compresie necesar pentru antrenarea aerului într-o suflerie supersonică la diverse numere Mach în zona experimentală $\pi = \pi\ (M)$. Pentru fiecare punct al curbelor caracteristice se pot deduce numărul Mach realizabil, debitul-greutate G corespunzător precum şi puterea necesară pentru antrenarea compresoarelor *1* şi *2*.

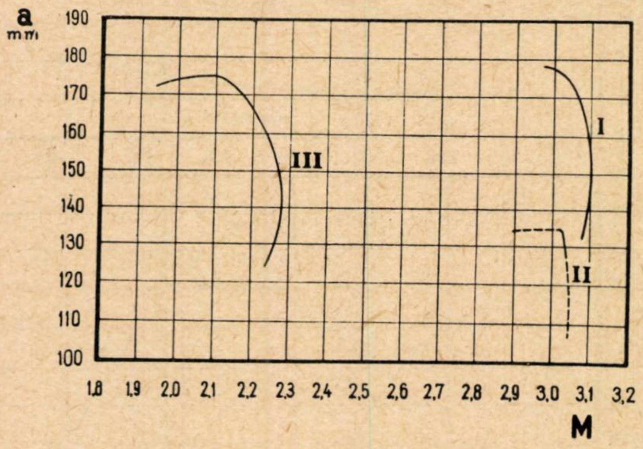


Fig. 9. — Dimensiunile zonei experimentale a sufleriei la diverse numere Mach, antrenarea aerului făcîndu-se de perechi de grupuri de compresoare conforme figurii 7 funcţionînd în paralel.

Cu aceste date după formula (2) am calculat secţiunea zonei experimentale realizabile pentru funcţionarea sufleriei cu cîte două grupuri conforme figurii 7 în paralel. Adoptînd forma patrată a secţiunii am calculat latura ei a în mm, reprezentînd-o în diagrama din figura 9 în funcţie de numărul Mach corespunzător. Calculele pentru schema III s-au dedus din rezultatele obţinute pentru sufleria realizată, înmulţind cu 4 aria zonei experimentale.

Din figura 9 am extras pentru comparaţie tabelele ce urmează în care W_1 este puterea absorbită pentru antrenarea compresoarelor *1*, W_2 puterea absorbită pentru antrenarea compresoarelor *2*, iar W_t puterea totală necesară instalaţiei de compresoare.

Pentru număr Mach maxim

Gruparea	Număr de compresoare	M	a mm	W_1 kW	W_2 kW	W_t kW
I	6	3,1	154	44	95	366
II	4	3,05	115	42	75	234
III	4	2,28	147	94	—	376

Pentru secţiune maximă

Gruparea	Număr de compresoare	M	a mm	W_1 kW	W_2 kW	W_t kW
I	6	2,97	178	62	121	490
II	4	3,025	135	42	82	248
III	4	2,1	175	128	—	512

La funcţionarea după schema II, la număr Mach maxim, punctul corespunzător pe caracteristica compresorului *2* este extrapolat într-o zonă în care există pericol de pompaj. Datorită acestui fapt concluziile trase pentru această situaţie nu sînt sigure.

★

Sufleria supersonică prezentată în cele de mai sus a fost pusă în funcţiune la 1 aprilie 1957, realizîndu-se astfel pentru prima oară în ţara noastră un curent supersonic uniform bun pentru cercetarea aerodinamică.

S-a făcut astfel primul pas în vederea completării bazei noastre experimentale în domeniul vitezelor mari, domeniul de cea mai mare importanţă pentru aviaţia modernă. Pe baza experienţei astfel însuşite sîntem în situaţia de a porni cu încredere la realizarea viitoarelor instalaţii de cercetare mai mari şi mai puternice.

Primită la redacţie la 16 septembrie 1958.

СВЕРХЗВУКОВАЯ ТРУБА ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ РАБОТЕ В НЕЗАМКНУТОЙ ЦЕПИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе представлены первые сведения о сверхзвуковой трубе Института прикладной механики им. Траяна Вуя.

После полного описания установки излагаются данные, касающиеся параметров сверхзвукового течения, полученные в экспериментальном участке, и приводятся фотоснимки некоторых визуальных наблюдений.

Затем приводятся результаты испытаний компрессорной установки, иллюстрируемые графиками. При помощи последних определяется осуществимое сечение экспериментального участка в зависимости от числа Маха. Произведены соответствующие поверочные расчеты для существующих условий работы трубы, причем было получено полное согласие с экспериментом.

В заключение рассматривается возможность осуществления сверхзвуковой трубы больших размеров, приводимой в действие группой компрессоров. Результаты трех наиболее выгодных случаев расположения компрессоров представлены графиками и таблицами.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Общий вид сверхзвуковой трубы (рисунок).

Рис. 2. — Общий вид сверхзвуковой трубы (фотоснимок).

Рис. 3. — Обтекание сферы при $M = 2{,}2$, полученное теневым методом (фотоснимок).

Рис. 4. — Обтекание кругового конуса с раскрытием 30° при $M = 2{,}2$, полученное теневым методом (фотоснимок).

Рис. 5. — Характерные кривые компрессора трубы. Кривая $\pi = \pi\,(M)$.

Рис. 6. — Размеры экспериментальной зоны трубы при различных числах Маха

Рис. 7. — Три схемы группировки компрессоров для работы трубы в сверхзвуковом режиме.

Рис. 8. — Характерные кривые группировок компрессоров I и II, представленных на рис. 7. Кривая $\pi = \pi\,(N)$.

Рис. 9. — Размеры экспериментальной зоны трубы при различных числах Маха, причем нагнетание воздуха производится спаренными, согласно рис. 7, группами параллельно работающих компрессоров.

AU SUJET D'UNE SOUFFLERIE SUPERSONIQU À FONCTIONNEMENT CONTINU EN CIRCUIT OUVERT

RÉSUMÉ

Ce travail fournit les premières données sur la soufflerie supersonique de l'Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia».

On y donne la description complète de l'installation, suivie des données concernant les paramètres de l'écoulement supersonique, obtenus dans la zone expérimentale, ainsi que des photographies des phénomènes rendus visibles.

Ensuite, on donne les résultats des essais faits sur le compresseur de la soufflerie, résultats indiqués par des courbes. Ces derniers ont permis de déterminer la section réalisable de la zone expérimentale, fonction du nombre de Mach. Les vérifications faites pour le fonctionnement actuel de la soufflerie ont donné des résultats parfaitement concordants.

En conclusion, l'auteur étudie la possibilité de construire une soufflerie supersonique plus grande, actionnée par un groupe de compresseurs. Des diagrammes et des tableaux indiquent les résultats correspondant aux trois cas les plus favorables de groupement des compresseurs.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Vue générale de la soufflerie supersonique (dessin).

Fig. 2. — Vue générale de la soufflerie supersonique (photographie).

Fig. 3. — L'écoulement autour d'une sphère, pour $M = 2{,}2$, rendu visible par la méthode des ombres.

Fig. 4. — L'écoulement autour d'un cône circulaire à l'ouverture de 30°, pour $M = 2{,}2$, rendu visible par la méthode des ombres.

Fig. 5. — Courbes caractéristiques du compresseur de la soufflerie. La courbe $\pi = \pi\,(M)$.

Fig. 6. — Dimensions de la zone expérimentale de la soufflerie pour divers nombres de Mach.

Fig. 7. — Trois possibilités (schémas) de grouper les compresseurs pour le fonctionnement d'une soufflerie supersonique.

Fig. 8. — Courbes caractéristiques des groupes de compresseurs I et II représentés dans la figure 7. La courbe $\pi = \pi\ (N)$.

Fig. 9. — Dimensions de la zone expérimentale de la soufflerie pour différents nombres de Mach, dans le cas où l'air est entraîné par des couples de groupes de compresseurs, conformément à la figure 7, au fonctionnement parallèle.

BIBLIOGRAFIE

1. J. ACKERET, *Hochgeschwindigkeit Windkanäle.* Convegno di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali, Roma, 1935, pp. 487—562.
2. L. HOWARTH, *Modern developments in Fluid dynamics high speed flow.* **II.** Oxford, 1953.
3. V. F. RIS, *Compresoare centrifugale,* Ed. tehnică, București, 1958.

REFERATE ŞI NOTE TEHNICE

DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN CUPOLE SFERICE DIN SARCINI NESIMETRICE

DE

MIHAI IONESCU

1. Ecuaţiile de bază ale suprafeţelor de rotaţie în teoria de membrană sub acţiunea încărcărilor nesimetrice

În teoria de membrană, ecuaţiile de echilibru ale unui element de suprafaţă în cazul sarcinilor nesimetrice se scriu sub forma

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_{\varphi\theta} \cdot r_0)}{\partial \varphi} + N_{\theta\varphi} r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z. \tag{1.3}$$

Sarcinile exterioare permit, în general, a fi puse sub formă trigonometrică. Acest fapt prezintă avantajul că ecuaţiile (1.1), (1.2), (1.3) devin din ecuaţii cu derivate parţiale, ecuaţii cu derivate totale.

În acest caz, integrarea se poate face cu uşurinţă presupunînd că şi eforturile se pot pune sub formă trigonometrică, ceea ce urmează a fi verificat ulterior. Vom scrie deci pentru componentele încărcării

$$\begin{aligned} X &= \Sigma\, X_n \sin n\,\theta, \\ Y &= \Sigma\, Y_n \cos n\,\theta, \qquad (n = (0,\ 1,\ 2 \ldots), \\ Z &= \Sigma\, Z_n \cos\ n\,\theta, \end{aligned} \tag{1.4}$$

şi pentru eforturi

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \Sigma\, N_{\varphi n} \cos n\,\theta, \\ N_\theta &= \Sigma\, N_{\theta n} \cos n\,\theta, \qquad\qquad n = (0, 1, 2, \ldots), \\ N_{\varphi\theta} &= N_{\theta\varphi} = \Sigma N_{\varphi\theta n} \sin n\theta. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Scrim condiţia ca relaţiile (1.4) şi (1.5) să verifice ecuaţiile (1.1), (1.2), (1.3), pentru un termen de rang n

$$-N_{\theta n}\, n\, r_1 + \frac{d}{d\varphi}(N_{\varphi\theta n}\, r_0) + N_{\varphi\theta n}\, r_1 \cos\varphi + X_n\, r_0\, r_1 = 0, \tag{1.6}$$

$$N_{\theta\varphi n}\, n\, r_1 + \frac{d}{d\varphi}(N_{\varphi n} r_0) - N_{\theta n}\, r_1 \cos\varphi + Y_n\, r_0\, r_1 = 0, \tag{1.7}$$

$$N_{\theta n} = -Z_n\, r_2 - N_{\varphi n}\,\frac{r_2}{r_1}. \tag{1.8}$$

Eliminînd pe N_{θ_n} se obţin ecuaţiile diferenţiale de bază ale încărcărilor nesimetrice

$$\frac{dN_{\varphi\theta n}}{d\varphi} + \left(\frac{1}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\varphi} + \frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi\right) N_{\varphi\theta n} + \frac{n}{\sin\varphi}\, N_{\varphi n} = -X_n r_1 - Z_n\,\frac{n\, r_1}{\sin\varphi}, \tag{1.9}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{d\varphi} + \left(\frac{1}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right) N_{\varphi n} + \frac{n}{\sin\varphi}\,\frac{r_1}{r_2}\, N_{\varphi\theta n} = -Y_n\, r_1 - Z_n\, r_1 \operatorname{ctg}\varphi. \tag{1.10}$$

În cazul cupolei sferice avem $r_1 = r_2 = a$, deci relaţiile (1.9) şi (1.10) se scriu în modul următor

$$\frac{dN_{\varphi\theta n}}{d\varphi} + \frac{2}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\varphi}\, N_{\varphi\theta n} + \frac{n}{\sin\varphi}\, N_{\varphi n} = -\left(X_n + \frac{n}{\sin\varphi} Z_n\right) a, \tag{1.11}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{d\varphi} + \frac{2}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\varphi}\, N_{\varphi n} + \frac{n}{\sin\varphi}\, N_{\varphi\theta n} = -\left(Y_n + Z_n \operatorname{ctg}\varphi\right) a. \tag{1.12}$$

Prin adunarea şi scăderea ecuaţiilor (1.11) şi (1.12) se obţine

$$\frac{dU_{1n}}{d\varphi} + \left(\frac{2}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\varphi} + \frac{n}{\sin\varphi}\right) U_{1n} + L_1(\varphi) = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{dU_{2n}}{d\varphi} + \left(\frac{2}{r_0}\,\frac{dr_0}{d\varphi} - \frac{n}{\sin\varphi}\right) U_{2n} + L_2(\varphi) = 0. \tag{1.14}$$

S-au făcut notaţiile

$$N_{\varphi n} + N_{\varphi\theta n} = U_{1n}\,; \qquad N_{\varphi n} - N_{\varphi\theta n} = U_{2n}, \tag{1.15}$$

$$L_{1,2}(\varphi) = (\pm X_n + Y_n)\, a + Z_n\, a\,\frac{\cos\varphi \pm n}{\sin\varphi}. \tag{1.16}$$

Soluţiile ecuaţiilor (1.13) şi (1.14) sînt

$$\begin{aligned} U_{n1} &= \left[C_1 - \int L_1(\varphi)\,\sin^2\varphi\,\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right]\frac{\operatorname{ctg}^n\dfrac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi}, \\ U_{2n} &= \left[C_2 - \int L_2(\varphi)\,\sin^2\varphi\,\operatorname{ctg}^n\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right]\frac{\operatorname{tg}^n\dfrac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Fiind necesar pentru un proiect, am calculat pe această cale eforturile din vînt în cupola deschisă la partea superioară şi eforturile date de solicitările seismice.

2. Calculul la vînt al cupolelor sferice deschise la partea superioară

S-a ajuns la următoarele relaţii care determină starea de efort în cupolă sub acţiunea vîntului

$$\begin{aligned} N_{\varphi 1} &= \frac{1}{2\sin^3\varphi}\left[C_1 + C_2 + (C_1 - C_2)\cos\varphi + 2\,p\,a\cos\varphi\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right], \\ N_{\varphi\theta 1} &= \frac{1}{2\sin^3\varphi}\left[C_1 - C_2 + (C_1 + C_2)\cos\varphi + 2\,p\,a\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Constantele se determină punînd condiţia ca pentru $\varphi = \varphi_s$ să avem

$$N_{\varphi 1} = 0; \quad N_{\varphi\theta 1} = 0. \tag{2.2}$$

Găsim valorile

$$\begin{aligned} C_1 &= -\,pa\left(\cos\varphi_s - \frac{1}{3}\cos^3\varphi_s\right) = -\,pa\,k_s, \\ C_2 &= +\,pa\left(\cos\varphi_s - \frac{1}{3}\cos^3\varphi_s\right) = +\,pa\,k_s. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Valorile $k = \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi$ sînt date în tabela 1, iar în figura 1 se dă diagrama valorilor k funcţie de unghiul φ.

Se observă ca la limită cînd $\varphi_s \to 0$ valorile constantelor sînt $C_1 = -C_2 = -\frac{2}{3}pa$ adică tocmai cele obţinute pentru cupola închisă la partea superioară.

φ	
0	0,6666
10	0,6664
20	0,6631
30	0,6496
40	0,6162
50	0,5543
60	0,4583
70	0,3288
80	0,1718
90	0

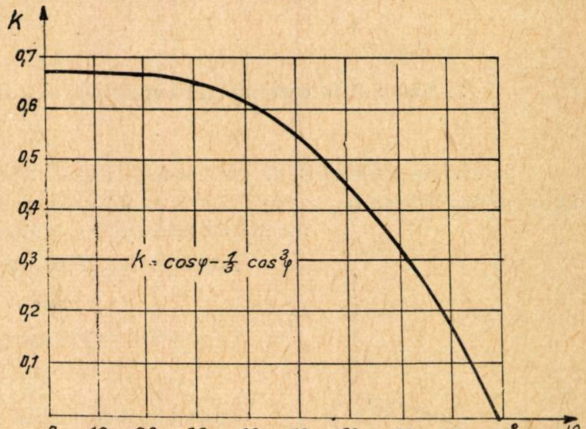


Fig. 1

Înlocuind valorile constantelor date de (2.3) în (2.1) se obţin eforturile în cupolă

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{pa\cos\varphi}{\sin^3\varphi}(k_s - k)\cos\theta, \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{pa}{\sin^3\varphi}(k_s - k)\sin\theta, \\ N_\theta &= -\,pa\sin\varphi\cos\theta - N_\varphi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Exemplu de calcul. În figura 2 s-a dat distribuţia eforturilor din vînt în cupola deschisă la partea superioară pentru $\varphi_s = 20°$ ($k_s = 0{,}6631$).

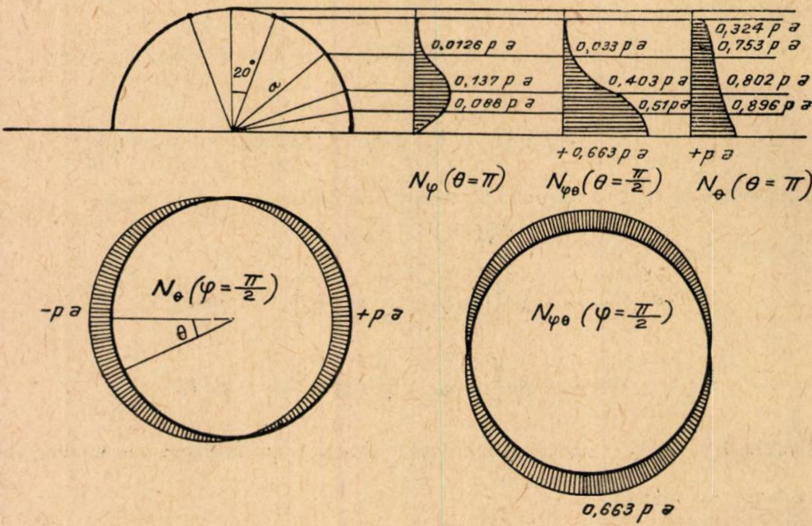

20°
α
0,0126 p a
0,137 p a
0,088 p a
0,033 p a
0,403 p a
0,51 p a
0,324 p a
0,753 p a
0,802 p a
0,896 p a
+0,663 p a
+p a
$N_\varphi(\theta=\pi)$
$N_{\varphi\theta}(\theta=\frac{\pi}{2})$
$N_\theta(\theta=\pi)$
-p a
$N_\theta(\varphi=\frac{\pi}{2})$
θ
+p a
$N_{\varphi\theta}(\varphi=\frac{\pi}{2})$
0,663 p a

Fig. 2

3. Calculul la cutremur al cupolelor sferice cu, sau fără luminator

Solicitarea seismică dă în pînză o forţă masică orizontală h (fig. 3), care este o fracţiune din greutatea proprie g. Se poate deci scrie $h = \alpha\, g$, unde α este un coeficient care se dă în funcţie de intensitatea cutremurului.

Proiecţia lui h pe direcţia X este

$$X = h \sin \theta. \tag{3.1}$$

Pe direcţia razei r_{OM} se proiectează

$$F_1 = h \cos \theta.$$

Descompunînd această forţă după direcţiile y şi z obţinem

$$Y = -F_1 \cos \varphi = -h \cos \varphi \cos \theta, \tag{3.2}$$

$$Z = +F_1 \sin \varphi = +h \sin \varphi \cos \theta. \tag{3.3}$$

Factorii de încărcare sînt

$$\begin{aligned} L_1(\varphi) &= (h - h \cos \varphi)\, a + h \sin \varphi\, a \frac{\cos\varphi + 1}{\sin \varphi} = 2\, ha, \\ L_2(\varphi) &= (-h - h \cos \varphi)\, a + h \sin \varphi\, a \frac{\cos \varphi - 1}{\sin \varphi} = -2\, ha. \end{aligned} \tag{3.4}$$

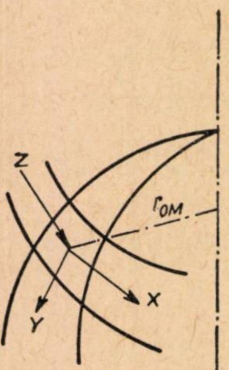


Fig. 3

Calculăm expresiile (1.17) cu ajutorul factorilor de încărcare (3.4). Se obţine

$$U_{11} = \left[C_1 - 2\,ha\sin^4\frac{\varphi}{2}\right]\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi},$$
$$U_{21} = \left[C_2 - 2\,ha\cos^4\frac{\varphi}{2}\right]\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi}. \tag{3.5}$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile (1.15) se obţin eforturile $N_{\varphi1}$. $N_{\varphi\theta1}$ prin adunarea, respectiv scăderea acestor relaţii

$$N_{\varphi1} = \left[C_1 - 2\,ha\sin^4\frac{\varphi}{2}\right]\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\varphi} + \left[C_2 - 2\,ha\cos^4\frac{\varphi}{2}\right]\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\varphi},$$
$$N_{\varphi\theta1} = \left[C_1 - 2\,ha\sin^4\frac{\varphi}{2}\right]\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\varphi} - \left[C_2 - 2\,ha\cos^4\frac{\varphi}{2}\right]\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\varphi}. \tag{3.6}$$

Constantele se determină din condiţiile ce se pun pentru inelul superior

$$\varphi \to \varphi_s \quad \begin{cases} N_{\varphi1} = 0, \\ N_{\varphi\theta1} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Rezultă

$$C_1 = 2\,ha\sin^4\frac{\varphi_s}{2},$$
$$C_2 = 2\,ha\cos^4\frac{\varphi_s}{2}. \tag{3.8}$$

Pentru cupola deschisă la partea superioară se obţin eforturile

$$N_\varphi = \frac{ha}{\sin^2\varphi}\left[\left(\sin^4\frac{\varphi_s}{2} - \sin^4\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \left(\cos^4\frac{\varphi_s}{2} - \cos^4\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]\cos\theta,$$
$$N_{\varphi\theta} = \frac{ha}{\sin^2\varphi}\left[\left(\sin^4\frac{\varphi_s}{2} - \sin^4\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \left(\cos^4\frac{\varphi_s}{2} - \cos^4\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]\sin\theta, \tag{3.9}$$
$$N_\theta = -\,ha\sin\varphi\cos\theta - N_\varphi.$$

La limită, făcînd $\varphi_s \to 0$ se obţin eforturile pentru cupola închisă la partea superioară. În sfîrşit, expresiile capătă următoarea formă

$$N_\varphi = ha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\frac{1}{1+\cos\varphi}\cos\theta,$$
$$N_{\varphi\theta} = -\,ha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\sin\theta, \tag{3.10}$$
$$N_\theta = -\,ha\sin\varphi\cos\theta - N_\varphi.$$

Exemplu de calcul. Pentru cupola închisă la partea superioară încărcată cu sarcini seismice, distribuția de eforturi este arătată în figura 4.

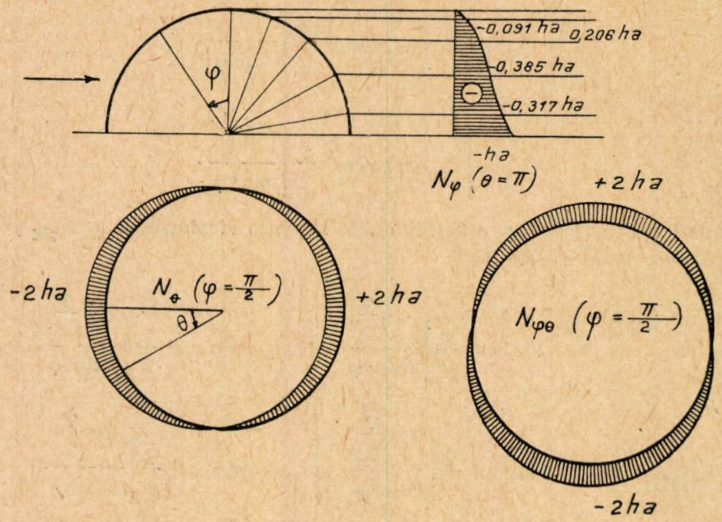


Fig. 4

Primită la redacție la 19 august 1958.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ОТ НЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЗОК В СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Показан расчет усилий в сферическом куполе, в мембранной стадии, под действием несимметричных ветровых и сейсмических нагрузок.

Формулы (2.4) выражают изменение усилий под действием ветра в сферическом, открытом сверху куполе.

Соотношения (3.9) и (3.10) определяют усилия, вызываемые сейсмическими нагрузками в открытом, соответственно закрытом, сверху куполе.

Ход кривых усилий показан в примерах расчета, приводимых для каждого случая.

DÉTERMINATION DES EFFORTS DANS LES COUPOLES SPHÉRIQUES SOUS L'ACTION DE CHARGES ASYMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur indique dans cet article le calcul des efforts développés dans une coupole sphérique à l'état de membrane, sous l'action des charges asymétriques produites par le vent ou par des sollicitations sismiques.

Les formules (2.4) expriment la variation des efforts sous l'action du vent dans la coupole sphérique ouverte à sa partie supérieure.

Les expressions (3.9) et (3.10) déterminent les sollicitations engendrées par l'effet des charges sismiques dans la coupole ouverte et, respectivement, fermée à sa partie supérieure.

L'allure des diagrammes des efforts est indiquée dans les exemples de calcul effectués pour chaque cas.

BIBLIOGRAFIE

1. M. SOARE, *Teoria suprafeţelor subţiri*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, **III**, *2—4*, iulie-decembrie (1952).
2. S. TIMOSENKO, *Théorie des Plaques et des Coques*. Ed. Béranger, Paris, 1948, cap. X.
3. A. A. BELEŞ, *Rezistenţa materialelor*. **II**, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.

Л. И. СЕДОВ, *Методы подобия и размерности в механике*. (Metodele similitudinii şi a dimensiunilor în mecanică). Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957, 367 pag.

Importanţa acestei lucrări este dată, pe de o parte, de rolul mare pe care îl au aceste metode de învestigare într-o serie de ramuri ale fizicii şi tehnicii, iar pe de altă parte, de felul raţional şi sistematic al expunerii lor.

Astfel, conţinutul cărţii se poate împărţi în linii mari în două părţi. Prima parte, formată din capitolul I şi parte din capitolul II, cuprinde teoria generală a dimensiunilor şi a modelării prezentate la un nivel ştiinţific ce exclude simplitatea şi elementarul.

A doua parte, cuprinzînd celelalte trei capitole, conţine un mare număr de exemple de aplicare creatoare a acestor teorii la anumite cazuri concrete din mecanică, hidraulică, termodinamică, dinamica gazelor şi astrofizică.

Se reuşeşte a se închega pentru prima dată o metodă teoretică de cercetare, datorită unei analize calitative mai intime a mecanismului fizic al fenomenelor şi a parametrilor esenţiali ce determină evoluţia lor.

Astfel, se clarifică conţinutul noţiunilor de bază ca : mărime cu sau fără dimensiune, numărul unităţilor fundamentale de măsură precum şi acel sens mistic al formulelor de dimensiuni ce apărea din felul confuz şi intuitiv al prezentării noţiunii de dimensiune.

În unele cazuri, neclarităţi de acest fel au dus la rezultate paradoxale, autorul arătînd în cuprinsul cărţii rezolvarea corectă a problemei lui Rayleigh cu privire la căldura cedată de un corp unui curent lichid.

El scoate în evidenţă esenţialul şi specificul acestor teorii combătînd cele două puncte de vedere extremiste, ale banalităţii sau atotputerniciei acestor metode. Stabileşte drept domeniu de aplicare a lor, stadiul cel mai iniţial al punerii problemelor, scoţînd prin aceasta în evidenţă esenţialul şi specificul lor.

Arată apoi, ilustrînd aceasta prin cîteva exemple celebre, că combinarea consideraţiilor teoriei dimensiunilor cu presupunerile de ordin fizic şi calculul matematic conduc la cele mai importante şi subtanţiale rezultate în cercetarea ştiinţifică. În acest sens, în capitolul III autorul aplică cu succes metoda similitudinii la problemele mişcării turbulente a fluidelor, unde ea reprezintă una din metodele de cercetare teoretică de bază, deoarece în acest caz încă nu sînt stabilite definitiv sistemele de ecuaţii, care să permită reducerea problemei de mecanică la una de matematică. Se obţin cu această ocazie, rezultate importante ce întregesc şi explică cîteva probleme ale teoriei turbulenţei.

În capitolul IV s-au studiat o serie de probleme de un deosebit interes practic, legate de mişcarea nepermanentă şi unidimensională a gazelor, cum ar fi : detonaţia şi arderea, problema unei explozii puternice, amortizarea undei de şoc etc.

În sfîrşit în capitolul V şi ultimul al acestei lucrări, sînt expuse cercetări în legătură cu aplicarea metodei dimensiunilor şi a teoriei mişcării unidimensionale şi nepermanente a gazelor la unele probleme ale astrofizicii. Rezultatele obţinute aici pot servi drept bază pentru studiul importantelor fenomene observate de astronomi, cum ar fi : pulsaţia stelelor, exploziile lor, constituţia lor internă şi influenţa diferiţilor factori fizici legaţi de repartiţia şi absorbţia energiei în interiorul stelelor etc.

Din succinta prezentare şi apreciere a conţinutului acestei cărţi, reiese limpede importanţa mare pe care o are această lucrare pentru cititor în general şi pentru cercetătorul mecanician în special. Cartea nu numai că prezintă sub o formă clară şi precisă din punct de vedere ştiinţific problemele fundamentale ale teoriei dimensiunilor şi a similitudinii, dar în acelaşi timp prin bogata exemplificare a aplicării acestor metode în domenii variate ale ştiinţei şi tehnicii şi prin alegerea celor mai specifice exemple, atît clasice cît şi moderne, reuşeşte să dea cititorului posibilitatea de a aplica creator aceste teorii în domeniul său de studiu.

M. Cazacu

* * * *Proudeni v lopatkovych strojich. Sbornik ustavu pro vyzkum stroju* (Problemele maşinilor cu palete. Culegere a Institutului pentru cercetarea maşinilor). Editura Academiei de ştiinţe cehoslovace, Praha, 1958, 453 pag.

Institutul pentru cercetarea maşinilor de pe lîngă Academia de ştiinţe cehoslovacă este un organism relativ recent înfiinţat, într-o ţară în care o veche şi bine organizată industrie constructoare de maşini, a impus încă mai de mult crearea unor dezvoltate institute de cercetări pe lîngă marile uzine şi pe lîngă ministerele de resort. În această situaţie, s-a impus în mod natural institutului corespunzător al Academiei sarcina de a coordona activitatea de cercetare depusă în anumite direcţii. Ca urmare, au fost organizate consfătuiri asupra unor subiecte date, la care cercetătorii de specialitate din toate institutele au prezentat comunicări şi referate prin care se concretizează activitatea lor ştiinţifică.

Volumul de care ne ocupăm cuprinde lucrările prezentate la o astfel de conferinţă, care a avut ca obiect problemele maşinilor cu palete. Comunicările şi rezultatele au fost prezentate de cercetători din principalele institute care studiază astfel de probleme şi anume *Výzkumny ústav tepelné techniky* (Institutul de cercetări pentru termotehnică), *Výzkumny a zkusebni letecky ústav* (Institutul de cercetări şi încercări de aviaţie), *Ustav pro výzkum stroju c CSAV* (Institutul pentru cercetarea maşinilor, Academia de ştiinţe cehoslovacă) precum şi institutele sau grupele de cercetare din uzinele CKD Stalingrad, CKD Blansko şi V. I. Lenin Plzeň. La discuţii au mai participat cercetători de la alte institute şi uzine, fapt care arată că organizarea unei astfel de consfătuiri a fost o iniţiativă care a găsit un larg ecou în toate cercurile interesate.

În ceea ce priveşte conţinutul, volumul cuprinde cinci părţi, care grupează lucrările cu aceeaşi tematică generală. După un referat introductiv în care dr. ing. J. Jerie defineşte importanţa cercetărilor ştiinţifice asupra scurgerii în maşinile cu palete şi face un examen critic asupra metodelor de investigaţie existente, urmează prima parte consacrată teoriei acestor maşini. Problema alegerii celei mai bune distribuţii de viteze potenţiale în lungul profilelor de palete, în vederea trasării acestora, este tratată de L. Špaček, pe baza unor rezultate din teoria stratului limită. Un studiu amplu asupra soluţiei optime pentru intrarea în rotorul unui compresor centrifugal cu debit limită este făcut de ing. F. Wergner. Se consideră cazul în care viteza de intrare în rotor este apropiată de aceea a sunetului şi se prezintă calculele aerodinamice care conduc la determinarea dimensiunilor optime ale rotorului. Un al treilea articol, ultimul din această parte, este acela în care dr. ing. Fr. Erhart studiază problema construcţiei paletelor de la rotoarele pompelor centrifuge şi turbinelor cu apă, astfel încît pericolul cavitaţiei să fie minim. Autorul face o expunere critică a soluţiei date de Bauersfeld şi propune apoi o soluţie proprie ale cărei avantaje sînt prezentate pe larg.

A doua parte a volumului cuprinde lucrări care au ca obiect studii experimentale asupra elementelor constitutive ale maşinilor cu palete. Este vorba în deosebi de paletaje, care au făcut obiectul unor cercetări experimentale foarte amănunţite, în mai multe institute. Astfel la Institutul de cercetări pentru termotehnică, au fost executate cercetări sistematice asupra reţelelor de profile, într-un tunel aerodinamic propriu, de viteză mică. Au fost măsurate pierderile şi distribuţia de presiuni, pentru diferite unghiuri de incidenţă şi diferite decalaje ale reţelei. Sistematizarea cercetărilor a fost realizată prin utilizarea unui calculator analog şi prin introducerea unei familii de profile dezvoltată special în acest scop. Pe lîngă expunerea acestor rezultate, care este făcută de ing. M. Hořejší, se mai prezintă şi un referat alcătuit de ing. M. Hibš din acelaşi institut, care are ca obiect studiul experimental al difuzoarelor inelare. Cercetările sistematice întreprinse asupra acestor difuzoare au avut ca obiect scoaterea în evidenţă a influenţei pe care o au parametrii geometrici de bază.

Un studiu comparativ al diferitelor metode utilizate pentru studiul reţelelor de profile, în vederea aplicării la construcţia paletelor de turbine, este prezentat de ing. L. Belik. Din prezentarea critică a diferitelor metode teoretice şi experimentale, autorul trage concluzia că pentru a se obţine cele mai bune profile, este necesar să se utilizeze ambele căi de investigaţie.

Un referat amplu asupra studiului experimental al reţelelor de profile la viteze mari, datorit lui J. Bukovský, conţine rezultatele obţinute în sufleria supersonică special construită în acest scop la Institutul de cercetări şi încercări de aviaţie. După un scurt istoric, se descrie instalaţia experimentală care este adaptată la o suflerie supersonică funcţionînd cu intermitenţă. Se examinează apoi o serie de probleme referitoare la tehnica măsurătorilor şi în deosebit la metodele optice, ale căror posibilităţi şi limitări sînt discutate în detaliu. Sînt date apoi unele rezultate ale măsurătorilor şi mai multe fotografii obţinute prin metoda umbrelor.

În continuare dr. ing. V. Zajic prezintă rezultatele obţinute în Institutul de cercetări al uzinelor V. I. Lenin din Plzeň în cercetările experimentale asupra reţelelor de profile utilizate la turbine şi la compresoare. Mărimile caracteristice (coeficienţii forţelor aerodinamice, unghiul de deviaţie al curentului, randamentul energetic) au fost determinate prin metoda impulsului, ale cărei condiţii corecte de aplicare sînt discutate în articol. Determinarea caracteristicilor menţionate pe baza rezultatelor măsurătorilor fiind foarte laborioasă, s-a recurs la două tipuri de calculatori mecanici, de asemenea descrişi în articol. Într-o anexă la acest studiu, ing. J. Peprný dă descrierea sufleriei aerodinamice în care au fost efectuate cercetările.

A treia parte a volumului conţine două studii asupra unor probleme destul de puţin înrudite. În primul din acestea, Z. Janour face o prezentare a unor rezultate recente din teoria turbulenţei şi discută consecinţele acestora pentru stratul limită. În concluzie, se arată că pentru turbomaşini este necesar să se examineze dezvoltarea stratului limită sub influenţa curentului turbulent exterior. Într-o anexă la acest articol, ing. R. Dvořak şi ing. M. Pichal discută o serie de probleme ridicate de executarea măsurătorilor cu ajutorul anemometrului cu fir cald într-un curent compresibil subsonic.

Celălalt studiu, al ing. R. Skarecký are ca obiect studiul fenomenului de autovibraţie (flutter) la reţelele de profile. Se prezintă rezultate experimentale şi o soluţie teoretică simplificată.

În partea a patra sînt grupate studiile care au ca obiect cercetările pe modele. În primul articol, ing. Z. Moravec expune o metodă aproximativă pentru analizarea scurgerii în ventilatoarele axiale, așa fel încît să se țină seama de influența reciprocă a diferitelor elemente constitutive ale acestor mașini.

Încercările executate în sufleria aerodinamică asupra unui compresor axial experimental sînt expuse de ing. M. Vlasák și ing. V. Folta. Se descrie instalația și se dau principalele rezultate obținute.

Un studiu amplu referitor la încercările sistematice pe modele de turbine, pentru determinarea randamentului paletelor, este semnat de J. Bilek, ing. J. Camek și ing. P. Veselý. Sînt descrise lucrările teoretice și experimentale care au fost efectuate, insistîndu-se în special asupra paletelor de turbină de lungime relativ mare. Se atrage de asemenea atenția asupra unor noi aspecte ale scurgerii în turbomașini, care sînt de mare însemnătate din punct de vedere teoretic și practic. Analiza rezultatelor demonstrează complexitatea proceselor din treptele turbinelor și arată necesitatea executării cercetărilor în noi direcții și în special asupra efectului turbulenței. În anexele la acest studiu, sînt prezentate cîteva instalații de încercări ale turbinelor de la unele mari uzine din Republica Cehoslovacă.

Urmează un referat de prezentare a cercetărilor experimentale efectuate la uzinele CKD din Blansko asupra unei turbine Kaplan cu zece palete. Autorul, ing. M. Vitvar, descrie procedeul aproximativ, însă suficient de precis, care a fost utilizat pentru a se analiza influența diferitelor părți ale turbinei asupra randamentului acesteia.

Ultimul studiu din această parte, datorit ing. B. Seitler, de asemenea de la uzinele CKD din Blansko, are ca obiect determinarea influenței pe care parametrii hidrodinamici fundamentali o au asupra randamentului cuplajelor hidraulice.

Volumul se încheie cu o parte care conține studii asupra aparaturii de măsură, executate în Institutul pentru cercetarea mașinilor de pe lîngă Academia de științe cehoslovacă. Sondele de măsură pentru curenții tridimensionali formează obiectul unui studiu alcătuit de ing. Z. Petr. Autorul prezintă cîteva tipuri de asemenea sonde, descriind și metodica utilizării lor, în deosebit pentru cercetările asupra turbomașinilor.

Ing. L. Tomanec este autorul unui studiu asupra măsurătorilor de presiune pe cale electrică. Se dă o privire generală asupra metodelor existente și se insistă în mod special asupra măsurării presiunilor mici cu ajutorul tensometrelor cu rezistență electrică, indicîndu-se și aparatura electrică ce asigură o mare sensibilitate și stabilitate.

Ultimul articol cuprinde descrierea unui dinamometru de torsiune construit de ing. F. Slepička pentru măsurarea cuplului transmis la arborele unei turbomașini.

Din cuprinsul acestei culegeri, rezultă în primul rînd deosebita însemnătate care se acordă în Republica Cehoslovacă studiilor destinate să amelioreze construcția turbomașinilor, care constituie unul din produsele industriale de bază ale țării. Se remarcă de asemenea amploarea cercetărilor experimentale, pentru care au fost create numeroase instalații și s-a procurat aparatură modernă. Semnalăm cu această ocazie faptul că mai multe institute de cercetări, cu specific destul de deosebit de aerodinamica propriu-zisă, posedă suflerii aerodinamice destul de moderne. Găsim în aceasta o indicație asupra modului serios în care sînt privite problemele de construcția mașinilor, în care mecanica fluidelor și aerodinamica joacă un rol destul de însemnat. O ultimă caracteristică pe care credem că este interesant să o scoatem în evidență este preponderența cercetărilor experimentale asupra celor teoretice, fapt care ni se pare a reflecta întreaga orientare a cercetărilor în domeniul științelor tehnice din Republica Cehoslovacă așa cum am putut constata de altfel și personal, cu ocazia unei vizite de studii întreprinsă în această țară.

T. Oroveanu

Ф. Л. ЛИТВИН, *Некруглые зубчатые колеса* (Roţi dinţate necirculare). Машгиз, Москва-Ленинград, 1956, 310 pag.

Capitolul I. După o scurtă introducere în care se trec în revistă o serie de mecanisme în componenţa cărora intră şi mecanisme de roţi dinţate necirculare ca aparate de bobinat, prese mecanice, mecanisme de acţionarea conveioarelor contoare de apă etc., autorul trece la studiul teoretic al centroidelor cu roţi necirculare stabilind formulele de calcul ale profilului centroidelor, atunci cînd se cunosc o serie de parametri geometrici şi cînd fiind dată curba de variaţie a unghiului de rotaţie φ_1 a centroidei motoare, trebuie să se determine profilul camei conduse care să respecte o lege de variaţie dată pentru unghiul de rotaţie φ_2. Din expresia razei de curbură f şi punînd condiţia ca $\rho = 0$ adică centroidele să nu prezinte concavităţi, stabileşte ecuaţiile condiţionale ale variabilei independente x în funcţie de care este exprimat unghiul φ_1.

Autorul ilustrează cu un exemplu modul de determinare a acestor condiţii pentru roţile ovale. Din formulele generale considerînd $r_2 = \infty$ stabileşte ecuaţiile de legătură între deplasarea centroidei conduse şi rotaţia centroidei conducătoare, respectiv între profilele celor două centroide.

Capitolul II. Mai întîi, autorul stabileşte condiţiile geometrice pentru centroidele la care transmisia nu se mai face prin contact direct, ci prin intermediul dinţilor. Ca profil pentru dinţi ca şi în cazul general, consideră profilul în evolventă, bineînţeles evolventa unui profil curb oarecare şi stabileşte astfel toate relaţiile generale şi relaţiile geometrice ale elementelor danturii roţilor necirculare ca modul, linie de angrenare, grad de acoperire, fenomenul de interferenţă, metode de prelucrare, profilul sculelor aşchietoare etc.

Capitolul III. În capitolul III, autorul stabileşte ecuaţia generală de mişcare, unghiurile de presiune, momentele şi forţele care acţionează asupra dinţilor în vederea stabilirii calculului de rezistenţă al dinţilor roţilor necirculare.

Capitolul IV. În capitolul IV, se dau metode de calcul pentru proiectarea angrenajelor de roţi eliptice, angrenaje de roţi ovale, de roţi circulare cu roţi necirculare etc. O aplicaţie interesantă a angrenajelor necirculare este ilustrată în paragraful 24 şi 25 unde se dau o serie de mecanisme de roţi circulare şi necirculare la care la axul condus se obţine o mişcare după o anumită lege dată, funcţie de mişcarea cunoscută a axului conducător.

Capitolul V. În acest capitol sînt indicate metodele de execuţie a dinţilor roţilor necirculare şi o serie de dispozitive şi maşini de lucru avînd ca principiu general folosirea şabloanelor iar ca metodă cea a prelucrării dinte cu dinte sau a rostogolirii. Se indică de asemenea, metodele aproximative de prelucrare a dinţilor roţilor necirculare.

Capitolul VI. Acest capitol se ocupă cu controlul parametrilor geometrici ai angrenajului roţilor necirculare şi metodele de control respective precum şi de influenţa erorilor de prelucrare datorate centrului de rotaţie al sculei, erorilor de divizare, a excentricităţii etc.

Victor Nisipeanu

* * * *Труды Куйбышевского инженерно-строительного института* (Lucrările Institutului de construcţii din Kuibîşev). Куйбышевское книжное издательство, vol. III, 1956 şi vol. IV, 1957, 528 pag.

În aceste două volume sînt publicate lucrări ale membrilor diverselor catedre ale Institutului de construcţii din Kuibîşev. Aceste lucrări îmbrăţişează domenii foarte diferite, ca de exemplu, matematici teoretice şi aplicate, rezistenţa materialelor şi statica construcţiilor hidraulică şi construcţii hidrotehnice, studiul materialelor şi metodelor de construcţii.

Volumele conţin atît comunicări originale prezentate la nivel înalt, cît şi mai multe dări de seamă scurte asupra unor lucrări executate de catedre, în ajutorul producţiei. Sînt descrise, de asemenea, o serie de instalaţii experimentale realizate pentru dizertaţiile de aspirantură ce se fac în acest Institut.

Este de observat că toate lucrările au permanent în vedere posibilitatea de aplicare în practică a rezultatelor obţinute prin cercetările ştiinţifice.

Dintre lucrările de matematici cităm pe cea a lui Moskvicev: *Rezolvarea unei probleme de margine, rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de derivate parţiale de gradul doi, în condiţii de margine date*, precum şi pe cea a lui Fomin, *Despre însumarea unor serii numerice.* unde se dă suma unei serii legate de calculul hidromecanic al infiltraţiei prin baraje de pămînt $\left(\text{este vorba de suma } \theta\ (c) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2k!}{(2k+1)!} \int_{1}^{\infty} (\eta-1)^{-\frac{1}{2}} (\eta+1)^{k-\frac{3}{2}} (\eta+c)\, d\eta \right)$.

Domeniul rezistenţei şi staticei este reprezentat mai larg. O atenţie deosebită o acordă rezolvării fermelor static indeterminate. Prof. S. F. Medvedev prezintă avantajele metodei separării pe panouri pentru un tip de fermă întîlnit, de exemplu, în construcţia turlelor sondelor, precum şi posibilităţile de dirijare a repartiţiei eforturilor într-un sistem de bare cu $E = \text{const}$.

Docentul Samoilov propune o metodă de calcul a grinzilor continue precum şi a cadrelor, prin metoda coeficienţilor de influenţă. Se ştie că metoda forţelor ca şi metoda deplasărilor au o serie de deficienţe : elementele căutate se determină indirect, iar în calcule se operează simultan ca unele numere foarte mici (unghiuri, deplasări) şi cu altele foarte mari (rigidităţi). Metoda propusă are avantajul că operează cu mărimi de acelaşi ordin, simplifică anumite tipuri de grinzi şi cadre.

Docentul Bogdanov propune un tip îmbunătăţit de fermă metalică pentru acoperişul clădirilor industriale. Prin calcule statice şi tehnico-economice demonstrează că acestea au caracteristici mai economice decît cele actuale.

În articolul *Unele probleme de calcul a sistemelor mecanice continue, din punct de vedere al propagării undelor de tensiune*, asistentul N. M. Borodacev schiţează calea de calcul a undelor de tensiune în bare de secţiune constantă supuse fie la tensiune, fie la încovoiere. Metoda este ilustrată de cîteva interesante exemple de cazuri particulare.

O problemă pusă de organizaţiile industriale (Intreprinderile pentru construcţia conductelor magistrale) a fost aceea a eforturilor care apar în liniile de conducte în timpul montajului. Această problemă este rezolvată pe un plan mai general de asistentul M. I. Streliaev în articolul său *Asupra determinării parametrilor încovoierii unui tub infinit suspendat într-un punct*, în care rezolvă elegant problema determinării eforturilor în funcţie de înălţimea de suspendare, precum şi a lungimii pe care va fi ridicat tubul pentru o suspendare dată. Soluţia ecuaţiilor diferenţiale propuse a fost verificată mulţumitor de experienţe.

La studiul materialelor şi procedeelor de construcţii, aduce o contribuţie interesantă docentul Litvinov, în articolul *Asupra unificării caracteristicilor mecanice ale materialelor de construcţii şi metodelor de determinare a lor.* Se dovedeşte că materiale de construcţii foarte diferite — lemn, oţel, beton — au toate, într-o anumită măsură, proprietatea de a se deforma plastic şi de a se relaxa, iar comportarea lor faţă de solicitările de lungă durată pare să urmeze aceleaşi legi. Toate acestea ar permite să se unifice parametrii mecanici caracteristici. Se propune ca asemenea parametri (*limita stabilă de rezistenţă îndelungată* — care, o dată depăşită, poate duce (în timp) la una din stările limită.

Prof. S. F. Medvedev şi colaboratorii săi prezintă rezultate ale studiilor lor asupra *Influenţei parametrilor regimului de prelucrare prin strungire asupra rezistenţei oţelurilor la obosire.*

Docentul A. A. Novopașin, pe baza unui însemnat material experimental, face o serie de recomandări cu privire la proiectarea compoziției betoanelor, astfel ca să se evite orice supraconsum de ciment.

În domeniul mecanicii pămînturilor prezintă interes lucrările docentului O. G. Denisov *In problema structurii argilelor* prezintă rezultatele unor cercetări moderne inclusiv analize roentgenoscopice pe baza cărora se enunță un număr de nouă proprietăți care definesc structura argilelor ținînd seama de caracteristicile lor fizico-chimice și mecanice.

Același autor prezintă un aparat pentru încercări statice ale pămînturilor, în condiții naturale. Aparatul propus, de o construcție simplificată, permite obținerea de date asupra capacității portante și a tasării, în funcție de presiune și de durata încărcării.

Asistenții Nikolaev și Zbanikov prezintă *Fenomene de electroosmoză în apele subterane, în funcție de compoziția lor.*

O generalizare a formulei presiunii electroosmotice în capilare este dată de docentul Nedzvețkii — pentru cazul unui capilar conținînd un electrolit (după cum se știe, pentru cazul unui capilar conținînd un dielectric, formula presiunii a fost dedusă de Helmholtz).

Cel mai bogat sînt însă reprezentate diversele ramuri ale hidraulicii, de la hidromecanică pînă la hidrologie. Lucrul este explicabil prin însăși poziția geografico-economică a orașulu în care se găsește Institutul.

Unul din capitolele care rețin în mare măsură atenția hidraulicienilor de la Institutul de Construcții din Kuibîșev este acela al infiltrațiilor prin barajele de pămînt. Se știe că școala sovietică de hidraulică a pus bazele calculelor moderne de infiltrație cu lucrările acad. Pavlovski. Prof. Mhitarian indică o metodă hidraulică de calcul a infiltrației printr-un baraj de pămînt omogen pe fundații permeabilă, precum și printr-un baraj neomogen. Sistemul ecuațiilor de infiltrație obținut este mai simplu pentru aplicațiile practice. Coeficienții empirici au fost determinați experimental de către autor.

Docenții Maximov și Stepanov, în două articole separate, aplică metodele de calcul hidrodinamic la două cazuri practice foarte interesante, respectiv la infiltrație printr-un baraj de pămînt cu mască și avantradier, pe fundație permeabilă pe o adîncime finită și la infiltrația spațială prin maluri, în jurul unui baraj de pămînt cu diafragmă și drenaj. În primul caz, autorul indică o metodă grafo-analitică de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ale mișcării (care se dovedesc eliptice). Verificarea experimentală indică o suprapunere mai bună decît în soluția lui Nelson Skorniakof. În cazul problemei spațiale, autorul dă o rezolvare printr-o transformare conformă, reprezentarea făcîndu-se cu ajutorul integralei lui Schwarz-Christoffel.

O frumoasă lucrare este cea a docentului Nazarov *Asupra determinării formei raționale a intrării într-o captare.* Forma ideală a intrării ar fi cea a ultimei linii de curent a curentului de tranzit.

Autorul dă o rezolvare exactă printr-o metodă hidrodinamică și indică apoi o soluție constructivă aproximativă, dar foarte apropiată de cea exactă.

L. S. Bașchirova prezintă intabularea formulelor lui Agroskin, pentru calculul canalelor trapezoidale.

Docentul N. M. Mustafin dă, în mod succint, rezultatele încercărilor pe model pentru blocul unei hidrocentrale cu deversor superficial.

Docentul Mihailov prezintă un tip de baraj de joasă cădere de beton armat, prevăzut exclusiv cu goliri de fund. Ceea ce are nou acest baraj, față de altele similare, executate, este faptul că prin retragerea stavilelor spre amonte, este posibil să se amenajeze disipatorul chiar pe radierul barajului propriu-zis.

În sfîrșit, o serie de articole dau informații analitice asupra realizărilor de pe marile șantiere ale uzinelor de la Kuibîșev și Stalingrad. Astfel Prof. Mhitarian și colaboratorii săi fac o analiză a funcționării hidromecanizării pe aceste șantiere de unde rezultă existența de mari rezerve, pentru mărirea producției. Din examinarea critică a funcționării batardourilor de construcție se trag o serie de concluzii interesante pentru îmbunătățirea și ieftinirea acestor baraje, în special pe linia folosirii mai reduse a palplanșelor metalice.

În general, cele două volume de lucrări ale personalului didactic al Institutului de construcții din Kuibîșev reflectă o activitate bogată și multilaterală, legată de necesitățile practice, atît generale, cît și regionale.

E. Răzvan

W. THIELEMANN und H. J. DREYER, *Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger axial gedrückter Kreiszylinder* (Contribuție la problema voalării cilindrilor circulari cu pereți subțiri la compresiune axială). Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Bericht Nr. 17, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1956, 30 pag.

În această lucrare autorii folosesc teoria plăcilor cilindrice subțiri cu deformații mari, extinzînd studiile lui Kármán-Tsien și Donnell. În felul acesta, se găsesc tensiunile critice pentru pericolul de voalare la cilindrii circulari supuși la compresiune axială.

După ce stabilesc ecuația generală, care guvernează fenomenul de voalare la acești cilindri, autorii găsesc sarcinile critice pentru diferite amplitudini ale celei de-a doua forme deformate. Rezultatele teoretice obținute se compară cu rezultatele experimentale, găsindu-se o concordanță destul de bună. Se arată că răspîndirea relativ mare a rezultatelor experimentale se datorește diferitelor amplitudini ale formei inițiale, care nu este perfectă. În felul acesta, s-a constatat, de exemplu, că la cilindrii de tablă foarte bine finisați corespund sarcini critice mai mari decît la cei nituiți sau sudați.

Fundamentarea teoretică a acestor idei, care explică contradicțiile dintre teoriile clasice și rezultatele experimentale, este deosebit de interesantă. Rezultatele obținute, atît pentru domeniul elastic cît și pentru domeniul plastic, pot interesa pe toți cei care se ocupă de probleme de stabilitate elastică.

Petre P. Teodorescu

W. THIELEMANN, *Über die Beulung anisotroper Plattenstreifen* (Asupra voalării benzilor plane anizotrope). Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Bericht Nr. 16, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1956, 70 pag.

Această lucrare, publicată de Institutul german de cercetări în domeniul aviației, se ocupă de problema unui calcul exact de voalare al benzilor plane, anizotrope, sub acțiunea unor sarcini de compresiune sau de forfecare simplă.

După o introducere cu privire la diversele tipuri de neomogeneitate ale plăcilor, autorul se ocupă de studiul încovoierii și apoi al voalării acestora, stabilind ecuația cu derivate parțiale a celei de-a doua forme de echilibru. Pentru cazul benzilor articulate pe laturile paralele (cu eventuale rigidizări) se dau sarcinile critice, depinzînd de rigiditatea la încovoiere a plăcii (grosime și constante elastice), precum și de dimensiunile ei în planul median. Aceste rezultate au fost concretizate sub forma unor diagrame, foarte practice în calcul, în special pentru anumite placaje de lemn utile în construcția avioanelor.

Este interesant de remarcat că folosind metode exacte de calcul, W. Thielemann a izbutit să exprime sarcina critică în cazul unei compresiuni simple, în formă generală, într-o singură diagramă, cu ajutorul a numai două constante corespunzătoare rigidității benzii. În cazul forfecării simple s-au obținut rezultate analoage numai pentru anumite tipuri de anizotropie.

Calculele s-au făcut și în coordonate oblice fiind aplicate la rigidizarea benzii, după direcții care fac cu axa ei unghiuri diferite de un unghi drept.

Lucrarea se încheie cu un studiu asupra valorilor pe care le pot lua constantele, care ne caracterizează rigiditatea plăcii.

Comunicarea de mai sus este interesantă, atît pentru cei ce se ocupă de probleme de stabilitate elastică, cît și pentru cei care proiectează structuri de avioane, deoarece rezultatele sînt conduse pînă la posibilitatea lor de aplicare practică.

Petre P. Teodorescu

RALPH BURTON, *Vibration and Impact* (Vibrații și impact). Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, 1958, 310 pag.

Lucrarea profesorului R. Burton de la Universitatea din Missouri, S.U.A., este gîndită ca un curs introductiv de teoria vibrațiilor destinat studenților din primii ani de studiu, care cunosc elementele dinamicii, însă nu au pătruns încă în teoriile mai înalte ale analizei matematice.

În subsidiar, cartea poate servi și ca o primă inițiere studenților din anii superiori care își aleg tehnica vibrațiilor ca specialitate.

Este un aspect nou al tratării teoriei vibrațiilor în învățămîntul tehnic superior. El se datorește convingerii autorului, împărtășite de altfel de numeroși tehnicieni care activează constructiv în producție, că tînărul student — inginer, *oricare i-ar fi specialitatea viitoare, trebuie să se obișnuiască încă din primii ani de studiu, cu ideea că vibrațiile sînt fenomene curente care însoțesc în mod obligator, în proporții mai mici sau mai mari, orice proces tehnic și care în consecință trebuie combătute sau provocate după cum sînt dăunătoare sau utile,* cu mijloacele de care dispune tehnica, după ce în prealabil li s-a stabilit prin calcul natura, amploarea, frecvența etc.

Acest mod de a privi lucrurile impune evident autorului să-și restrîngă la un minim pretențiile asupra bagajului matematic de care trebuie să dispună cititorul lucrării sale. Acest bagaj se rezumă efectiv la elementele calculului diferențial și integral.

Ecuațiile diferențiale necesare studiului vibrațiilor se construiesc pornind de la ecuațiile lui Newton, pe baza caracteristicilor fenomenelor urmărite, cărora li se acordă o atenție deosebită. În mod natural, din examenul fenomenelor, studentul învață să descopere condițiile de integrare și să oblige soluțiile să le îndeplinească.

S-ar părea că o asemenea tratare ar îngrădi simțitor libertatea autorului, obligîndu-l să-și restrîngă materialul pe care îl expune.

Examinarea atentă a lucrării prof. Burton dovedește însă contrariul. Aceasta se datorește desigur și faptului că pe măsură ce studiul progresează se introduc pe nesimțite mijloacele matematice necesare, sub forma unor simple exprimări în limbaj matematic a însușirilor deosebite ale fenomenelor urmărite, sau ca dezvoltări naturale ale cunoștințelor prealabile ale cititorului. În acest mod, studiul timpuriu al teoriei vibrațiilor, pe lîngă că constituie o introducere utilă în domenii interesante ale tehnicii, făcînd pe începător să simtă că devine inginer, reprezintă și un auxiliar al matematicilor superioare, cărora le netezește calea deprinzînd totodată pe student să îmbine în mod rațional analiza fenomenelor cu calculul cantitativ.

Lucrarea începe cu o rapidă dar interesantă introducere istorică, din care reiese că vibrațiile, sub diverse forme, au preocupat vreme îndelungată omenirea, cu mult înainte încă de era tehnică actuală. Apoi se dau noțiunile fundamentale ale teoriei vibrațiilor precum și o serie de exemple în care apar sub formă utilă sau dăunătoare, fenomene vibratorii mai des întîlnite. Obiectivul lucrării este precizat ca studiul vibrațiilor libere, al amortizărilor sub diferitele lor aspecte, al vibrațiilor excitate periodic sau tranzitoriu și în sfîrșit al autovibrațiilor.

Acest program este realizat pe deplin în capitolele următoare, în care se examinează pe rînd vibrațiile libere în general, vibrațiile libere din diferite sisteme de mașini și mecanisme, amortizările de diferite tipuri, efectele de histereză, rezistențele negative etc. Exemple interesante de valoare practică actuală, ca fluturarea aripilor de avion, jocul suprafețelor de siguranță etc., completează în mod util textul. Pe tot parcursul lucrării numeroase probleme de interes aplicativ imediat sînt fie rezolvate pînă la rezultatele numerice inclusiv, fie numai enunțate și contribuie în mod eficace la consolidarea cunoștințelor studentului, pe care îl familiarizează cu modul de a pune problema și cu ordinul de mărime al rezultatelor.

Vibrațiile întreținute constituie pentru autor un prilej binevenit pentru a introduce seriile Fourier, funcțiile ortogonale și analiza armonică. O deosebită atenție se dă vibrațiilor provocate de solicitări impulsive și diferitelor aspecte ale sistemelor vibratorii neliniare. Numeroase exemple alese cu grijă sprijină expunerea.

Un capitol interesant și puțin cunoscut sub aspectele sale actuale este acela al măsurătorilor în domeniul vibrațiilor. Aici autorul se folosește de la început de analogia electrică descriind circuitele electrice echivalente sistemelor oscilatorii mecanice, expunînd metode electrice de integrare și diferențiere, și dînd un tablou clar al aparatajului actual de înregistrare a vibrațiilor mecanice și sonore.

Sistemele cu două grade de libertate dau prilejul pentru examinarea multor tipuri de amortizare folosite în tehnica modernă, începînd cu suspensia electrică cu masă seismică și cu tancurile de ruliu ale lui Frohm, și terminînd cu pendulul centrifugal și amortizorul cu frecare uscată al lui Lanchester.

Sistemele cu mai multe grade de libertate permit să se dezvolte rapid și exemplificate numeric două puternice metode de aproximație succesivă, anume metoda lui Holzer, pentru care se dă și o procedură tabulară de calcul, și iterația matriceală, care este dusă pînă la modurile superioare de vibrații.

Studiul undelor constituie o introducere pentru capitolul următor dedicat vibrației barelor, plăcilor și membranelor. Cu acest prilej se dă și o succintă introducere a metodei energetice de aproximare a lui Rayleigh.

Deosebit de interesant este capitolul destinat analizei sistemelor de control, care în fond dă o introducere elementară dar foarte intuitivă în teoria servomecanismelor. Un alt capitol interesant este cel consacrat oboselii materialelor la solicitări ciclice, cu care se termină cartea.

O bogată bibliografie este distribuită pe capitole în cursul lucrării.

CĂRȚI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

⁂ Nikolai Mihailovici Strahov. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1957, 40 p.

⁂ Nikolai Evghenievici Vvedenskii. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1958, 05 p.

⁂ Iulian Aleksandrovici Șimanskii. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1958, 45 p.

⁂ Anatolii Fedorovici Kapustinskii. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1958, 55 p.

⁂ Ivan Gheorghievici Petrovskii. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1957, 42 p.

⁂ Dmitrii Ivanovici Șcerbakov. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1958, 57 p.

⁂ Vladimir Dmitrievici Bonkt-Bruevici. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1958, 121 p.

⁂ Trudî-Kazanskogo Aviationnogo Instituta. Kazan, Vîpusk XXXIII-XXXIV, 513 p. XL, 62 p.XLI 1958, 107 p.

⁂ Trudî Rostovskogo-na-Donu Instituta selskohoziastvennogo Mașinostroeniia. *Mașinostroeniia.* Rostov-na-Donu, Vîpusk 8, I, 1958, 376 p.

W. G. Green, *Theory of Machines.* Blackie Son Ltd., Glasgow, 1956.

⁂ *Progresivnaia Tehnologhiia Mașinostroenia.* Mașghiz, 1958, Moscova 114 p.

Jaroslav Kozesnik, *Dynamika Stroju.* Statni Nakladatelstvi Technicke Literatury, Praha, 1958, 334 p.

R. S. Scorer, *Natural Aerodynamics.* Pergamon Press, London, 1958, 312 p.

Irji Draskii, *Teoreticeskoe reșenie neustanovivsegosia polia potoka so sledom pri ploskom ovtekanii țilindra.* Gossudarstvennîi issledovatelskii institut teplotehniki, Praha, 1958, 136 p.

H. Hart, E. Karstens, *Radioaktive Isotope in der Dickenmessung.* VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 301 p.

Din seria „Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen", Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen :

H. Opitz, *Standzeituntersuchungen und Verschleissmessungen mit radioaktiven Isotopen.* 1958, 49 p.

L. Brandt, *Wanddickenmessungen mittels radioaktiver Strahlen und Zählrohrgerät.* 1958, 37 p.

K. Müller, *Strenge Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung für rotationssymmetrische Strömungen.* 1957, 64 p.

A. Naumann, *Versuche an Wirbelstrassen hinter Zylindern bei hohen Geschwindigkeiten.* 1958, 45 p.

Din seria „Berichte der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen.

J. Weissinger, *Zur Aerodynamik des Ringflügels.* Berichte *2*/1955, 30 p. *39*/1957, 27 p. *42*/1957, 44 p.

K. Leist, *Prüfstände zur Messung der Druckverteilung an rotierenden Schaufeln.* Bericht *56*,1958, 83 p,

— *Spannungsoptische Untersuchungen von rotierenden Scheiben mit exzentrischen Bohrungen.* Berihct *57*, 1958, 60 p.

K. OSWATITSCH, *Ueber den Kompressibilitätseinfluss bei ebenen Schaufelgittern starker Umlenkung*. Bericht *28*, 1957.

F. BOLLENRATH, *Bemerkungen zur Frage des Wärmeschocks im Flugzeugbau*. Bericht *30*, 1957 21 p.

K. H. SCHRAMM, *Zur Theorie stationärer Flammen in strömenden Gasen*. Bericht *31*, 1957, 22 p.

H. GÖRTLER, *Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminärer Grenzschichten*. Bericht. *31*, 1957, 91 p.

O. WEHRMANN, *Hitzdrahtmessungen in einer aufgespaltenen Kármánschen Wirbelstrasse*. Bericht *43*, 1957, 31 p.

H. LÜPKE, *Gasturbinen und Strahlantriebe für Hubschrauber*. Bericht *46*, 1958, 107 p.

F. KEUNE, *Eine Näherungsmethode zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung nicht angestellter gepfeilter Flügel grosser Streckung bei kleiner Dicke in Unterschallströmung*. Bericht *48*, 1958, 56 p.

J. ZIEREP, *Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil*. Bericht *51*, 1958, 36 p.

G. HELKE, *Untersuchungen zur Stabilität nichtlinearer erzwungener Schwingungen von einem Freiheitsgrade*. Bericht. *55*, 1958, 20 p.

R. STAUFELBIEL, *Beitrag zur Bestimmung der Stossgeschwindigkeit von Flugzeugen bei der Landung*. Bericht *71*, 1958, 37 p.

K. GRAF, *Vergleich von Gleichdruck- und Verpuffungsgasturbinen*. Bericht *65*, 1958, 112 p.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

2

2557/VIII

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

2
ANUL X
1959

MŰSZAKI EGYETEM BUDAPEST

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

2
ANUL X
1959

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București ;
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, București ;
M. ARCAN, șef secție Mecanica construcțiilor I.C.M.L., București.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE PATRU ORI PE AN

Redacția : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ ,,TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul X, nr. 2 1959

SUMAR

STUDII

AEROMECANICĂ

Pag.

ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU, Scurgerea supersonică în jurul sistemului portant aripă-fuselaj conic . . . 335
N. N. PATRAULEA, O metodă simplificată pentru calculul aripii cu volet fluid 351
M. IONESCU și GH. DARIE, Caracteristicile aerodinamice ale unei clase de aripi subțiri în scurgere omogenă de ordin superior . . . 367
LUCIAN DUMITRESCU, Asupra transferului de căldură în scurgerile liber-moleculare . . . 379
ȘT. ANDREI, Antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter în zborul la punct fix . . . 393
AL. MARINESCU și E. SILVEANU, Încovoierea dinamică a fuselajelor de elicopter . . . 415

TEORIA MECANISMELOR

J. VOLMER, Cazurile particulare ale curbei centrelor Burmester, cu punct dublu, și importanța lor pentru teoria mecanismelor . . . 425

UNGERE–FRECARE–UZURĂ

AL. NICA, Considerații asupra cinematicii lagărelor de rostogolire cu role în cazul ungerii hidrodinamice . . . 449

ELASTICITATE–REZISTENȚA MATERIALELOR

ȘT. BĂLAN, S. RĂUTU, V. PETCU, În legătură cu calculul de ordinul II al capacității portante a cadrelor . . . 457
M. MIȘICU, Asupra problemelor dinamice ale lui Boussinesq și Hertz . . . 467
N. S. PÎRVULESCU, Formule de flambaj pentru bare grele . . . 497
F. DINCĂ și V. MANEA, Asupra unor probleme de stabilitate a barelor elastice în mișcare plană . . . 511
MIRCEA SOARE, Asupra determinării stării de eforturi de membrană în plăcile curbe subțiri de rotație . . . 521

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

Pag.

M. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU, Studii asupra parametrilor aşchierii cu cuţite de strung din oţel rapid romînesc 539

V. MARCU şi P. FREUND, Cercetări asupra metalizării prin pulverizare a suprafeţelor concave 565

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

D. PAVELESCU şi TH. PANTELIMON, Înregistrare magnetică simultană a două mărimi mecanice 575

NOTE

N. VASILESCU KARPEN, Energetica lansării sateliţilor. Randamentul motoarelor-ejectoare 587

CHRISTIAN PELECUDI şi RADU BOGDAN, Consideraţii asupra metodei analitice de cercetare a mecanismelor plane pe baza variabilelor complexe 603

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON şi R. BOGDAN, A doua Conferinţă Unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor — Moscova, 24—28 martie 1958 615

* * * Festival internaţional al filmului ştiinţific şi tehnic — Budapesta, 1959 625

RECENZII 627

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 641

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate și Note tehnice *în care se expune* : *stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări științifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— *Aeromecanică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine hidraulice și pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcții de mașini* (*cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice*).

— *Statica și dinamica construcțiilor* (*metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru reviste se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză, și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Журнал „РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

— Оригинальные исследования *на высоком уровне, представляющие всеобщий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки *(краткие работы) оригинального характера, представляющие уточнение некоторых вопросов.*

— Рефераты и технические заметки, *в которых излагаются современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, разработанных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термо-аэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

—Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и с этой целью принимает к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая больших введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, на одной стороне листа; формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики должны быть выполнены китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае абсолютной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная в тексте литература должна даваться общим списком в конце статьи, причем необходимо указывать инициалы и фамилию автора, наименование работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра необходимо представлять резюме на румынском языке, или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме не должно превышать одной страницы, напечатанной на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи посылаются в адрес: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том X, № 2 1959

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

Стр.

Е. КАРАФОЛИ и Д. МАТЕЕСКУ, Сверхзвуковое обтекание несущей системы крыло — конический фюзеляж 335

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Упрощенный метод расчета крыла с жидким закрылком 351

М. ИОНЕСКУ и Г. ДАРИЕ, Аэродинамические характеристики одного класса тонких крыльев при однородном обтекании высшего порядка 367

Л. ДУМИТРЕСКУ, О переносе тепла при течении разреженных газов . 379

Ш. АНДРЕЙ, Пневматический привод несущих винтов вертолета при висении 393

А. МАРИНЕСКУ и Е. СИЛЬВЯНУ, Динамический изгиб фюзеляжа вертолета 415

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Ж. ВОЛЬМЕР, Частные случаи кривой центров Бурместера с двойной точкой и их значение в теории механизмов 425

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

А. НИКА, О кинематике роликоподшипников в случае гидродинамической смазки 449

УПРУГОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ш. БЭЛАН, С. РЭУТУ и В. ПЕТКУ, В связи с расчетом второго порядка несущей способности рам 457

М. МИШИКУ, О динамических задачах Буссинеска и Герца 467

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Формулы продольного изгиба тяжелых стержней 497

Ф. ДИНКЭ и В. МАНЯ, О некоторых задачах устойчивости упругих стержней в плоском движении 511

М. СОАРЕ, Об определении состояния мембранных напряжений в тонких криволинейных оболочках вращения 521

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

Стр.

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Исследование параметров резания металлов токарным резцом из быстрорежущей стали отечественного производства 539

В. МАРКУ и П. ФРЕЙНД, Исследование металлизации вогнутых поверхностей распылением 565

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Д. ПАВЕЛЕСКУ и Т. ПАНТЕЛИМОН, Одновременная магнитная запись двух механических величин 575

ЗАМЕТКИ

Н. ВАСИЛЕСКУ-КАРПЕН, Энергетика запуска спутников. Коэффициент полезного действия реактивных двигателей 587

К. ПЕЛЕКУДИ и Р. БОГДАН, По поводу аналитического метода исследования плоских механизмов на основе комплексных переменных . 603

УЧАСТИЕ В НАУЧНОЙ ЖИЗНИ ЗА РУБЕЖОМ

Д. МАНЖЕРОН и Р. БОГДАН, II Всесоюзное совещание по оснавным проблемам теории механизмов и машин, Москва, 24-28 марта 1958 г. 615

* * * Международный фестиваль научно-технического кинофильма — Будапешт, 1959 625

РЕЦЕНЗИИ 627

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ 641

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome X, nº 2 1959

SOMMAIRE

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

Page

ELIE CARAFOLI et DAN MATEESCU, Écoulement supersonique autour du système portant aile—fuselage conique 335
N. N. PATRAULEA, Une méthode simplifiée pour le calcul de l'aile à volet fluide 351
M. IONESCU et GH. DARIE, Les caractéristiques aérodynamiques d'une certaine classe d'ailes minces en écoulement homogène d'ordre supérieur 367
LUCIAN DUMITRESCU, Sur le transfert de chaleur dans l'écoulement en régime de molécules libres 379
ŞT. ANDREI, Entraînement pneumatique des rotors d'hélicoptère en vol à point fixe 393
AL. MARINESCU et E. SILVEANU, Flexion dynamique des fuselages d'hélicoptère 415

THÉORIE DES MÉCANISMES

J. VOLMER, Les cas particuliers de la courbe des centres de Burmester, à point double, et leur importance pour la théorie des mécanismes 425

LUBRIFICATION—FROTTEMENT—USURE

AL. NICA, Considérations sur la cinématique des paliers à rouleaux dans le cas de la lubrification hydrodynamique 449

ÉLASTICITÉ—RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ST. BĂLAN, S. RĂUTU et V. PETCU, Sur le calcul du second ordre de la capacité portante des cadres 457
M. MIŞICU, Des problèmes dynamiques de Boussinesq et Hertz 467
N. S. PÎRVULESCU, Formules de flambage pour les barres lourdes 497
F. DINCĂ et V. MANEA, Quelques problèmes de stabilité des barres élastiques en mouvement plan 511
MIRCEA SOARE, Considérations sur le calcul des contraintes de membrane dans les coques de révolution 521

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

page

M. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Etude sur les paramètres de coupe à l'aide d'outils de tour en acier rapide roumain 539

V. MARCU et P. FREUND, Recherches sur la métallisation des surfaces concaves par projection 565

TECHNIQUE DES MESURES

D. PAVELESCU and TH. PANTELIMON, Simultaneous recording of two mechanical quantities 575

NOTES

N. VASILESCU KARPEN, Some energy considerations on the launching of artificial satellites. Efficiency of rocket engines 587

CHRISTIAN PELECUDI and RADU BOGDAN, On the analytical method for investigating plane mechanisms on the basis of complex variables . . . 603

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

D. MANGERON et R. BOGDAN, 2e Conférence unionale sur les problèmes fondamentaux de la théorie des mécanismes et des machines — Moscou, 24—28 mars 1958 615

* * * Festival international du film scientifique et technique — Budapest, 1959 625

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 627

LIVRES REÇUS DERNIÈREMENT À LA RÉDACTION 641

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

Le périodique « STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie :

— des études originales, *d'un caractère hautement scientifique, des recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique* ;

— des notes (*communications brèves*) *d'un caractère général, ou représentant une mise au point d'une certaine question* ;

— des rapports et des notes techniques *où l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau, des remarques et discussions au sujet de certains travaux de mécanique appliquée, la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée* ;

— des notes bibliographiques *au sujet des livres et études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— Aéromécanique (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*) ;

— hydromécanique (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*).

— constructions mécaniques (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*) ;

— mécanique générale (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*) ;

— statique et dynamique des constructions (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;

— technique des mesures (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultrasons et des isotopes radio-actifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

AEROMECANICĂ

SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL SISTEMULUI PORTANT ARIPĂ-FUZELAJ CONIC

DE

ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Punerea problemei. Problema scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic a făcut obiectul a numeroase cercetări, care au tratat fie cazul aripii delta cu bordurile de atac subsonice, prin dezvoltări în serie, aripa şi fuzelajul avînd aceeaşi incidenţă [1], fie cazul aripii avînd bordurile supersonice [2], [3], fie cazul aripii delta cu bordurile subsonice considerînd dimensiunile aripii şi fuzelajului mici faţă de conul Mach [4].

În această lucrare ne propunem să studiem problema scurgerii supersonice în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic, aripa şi fuzelajul avînd incidenţe diferite, şi să dăm o soluţie simplă şi închisă pentru aripa triunghiulară cu bordurile de atac subsonice, nefăcînd nici o restricţie în ceea ce priveşte dimensiunile aripii faţă de conul Mach. Vom considera cazul fuzelajului conic al cărui vîrf coincide cu cel al aripii.

Dimensiunile sistemului considerat aripă-fuzelaj sînt indicate în figura 1; aripa are incidenţa α_a, iar axa fuzelajului are incidenţa α_f faţă de curentul supersonic de la infinit U_∞.

Vom raporta scurgerea la sistemul triortogonal $Ox_1x_2x_3$, axa Ox_1 fiind dirijată după axa fuzelajului.

În această lucrare ne vom situa în ipoteza micilor perturbaţii, şi vom considera fuzelajul de dimensiuni mici faţă de conul Mach, mărimea unghiului la vîrf δ al fuzelajului menţinîndu-se în limitele teoriei liniarizate.

Întrucît sistemul aripă-fuzelaj considerat este conic, scurgerea supersonică în jurul acestuia este conică, potenţialul vitezelor de perturbaţie fiind o funcţie omogenă de ordinul 1.

Prin transformarea geometrică a lui Busemann,

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \theta = \theta, \quad r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2, \qquad (1)$$

planul real $oyz\left(y=\frac{x_2}{x_1},\ z=\frac{x_3}{x_1}\right)$ se transformă în planul $\omega\eta\zeta$, în care vitezele de perturbaţie u, v, w devin funcţii armonice de η şi ζ.

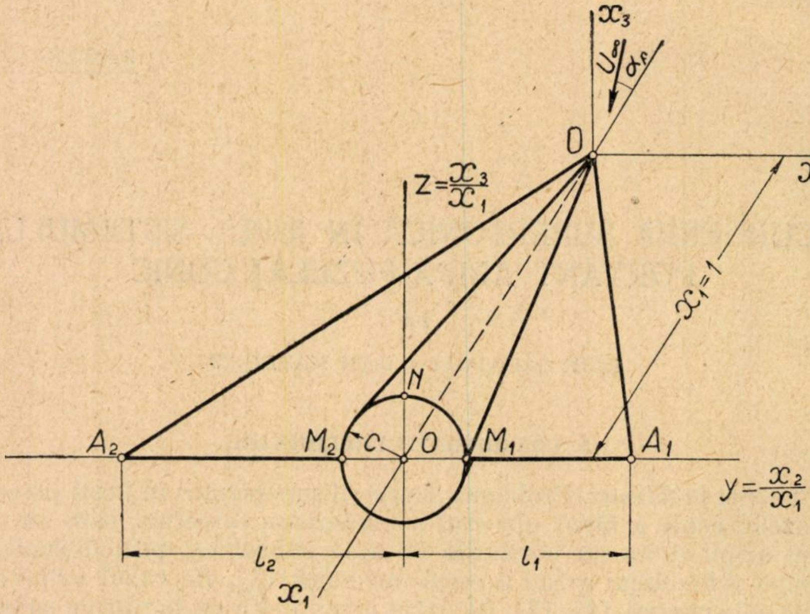


Fig. 1

Considerînd variabila complexă $\xi = \rho e^{i\theta}$ se aplică planului ξ transformarea conformă obişnuită

$$Bx=\frac{2\xi}{1+\xi^2},\ (x=y+iz,\ \xi=\eta+i\zeta), \tag{2}$$

şi se obţine planul x, care are proprietatea de a reproduce la aceeaşi scară axa oy din planul fizic cuprinsă în conul Mach (fig. 2).

Considerînd fuzelajul de dimensiuni reduse faţă de conul Mach $\left(c^2 \ll \frac{1}{B^2}\right)$, cercul de rază c, care reprezintă secţiunea fuzelajului în planul fizic oyz, se transformă în planul x aproximativ tot într-un cerc de aceeaşi rază c.

În planul x, ca şi în oricare alt plan transformat conform, se pot asocia vitezelor de perturbaţie u, v, w funcţiile armonice conjugate u', v', w' obţinîndu-se funcţiile de variabilă complexă

$$\mathcal{U}=u+iu',\ \mathcal{V}=v+iv',\ \mathcal{W}=w+iw', \tag{3}$$

între care se pot scrie relațiile de compatibilitate deduse din condiția de irotaționalitate,

$$d\mathcal{U} = - x\, d\mathcal{V} = \frac{i x\, d\mathcal{W}}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}, \tag{4}$$

relații care ne vor servi mai tîrziu pentru rezolvarea problemei.

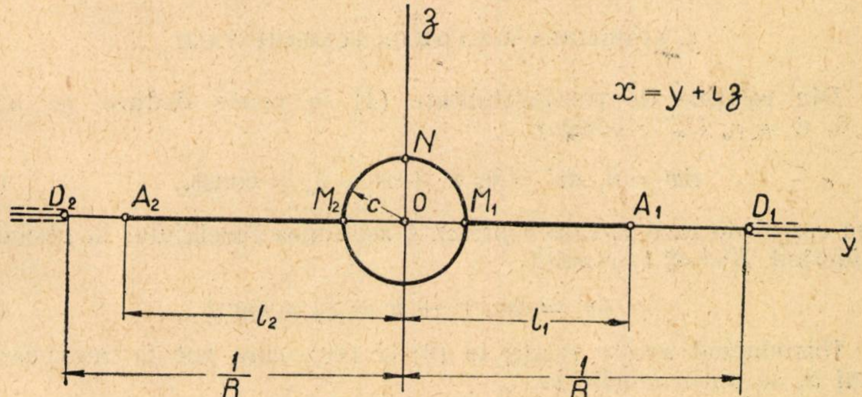


Fig. 2

Determinarea condițiilor pe aripă și pe fuzelaj. Din condiția ca aripa și fuzelajul să fie suprafețe formate din linii de curent, și operînd neglijările ce decurg din ipoteza perturbațiilor mici, rezultă următoarele condiții la limită :

$$v \cos \theta + (w - \alpha_f\, U_\infty) \sin \theta = c\, (U_\infty + u), \tag{5}$$

pe fuzelaj, și

$$w = \alpha_a\, U_\infty, \tag{6}$$

pe aripă.

Observăm că mișcarea avînd aceste condiții la limită, poate fi descompusă într-o sumă de două mișcări, avînd condițiile la limită

$$v \cos \theta + w \sin \theta = c\, (U_\infty + u), \tag{7}$$

pe fuzelaj, și

$$w = 0, \tag{8}$$

pe aripă, pentru prima mișcare, și

$$v \cos \theta + (w - \alpha_f\, U_\infty) \sin \theta = cu \simeq 0, \tag{9}$$

pe fuzelaj, și

$$w = \alpha_a\, U_\infty, \tag{10}$$

pe aripă, pentru cea de a doua mișcare.

Se poate observa ușor că prima mișcare, avînd condițiile la limită (7) și (8), reprezintă scurgerea supersonică axial simetrică în jurul fuzelajului conic singur, avînd unghiul la vîrf $\delta \simeq c$, problemă care a făcut obiectul a numeroase lucrări anterioare [5], de care nu ne vom ocupa în această lucrare.

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de cea de a doua mișcare, avînd condițiile la limită (9) și (10), care reprezintă mișcare datorită incidenței aripii și fuzelajului față de direcția curentului la infinit.

2. STABILIREA RELAȚIILOR FUNDAMENTALE

Din relațiile de compatibilitate (4) se poate deduce pe aripă ($z = 0$, $w = \alpha_a U_\infty = \text{const.}$)

$$dw = 0,\ dv' = 0,\ v' + w = k_a = \text{const.}, \tag{11}$$

iar pe cercul de rază c, care reprezintă secțiunea fuzelajului în planul x, considerînd $B^2c^2 \ll 1$, rezultă

$$- dv' \simeq dw,\ v' + w = k_f = \text{const.} \tag{12}$$

Introducînd aceste relații în (9) și (10), care pot fi transpuse în planul x, se obțin condițiile

$$v \cos \theta - [v' + (\alpha_f U_\infty - k_f)] \sin \theta = 0, \tag{13}$$

pe cercul de rază c, și

$$v' = k_a - \alpha_a U_\infty, \tag{14}$$

pe aripă.

Vom considera funcția

$$\frac{dF}{dx} = \mathcal{V} + ik,\ k = \alpha_f U_\infty - k_f = \text{const.}, \tag{15}$$

care poate fi considerată viteza complexă a unei mișcări potențiale în planul x, definită de vitezele $V_y = v$ după axa oy și $V_z = - v' - k$ după axa oz. În imediata apropiere a aripii și fuzelajului mișcarea potențială considerată în planul x reprezintă, cu aproximația unui curent vertical, chiar mișcarea reală în jurul sistemului aripă-fuzelaj, întrucît pe aripă și pe fuzelaj se poate scrie ținînd seama de (11) și (12) $V_z = w - k_1$, în care k_1 are valoarea $k + k_f$ pe fuzelaj și $k + k_a$ pe aripă.

Utilizînd funcția considerată mai sus, condițiile la limită (13) și (14) se simplifică, devenind

$$\mathcal{Re}\, x \frac{dF}{dx} = 0, \tag{16}$$

pe cercul de rază c, și, ținînd seama de (14),

$$\mathcal{Im} \frac{dF}{dx} = k_a - \alpha_a U_\infty + k = K, \tag{17}$$

pe porțiunile A_1M_1 și A_2M_2 de pe axa reală oy, care reprezintă aripa în planul x.

Constanta K, introdusă în relația (17), va fi determinată după soluționarea problemei prin utilizarea condițiilor la limită.

Ca și pe aripă, condițiile la limită privind vitezele de perturbație u, v, w pe restul axei oy sînt aceleași ca și în cazul aripii subțiri singure, fără fuzelaj, rezultînd condiția

$$\mathcal{R}e\,\frac{dF}{dx} = 0, \tag{18}$$

pe porțiunile A_1D_1, A_2D_2, $D_1\infty$ și $-\infty D_2$ $(z = 0,\ y > l_1,\ y < -l_2)$, care alcătuiesc împreună cu (16) și (17) condițiile la limită în planul x ale funcției $\frac{dF}{dx}$.

Pentru aceleași considerente de ordin fizic, vitezele de perturbație u, v, w au aceleași singularități în bordurile de atac A_1 și A_2 ca și în cazul aripii subțiri fără fuzelaj. Rezultă, conform relației (15), că funcția $\frac{dF}{dx}$ are aceleași singularități în bordurile de atac ca și funcția de variabilă complexă $\mathcal{V}$ din cazul aripii subțiri singure, fără fuzelaj, aceste singularități fiind

$$\frac{1}{\sqrt{l_1 - x}},\ \frac{1}{\sqrt{l_2 + x}},$$

pentru cele două borduri de atac subsonice A_1 $(y = l_1, z = 0)$ și A_2 $(y = -l_2, z = 0)$.

Odată stabilite condițiile la limită și singularitățile funcției $\frac{dF}{dx}$, putem trece la determinarea acestei funcții, care va permite determinarea vitezei axiale de perturbație.

Pentru rezolvarea problemei vom utiliza transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x},\quad x = \frac{X + \sqrt{X^2 - 4c^2}}{2}, \tag{19}$$

care transformă cercul de rază c în segmentul M_1M_2 de pe axa OY (fig. 3), aripa rămînînd, și după transformare, tot pe axa OY (segmentele A_2M_2 și M_1A_1).

Prin această transformare, în planul X se obține viteza complexă

$$\frac{dF}{dX} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dX} = \frac{dF}{dx}\,\frac{1}{1 - \frac{c^2}{x^2}} = \frac{dF}{dx}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}\right). \tag{20}$$

Utilizînd această relație, rezultă pentru funcția $\frac{dF}{dX}$ condiții la limită, care se deduc din condițiile la limită (16), (17) și (18) ale funcției $\frac{dF}{dx}$, aceste condiții fiind

$$\mathcal{I}m\,\frac{dF}{dX} = 0, \tag{21}$$

pe segmentul M_2M_1 $(-2c < Y < 2c,\ Z = 0)$,

$$\mathcal{I}m \frac{dF}{dX} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right), \tag{22}$$

pe segmentele A_2M_2 $(-L_2 < Y < -2c,\ Z = 0)$ şi M_1A_1 $(2c < Y < L_1,$ $Z = 0)$, şi

$$\mathcal{R}e \frac{dF}{dX} = 0 \tag{23}$$

pe segmentele $-\infty D_2$, D_2A_2 $(Y < -L_2,\ Z = 0)$ şi A_1D_1, $D_1\infty$ $(Y > L_1,$ $Z = 0)$.

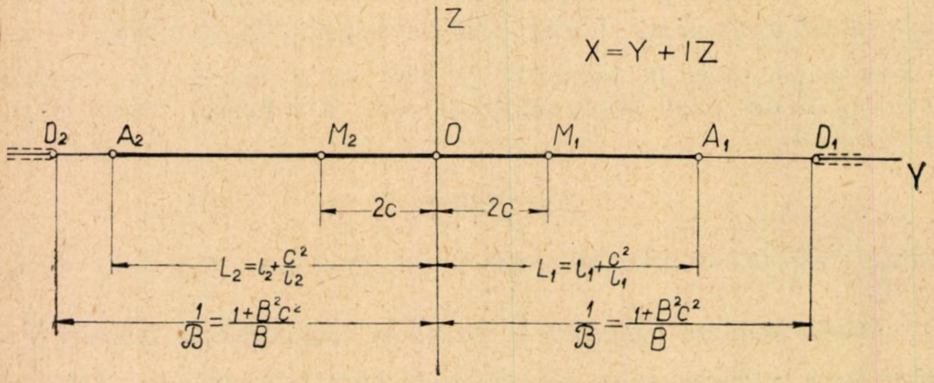

Z
X=Y+IZ
D2
A2
M2
O
M1
A1
D1
Y
2c
2c
$L_2 = l_2 + \frac{c^2}{l_2}$
$L_1 = l_1 + \frac{c^2}{l_1}$
$\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1+B^2c^2}{B}$
$\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1+B^2c^2}{B}$

Fig. 3

Funcţia $\frac{dF}{dX}$ definită prin relaţia (20) va avea aceleaşi singularităţi în bordurile de atac ca şi $\frac{dF}{dx}$, aceste singularităţi fiind transpuse în planul X. Astfel, în punctele $Y = L_1$ şi $Y = -L_2$ în planul X, corespunzătoare bordurilor de atac subsonice A_1 şi A_2, funcţia $\frac{dF}{dX}$ va avea singularităţile

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 - X}},\ \frac{1}{\sqrt{L_2 + X}}.$$

Pentru rezolvarea problemei vom descompune funcţia $\frac{dF}{dX}$ în două funcţii de variabilă complexă,

$$\frac{dF}{dX} = \mathcal{V}_a + \frac{dF_1}{dX}, \tag{24}$$

avînd fiecare următoarele semnificaţii :

a) Pentru $\mathcal{V}_a$, vom considera mişcarea conică în jurul unei aripi triunghiulare subţiri raportată la un sistem de referinţă triortogonal $OX_1X_2X_3$, a cărei urmă, după transformări similare cu (1) şi (2), se găseşte în planul X (fig. 3); această aripă are bordurile de atac subsonice în A_1 $(X = L_1)$ şi A_2 $(X = -L_2)$, şi cîte un salt de incidenţă în M_1 $(X = 2c)$ şi M_2 $(X = -2c)$.

Vitezele de perturbaţie din mişcarea conică în jurul acestei aripi sînt respectiv

$$u_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{U}_a, \quad v_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{V}_a, \quad w_a = \mathcal{R}e\,\mathcal{W}_a,$$

între ele putîndu-se scrie relaţii de compatibilitate similare cu (4)

$$d\mathcal{U}_a = -X d\mathcal{V}_a = \frac{iXd\mathcal{W}_a}{\sqrt{1-\mathfrak{B}^2X^2}}, \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1+B^2c^2}{B}\right). \tag{25}$$

Condiţiile la limită pentru funcţia $\mathcal{V}_a$ din mişcarea conică în jurul aripii definite mai sus fiind

$\mathcal{I}m\mathcal{V}_a = 0$, pe segmentul M_2M_1 $(-2c < Y < 2c,\ Z = 0)$,

$\mathcal{I}m\mathcal{V}_a = \frac{K}{2}$, pe segmentele A_2M_2 $(-L_2 < Y < -2c,\ Z = 0)$ şi

M_1A_1 $(2c < Y < L_1,\ Z = 0)$,

$\mathcal{R}e\mathcal{V}_a = 0$, pe segmentele $-\infty D_2,\ D_2A_2$ $(Y < -L_2,\ Z = 0)$ şi

$A_1D_1,\ D_1\infty$ $(Y > L_1,\ Z = 0)$,

şi funcţia $\mathcal{V}_a$ avînd singularităţile $\frac{1}{\sqrt{L_1 - X}}$ şi $\frac{1}{\sqrt{L_2 + X}}$ în bordurile de atac subsonice A_1 şi A_2, soluţia este foarte simplă şi o vom găsi în rezultatele obţinute pînă acum în problemele similare de aripi subţiri.

Într-adevăr, pentru o aripă subţire avînd două muchii în M_2 şi M_1 vom găsi uşor pe $\mathcal{U}_a$ utilizînd metodele cunoscute, iar din relaţiile de compatibilitate (25) vom deduce pe $\mathcal{V}_a$, care are dealtfel aceeaşi formă cu $\mathcal{U}_a$.

Pentru a găsi viteza axială de perturbaţie u în planul x în jurul sistemului aripă-fuzelaj, vom integra relaţiile de compatibilitate (4) obţinînd succesiv

$$\mathcal{U} = -x\mathcal{V} + \int \mathcal{V}dx = -x\frac{dF}{dx} + F. \tag{26}$$

Această relaţie este valabilă pentru orice mişcare conică; astfel pentru $\mathcal{U}_a$ din planul X, vom avea de asemenea rezultînd din (25)

$$\mathcal{U}_a = -X\mathcal{V}_a + \int \mathcal{V}_a\, dX. \tag{26'}$$

Cunoscînd pe $\mathcal{V}_a$ şi $\mathcal{U}_a$ în planul transformat X, vom putea scrie pentru $\mathcal{U}^{(a)}$ din planul x,

$$\mathcal{U}^{(a)} = -x\mathcal{V}_a\frac{dX}{dx} + \int \mathcal{V}_a\, dX = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a. \tag{27}$$

b) În ceea ce privește funcția $\frac{dF_1}{dX}$, vor rezulta condițiile la limită

$\mathcal{Im}\frac{dF_1}{dX} = 0$, pe segmentul M_2M_1 $(-2c < Y < 2c,\ Z = 0)$,

$\mathcal{Im}\frac{dF_1}{dX} = \frac{K}{2}\frac{Y}{\sqrt{Y^2-4c^2}}$, pe segmentele A_2M_2 $(-L_2 < Y < -2c,\ Z = 0)$

și M_1A_1 $(2c < Y < L_1,\ Z = 0)$ și

$\mathcal{Re}\frac{dF_1}{dX} = 0$, pe segmentele $-\infty A_2 (Y < -L_2, Z = 0)$ și $A_1\infty (Y > L_1, Z = 0)$.

Se poate vedea ușor că $\frac{dF_1}{dX}$ este viteza complexă a mișcării potențiale plane în jurul plăcii orizontale M_1M_2 de lățime $4c$, situată într-un curent vertical avînd viteza la infinit $\frac{K}{2}$. Ținînd seama de transformarea conformă (19), se poate ușor observa că $\frac{dF_1}{dx}$ reprezintă viteza complexă a mișcării potențiale plane în jurul unui cerc de rază c situat într-un curent vertical avînd viteza la infinit $\frac{K}{2}$, soluția mișcării din planul x fiind

$$F_1 = \frac{iK}{2}\left(x - \frac{c^2}{x}\right),\quad \frac{dF_1}{dx} = \frac{iK}{2}\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right). \tag{28}$$

Acestei mișcări îi corespunde conform relației (26) viteza axială de perturbație $u^{(1)} = \mathcal{Re}\,\mathcal{U}^{(1)}$ avînd expresia

$$\mathcal{U}^{(1)} = -x\frac{dF_1}{dx} + F_1 = \frac{-iKc^2}{x}. \tag{29}$$

În cele din urmă, ținînd seama de (24), vom obține prin adunarea acestei expresii (29) cu (27), viteza axială de perturbație $u = \mathcal{Re}\,\mathcal{U}$ în jurul sistemului aripă-fuzelaj datorită incidenței aripii și fuzelajului față de direcția curentului de la infinit

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(\alpha)} + \mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{U}_\alpha + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_\alpha - \frac{iKc^2}{x}. \tag{30}$$

3. CALCULUL VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Ținînd seama de contribuțiile bordurilor de atac A_1 și A_2 și ale muchilor M_1 și M_2 ale aripii, deduse pe baza metodelor cunoscute [6], vom putea determina funcțiile $\mathcal{U}_\alpha$ și $\mathcal{V}_\alpha$, care au aceleași singularități și condiții la limită asemănătoare.

Astfel, în planul X, vom avea pentru $\mathcal{U}_a$ expresia,

$$\mathcal{U}_a = \frac{q_0 + q_1 X}{\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}} + \frac{\varkappa}{\pi}\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c - X)}} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_2 + X)(L_1 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c + X)}}\right] \tag{31}$$

şi o expresie similară pentru $\mathcal{V}_a$,

$$\mathcal{V}_a = \frac{Q_0 + Q_1 X}{\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}} - \frac{K}{\pi}\left[-\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c - X)}} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_2 + X)(L_1 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c + X)}}\right]. \tag{32}$$

Aripa din planul X se comportă ca o aripă izolată şi trebuie să satisfacă aceloraşi condiţii; astfel spre exemplu, pentru ca $\mathcal{V}_a$ să nu aibă un salt în origine, trebuie să impunem condiţia

$$[d\mathcal{U}_a]_{X=0} = 0. \tag{33}$$

Utilizînd această condiţie, precum şi relaţiile de compatibilitate (25), rezultă următoarele valori ale constantelor :

$$Q_0 + \frac{K}{\pi}\left[\sqrt{(L_1 - 2c)(L_2 + 2c)} - \sqrt{(L_1 + 2c)(L_2 - 2c)}\right] = q_1 = q_0\,\frac{L_1 - L_2}{2\,L_1 L_2} +$$
$$+ \frac{K}{2\pi}\left[\sqrt{(L_1 - 2c)(L_2 + 2c)} - \sqrt{(L_1 + 2c)(L_2 - 2c)}\right] \tag{34}$$

$$Q_1 = -\frac{q_0}{L_1 L_2},\quad \varkappa = -2cK, \tag{34'}$$

din care se obţine prin înlocuirea lui L_1 şi L_2 în funcţie de l_1 şi l_2 $\left(L_1 = l_1 + \frac{c^2}{l_1}\right.$ şi $\left.L_2 = l_2 + \frac{c^2}{l_2}\right)$,

$$Q_0 + \frac{2Kc}{\pi}\,\frac{l_1 - l_2}{\sqrt{l_1 l_2}} = q_1 = \frac{q}{l_1 l_2}\,\frac{l_1 - l_2}{2}\left[1 - \frac{c^2}{l_1 l_2} + \frac{2c}{\pi}\,\frac{K}{q}\sqrt{l_1 l_2}\right],\quad Q_1 = -\frac{q}{l_1 l_2}, \tag{35}$$

unde am notat

$$q = \frac{q_0}{1 + \frac{c^2}{l_1^2 l_2^2}(l_1^2 + l_2^2 + c^2)}. \tag{36}$$

Ţinînd seama de (31) şi (32), unde vom face înlocuirile de mai sus, şi aplicînd relaţia (30), vom obţine soluţia mişcării în jurul sistemului aripă-fuzelaj conic datorită incidenţei aripii şi fuzelajului faţă de curentul de la infinit,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} = \frac{q}{l_1 l_2} & \frac{l_1 l_2 \left[1 + \dfrac{c^2}{l_1^2 l_2^2}(l_1^2 + l_2^2 + c^2)\right] - 2c^2\left(1 + \dfrac{c^2}{x^2}\right) + \dfrac{l_1 - l_2}{2}\left(1 - \dfrac{c^2}{l_1 l_2}\right)\left(x + \dfrac{3c^2}{x}\right)}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}\sqrt{\left(1 - \dfrac{c^2}{l_1 x}\right)\left(1 + \dfrac{c^2}{l_2 x}\right)}} - \\
& - \frac{Kc}{\pi}\frac{l_1 - l_2}{\sqrt{l_1 l_2}} \frac{x - \dfrac{c^2}{x}}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}\sqrt{\left(1 - \dfrac{c^2}{l_1 x}\right)\left(1 + \dfrac{c^2}{l_2 x}\right)}} - \\
& - \frac{2Kc}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c - X)}} - \qquad (37) \\
& - \frac{2Kc}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(L_2 + X)(L_1 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c + X)}} - \frac{iKc^2}{x},
\end{aligned}
$$

în care

$$X = x + \frac{c^2}{x}, \quad L_1 = l_1 + \frac{c^2}{l_1}, \quad L_2 = l_2 + \frac{c^2}{l_2}.$$

Determinarea constantelor. Din examinarea expresiei de mai sus (37), se poate vedea uşor că sînt numai două constante de determinat q şi K. Pentru determinarea acestor constante vom utiliza una din relaţiile de compatibilitate,

$$dw = \mathcal{R}e \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{ix} d\mathcal{U}. \tag{38}$$

Constanta K se va putea deduce punînd condiţia ca diferenţa dintre vitezele verticale de perturbaţie din punctele M_1 $(y = c, z = 0)$ de pe aripă şi N $(y = 0, z = c)$ de pe coama fuzelajului să fie

$$w_{M_1} - w_N = (\alpha_a - \alpha_f)\, U_\infty. \tag{39}$$

Întrucît folosirea relaţiei (38) pentru determinarea expresiei vitezei verticale de perturbaţie conduce la o integrală dificilă de efectuat, vom folosi pentru determinarea constantei K următoarea relaţie care se deduce din (15):

$$w = \alpha_f U_\infty - \mathcal{I}m \frac{dF}{dx}, \tag{40}$$

în care

$$\frac{dF}{dx} = \frac{-q}{l_1 l_2} \frac{x + \frac{c^2}{x} - \frac{l_1 - l_2}{2}\left(1 - \frac{c^2}{l_1 l_2} + \frac{2c}{\pi}\frac{K}{q}\sqrt{l_1 l_2}\right)}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}\sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{l_1 x}\right)\left(1 + \frac{c^2}{l_2 x}\right)}}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right) -$$

$$- \frac{K}{\pi}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right)\left[-\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_1 - X)(L_2 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c - X)}} + \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L_2 + X)(L_1 + 2c)}{(L_1 + L_2)(2c + X)}}\right] +$$

$$+ \frac{iK}{2}\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right). \qquad (41)$$

Introducînd relațiile (40) și (41) în (39) se obține valoarea constantei K

$$K = (\alpha_f - \alpha_a)\, U_\infty. \qquad (42)$$

Pentru determinarea celei de a doua constante, q, se pune condiția ca aripa să aibă incidența α_a, ceea ce corespunde condiției ca pe aripă viteza verticală de perturbație, w, să aibă valoarea constantă $\alpha_a U_\infty$. Această condiție se poate scrie

$$\mathcal{Re}\int_{\text{cerc Mach}}^{\text{aripă}} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{ix}\, d\mathcal{U} = \alpha_a U_\infty. \qquad (43)$$

În cele ce urmează vom face un calcul efectiv pentru cazul unei aripi simetrice cu fuzelaj, care comportă și oarecari simplificări de calcul.

4. APLICAŢIE LA ARIPA DELTA

Pentru fixarea ideilor, vom trata ca exemplu de aplicație scurgerea supersonică în jurul sistemului fuzelaj conic-aripă triunghiulară simetrică care este denumită în mod curent *aripă delta*. Considerăm în acest sens sistemul aripă-fuzelaj conic, fuzelajul avînd incidența α_f, iar aripa, incidența α_a față de curentul de la infinit U_∞; aripa are bordurile de atac A_1 $(x = l)$ și A_2 $(x = -l)$ subsonice $\left(l < \frac{1}{B}\right)$. În acest caz, soluția mișcării se deduce din (37), făcînd $l_1 = l_2 = l$ și obținîndu-se astfel

$$\mathcal{U} = q\,\frac{1 + \frac{c^4}{l^4} - 2\frac{c^4}{l^4}\frac{l^2}{x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}\sqrt{1 - \frac{c^4}{l^4}\frac{l^2}{x^2}}} - \frac{2c}{\pi}K\left[\left(1 - \frac{c}{x}\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L - X)(L + 2c)}{2L(2c - X)}} +\right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{c}{x}\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(L + X)(L + 2c)}{2L(2c + X)}}\right] - \frac{iKc^2}{x}, \qquad (44)$$

unde valoarea lui K este dată de formula (42), şi în care $X = x + \frac{c^2}{x}$, iar $L = l + \frac{c^2}{l}$.

Pentru determinarea constantei q vom utiliza relaţia (43). Întrucît se întîmpină mari dificultăţi la integrarea unui termen care are valori foarte mici, aceasta se poate neglija, şi se obţine pentru constanta q valoarea

$$q = \frac{-\alpha_a U_\infty - (\alpha_f - \alpha_a) U_\infty \frac{c}{l} \Lambda}{\lambda_1 \mathrm{E}(k) + \frac{1}{2} \frac{c^4}{l^4} B^2 l^2 \mathrm{K}(k)} l^2, \tag{45}$$

în care

$$\Lambda = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right)\left[\lambda_2 \mathbf{E}(k) - B^2 l^2 \lambda_3 \mathbf{K}(k)\right] + \frac{1}{2}\frac{c}{l}\left[\sqrt{1 - B^2 l^2} - B^2 l^2 \operatorname{argch} \frac{1}{Bl}\right], \tag{46}$$

$$\lambda_1 = 1 - \frac{c^4}{l^4} B^2 l^2 + \frac{1}{3}\frac{c^8}{l^8} B^2 l^2 \left(\frac{1}{8} - B^2 l^2\right) \tag{46'}$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{3}\frac{c^4}{l^4}\left(1 - \frac{1}{2} B^2 l^2\right) + \frac{1}{5}\frac{c^8}{l^8}\left(1 - \frac{3}{40} B^2 l^2 - \frac{B^4 l^4}{20}\right) \tag{46''}$$

$$\lambda_3 = 1 + \frac{1}{6}\frac{c^4}{l^4} + \frac{1}{10}\frac{c^8}{l^8}\left(1 - \frac{5}{4} B^2 l^2\right) \tag{46'''}$$

unde $\mathbf{K}(k)$ şi $\mathbf{E}(k)$ sînt integralele eliptice complete de speţa I şi a II-a, avînd modulul k dat de relaţia

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2}, \tag{47}$$

Pentru cazul cînd întregul sistem aripă-fuzelaj are aceeaşi incidenţă, $\alpha_f = \alpha_a = \alpha$, soluţia mişcării se poate deduce din (44) fiind

$$\mathcal{U} = q \frac{1 + \frac{c^4}{l^4} - 2\frac{c^4}{l^4}\frac{l^2}{x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}\sqrt{1 - \frac{c^4}{l^4}\frac{l^2}{x^2}}}, \tag{48}$$

în care constanta q are valoarea

$$q = \frac{-\alpha U_\infty l^2}{\left[\lambda_1 + \frac{1}{2}\frac{c^4}{l^4} B^2 l^2 \frac{\mathbf{K}(k)}{\mathrm{E}(k)}\right]\mathrm{E}(k)}. \tag{49}$$

Pentru exemplificare am dat în figura 4 curbele de variație ale vitezei axiale de perturbație u, pentru următoarele cazuri :

1. Cazul cînd întregul sistem aripă-fuzelaj conic, are aceeași incidență $(\alpha_a = \alpha_f = \alpha)$;

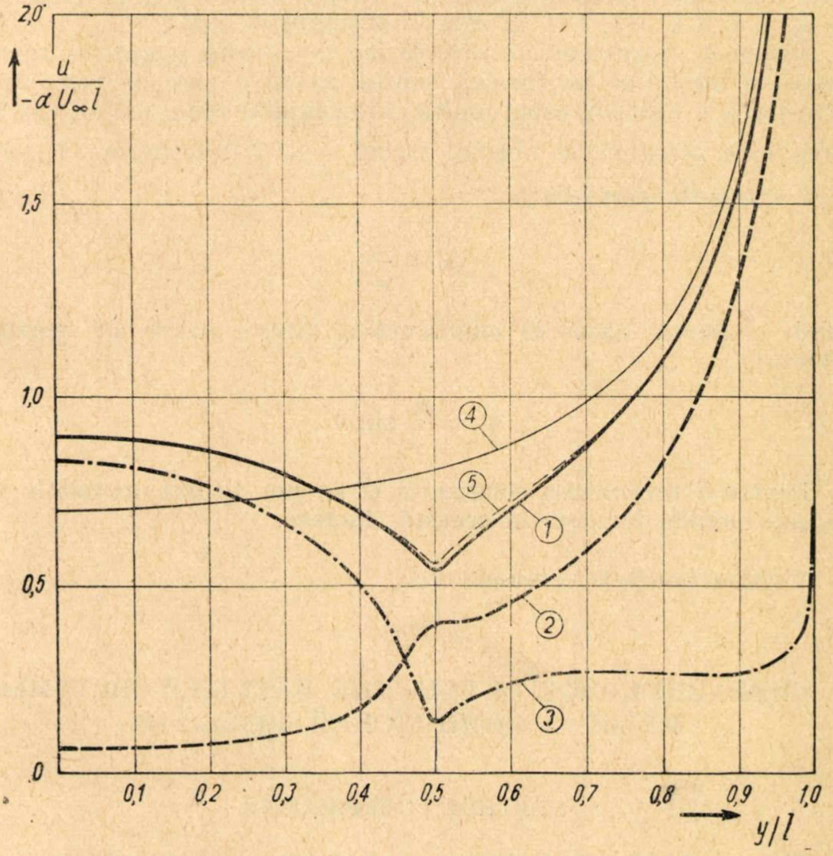


Fig. 4

2. Cazul cînd aripa are incidența α, iar fuzelajul incidența zero $(\alpha_a = \alpha, \alpha_f = 0)$;

3. Cazul cînd fuzelajul are incidența α, iar aripa incidența zero $(\alpha_a = 0, \alpha_f = \alpha)$.

Toate aceste curbe au fost trasate considerînd următoarele caracteristici geometrice ale sistemului aripă-fuzelaj conic

$$Bl = 0{,}8 \ , \ \frac{c}{l} = 0{,}5.$$

Pentru a avea un criteriu de comparație, am trecut alături de curbele citate mai sus și curba de variație (4) a vitezei axiale de perturbație u, în cazul aripii singure avînd aceeași incidență α.

În aceeași figură s-a trasat curba de variație (5) a vitezei, axiale de perturbație u, dedusă de S. H. Browne, L. Friedman și I. Hodes [1], prin dezvoltări în serie în cazul particular al sistemului fuzelaj conic-aripă delta, aripa și fuzelajul avînd aceeași incidență. Această curbă, după cum se vede, este foarte apropiată de curba(1) dedusă prin particularizările $\alpha_a = \alpha_f = \alpha$ și $l_1 = l_2 = l$, în soluția obținută de noi.

Remarcă. Aproximațiile care se fac în această lucrare se manifestă aproape în întregime pe fuzelaj, soluția avînd o precizie mare în toate punctele aripii. Chiar în cazul limită al fuzelajului conic singur, caz în care eroarea este maximă, se obține, făcînd $\frac{c}{l} = 1$ în formula (44), expresia vitezei axiale de perturbație,

$$\mathcal{U} = \frac{iQ}{x}, \tag{50}$$

de unde deducem expresia cunoscută a vitezei axiale de perturbație pe fuzelaj

$$u = \frac{Q}{c} \sin \theta. \tag{51}$$

Pentru determinarea constantei Q se pot utiliza metodele cunoscute, sau metoda indicată în această lucrare.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1959.

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ НЕСУЩЕЙ СИСТЕМЫ КРЫЛО — КОНИЧЕСКИЙ ФЮЗЕЛЯЖ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе рассматривается задача взаимодействия между крылом и коническим фюзеляжем в случае треугольного крыла с дозвуковыми передними кромками, причем крыло и фюзеляж имеют различные углы атаки.

Не налагаются никакие ограничения на размеры крыла относительно конуса Маха, но принимается, что размеры фюзеляжа являются небольшими относительно конуса Маха и что углы атаки крыла и фюзеляжа — достаточно малыми для возможности применения теории малых возмущений.

Разлагается общее движение вокруг рассматриваемой системы на два движения, одно из которых представляет собой уже известное осесимметричное обтекание изолированного конического фюзеляжа, другое является предметом настоящего исследования с учетом углов атаки крыла и фюзеляжа.

Авторы устанавливают выражение осевой скорости возмущения *u* посредством боковой скорости возмущения *v*. Для установления выражения последней задачу переводят на подходящую плоскость, где она сводится к определению двух простых плоских потенциальных движений, одно из которых имеет место вокруг пластинки и происходит от конического движения вокруг тонкого треугольного крыла, а другое имеет место вокруг окружности.

Путем применения соотношений совместимости, выводится выражение осевой скорости возмущения и определяются постоянные, входящие в это выражение.

В качестве конкретного применения рассматривается полностью случай системы конический фюзеляж-дельтообразное крыло, причем приводятся кривые изменения осевой скорости возмущения при различных значениях углов атаки крыла и фюзеляжа. Сопоставляется кривая изменения, соответствующая частному случаю (при одинаковом угле атаки крыла и фюзеляжа), с кривой, полученной другими авторами [1], рассматривающими этот же частный случай.

ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE AUTOUR DU SYSTÈME PORTANT AILE—FUSELAGE CONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs traitent dans cette étude le problème de l’interférence aile—fuselage conique dans le cas d’une aile triangulaire à bords d’attaque subsoniques, le fuselage ayant des incidences différentes.

On ne fait aucune restriction quant aux dimensions de l’aile par rapport au cône Mach, mais on considère que le fuselage a des dimensions assez réduites par rapport au cône Mach et que les incidences de l’aile et du fuselage sont suffisamment petites, pour pouvoir appliquer la théorie des petites perturbations.

On décompose le mouvement général autour du système considéré, en deux mouvements, dont l’un représente l’écoulement axial symétrique autour du fuselage conique et l’autre, dans lequel on considère l’effet des incidences de l’aile et du fuselage, fait l’objet de l’étude présente.

Les auteurs trouvent l’expression de la vitesse axiale de perturbation *u*, par l’intermédiaire de la vitesse latérale de perturbation *v*. Pour trouver l’expression de cette dernière, le problème est porté dans un plan convenablement choisi, où il est réduit à la détermination des deux mouvements potentiels plans simples, dont l’un a lieu autour d’une plaque et provient d’un mouvement conique autour d’une aile triangulaire mince, et l’autre a lieu autour d’un cercle.

En utilisant les relations de compatibilité, on déduit l’expression générale de la vitesse axiale de perturbation et on détermine ensuite les constantes qui interviennent dans cette expression.

Comme application pratique, on traite le cas du système fuselage conique—aile delta, en donnant les courbes de variation de la vitesse axiale de perturbation pour différentes incidences de l'aile et du fuselage. On compare la côurbe de variation correspondant à un cas particulier (l'aile et le fuselage ayant la même incidence) à celle obtenue par d'autres auteurs [1] qui ont traité ce même cas particulier.

BIBLIOGRAFIE

1. S. H. Browne, L. Friedman, I. Hodes, *A Wing-Body Problem in a Supersonic Conical Flow.* Journal of Aeronautical Sciences, *15*, 443—452 (1948).
2. N. Patraulea, *Mişcarea supersonică în jurul unei aripi care traversează un cerc aproape circular.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, V, *1—4* (1953).
3. N. Patraulea, D. Pantazopol, *Mişcarea conică în jurul unei aripi avînd la unul din capete un con aproape circular.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, IV, *4* (1954).
4. Elena Murgulescu, *Mişcarea supersonică în jurul unei aripi delta cu fuselaj conic.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **VI** (1954).
5. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.

O METODĂ SIMPLIFICATĂ PENTRU CALCULUL ARIPII CU VOLET FLUID

DE

N. N. PATRAULEA

NOTAŢII

$-\bar{v}_\infty$ = viteza de deplasare a aripii,
$\bar{w}_i$ = viteza indusă în dreptul aripii,
$\bar{w}_e$ = viteza efectivă în dreptul aripii,
α = unghiul de incidenţă al aripii,
α_i = unghiul indus în dreptul aripii,
α_e = unghiul de incidenţă efectivă al aripii,
θ = bracajul jetului faţă de axa profilului,
L = anvergura aripii,
c = coarda mediană,
Tdy = forţa reactivă totală a jetului de lăţime dy,
K_j = coeficientul de jet definit prin $K_j = \dfrac{T}{\frac{\rho}{2}\, c v_\infty^2}$,
K'_j = coeficient de jet definit prin $K'_j = \dfrac{T}{\frac{\rho}{2}\, c w_e^2}$,
λ = alungirea aripii,
Γ = circulaţia totală în jurul profilului median şi a liniei de jet mediane,
$\bar{\Gamma}$ = circulaţie adimensională definită prin $\bar{\Gamma} = \dfrac{\Gamma}{v_{\infty} \cdot c}$,
Γ_p = circulaţia în jurul profilului median,
$\bar{\Gamma}_p$ = circulaţia adimensională în jurul profilului definită prin $\bar{\Gamma}_p = \dfrac{\Gamma_p}{w_e \cdot c}$,

Γ_j = circulația în jurul liniei de jet mediane,
$\overline{\Gamma}_j$ = circulația adimensională în jurul liniei de jet mediane,
ρ = masa specifică a aerului,
$Z'_p\,dy$ = proiecția pe axa z' a rezultantei presiunilor aplicate profilului median de anvergură dy,
$Z_p\,dy$ = forța portantă totală datorită presiunilor pe profilul median de anvergură dy,
$Z' = Z'_p + Z'_r$,
$Z'_r\,dy$ = proiecția forței de reacție pe axa z', a jetului median de lățime dy,
$Z = Z_p + Z_r$,
$Z_r\,dy$ = forța portantă datorită reacției jetului median de lățime dy,
$c'_{zv} = \dfrac{Z'_p}{\frac{\rho}{2}\, c w_e^2}$,
$c_{z_p} = \dfrac{Z_P}{\frac{\rho}{2}\, c v_\infty^2}$, coeficient unitar de portanță datorit presiunilor
$c_z = \dfrac{Z_p}{\frac{\rho}{2}\, c v_\infty^2}$, coeficient unitar de portanță,
X'_p = proiecția pe axa x' a rezultantei presiunilor acționînd pe profil,
$c'_{xp} = \dfrac{X'_p}{\frac{\rho}{2}\, c w_e^2}$,
$c_z^\star(\alpha\ \theta\,; k_j)$ = coeficient unitar de portanță în mișcarea plană a unui profil cu volet fluid, considerat ca funcție de α, θ și parametrul K_j.

1. *Ipoteze generale.* Pentru a ajunge la formule mai simple, ușor utilizabile în calcule de proiectare, vom presupune, în prima parte a lucrării, că distribuția circulației totale în jurul profilului și a liniei de jet care corespunde profilului respectiv, este eliptică. În afară de aceasta, vom admite că cea mai mare parte a vîrtejurilor din jet paralele cu anvergura aripii, nu se întinde pe distanțe mari în aval în raport cu corzile aripii.

Pe baza acestei ultime ipoteze vom putea calcula viteza indusă w_i, în dreptul aripii de către vîrtejurile axiale, după teoria lui Prandtl asupra aripii de anvergură finită. În cazul distribuției eliptice vom avea deci,

$$w_i = \frac{\Gamma}{2L}, \tag{1.1}$$

Γ fiind circulația totală în jurul profilului median și a liniei de jet mediane iar L, anvergura aripii.

Este cunoscut că în teoriile liniarizate se admite că viteza indusă este perpendiculară pe viteza de la infinit. Noi credem că în cazul unghiurilor mari induse, care pot apărea în problemele de hipersustentație este mai corect să se considere viteza indusă perpendiculară pe viteza efectivă, deoarece vîrtejurile nu se găsesc în realitate în planul vitezei de la infinit ci mai aproape de planul care conține viteza efectivă în dreptul aripii. Evident că pentru unghiuri mici induse, deosebirea este neglijabilă.

Conform schemei din figura 1, avem

$$\sin \alpha_i = \frac{\Gamma}{2L\, v_\infty} = \overline{\Gamma}\, \frac{c}{2L} = 2\frac{\overline{\Gamma}}{\pi\lambda} \quad (1.2)$$

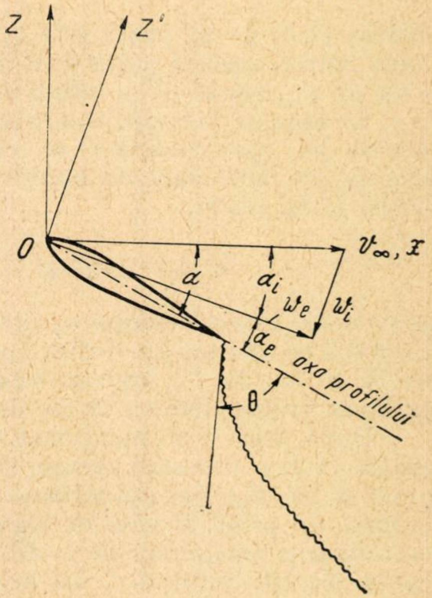


Fig. 1

Vom face mai departe ipoteza că mişcarea în jurul unui profil oarecare al aripii împreună cu linia de jet respectivă pe o porțiune nu prea îndepărtată de profil nu este mult diferită de mişcarea plană în jurul profilului respectiv cu jet, situat într-un curent paralel avînd viteza asimptotică la infinit egală cu viteza efectivă în dreptul profilului, $\overline{w}_e$.

Această ipoteză se justifică de altfel cu ajutorul teoriei dezvoltate de noi în lucrări precedente [1], [2].

În adevăr, pentru rezolvarea mai riguroasă a problemei aripii de anvergură finită cu jet de bord de fugă, trebuia să fie îndeplinite următoarele condiții la limită pe axa Ox apropiată de profil şi linia de jet mediană

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \theta(x)\, U_x - U_z\, w_i(x)\ , \quad 0 < x < c_0\,, \qquad (1.3)$$

şi

$$c_0\, K_j \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - \varphi_0(x) = \frac{c_0}{4} K_j\, [w(c_0) - w_i(x)] - \varphi_0, (c_0), \qquad (1.4)$$

pentru $c_0 < x$, adică pe linia de jet.

Aceste formule sînt formulele (6) şi (7), din lucrarea [1] *) şi notațiile erau următoarele : φ_0, valoarea potențialului unei mişcări plane irotaționale definită în planul Oxz cu tăietura Ox, pe partea superioară a axei Ox ; θ, panta profilului față de axa Ox ; U_x, U_z componentele respective ale vitezei de la infinit, iar $w(c_0)$, o constantă cunoscută în funcție de panta cunoscută a profilului la bordul de fugă

$$w(c_0) = \theta_1\, U_x - U_z \qquad (1.5)$$

---

*) p. 59 sau formulele (7) şi (8) din traducerea în limba franceză [2].

Pentru ca notațiile să nu difere de cele din lucrarea de față am însemnat în formulele de mai sus viteza indusă tot prin w_i.

Examinînd acum ecuațiile (1.3) și (1.4) a căror rezolvare ar da soluția riguroasă a problemei liniarizate, observăm că prin adoptarea ipotezei

$$w_i(x) = \text{const.} = w_i(c_0), \tag{1.6}$$

condiția (1.3) de pe profil este aproape neschimbată avînd în vedere că viteza indusă variază puțin de-a lungul profilului și totul apare ca și cum în loc de U_z, viteza de la infinit ar avea componenta $U_z + w_i(c_0)$.

În ceea ce privește condiția (1.4) care trebuie să fie îndeplinită pe linia de jet, aproximația (1.6), convine evident numai pe o porțiune a liniei de jet, apropiată de bordul de fugă al profilului median. Conform relației (1.5), avem,

$$w(c_0) - w_i(c_0) = \theta_1 U_x - [U_z + w_1(c_0)],$$

așa încît dacă se înlocuiește $w_i(x)$ cu $w_i(c_0)$ în (1.4), ecuația se transformă în ecuația pe care noi am dedus-o pentru mișcările plane, cu aceeași deosebire că în loc de U_z, trebuie considerat $U_z + w_i(c)$ ceea ce revine la a considera viteza efectivă în loc de viteza de la infinit, $\bar{v}_\infty$.

După cum am menționat, prin aproximația (1.6) se comite în ecuația (1.2) o oarecare eroare, știut fiind că la mari distanțe de profil $w_i(\infty) \cong 2w_i(c_0)$, dar aproximația este foarte justificată pe un interval apropiat de profil și care cu siguranță joacă rolul cel mai important în determinarea presiunilor pe profil. Aproximația (1.6) pare mai îndoielnică pentru jeturile puternice. În aceste cazuri, circulația în jurul liniei de jet se întinde pe o distanță mai mare în aval. Totuși, și în aceste situații eroarea este atenuată de faptul că pentru valori mari ale lui K_j efectul predominant devine efectul de reacție al jetului și pe acesta îl vom calcula separat, după cum vom vedea mai jos.

2. *Ecuații generale.* Admițînd ipotezele de mai sus să continuăm calculele ce le avem în vedere. Ecuația (1.2) se poate scrie

$$\sin \alpha_i = \frac{2}{\pi\lambda}\left(\overline{\Gamma}'_p + \overline{\Gamma}'_j\right) \cos \alpha_i, \tag{2.1}$$

unde prin $\overline{\Gamma}'_j$ s-a însemnat circulația adimensională în jurul liniei mediane a pînzei de jet.

Conform unei ipoteze admise mai sus,

$$\overline{\Gamma}'_P \approx \overline{\Gamma}^{\star}_P\left(\alpha_e, K'_j, \theta, \varpi\right), \tag{2.2}$$

adică circulația în jurul profilului (ca și toate elementele mișcării în vecinătatea profilului) este apropiată de circulația $\overline{\Gamma}^{\star}_P$ corespunzătoare mișcării plane a unui profil cu jet, care depinde, după cum se știe de unghiul de incidență efectivă, bracajul jetului θ, coeficientul de jet, K'_j și de forma profilului. În (2.2) am însemnat simbolic această dependență ($\alpha_e, K_j', \theta, \overline{\varpi}$). Vom considera în cele ce urmează că profilul este dat și deci, $\overline{\Gamma}^*$ este funcție de α_e, θ și K_j'.

Ecuația (2.1) devine

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{2}{\pi\lambda}\left[\overline{\Gamma}_P^*(\alpha_e, \theta; K_j') + \overline{\Gamma}_j'\right]\cdot \tag{2.3}$$

Pe baza teoriei liniarizate și a experiențelor în legătură cu profilele de aripă cu jet de bord de fugă, $\overline{\Gamma}_P^*$, are expresia

$$\overline{\Gamma}_P^* = \frac{\partial\overline{\Gamma}_P^*}{\partial\alpha}\sin\alpha_e + \frac{\partial\overline{\Gamma}_P^*}{\partial\theta}\sin\theta, \tag{2.4}$$

derivatele parțiale fiind funcții numai de K_j'. Dacă se ține seama de relația generală cunoscută

$$\rho\Gamma^* v_\infty = \frac{\rho}{2} c v_\infty^2 C_Z^*,$$

se poate înlocui $\overline{\Gamma}_P^*$, în (2.4), prin

$$\overline{\Gamma}_P^* = \frac{C_{zP}^*}{2},$$

și deci

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{1}{\pi\lambda}\left[\frac{\partial c_{zP}^*}{\partial\alpha}\sin\alpha_e + \frac{\partial c_{zP}^*}{\partial\theta}\sin\theta\right] + \frac{2}{\pi\lambda}\overline{\Gamma}_j'. \tag{2.5}$$

În ceea ce privește circulația în jurul jetului, $\overline{\Gamma}_j'$, este valabilă următoarea formulă

$$Z_j' dy \approx \rho\Gamma_j' w_e dy, \tag{2.6}$$

unde prin $Z_j' dy$ s-a însemnat forța portantă (după axa z') a unei șuvițe de jet median de lățime dy, datorită presiunilor pe cele două fețe ale liniei de jet pînă la infinit aval. Această relație (2.6) se demonstrează prin integrarea presiunilor pe linia de jet, după ce în prealabil s-a liniarizat ecuația lui Bernoulli

$$\frac{\rho}{2}(V_+^2 - V_-^2) \approx \frac{\rho}{2}\left[\left(w_e + \frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(w_e - \frac{\gamma}{2}\right)^2\right] = \rho\gamma w_e,$$

unde prin V_+ și V_- s-au însemnat vitezele, respectiv pe fața superioară și inferioară a jetului, iar prin γ componenta densității de vîrtej paralelă cu anvergura. Aplicînd pe de altă parte teorema impulsului la șuvița de jet considerată, pe direcția z', rezultă că

$$\rho\Gamma_j' w_e dy \approx I_j dy\,[\sin(\alpha_e + \theta) - \sin\alpha_i], \tag{2.7}$$

unde prin I_j s-a însemnat debitul de impuls al jetului.

Cu acestea, ecuația (2.5) devine

$$\operatorname{tg}.\, \alpha_i = \frac{1}{\pi\lambda}\left[\frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\alpha}\sin\alpha_e + \frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\theta}\sin\theta + K'_j\,(\sin(\alpha_e+\theta) - \sin\alpha_i)\right], \tag{2.8}$$

care rezolvată împreună cu relația evidentă (fig. 1),

$$\alpha_e = \alpha - \alpha_i,$$

procură valoarea unghiului indus α_i și a unghiului de incidență efectivă α_e. Se deduc în continuare expresiile coeficienților unitari

$$c'_{zP} \approx \frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\alpha} = \sin\alpha_e + \frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\theta}\sin\theta = c^{*}_{zP}\,(\alpha_e,\, \theta), \tag{2.9}$$

$$c'_{xP} = -K_j\,[1 - \cos(\alpha_e + \theta)], \tag{2.10}$$

c'_{xP} este datorit secțiunilor de la bordul de atac. Avem mai departe coeficienții unitari referitori la axele Oxz

$$c_{zP} = c'_{zP}\cos^3\alpha_i - c'_{xP}\sin\alpha_i\cos^2\alpha_i, \tag{2.11}$$

$$c_{xP} = c'_{zP}\cos^2\alpha_i\sin\alpha_i + c'_{xP}\cos^3\alpha_i. \tag{2.12}$$

Efectul de reacție al jetului trebuie adăugat separat și se obține în total

$$c_z = c_{zP} + c_{zR} = c_{zP} + K'_j.\cos^2\alpha_i\sin(\alpha+\theta), \tag{2.13}$$

$$c_x = c_{xP} - K'_j\cos^2\alpha_i\cos(\theta+\alpha). \tag{2.14}$$

3. *Cazul unghiurilor induse mici.* În cazul unghiurilor induse mici se pot face următoarele aproximații în formulele de mai sus. În loc de (2.8), se poate pune

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi\lambda}\left[\frac{\partial c_{zP}}{\partial\alpha}(\alpha - \alpha_i) + \frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\theta}\,\theta + K_j\,(\alpha + \theta - 2\,\alpha_i)\right]. \tag{3.1}$$

Ținînd seama și de relația

$$\frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\alpha} + K_j = \frac{\partial c^{*}_{z}}{\partial\alpha};\quad \frac{\partial c^{*}_{zP}}{\partial\theta} + K_j = \frac{\partial c^{*}_{z}}{\partial\theta} \tag{3.2}$$

și introducînd notația

$$\varkappa = \frac{\pi\lambda}{\pi\lambda + K_j + \dfrac{\partial c^{*}_{z}}{\partial\alpha}}, \tag{3.3}$$

care va interveni frecvent în expresiile următoare, se deduce din (3.1),

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}\,\alpha + \dfrac{\partial c_z^*}{\partial \theta}\,\theta}{\pi\lambda + K_j + \dfrac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}} = \frac{c_z^*\,(\alpha,\,\theta)}{\pi\lambda}\,\varkappa\,, \tag{3.4}$$

$$\alpha_e = \frac{(\pi\lambda + K_j)\cdot\alpha - \dfrac{\partial c_z^*}{\partial \theta}\cdot\theta}{\pi\lambda + K_j + \dfrac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}}\,. \tag{3.5}$$

Formula (2.9) şi următoarele devin :

$$c_{zP} = \frac{\partial c^*_{zP}}{\partial \alpha}\cdot\alpha_e + \frac{\partial c^*_{zP}}{\partial \theta}\cdot\theta = c^*_{zP}\,(\alpha_e\,,\,\theta), \tag{3.6}$$

$$c_z = c^*_{zP}\,(\alpha_e\,,\,\theta) + K_j\cdot(\alpha + \theta), \tag{3.7}$$

$$c_x = c_{xi} - K_j\,. \tag{3.8}$$

În această ultimă formulă am notat prin c_{xi} coeficientul unitar de rezistenţă indusă dat de

$$c_{xi} = c_{xP} = c^*_{zP}\,(\alpha_e\,,\,\theta)\cdot\alpha_i\,. \tag{3.9}$$

Este interesant să se înlocuiască în formulele de mai sus unghiul α în funcţie de unghiul de incidenţă efectivă şi să obţinem astfel funcţii de α_e cu ajutorul cărora să se poată aprecia valoarea elementelor de mai sus. În adevăr, pentru a nu se produce desprinderi, α_e, trebuie să varieze între limite apropiate ($\alpha_{e\,\max} \cong 12°$).

În acest scop, din (3.5) se scoate

$$\alpha = \frac{\alpha_e\left(\pi\lambda + K_j + \dfrac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}\right) + \dfrac{\partial c_z^*}{\partial \theta}}{\pi\lambda + K_j}\,. \tag{3.10}$$

Înlocuind în (3.4), (3.7) şi (3.9), acestea devin

$$\alpha_i = \frac{c_z^*(\alpha_e,\,\theta)}{\pi\lambda + K_j}\,, \tag{3.11}$$

$$c_z = c_z^*\,(\alpha_e,\theta)\;\cdot\;\frac{\pi\lambda}{\pi\lambda + K_j}\,, \tag{3.12}$$

$$c_{xi} = \frac{c^*_{zP}\,(\alpha_e\,,\,\theta)\cdot c_z^*\,(\alpha_e\,,\,\theta)}{\pi\lambda + K_j}\,. \tag{3.13}$$

Să considerăm acum coeficientul unitar de portanță și unghiul indus, α_i, ca funcții de α și θ pentru K_j dat, și să calculăm derivatele parțiale respective.

Ținînd seama de (3.5) și (3.12) se deduce

$$\frac{\partial c_z}{\partial \alpha} = \varkappa \cdot \frac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}, \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial \theta} = \varkappa . \frac{\partial c_z^*}{\partial \theta}, \qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha} = \frac{\frac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}}{\pi \lambda} \cdot \varkappa,$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} = \frac{\partial c_z^*}{\partial \theta} \cdot \frac{\varkappa}{\pi \lambda}, \qquad (3.16)$$

sau sub altă formă

$$c_z(\alpha, \theta, K_j) = c_z^* (\alpha, \theta, k_j) . \varkappa(\lambda, k_j), \qquad (3.17)$$

$$\alpha_i (\alpha, \theta, K_j) = \frac{c_z^* (\alpha, \theta, K_j)}{\pi \lambda} . \varkappa = \frac{c_z}{\pi \lambda}. \qquad (3.18)$$

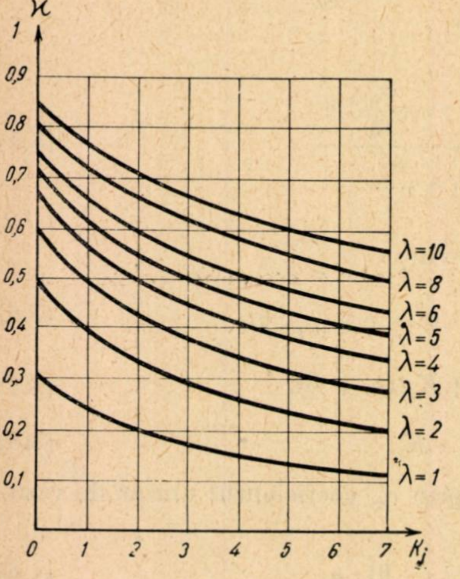


Fig. 2

Diagramele din figura 2 reprezintă variația lui $\varkappa$ cu λ și K_j.

Formulele obținute pînă acum sînt valabile și în cazul cînd α reprezintă, așa cum am notat în o lucrare precedentă [3] unghiul făcut de partea rectilinie anterioară a profilului frînt cu viteza de la infinit, iar θ bracajul părții posterioare rectilinii (a voletului de curbură). Evident că prin $\frac{\partial c_z^*}{\partial \alpha_e}, \frac{\partial c_z^*}{\partial \theta}$ etc. se va înțelege în acest caz derivatele parțiale calculate pentru mișcarea plană respectivă și care sînt reprezentate în diagramele din lucrarea citată [3] *).

4. *Observații.* Din examinarea formulei (3.12) se observă că coeficientul unitar total maxim de portanță nu diferă sensibil de coeficientul prezis de teoria mișcării plane în jurul profilului de aripă cu jet, deoarece α_e și θ pot lua aceleași valori maxime iar coeficientul subunitar, $\varkappa$, este foarte apropiat de unitate afară de cazul alungirilor foarte mici și al jeturilor foarte puternice. Astfel pentru $\lambda = 4$ și $K_j = 3$, coeficientul de reducere a coeficientului c_z, corespunzător mișcării plane este de 0,8.

În schimb însă, unghiul de incidență, α, necesar pentru obținerea unghiului de incidență efectivă, pozitiv, poate lua valori considerabile pentru c_z mari şi alungiri mici. Pentru $c_z = 12$ (3.18), α_i devine aproximativ egal cu unitatea ceea ce arată că formulele sub forma simplificată dezvoltate la punctul 3, devin în astfel de situaţii, numai indicative. Pînă la unghiuri induse de 25° formulele date la punctul 3 se pot utiliza. Valorile coeficienţilor unitari se pot îmbunătăţi eventual, aplicînd formulele (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) şi (2.14). Introducînd elementele obţinute în ecuaţia (2.8) s-ar putea scoate o nouă valoare pentru α_i ş.a.m.d.

---

*) p. 24 și 25.

5. *Comparaţie cu rezultatele experimentale.* Nu ne sînt cunoscute la data actuală cercetări experimentale metodice asupra aripilor de anvergură finită cu jeturi de bord de fugă. Am comparat valoarea coeficientului $\varkappa$ dat de lucrarea prezentă şi care conform formulei (3.17) este egal cu unul din rapoartele

$$\varkappa = \frac{\dfrac{\partial c_z}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial c_z^*}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial c_z}{\partial \theta}}{\dfrac{\partial c_z^*}{\partial \theta}} = \frac{c_z(\alpha, \theta, K_j)}{c_z^*(\alpha, \theta, K_j)},$$

cu valoarea care se poate calcula din datele experimentale înregistrate la O.N.E.R.A. [4] *), ($\Delta c_z = 1{,}6\sqrt{K_j}\sin\theta$).

Pentru mişcarea plană în jurul unui profil cu jet, se găseşte în aceeaşi lucrare formula empirică

$$\Delta c_z = 3{,}9\sqrt{K_j}\sin\theta.$$

Se deduce valoarea coeficientului

$$\varkappa_{\text{exp}} = \frac{\dfrac{\partial c_z}{\partial \theta}}{\dfrac{\partial c_z^*}{\partial \theta}} = \frac{1{,}6}{3{,}9} = 0{,}41.$$

Macheta supusă încercărilor O.N.E.R.A. a fost macheta unui avion complet, fuzelajul interceptînd 22,5% din suprafaţa totală a aripii. Încercările au fost făcute în sufleria de 3 m de la Cannes iar numărul Reynolds al încercărilor $0{,}85 \times 10^6$. Au fost făcute experienţe cu orientarea jetului de 90 şi 29° iar coeficientul de jet a fost de maximum 0,2.

Pe de altă parte, din diagramele figurii 2 ale acestei lucrări se deduce că pentru valori mici ale coeficientului de jet, $\varkappa = 0{,}58$. Pentru valori mai mari ale coeficientului de jet curba respectivă din figura 2 arată o scădere importantă a coeficientului $\varkappa$, fapt prezis de formula empirică dată în [4]. Nu avem posibilitatea să facem confruntare decît în intervalul foarte mic de variaţie pentru k_j în care s-au făcut experienţele.

În acest interval acordul pare să fie destul de bun dacă avem în vedere că valoarea $\varkappa_{\text{exp}} = 0{,}41$ trebuie corectată prin eliminarea efectului de scădere a portanței datorit fuzelajului. În orice caz, nu se poate face decît o comparație a ordinului de mărime deoarece în afară de prezența fuzelajului, nici repartiția circulației la machetă nu a fost eliptică ceea ce în formulele noastre de mai sus s-a presupus.

---

*) p. 21.

6. *Despre influența fuzelajului.* După cunoștința noastră nu există pînă acum cercetări teoretice privind influența fuzelajului asupra scurgerii în jurul unei aripi cu volet fluid. Ne mulțumim să scoatem în evidență două situații și anume :

a) Pînză de jet foarte înclinată ceea ce face ca ea să nu aibă contactul cu fuzelajul decît pe o porțiune relativ redusă. În acest caz, pierderea de portanță datorită fuzelajului va fi cu siguranță importantă, fluidul în suprapresiune sub fuzelaj putîndu-se scurge cu ușurință în sus prin spațiul dintre fuzelaj și pînza de jet.

b) Pînza de jet are un bracaj suficient de mic astfel că pînă la distanțe apreciabile în aval nu se desprinde de fuzelaj. În acest caz, influența fuzelajului pare să fie foarte redusă, pînza de jet *etanșînd* partea inferioară a fuzelajului de partea superioară. Fuzelajul apare ca o continuare a suprafeței portante totale (aripă și pînză de jet).

Se desprinde de aici, că și din acest motiv trebuie evitate jeturile prea înclinate în special cînd coeficientul de jet ia valori mari, ceea ce face ca înclinarea jetului să se mențină pe o distanță mai mare depășind nivelul inferior al fuzelajului. Este evident că aripa sus este avantajoasă din punct de vedere al influenței fuzelajului.

7. *Despre mărirea alungirii aparente.* Din formulele date în această lucrare, precum și din cercetări experimentale, rezultă că portanța aripii cu jet scade sensibil odată cu scăderea alungirii aripii. În același timp, unghiurile induse cresc, ceea ce în mod obligatoriu impune ca aparatul să sboare în atitudine cabrată.

Dacă din motive constructive nu se proiectează aripa aparatului cu o alungire normală se poate încerca o mărire a alungirii aparente a aripii prin dispozitive speciale din care indicăm aici :

α) Plasarea de discuri marginale sau corpuri fuzelate (de exemplu rezervoare suplimentare) la extremitățile aripii.

β) Sub rezerva încercărilor experimentale preconizăm pînze de jet în care vitezele să nu fie peste tot conținute în plane perpendiculare pe anvergură, ci în spre extremitățile aripii, să aibă componente paralele cu anvergura, către în afară. Datorită acestei distribuții speciale, pînza va avea tendința să-și mărească anvergura pe măsură ce se depărtează în aval. În acest fel, alungirea aparentă a aripii se va îmbunătăți, deși se pierde o parte din impulsul util al jetului.

γ) Nu este exclusă nici adoptarea unor discuri marginale *fluide* formate de exemplu din pînze de jet descendente, emise din marginile laterale ale aripii.

8. *Momente.* Pe baza ipotezelor făcute, rezultă că momentul forțelor de presiune și al forțelor de reacție se va calcula, pentru fiecare profil

în parte la fel ca pentru mişcarea plană în jurul unui profil cu jet, mişcare caracterizată prin elementele α_e, θ, K_j (a se vedea lucrarea [4]) *).

9. *Generalizare pentru distribuţie oarecare a circulaţiei.* Vom căuta să extindem ipotezele fizice admise la începutul acestei lucrări, la o aripă cu o distribuţie oarecare a circulaţiei de-a lungul anvergurii. Aceasta înseamnă o repartiţie oarecare a corzilor, a incidenţelor, a coeficientului de jet şi a înclinării liniilor de jet la bordurile de fugă ale profilelor. Această generalizare va fi în special utilă pentru evaluarea momentului datorit bracării aripioarelor de comandă laterală.

Pentru valabilitatea dezvoltărilor care urmează, vom accepta ipoteza unghiurilor induse mici, astfel ca teoria lui Prandtl cu modificările respective să se poată aplica. Pînza de jet, care conţine şi vîrtejurile libere, nu se va îndepărta sensibil de planul orizontal care conţine viteza de la infinit. Cum prin ipoteză, majoritatea vîrtejurilor portante (paralele cu anvergura), nu se întind mult în aval, aripa şi o porţiune principală din pînza de jet din vecinătatea ei se va comporta ca o aripă de alungire evident mai mică decît aripa propriu-zisă.

Dacă notăm prin $w_i\,(y)$, viteza indusă medie în dreptul secţiunii y a acestei aripi fictive, putem să admitem relaţia

$$w_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{9.1}$$

cunoscută din teoria aripilor de anvergură finită. Prin φ s-a însemnat potenţialul mişcării plane transversale de la infinit aval. Avem mai departe,

$$\alpha_i \approxeq \frac{w_i}{v_\infty} = -\frac{1}{2v_\infty}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_P + \varphi_j), \tag{9.2}$$

unde prin φ_p am însemnat semicirculaţia în jurul profilului propriu-zis iar prin φ_j semicirculaţia în jurul liniei de jet a secţiunii y. Prezenţa vitezei induse, w_i, condiţionează valoarea circulaţiei în jurul profilului propriu-zis şi în jurul liniei de jet a secţiunii y şi anume

$$\Gamma_P = 2\,\varphi_P = v_\infty\, c\,(y)\cdot \Gamma_P^{\star} = v_\infty \cdot c\,(y)\cdot\left(\frac{\partial \overline{\Gamma}_P^{\star}}{\partial \alpha}\cdot\alpha_e + \frac{\partial \Gamma_P^{\star}}{\partial \theta}\cdot\theta\right), \tag{9.3}$$

$\dfrac{\partial \overline{\Gamma}_P^{\star}}{\partial \alpha}$ şi $\dfrac{\partial \overline{\Gamma}_P^{\star}}{\partial \theta}$ fiind considerate (pentru K_j dat) constante ca şi în paragrafele anterioare. Pentru a nu produce confuzii şi în acelaşi timp pentru simplificarea scrierii, le vom nota respectiv cu A şi T. Ele sînt funcţii numai de K_j şi cum repartiţia lui K_j în anvergură, este presupusă cunoscută, A şi T vor fi funcţii de y.

---

*) p. 30 şi 31.

Cu aceste notații, ecuația (9.3) se va scrie

$$\Gamma_p = 2\varphi_p = v_\infty . c(y)\ [A\ (y)\ (\alpha(y) - \alpha_i) + T(y)\ .\ \theta(y)]. \tag{9.4}$$

Pe de altă parte (a se vedea relațiile (2.6), (2.7), (2.8))

$$\Gamma_j = \frac{v_\infty \cdot c}{2} \cdot K_j \cdot (\alpha + \theta - 2\alpha_i) = 2\ \varphi_j \tag{9.5}$$

și ținînd seama și de (9.2), se obține ecuația

$$\varphi = \frac{1}{2} V_\infty \cdot c \left[A \left(\alpha + \frac{1}{2v_\infty} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + T\theta + \frac{K_j}{2} \left(\alpha + \theta + \frac{1}{v_\infty} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right], \tag{9.6}$$

sau,

$$2\varphi = (A + K_j) \cdot V_\infty \cdot c \left[\frac{A + \frac{K_j}{2}}{A + K_j} \cdot \alpha + \frac{T + \frac{K_j}{2}}{A + K_j} \cdot \theta + \frac{1}{2v_\infty} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]. \tag{9.7}$$

Aceasta are forma ecuației lui Prandtl pentru determinarea circulației în jurul unei aripi de anvergură finită și care se poate reduce la o ecuație integrală [5], sau rezolva prin alte metode cunoscute. Rezultă că distribuția circulației va fi aceeași ca la o aripă fictivă echivalentă care ar avea următoarele elemente :

incidențele aripii fictive vor avea distribuția

$$A(y) = \frac{A + \frac{K_j}{2}}{A + K_j} \cdot \alpha + \frac{T + \frac{K_j}{2}}{A + K_j} \cdot \theta, \tag{9.8}$$

iar corzile, distribuția

$$C(y) = \frac{A + K_j}{A_0} \cdot c, \tag{9.9}$$

unde, A_0 este valoarea lui A pentru $K_j = 0$ și alungire infinită (teoretic $A_0 = 2\pi$).

Rezolvarea matematică a problemei face cunoscută repartiția în anvergură a circulației totale $\Gamma(y)$, a vitezelor induse, $w_i(y)$ și a unghiurilor induse, $\alpha_i(y)$. Cu ajutorul relației (9.5) se calculează apoi $\Gamma_j(y)$ și prin diferența $(\Gamma - \Gamma_j)$, se află circulația în jurul profilului, Γ_P.

Portanța P_P, datorită exclusiv presiunilor care acționează asupra suprafeței exterioare a aripii va fi dată de integrala

$$P_P = \rho V_\infty \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Gamma_P \cdot dy. \tag{9.10}$$

La aceasta trebuie adăogată portanța datorită reacțiunii totale a pînzei de jet

$$P_R = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} c(y) \cdot K_j(y) \cdot \sin\left[\theta(y)\right] \cdot dy. \tag{9.11}$$

Reamintim că se definește coeficientul de jet local prin relația

$$K_j = \frac{T(y)}{\frac{\rho}{2} c V_\infty^2}, \tag{9.12}$$

unde $T(y)\,dy$ înseamnă forța de reacție a unei șuvițe din pînza de jet de lățime dy, la distanța y de axul longitudinal al aripii.

Portanța totală va fi dată așadar de:

$$P = P_P + P_R. \tag{9.13}$$

Formule analoge se obțin pentru momentul în jurul axei Ox

$$M_{Px} = \rho V_\infty \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Gamma_P\, y\, dy, \tag{9.14}$$

$$M_{Rx} = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} c \cdot K_j \cdot \sin\theta \cdot y \cdot dy, \tag{9.15}$$

$$M_x = M_{Px} + M_{Rx}. \tag{9.16}$$

Primită la redacție la 18 august 1958.

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КРЫЛА С ЖИДКИМ ЗАКРЫЛКОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для того, чтобы избежать решения уравнений (1.3) и (1.4), установленных для крыла конечного размаха с жидким закрылком, приведенных в [1], автор делает следующие допущения: 1) для расчета индуктивной скорости у срединного профиля необходимо учитывать общую

циркуляцию (вокруг профилей и струйных линий); 2) движение вблизи профиля (в частности, давления на внешний контур срединного профиля) аналогично плоскому движению вокруг срединного профиля с жидким закрылком, если в качестве скорости на бесконечности принять эффективную скорость w_e у профиля и считать одинаковое отклонение струи.

При эллиптическом распределении циркуляции получаются формулы (2.8) до (2.14). В случае небольших индуктивных углов α_i, упомянутые формулы упрощаются путем обычного апроксимирования и принимают вид (3.4) до (3.18).

Далее рассматривается влияние фюзеляжа и удлинения крыла λ.

В параграфе 9 обобщается метод для случая произвольного распределения циркуляции. Задача приводится к решению уравнения Прандтля [5] для фиктивного крыла конечного размаха с заданными распределениями углов атаки и хорд (9,8) и (9,9). Подъемная сила рассчитывается при помощи формул (9.10) (подъемная сила вследствие давлений на крыло) и (9.11) (подъемная сила вследствие реакции жидкой пелены).

Даются также формулы (9.14), (9.15), выражающие результирующий момент относительно оси симметрии Ox.

UNE MÉTHODE SIMPLIFIÉE POUR LE CALCUL DE L'AILE À VOLET FLUIDE

RÉSUMÉ

Afin d'éviter de résoudre les conditions (1.3) et (1.4), établies pour l'aile d'envergure finie à volet fluide et données en [1], l'auteur admet les hypothèses suivantes :

1° Pour calculer la vitesse induite, au droit du profil médian, il faut tenir compte de toute la circulation (autour des profils et des lignes de jet).

2° Le mouvement dans le voisinage du profil (en particulier les pressions sur le contour extérieur du profil médian) est le même que pour le mouvement plan autour du profil médian à volet fluide, si l'on prend comme vitesse à l'infini la vitesse effective w_e au droit du profil et le même braquage du jet.

Si la distribution de la circulation est elliptique, on aboutit aux formules (2.8) à (2.14). Dans le cas des petits angles induits, α_i, les formules susmentionnées se simplifient par des approximations usuelles et deviennent (3.4) à (3.18).

L'auteur discute ensuite l'influence du fuselage et de l'allongement, λ, de l'aile.

Le paragraphe 9 généralise la méthode au cas d'une distribution quelconque de la circulation. Le problème est ramené à la résolution d'une équation de Prandtl [5] pour une aile fictive d'envergure finie dont

la distribution des incidences et des cordes serait donnée par (9.8) et (9.9). La portance est calculée à l'aide des formules (9.10) (portance due aux pressions sur l'aile) et (9.11) (portance due à la réaction de la nappe fluide).

On donne, en outre, les formules (9.14), (9.15) qui expriment le moment résultant par rapport à l'axe de symétrie Ox.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, *Aripi de anvergură finită cu jeturi de bord de fugă.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, *1*, 57 (1957).
2. — *Deux généralisations du problème de l'aile à volet fluide.* Revue de mécanique appliquée, **II**, *1*, 29 (1957).
3. N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU, D. CĂPRIȚĂ, *Caracteristicile aerodinamice ale profilelor cu volet fluid.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 13 (1958).
4. L. MALAVARD, PH. POISSON-QUINTON, P. JOUSSERANDOT, *Recherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de la circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avions.* Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, *37* (1956).
5. N. N. PATRAULEA, *Asupra rezolvării problemei lui Prandtl generalizată.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3* (1958).

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE UNEI CLASE DE ARIPI SUBȚIRI ÎN SCURGERE OMOGENĂ DE ORDIN SUPERIOR

DE

M. IONESCU și GH. DARIE

I. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În prezenta lucrare se stabilesc caracteristicile aerodinamice ale unei anumite clase de aripi triunghiulare subțiri în curent supersonic.

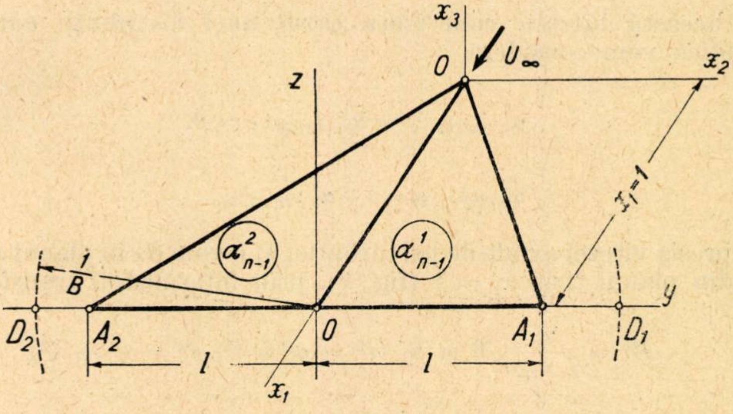


Fig. 1

Să considerăm în acest sens o aripă triunghiulară raportată la un sistem triortogonal $Ox_1x_2x_3$ avînd axa Ox_1 dirijată după direcția vitezei U_∞ a curentului neperturbat. Incidența acestei aripi este definită prin ipoteză de polinoamele (fig. 1)

$$\overset{1}{\alpha}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-} \overset{1}{\alpha}_{n-q-1,\, q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^{q} \text{ pentru } x_2 > 0, \tag{1}$$

$$\overset{2}{\alpha}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \overset{2}{\alpha}_{n-q-1,\, q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^{q} \text{ pentru } x_2 < 0. \tag{1'}$$

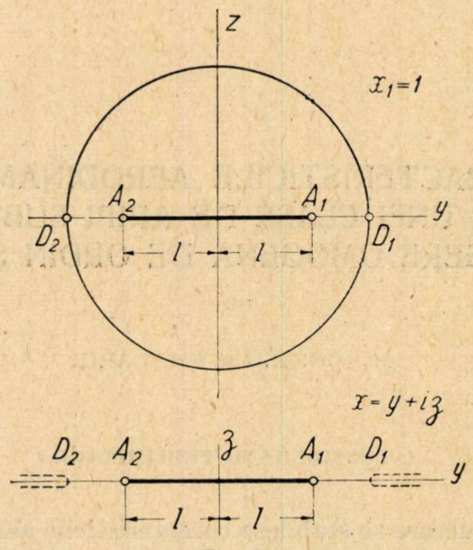


Fig. 2

În această lucrare vom trata cazul unei distribuții *antisimetrice forțate*, adică vom considera

$$\begin{aligned} \overset{2}{\alpha}_{n-2p,\, 2p-1} &= \overset{1}{\alpha}_{n-2p,\, 2p-1} = 0, \\ \overset{2}{\alpha}_{n-2p-1,\, 2p} &= -\, \overset{1}{\alpha}_{n-2p-1,\, 2p}. \end{aligned} \tag{2}$$

Expresia vitezei axiale de perturbație, u, o vom da în planul $x = y + i\mathfrak{z}$ obținut din planul fizic $x_1 = 1$ (fig. 2), prin intermediul transformărilor

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2},\ \theta = \theta,\ (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2) \tag{3}$$

și

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2} \quad (x = y + i\mathfrak{z},\ \xi = \eta + i\zeta), \tag{4}$$

unde prin $1/B$ am notat raza conului Mach în planul fizic și unde am pus $y = x_2/x_1$, $z = x_3/x_1$.

În planul x, viteza axială u în cazul distribuției alese este dată de expresia [1]

$$u_{n-1} = x_1^{n-1} \mathcal{R}e \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1} \frac{x^{2q+1}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{2q+1} x^{2q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l^2}{x^2}} \right\}, \quad (5)$$

în care prin simbolul $E\ (t)$ am notat cel mai mare întreg ce nu întrece pe t.

Coeficienții A_j și C_j ce apar în expresia de mai sus se determină plecînd de la *relațiile de compatibilitate* [1], [2], [3] care se pot pune sub forma

$$\mathcal{R}e \left\{ i [-1]^{n-q} \int_{x_0}^{x_1} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} dx \right\} = \frac{(n-1)!\, U_\infty}{C_{n-1}^q} \alpha^1_{n-q-1,\, q}, \quad (6)$$

unde x_0 este un punct de viteză verticală nulă, x_1 un punct de pe aripă la dreapta originii, iar U_{n-1} este funcția analitică a cărei parte reală pe aripă este $\dfrac{U_{n-1}}{x_1^{n-1}}$.

Dată fiind structura antisimetrică a funcției U_{n-1} vom aplica relația (6) sub formele

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \left\{ i (-1)^{n-2p} \int_{C_0} x^{n-2p-2} \sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} dx \right\} = \\ = \frac{(n-1)!\, U_\infty}{C_{n-1}^{2p}} 2 \alpha_{n-2p-1,2p} \end{aligned} \quad (7)$$

și

$$\mathcal{R}e \left\{ i (-1)^{n-2p+1} \int_{C_1} x^{n-2p-1} \sqrt{1 - B^2 x^2} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n} \right\} = 0, \quad (8)$$

unde C_0 este un semicerc cu rază foarte mică descris în jurul originii și C_1 un sfert din acest cerc plus întreaga semiaxă pozitivă $O\mathfrak{z}$.

Pentru detalii în legătură cu această scurtă introducere, trimitem cititorul la lucrarea anterioară [1].

În prezentul studiu ne vom limita la cazurile $n = 1, 2, 3, 4$ pentru care avem următoarele expresii α_{n-1} și U_{n-1} :

$$\alpha_0^1 = -\alpha_0^2 = \alpha_0,$$

$$U_0 = \mathcal{R}e \frac{C_{10} x}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad (9)$$

pentru $n = 1$,

$$\alpha_1^1 = -\alpha_1^2 = x_1\,\alpha_{10}$$

$$U_1 = \mathcal{R}e\left\{\frac{C_{11}\,x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_{11}\;x\ \mathrm{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right\} \tag{10}$$

pentru $n = 2$,

$$\alpha_2^1 = -\alpha_2^2 = x_1^2\,(\alpha_{20} + \alpha_{02}\,y^2)$$

$$U_2 = \mathcal{R}e\left\{\frac{C_{12}\,x + C_{32}\,x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_{12}\,x\ \mathrm{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right\} \tag{11}$$

pentru $n = 3$, și în sfîrșit

$$\alpha_3^1 = -\alpha_3^2 = x_1^3\,(\alpha_{30} + \alpha_{12}\,y^2)$$

$$U_3 = \mathcal{R}e\left\{\frac{C_{13}\,x + C_{33}\,x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}} + (A_{13}\,x + A_{33}\,x^3)\ \mathrm{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right\} \tag{12}$$

pentru $n = 4$.

II. CALCULUL VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Putem trece acum la calculul efectiv al coeficienților A_j și C_j. Pentru aceasta vom aplica relațiile (7) și (8) și introducînd notațiile

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = -A_{11}\,l^5, && \gamma_0 = A_{12}\,l^7, \quad \gamma_4 = 12\,C_{12}\,l^2 + 9\,c_{32}\,l^4 + 4\,A_{12}\,l^3,\\
&\beta_2 = 3C_{11}\,l^2 + A_{11}\,l^3, && \gamma_2 = 3C_{12}\,l^4 + 6\,C_{32}\,l^6 - 5A_{12}\,l^5,\\
&\delta_0 = -2\,A_{13}\,l^9, && \delta_4 = 45\,C_{13}\,l^4 + 60\,C_{33}\,l^6 - 27\,A_{13}\,l^5 - 3\,A_{33}\,l^7, \qquad (13)\\
&\delta_2 = 9\,A_{13}\,l^7 - 6\,A_{33}\,l^9, && \delta_6 = 60\,C_{13}\,l^2 + 45\,C_{33}\,l^4 + 20\,A_{13}\,l^3 + 9\,A_{33}\,l^5,
\end{aligned}$$

vom obține, după un calcul laborios dar elementar, următoarele valori pentru integralele (7) și (8):

— pentru $n = 1$,

$$\mathcal{R}e\left\{-i\int_{C_0}\frac{\sqrt{1 - B^2\,x^2}}{x}\,\frac{dU_0}{dx}\right\} = \frac{\pi C_1}{2l} = -2\;\alpha_0\,U_\infty\,; \tag{14}$$

— pentru $n = 2$,

$$\mathcal{R}e\left\{i\int_{C_0}\frac{\sqrt{1 - B^2\,x^2}}{x}\,\frac{d^2\,U_1}{dx^2}\,dx\right\} = \frac{\pi\beta_0}{l^5} = 2\,\alpha_{10}\,U_\infty, \tag{15}$$

$$\mathcal{R}e\left\{i\int_{\text{Aripă}}^{\text{Con Mach}}\frac{\sqrt{1 - B^2\,x^2}}{x}\,\frac{d^2\,U_1}{dx^2}\,dx\right\} = \beta_0\,I_1 - \beta_2\,I_2 = 0\,; \tag{15'}$$

— pentru $n = 3$,

$$\mathcal{R}e\left\{-i\int_{C_0} x\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^3U_2}{dx^3}\,dx\right\} = -\frac{\pi\gamma_0}{l^7} = 4\,\alpha_{20}\,U_\infty, \tag{16}$$

$$\mathcal{R}e\left\{-i\int_{C_0} \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{d^3U_2}{dx^3}\,dx\right\} = -\frac{\gamma_2+\varkappa_{32}\gamma_0}{l^7}\,\pi = 4\,\alpha_{02}\,U_\infty$$

$$\left(\varkappa_{32} = \frac{7}{2l^2} - \frac{B^2}{2}\right), \tag{16'}$$

$$\mathcal{R}e\left\{i\int_{\text{Aripă}}^{\text{Con Mach}} \sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^3U_2}{dx^3}\,dx\right\} = \gamma_0 I_3 - \gamma_2 I_4 + \gamma_4 I_5 = 0; \tag{16''}$$

— pentru $n = 4$,

$$\mathcal{R}e\left\{i\int_{C_0} x^2\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^4U_3}{dx^4}\,dx\right\} = \frac{\pi\delta_0}{l^9} = 12\,\alpha_{30}\,U_\infty, \tag{17}$$

$$\mathcal{R}e\left\{i\int_{C_0} \sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^4U_3}{dx^4}\,dx\right\} = \frac{\delta_2+\varkappa_{42}\,\delta_0}{l^9}\,\pi = 4\,\alpha_{12}U_\infty, \left(\varkappa_{42} = \frac{9}{2l^2} - \frac{B^2}{}\right), \tag{17'}$$

$$\mathcal{R}e\left\{-i\int_{\text{Aripă}}^{\text{Con Mach}} \varkappa\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^4U_3}{dx^4}\,dx\right\} = \delta_0 I_6 - \delta_2 I_7 + \delta_4 I_8 - \delta_6 I_9 = 0, \tag{17''}$$

$$\mathcal{R}e\left\{-\int_{\text{Aripă}}^{\text{Con Mach}} \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{d^4U_3}{dx^4}\,dx\right\} = \delta_0 I_{16} - \delta_2 I_6 + \delta_4 I_7 - \delta_6 I_8 = 0. \tag{17'''}$$

În toate expresiile de mai sus, s-au folosit notațiile

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{z^2\,(l^2+z^2)^{5/2}}\,dz - \frac{1}{\varepsilon l^5}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{B^6\int_0^{\operatorname{arctg} 1/B\varepsilon} \frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta^5}\,d\varphi - \frac{1}{\varepsilon l^5}\right\} =$$

$$= -\frac{B^6}{3k^2\,(1-k^2)^3}\left\{(1+7k^2)\,E - (1+2k^2-3k^4)\,K\right\},$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{(l^2+z^2)^{5/2}}\,dz = B^4\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi = \frac{B^4}{3k^2\,(1-k^2)^2}\left\{(1+k^2)E - (1-k^2)\,K\right\},$$

$$I_3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{z^2(l^2+z^2)^{7/2}}\,dz - \frac{1}{\varepsilon l^7}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{B^8\int_0^{\operatorname{arctg} 1/B\varepsilon} \frac{\sin^6\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta^7}\,d\varphi - \frac{1}{\varepsilon l^7}\right\} =$$

$$= \left\{I_1 - I_4\right\}\frac{1}{l^2} = \left\{I_1 - I_4\right\}\frac{B^2}{1-k^2},$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{(l^2+z^2)^{7/2}}\,dz = B^6\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4\varphi}{\Delta^7}\,d\varphi = \frac{B^2}{5k}\cdot\frac{dI_2}{dk} =$$

$$= \frac{-B^6}{15k^2(1-k^2)^3}\left\{(2-7k^2-3k^4)E - 2(1-4k^2+3k^4)K\right\},$$

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{z^2\sqrt{1+B^2z^2}}{(l^2+z^2)^{7/2}}dz = B^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^7}d\varphi = I_2 - \frac{1-k^2}{B^2}I_4$$

$$I_6 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{z^2(l^2+z^2)^{9/2}}dz - \frac{1}{\varepsilon l^9}\right\} = [I_3 - I_7]\frac{B^2}{1-k^2},$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{[l^2+z^2]^{9/2}}dz = \frac{B^2}{7k}\cdot\frac{dI_4}{dk} =$$

$$= \frac{-B^8}{105k^6(1-k^2)^4}\left\{(8-33k^2+58k^4+15k^6)E - (8-37k^2+74k^4-45k^6)K\right\},$$

$$I_8 = \int_0^\infty \frac{z^2\sqrt{1+B^2z^2}}{(l^2+z^2)^{9/2}}dz = B^6\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^9}d\varphi = I_4 - \frac{1-k^2}{B^2}I_7$$

$$I = \int_0^\infty \frac{z^4\sqrt{1+B^2z^2}}{(l^2+z^2)^{9/2}}dz = B^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^9}d\varphi = I_5 - \frac{1-k^2}{B^2}I_8$$

$$I_{10} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{\sqrt{1+B^2z^2}}{z^4(l^2+z^2)^{9/2}}dz - \frac{}{3\varepsilon^3 l^9} + \frac{-B^2l^2}{2\varepsilon l^{11}}\right\} = l$$

$$= B^{12}\left\{\frac{3k^4+2+k^2+56}{3(1-k^2)^2}J_1 + \frac{8+2k^2}{(1+k^2)^2}J_2\right\}$$

$$J_1 = \frac{I_7}{B^8k^4} - \frac{2I_4}{B^6k^6} + \frac{3I_2}{B^4k^8} - \frac{5-k^2}{k^{10}(1-k^2)}E + \frac{5}{k^{10}}K$$

$$J_2 = \frac{I_4}{B^6k^6} - \frac{3I_2}{B^4l^8} + \frac{29-9k^2-2k^4}{3k^{10}(1-k^2)}E - \frac{29+k^2}{3k^{10}(1-k^2)}K.$$

Prin E şi K s-au notat integralele eliptice de prima şi a doua speţă. Pentru calcul s-au făcut următoarele schimbări de variabile

$$x = iz \text{ şi } Bz = \operatorname{ctg}\varphi$$

şi s-au introdus notaţiile

$$\Delta = (1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2},\quad k^2 = 1-B^2l^2.$$

Constantele A_{ij} şi C_{ij} care apar în U_{n-1} se determină din sistemele de ecuaţii (14), (15), (16) şi (17). Se obţine astfel:

— pentru $n = 1$

$$C_{10} = -\frac{2\alpha_0 U_\infty}{\pi}; \tag{18}$$

— pentru $n = 2$

$$\begin{aligned} A_{11} &= -2\,\frac{\alpha_{10}\,U\infty}{\pi}, \\ C_{11} &= \frac{2}{3}\left(l + \frac{I_1}{I_2}\,l^3\right)\frac{\alpha_{10}\,U\infty}{\pi}; \end{aligned} \tag{19}$$

— pentru $n = 3$

$$A_{12} = -4\,\frac{\alpha_{20}\,U\infty}{\pi}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = &\left\{50 + 6\,B^2 l^2 + 4\,(7 - B^2 l^2)\frac{I_4}{I_5}\,l^2 + 8\,\frac{I_3}{I_5}\,l^4\right\}\frac{l}{15}\,\frac{\alpha_{20}\,U\infty}{\pi} + \\ &+ \left\{3 - 2\,\frac{I_4}{I_5}\,l^2\right\}\frac{4l^3}{15}\,\frac{\alpha_{02}\,U\infty}{\pi}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} C_{32} = &-\left\{20 + 8\,B^2 l^2 + 2\,(7 - B^2 l^2)\,\frac{I_4}{I_5}\,l^2 + 4\,\frac{I_3}{I_5}\,l^4\right\}\frac{1}{15\cdot l}\,\frac{\alpha_{20}\,U\infty}{\pi} - \\ &- \left\{4 - \frac{I_4}{I_5}\,l^2\right\}\frac{4l}{15}\,\frac{\alpha_{02}\,U\infty}{\pi}; \end{aligned}$$

— pentru $n = 4$

$$\begin{aligned} A_{13} &= -6\,\frac{\alpha_{30}\,U\infty}{\pi}, \\ A_{33} &= -B^2\,\frac{\alpha_{30}\,U\infty}{\pi} - \frac{2}{3}\,\frac{\alpha_{12}\,U\infty}{\pi}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} C_{13} = &\left\{15 - 6\,\frac{I_7 I_8 - I_6 I_9}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^2 + 8\,\frac{I_7^2 - I_6 I_8}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^4\right\}\frac{2\,l^3}{105}\cdot\frac{\alpha_{12}\,U\infty}{\pi} - \\ &- \left\{322 - 15\,B^2 l^2 - 6\,(9 - B^2 l^2)\frac{I_7 I_8 - I_6 I_9}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^2 + 4\left(3\,\frac{I_9 I_{10} - I_6 I_8}{I_8^2 - I_7\,I_9} + \right.\right. \\ &\left.\left. + 2\,(9 - B^2 l^2)\frac{I_7^2 - I_6 I_8}{I_8^2 - I_7 I_9}\right) l^4 + 16\,\frac{I_8 I_{10} - I_6 I_7}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^6\right\}\frac{l}{35}\cdot\frac{\alpha_{30}\,U\infty}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{33} = &-\left\{13 + 8\,\frac{I_7 I_8 - I_6 I_9}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^2 + 6\,\frac{I_7^2 - I_6 I_8}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^4\right\}\frac{2l}{105}\cdot\frac{\alpha_{12}\,U\infty}{\pi} - \\ &- \left\{336 + 13\,B^2 l^2 - 8\,(9 + B^2 l^2) \times \frac{I_7 I_8 - I_6 I_9}{I_8^2 - I_7 I_9}\cdot l^2 + 2\left(8\cdot\frac{I_9 I_{10} - I_6 I_8}{I_8^2 - I_7\,I_9} - \right.\right. \\ &\left.\left. - 3\,(9 - B^2 l^2)\frac{I_7^2 - I_6 I_8}{I_8^2 - I_7 I_9}\right)\cdot l^4 + 12\,\frac{I_8 I_{10} - I_6 I_7}{I_8^2 - I_7 I_9}\,l^6\right\}\frac{1}{35\cdot l}\cdot\frac{\alpha_{30}\,U\infty}{\pi}. \end{aligned}$$

III. CALCULUL FORŢELOR ŞI MOMENTELOR

Determinarea componentei axiale U_{n-1}, permite calculul coeficientului de portanţă C_z (dirijat după axa Ox_3), al coeficientului de rezistenţă C_x (dirijat după axa Ox_1) şi al momentului de ruliu C_m. Este evident că vom avea $C_z = 0$ din cauza distribuţiei antisimetrice a incidenţei. Pentru ceilalţi coeficienţi, în cazul unei mişcări omogene de ordinul n, avem [2]:

$$C_x^{(n)} = -\frac{2}{nl\,U_\infty}\int_{-l}^{l} U_{n-1}\frac{\alpha_{n-1}}{x_1^{n-1}}\,dx = \frac{-4}{nl\,U_\infty}\int_{0}^{l} U_{n-1}\frac{\alpha_{n-1}^{1}}{x_1^{n-1}}\,dx\,;\left(\alpha_{n-1}^{1} = -\,\alpha_{n-1}^{2}\right) \quad (22)$$

$$C_m^{(n)} = \frac{2}{(n+2)\,l^2\,U_\infty}\int_{-l}^{l} xU_{n-1}\,dx = \frac{4}{(n+2)\,l^2\,U_\infty}\int_{0}^{l} U_{n-1}\,xdx \quad (23)$$

de unde

— pentru $n = 1$

$$C_x^{(1)} = -\frac{4}{lU_\infty}\int_0^l \frac{C_{10}\,x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\,\alpha_0\,dx, \quad (24)$$

$$C_m^{(1)} = \frac{4}{3l^2\,U_\infty}\int_0^l \frac{C_{10}\,x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\,xdx\,; \quad (25)$$

— pentru $n = 2$

$$C_x^{(2)} = -\frac{2}{lU_\infty}\int_0^l \left[\frac{C_{11}\,x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_{11}\,x\,\operatorname{argch}\frac{l}{x}\right]\alpha_{10}\,dx, \quad (26)$$

$$C_m^{(2)} = \frac{1}{l^2\,U_\infty}\int_0^l \left[\frac{C_{11}\,x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_{11}\,x\,\operatorname{argch}\frac{l}{x}\right]xdx\,; \quad (27)$$

— pentru $n = 3$

$$C_x^{(3)} = -\frac{4}{3l\,U_\infty}\int_0^l \left[\frac{C_{12}\,x + C_{32}\,x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_{12}\,x\,\operatorname{argch}\frac{l}{x}\right][\alpha_{20} + \alpha_{02}\,x^2]\,dx\,, \quad (28)$$

$$C_m^{(3)} = \frac{4}{7l^2\,U_\infty}\int_0^l \left[\frac{C_{12}\,x + C_{32}\,x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}} + A_{12}\,x\,\operatorname{argch}\frac{l}{x}\right]xdx\,, \quad (29)$$

— pentru $n = 4$

$$C_x^{(4)} = -\frac{1}{lU_\infty}\int_0^l \left[\frac{C_{13}\,x + C_{33}\,x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}} + (A_{13}\,x + \right.$$

$$\left. + A_{33}\,x^3)\operatorname{argch}\frac{l}{x}\right][\alpha_{30} + \alpha_{12}\,x^2]\,dx \quad (30)$$

$$C_m^{(4)} = \frac{2}{3l^2\,U_\infty}\int_0^l \left[\frac{C_{13}\,x + C_{33}\,x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}} + (A_{13}\,x + A_{33}\,x^3)\operatorname{argch}\frac{l}{x}\right]xdx, \quad (31)$$

Prin efectuarea integralelor (24)—(31), obţinem succesiv:
— pentru $n = 1$

$$C_x^{(1)} = -\frac{4\,C_{10}}{U_\infty}\,\alpha_0\,, \tag{32}$$

$$C_m^{(1)} = \frac{\pi}{3\,U_\infty}\,C_{10}\,, \tag{33}$$

— pentru $n = 2$

$$C_x^{(2)} = -\frac{2\,\alpha_{10}}{U_\infty}\,[C_{11} + A_{11}\,l]\,, \tag{34}$$

$$C_m^{(2)} = \frac{\pi}{12\,U_\infty}\,[3\,C_{11} + A_{11}\,l]\,; \tag{35}$$

— pentru $n = 3$

$$\begin{aligned} C_x^{(3)} = -\frac{2}{45\,U_\infty}\{10\,[3\,\alpha_{20} + 2\,\alpha_{02}l^2]\,C_{12} + 4\,[5\,\alpha_{20} + {} \\ 4\,\alpha_{02}\,l^2]\,l^2\,C_{32} + 5\,[6\,\alpha_{20} + \alpha_{02}\,l^2]\,lA_{12}\}\,, \end{aligned} \tag{36}$$

$$C_m^{(3)} = \frac{\pi}{84\,U_\infty}\{12\,C_{12} + 9\,C_{32}\,l^2 + 4\,A_{12}\,l\}\,, \tag{37}$$

— pentru $n = 4$

$$\begin{aligned} C_x^{(4)} = \frac{-1}{90\,U_\infty}\{30\,[3\,\alpha_{30} + 2\,\alpha_{12}\,l^2]\,C_{13} + 12\,[5\,\alpha_{30} + 4\,\alpha_{12}\,l^2]\,l^2\,C_{33} + {} \\ + 15\,[6\,\alpha_{30} + \alpha_{12}\,l^2]\,lA_{13} + [15\,\alpha_{30} + 8\,\alpha_{12}\,l^2]\,l^3\,A_{33}\}\,, \end{aligned} \tag{38}$$

$$C_m^{(4)} = \frac{\pi}{360U_\infty}\{\,60\,C_{13} + 45\,\;C_{33}\,l^2 + 20A_{13}\,l + 9A_{33}\,l^3\,\}\,. \tag{39}$$

IV. GENERALIZAREA EXPRESIEI COEFICIENŢILOR DE REZISTENŢĂ ŞI DE MOMENT

Am văzut mai sus cum se determină viteza axială de perturbaţie în cazul problemei puse, şi am determinat efectiv valorile coeficienţilor de rezistenţă şi de moment, pentru $n = 1, 2, 3, 4$.

Să determinăm acum expresia generală a acestor coeficienţi în funcţie de coeficienţii din expresia vitezei axiale de perturbaţie, pentru cazul general.

Nu vom dezvolta calculele pentru a nu încărca expunerea, şi ne vom mulţumi să dăm direct rezultatele obţinute prin aplicarea formulelor (22) şi (23).

Vom avea astfel

$$C_x = -\frac{4}{nl\,U_\infty}\int_0^l \left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1}\frac{x^{2q+1}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{2q+1}\,x^{2q+1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right]\cdot$$

$$\left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \alpha_{n-2q-1,2q}\,x^{2q}\right] dx =$$

$$C_x = -\frac{4}{nl\,U_\infty}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\ \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\ \sum_{k=0}^{q+j} C_{2q+1}\,\alpha_{n-2j-1,2j}\,C_{q+j}^{k}\,\frac{(-1)^{q+j-k}\,l^{2q+2j+1}}{2q+2j-2k+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\ \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\ \sum_{k=0}^{q+j} A_{2q+1}\,\alpha_{n-2j-1,2j}\,C_{q+j}^{k}\,\frac{(-1)^{q+j-k}\,l^{2q+2j+2}}{2(q+j+1)\,[2(q-j-k)+1]}\right\} \tag{40}$$

$$C_m^{(n)} = \frac{4}{(n+2)l^2U_\infty}\int_0^l\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1}\frac{x^{2(q+1)}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{2q+1}x^{2(q+1)}\operatorname{argch}\quad dx = \right.$$

$$= \frac{\pi}{2(n+2)\,U_\infty}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1}\,\frac{(2+2q)\,!}{2^{2q}\,[(1+q)\,!]^2}\,l^{2q} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{2q+1}\frac{(2+2q)\,!\;l^{2q+1}}{2^2{}_q\,(2_q+3)\,[(1+q)\,!]^2}\right\} \tag{41}$$

Primită la redacție la 22.XII.1958.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОГО КЛАССА ТОНКИХ КРЫЛЬЕВ ПРИ ОДНОРОДНОМ ОБТЕКАНИИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя из общего выражения осевой скорости возмущения в случае однородного обтекания высшего порядка при форсированной антисимметрии вокруг тонкого Δ-образного крыла (5), авторы определяют коэффициенты сопротивления и момента такого крыла (40), (41).

В качестве конкретного применения эти коэффициенты рассчитываются для конических движений первого, второго, третьего и четвертого порядков, с предварительным определением коэффициентов из выражения осевой скорости возмущения.

Работа иллюстрирует способ применения общей теории треугольных крыльев в однородном потоке высшего порядка [1].

LES CARACTÉRISTIQUES AÉRODYNAMIQUES D'UNE CERTAINE CLASSE D'AILES MINCES EN ÉCOULEMENT HOMOGÈNE D'ORDRE SUPÉRIEUR

RÉSUMÉ

En prenant pour point de départ l'expression générale de la vitesse axiale de perturbation dans le cas d'un écoulement homogène d'ordre supérieur, à anti-symétrie forcée, autour d'une aile delta mince (5), les auteurs déterminent les coefficients de résistance et de moment pour une telle aile (40) (41).

Comme application pratique, les auteurs donnent le calcul effectif de ces coefficients pour des mouvements coniques d'ordre $n = 1, 2, 3, 4$, en déterminant au préalable les coefficients de l'expression de la vitesse axiale de perturbation.

Le travail illustre la manière d'appliquer la théorie générale des ailes triangulaires dans un courant homogène d'ordre supérieur [1].

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, M. Ionescu, *Scurgeri conice de ordin superior în jurul aripilor triunghiulare subțiri sau de grosime simetrică (O teorie generală unitară).* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
2. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
3. G. N. Lance, *The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream.* The Aeronautical Quarterly, **5**, Part I (1954).

ASUPRA TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ ÎN SCURGERILE LIBER-MOLECULARE

DE

LUCIAN DUMITRESCU

1. INTRODUCERE

Scopul articolului de față este de a studia transferul de căldură din interiorul corpurilor care se deplasează cu viteze mari în gaze rarefiate. În cele de mai jos se va scoate în evidență faptul că, datorită diferenței însemnate dintre energia primită prin ciocnirile moleculelor gazului în partea din amonte a corpului și energia primită de corp în partea sa aval, prin interiorul corpului ia naștere un flux de căldură, care duce la stabilirea unui cîmp de temperaturi neuniform în corp. Ipoteza unei temperaturi constante pentru întregul corp, acceptată în mod tacit în toate studiile de acest gen pînă în prezent [1], [2], [3], nu este adevărată decît pentru corpuri făcute dintr-un material cu o conductibilitate termică infinită.

În cazurile în care masa de material bun conducător de căldură este redusă, ca de exemplu structurile formate dintr-un înveliș metalic subțire, dedesubtul căruia se află un strat protector izolant (asemenea structuri sînt frecvent utilizate pentru aparate destinate zborului la viteze foarte mari), neuniformitatea de temperatură amintită mai sus poate fi apreciabilă.

De asemenea, studiul transferului de căldură în regim nepermanent, pentru un corp de genul amintit, arată că, în primele minute de la începerea mișcării, iau naștere în pătura metalică a corpului gradienți foarte mari de temperatură ; apoi, în corp se propagă un fel de undă de temperatură, care atenuează neuniformitatea termică și duce pînă la urmă la stabilirea regimului permanent de temperaturi.

2. ECUAȚIILE DE BAZĂ ALE SCURGERILOR LIBER-MOLECULA

Atunci cînd se studiază scurgerea unui gaz rarefiat, nu se mai pot aplica ecuațiile deduse din ipotezele mișcării unui mediu continuu, ci trebuie să se țină seama de proprietățile moleculare ale gazului.

Fie u, v, w, componentele momentane ale vitezei unei molecule, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, componentele vitezei medii a mişcării gazului, U, V, W, componentele vitezelor de agitaţie termică a moleculelor; avem

$$u = \bar{u} + U, \quad v = \bar{v} + V, \quad w = \bar{w} + W, \tag{1}$$

cu

$$\bar{q}^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 \quad \text{şi} \quad \overline{C^2} = \overline{U^2} + \overline{V^2} + \overline{W^2}. \tag{2}$$

În articolul de faţă simbolurile notate cu bară reprezintă valorile medii ale mărimilor respective.

Vom mai nota cu m, masa unei molecule, şi cu n densitatea numerică a gazului (numărul de molecule în unitatea de volum); densitatea ρ va fi atunci

$$\rho = m \cdot n. \tag{3}$$

Din punct de vedere molecular, comportarea unui gaz perfect este determinată, dacă se cunoaşte expresia *funcţiei de distribuţie a vitezelor* $f(x, y, z, u, v, w, t)$ definită după cum urmează: fie dA numărul de molecule cuprinse, la momentul t, în volumul elementar $d\tau = dx\,dy\,dz$ şi avînd vitezele între u şi $u + du$, v şi $v + dv$, w şi $w + dw$ ($d\omega = du\,dv\,dw$). Avem prin definiţie

$$dA = n \cdot f(x, y, z, u, v, w, t) \cdot d\tau \cdot d\omega. \tag{4}$$

Pentru un gaz în repaus, funcţia f ia forma următoare, dedusă de Maxwell:

$$f = \left(\frac{3}{2\pi \overline{C^2}}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{3}{2\overline{C^2}}(U^2 + V^2 + W^2)}. \tag{5}$$

Amintim că prin consideraţii din teorie cinetică, temperatura gazului este legată de viteza de agitaţie moleculară prin relaţia

$$RT = \frac{1}{3}\overline{C^2}. \tag{6}$$

Dacă gazul este suficient de rarefiat, astfel încît liberul parcurs molecular mediu L este de cîteva ori mai mare decît dimensiunea corpului, l (sau, cu alte cuvinte, pentru numere Kundsen mai mari decît aproximativ 2), atunci moleculele reflectate de suprafaţa corpului nu mai interacţionează în mod sensibil cu moleculele incidente, şi astfel funcţia de distribuţie a acestora din urmă rămîne maxwelliană; acest tip de scurgere, denumit *scurgere liber-moleculară* [1], va fi studiat în cele ce urmează.

Să considerăm un element de arie pe suprafaţa unui corp supus unei scurgeri moleculare cu viteza medie $\bar{q}$, tangenta la suprafaţă făcînd unghiul θ cu viteza (fig. 1).

Se introduc următoarele notații :

$$S = \frac{\bar{q}}{C_m} = \sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\, M, \tag{7}$$

$$S_v = S \sin \theta. \tag{8}$$

Aici, S este o viteză adimensională, jucînd, în teoria scurgerilor liber-moleculare, un rol analog numărului Mach, iar C_m este viteza de agitație cea mai probabilă

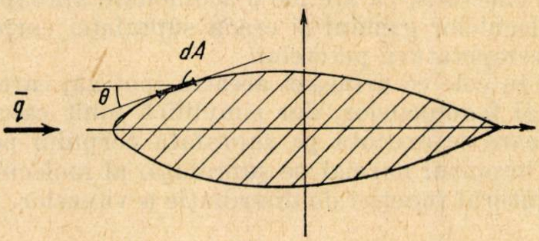


Fig. 1

$$C_m = \sqrt{\frac{2\,\overline{C^2}}{3}} = \sqrt{2RT}. \tag{9}$$

Numărul N_i de molecule care lovesc unitatea de suprafață din corp în unitatea de timp poate fi ușor calculat, cu ajutorul funcției de distribuție a vitezelor

$$N_i = n_i \left(\frac{3}{2\pi\overline{C^2}}\right)^{3/2} \int_0^\infty u e^{-\frac{3U^2}{\overline{C^2}}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3V^2}{\overline{C^2}}} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3W^2}{\overline{C^2}}} dw =$$

$$= n_i \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}}\, [e^{-S_v^2} + S_v \sqrt{\pi}\,(1 + erf\, S_v)]. \tag{10}$$

În relația de mai sus, n_i și T_i reprezintă densitatea numerică respectiv temperatura gazului neperturbat ; simbolul *erf* desemnează funcția erorilor.

Reflecția moleculelor de la suprafața corpului are loc difuz ; cu alte cuvinte, moleculele reflectate nu posedă o viteză medie ci numai viteze de agitație termică distribuite maxwellian corespunzînd unei anumite temperaturi T_r. Numărul N_r al moleculelor reflectate trebuie să fie egal cu numărul moleculelor incidente, N_i

$$N_r = n_r \sqrt{\frac{RT_r}{2\pi}} = N_i\,. \tag{11}$$

Această relație determină densitatea numerică n_r a fluxului de molecule reflectate, dacă se cunoaște temperatura acestora, T_r

$$n_r = n_i \sqrt{\frac{T_i}{T_r}} \cdot [e^{-S_v^2} + S_v \sqrt{\pi}\,(1 + erf\, S_v)]. \tag{12}$$

Pentru majoritatea materialelor utilizate în construcția avioanelor și rachetelor, s-a constatat că are loc o acomodare aproape completă între temperatura moleculelor gazului și cea a suprafeței corpului, astfel încît T_r are valoarea temperaturii peretelui.

Vom folosi în cele ce urmează această ipoteză, care nu schimbă aspectul calitativ al fenomenelor, dar simplifică mult calculele.

Presiunea care se execută pe suprafața corpului poate fi calculată acum, integrînd impulsul normal pe suprafață, al moleculelor incidente și emergente, cu ajutorul funcției de distribuție a vitezelor. Se obține în cele din urmă

$$\begin{aligned} C_v = \sin^2\theta \Bigg[\frac{1}{S_v}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\,S_v}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right) e^{-S_v^2} + \Bigg(1 + \frac{1}{2\,S_v^2} + \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{2S_v}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\Bigg)(1 + erf\, S_v)\Bigg] \end{aligned} \tag{13}$$

și o formulă analoagă pentru forțele tangențiale care acționează asupra corpului.

De asemenea, se poate calcula energia primită de unitatea de arie a corpului din partea moleculelor incidente

$$E_i = \frac{1}{2} m\ N_i\ RT_i \left[2\ S^2 + 4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right], \tag{14}$$

unde

$$\varphi\,(S, \theta) = \frac{e^{-S_v^2}}{S_v \sqrt{\pi}\,(1 + erf\, S_v)}, \tag{15}$$

precum și energia cedată de corp moleculelor reflectate, pe unitatea de arie

$$E_r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, mn_i\, RT_r \sqrt{RT_i}\ [e^{-S_v^2} + S_v \sqrt{\pi}\,(1 + erf\, S_v)]. \tag{16}$$

Formulele prezentate mai sus sînt fundamentale pentru studiul scurgerilor liber-moleculare.

3. SCURGEREA LIBER-MOLECULARĂ ÎN JURUL CORPURILOR DE CONDUCTIBILITATE INFINITĂ

Aşa cum am mai remarcat, în toate studiile precedente s-a presupus că temperatura corpului este aceeaşi în toate punctele sale, ceea ce corespunde din punct de vedere fizic la admiterea unei valori infinite pentru conductibilitatea termică a materialului respectiv.

În acest caz, şi adoptînd, pentru simplificare, valoarea 1 pentru coeficientul de acomodare, temperatura T_r a moleculelor reflectate (egală cu temperatura corpului), poate fi calculată scriind bilanţul de energie pentru corp

$$\int_A (E_i - E_r)\, dA + \varepsilon B\, (T_e^4 - T_r^4)\, A = Q\,. \tag{17}$$

În ecuaţia de mai sus, A este aria totală a corpului în contact cu scurgerea, ε coeficientul de emisivitate, B constanta lui Stefan-Bolzmann, T_e temperatura suprafeţelor înconjurătoare care radiază energie către corp, iar Q debitul de energie internă din cilindru, datorit de pildă unui curent electric sau circulaţiei unui fluid de răcire.

Introducînd în (13), valoarea lui T_r, determinată cu ajutorul ecuaţiei (15) se poate calcula valoarea rezistenţei la înaintare a unui cilindru în scurgere liber - moleculară [2].

4. ECUAŢIA GENERALĂ A TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ

În cazul real, al unui corp avînd o conductibilitate termică λ finită, relaţiile de mai sus nu mai sînt aplicabile, şi trebuie să se ia în consideraţie fluxul intern de căldură prin corp. Fie T temperatura într-un punct al corpului; după stabilirea regimului staţionar de transmisie a căldurii, T va satisface ecuaţiei lui Laplace

$$\Delta T = 0\,, \tag{18}$$

cu următoarea condiţie la limită (se va nota că, pe suprafaţa corpului, $T = T_r$)

$$a\,(\theta)\; T_r + \varepsilon B T_r^4 + \lambda \frac{d T_r}{dn} + b\,(\theta) = 0\,, \tag{19}$$

cu

$$a\,(\theta) = \frac{E_r}{T_r}\,, \tag{20}$$

$$b\,(\theta) = -\,E_i - \varepsilon B T_e^4\,. \tag{21}$$

Relaţiile de mai sus determină fluxul intern de căldură prin corp; acesta este legat de scurgerea externă de fluid prin intermediul coeficien-

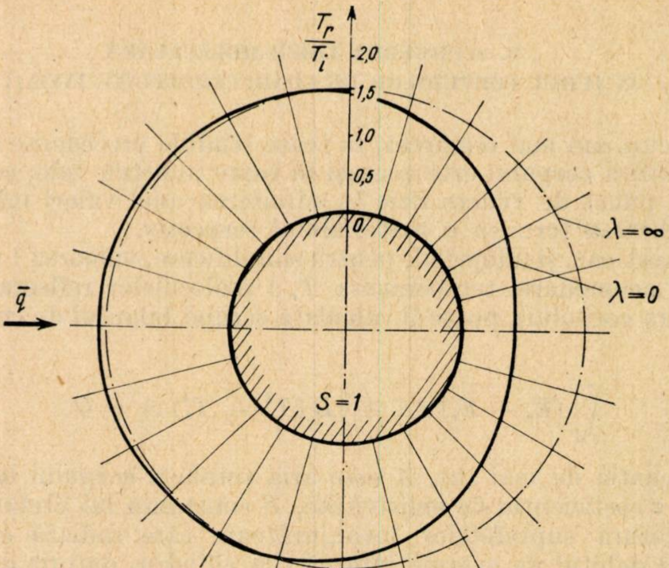

$\frac{T_r}{T_i}$
2,0
1,5
1,0
0,5
0
$\lambda=\infty$
$\lambda=0$
$\bar{q}$
S=1

Fig. 2

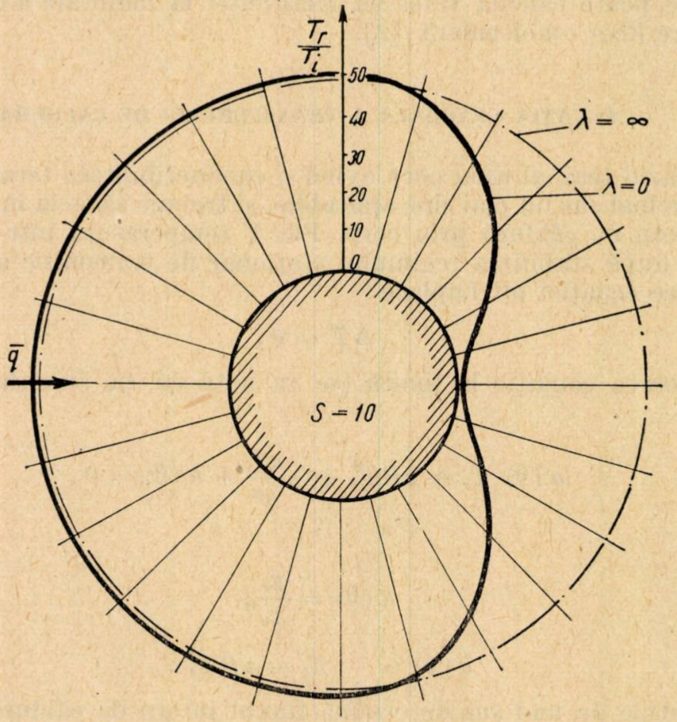

$\frac{T_r}{T_i}$
50
40
30
20
10
0
$\lambda=\infty$
$\lambda=0$
$\bar{q}$
S=10

Fig. 3

ților $a(\theta)$ și $b(\theta)$, care sînt funcții ce depind de caracteristicile scurgerii de fluid (T_i, n_i, și S, care se presupun a fi date) și de geometria corpului (prin intermediul unghiului θ fig. 1).

La rîndul său, fluxul intern de căldură determină caracteristicile aerodinamice ale scurgerii interioare, prin faptul că oferă valorile temperaturii $T_r(\theta)$, care intervin în ecuațiile care dau distribuția presiunilor pe corp sau coeficienții aerodinamici.

Prin aceasta, s-a scos în evidență legătura dintre două feluri de scurgeri : cea exterioară, de gaz și cea internă, de căldură.

Formulele de mai sus vor fi aplicate în cele ce urmează în cîteva cazuri simple.

5. UN CAZ LIMITĂ : SCURGEREA ÎN JURUL UNUI CILINDRU IZOLANT

În scopul de a pune în evidență gradul de neuniformitate a temperaturii care poate lua naștere pe suprafața corpurilor în scurgere liber-moleculară, vom considera un caz limită simplu, presupunînd nulă conductibilitatea termică a corpului. Pentru a ușura și mai mult calculele, vom neglija transferul de căldură prin radiație ; în consecință, relația care determină temperatura T_r într-un punct al suprafeței corpului este $E_i = E_r$, ceea ce devine pînă la urmă

$$\frac{T_r}{T_i} = \frac{1}{4}\left(2\,S^2 + 4 + \frac{1}{\varphi + 1}\right). \tag{22}$$

În figurile 2 și 3 s-a reprezentat distribuția temperaturilor la suprafața unui cilindru izolant, pentru $S = 1$ și $S = 10$. Raportul dintre temperaturile maximă și minimă este egal respectiv cu 2,5 și 100 ; la viteze mai mari acest raport crește foarte rapid.

Cunoscînd distribuția temperaturilor, se poate calcula coeficientul de rezistență la înaintare al cilindrului. Calcule numerice efectuate pentru cîteva cazuri, au arătat existența unor diferențe mergînd pînă la 20% față de coeficientul de rezistență al unui cilindru perfect conductor.

6. ECUAȚIA TEMPERATURILOR DE CĂLDURĂ PENTRU CORPURI CU PEREȚI SUBȚIRI

Teoria prezentată mai sus este foarte greu de aplicat în cazul general ; de aceea, în scopul de a scoate în evidență unele aspecte fizice ale comportării corpurilor în mișcare prin gaze rarefiate, vom studia mai jos un caz simplificat, al pereților conductibili subțiri la care temperatura este constantă într-o secțiune. Radiația va fi de asemenea neglijată.

Fie δ grosimea unui asemenea strat bidimensional (fig. 4) ecuația transferului de căldură, care se stabilește prin considerarea echilibrului termic al unui element dx al stratului, are forma următoare :

$$\lambda\delta\frac{d^2T_r}{dx^2} + \lambda\frac{d\delta}{dx}\cdot\frac{dT_r}{dx} - 2\varkappa m\,N_i(\theta)\cdot R\cdot T_r + \varkappa E_i(\theta) = 0. \tag{23}$$

Valoarea constantei $\varkappa$ se ia 1 sau 2, după cum peretele este în contact cu fluidul pe una sau ambele sale suprafețe (în primul caz, se presupune că stratul învelește un corp izolant, sau că între el și corp se mai află un strat izolant de protecție).

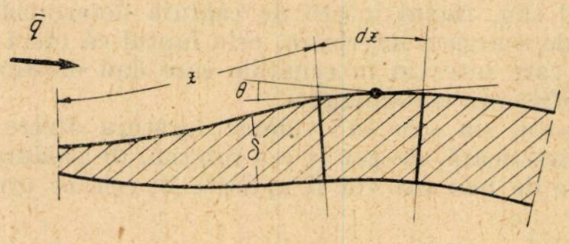


Fig. 4

Mărimile N_i și E_i sînt funcții de caracteristicile scurgerii de gaz (n_i, T_i și S) și de orientarea suprafeței față de mișcare, θ.

7. CAZUL UNUI PROFIL AERODINAMIC ROMBIC

Ecuația (23) poate fi aplicată imediat la cazul unui profil aerodinamic rombic subțire, avînd un unghi la vîrf α, confecționat dintr-un material cu conductibilitatea termică λ (fig. 5). Pentru partea anterioară a profilului (23) devine

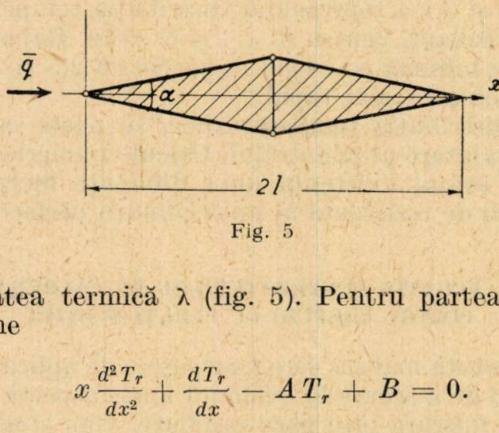


Fig. 5

$$x \frac{d^2 T_r}{dx^2} + \frac{d T_r}{dx} - A T_r + B = 0. \tag{24}$$

Constantele A și B au următoarele valori :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\, m\, N_i(\alpha) . R}{\alpha \lambda} \\ B &= \frac{m\, N_i(\alpha) \cdot R T_i \left[2S^2 + 4 + \dfrac{1}{\varphi(\alpha) + 1} \right]}{\alpha \lambda}. \end{aligned} \tag{25}$$

Ecuația (24) este de tip Bessel și admite o soluție de forma

$$T_r = T_0 + M \cdot I_0(2\sqrt{ax}) + N \cdot K_0(2\sqrt{ax}), \tag{26}$$

cu

$$T_0 = \frac{B}{A}, \tag{27}$$

unde I_0 și K_0 sînt funcțiile Bessel modificate de speța întîi și a doua și de ordin zero.

Considerații similare pentru partea din spate a profilului duc la următoarea formulă pentru variația temperaturii de-a lungul axei Ox:

$$T'_r = T'_0 + M' \cdot I_0(2\sqrt{a(2l - x)}) + N' \cdot K_0(2\sqrt{a(2l - x)}). \tag{28}$$

Întrucît funcția K_0 devine infinită pentru $x = 0$, pentru determinarea valorilor constantelor N și N' este necesar să se facă un studiu mai amănunțit al transferului de căldură în vecinătatea vîrfurilor profilurilor. În acest scop, s-a presupus că vîrfurile profilului sînt tăiate, la o distanță x_0 de la vîrf; scriind ecuația transferului de căldură pentru acest caz și făcînd în soluție ca x_0 să tindă către zero, se constată că trebuie să se aleagă $N = N' = 0$.

Constantele rămase, M și M' se determină din următoarele condiții de racordare:

$$x = l, \quad T_r = T'_r, \tag{29}$$

$$x = l, \quad \frac{dT_r}{dx} = \frac{dT'_r}{dx}. \tag{30}$$

Pe baza teoriei prezentate s-au efectuat cîteva calcule numerice, care au arătat existența unei neuniformități de temperatură în profil, depinzînd de valoarea conductibilității termice a materialului din care este confecționat profilul.

8. TRANSFERUL DE CĂLDURĂ ÎN REGIM NEPERMANENT PENTRU UN CILINDRU CU ÎNVELIȘ SUBȚIRE

Vom considera acum scurgerea liber-moleculară în jurul unui cilindru, acoperit cu un înveliș metalic subțire, dedesubtul căruia se află un strat izolant de protecție (fig. 6).

Presupunînd că mișcarea începe brusc în momentul $t = 0$, vom determina fluxul nestaționar de căldură prin învelișul metalic al cilindrului, pînă la stabilirea unui regim staționar de temperaturi.

Prin considerații analoage celor de la punctul 6 al acestui articol, se poate scrie ecuația temperaturii peretelui $T(\theta, t)$

$$\frac{\partial^2 T_r}{\partial \theta^2} - L \frac{\partial T_r}{\partial t} - M(\theta) \cdot T_r + N(\theta) = 0. \qquad (31)$$

În ecuația de mai sus s-au făcut următoarele notații :

$$L = \frac{CR^2}{\lambda}, \qquad (32)$$

$$M(\theta) = \frac{E_r}{T_r} \cdot \frac{R^2}{\lambda\delta}, \qquad (33)$$

$$N(\theta) = \frac{E_i R^2}{\lambda\delta}, \qquad (34)$$

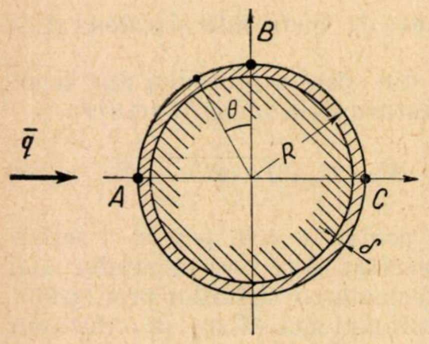


Fig. 6

unde C este capacitatea calorică a materialului din care este confecționat învelișul (căldura specifică raportată la volum) și R raza cilindrului. După cum se poate vedea din (16), raportul E_r/T_r este o funcție numai de θ (presupunînd că parametrii scurgerii exterioare sînt dați) ; în consecință, M și N sînt funcții numai de θ.

O soluție a ecuației (31) poate fi dedusă în modul următor : în primul rînd, se dezvoltă în serii Fourier coeficienții M și N

$$M(\theta) = M_0 + \sum_{p=1}^{\infty} M_{2p-1} \sin(2p-1)\,\theta + \sum_{p=1}^{\infty} M_{2p} \cos 2p\,\theta, \qquad (35)$$

$$N(\theta) = N_0 + \sum_{p=1}^{\infty} N_{2p-1} \sin(2p-1)\,\theta + \sum_{p=1}^{\infty} N_{2p} \cos 2p\,\theta. \qquad (36)$$

Vom încerca apoi să satisfacem ecuația (31) cu o dezvoltare analoagă pentru T_r, dar la care coeficienții sînt funcții de timp

$$T_r(t, \theta) = T_0(t) + \sum_{p=1}^{\infty} T_{2p-1}(t) \cdot \sin(2p-1)\,\theta + \sum_{p=1}^{\infty} T_{2p}(t) \cdot \cos 2p\,\theta. \qquad (37)$$

Introducînd (35), (36) și (37) în (31), și identificînd termenii, se obține un sistem infinit de ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi, pentru mărimile $T_n(t)$

$$L \frac{dT_n}{dt} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(t) = N_n, \qquad (38)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Soluția acestui sistem are forma următoare :

$$T \qquad + \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} e^{-a_m t}, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \infty). \tag{39}$$

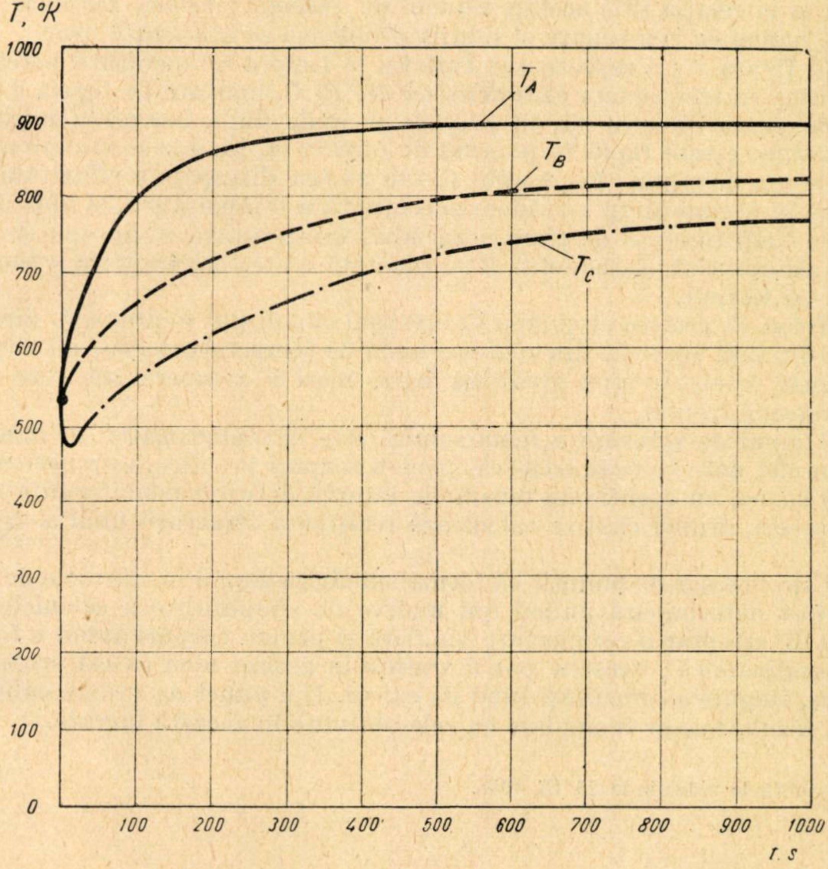


Fig. 7

Constantele T_{n0} și C_{nm} se determină din următoarea condiție inițială :

$$T_r(t = 0) = \Theta = \text{const}. \tag{40}$$

Dacă se păstrează numai un număr finit de termeni în dezvoltările (35), (36) și (37), se poate obține o soluție aproximativă, procedînd în modul indicat.

În scopul de a pune în evidență comportarea calitativă a fenomenului, s-au efectuat calcule numerice pentru un cilindru de diametru 1 m, învelit cu un perete de 1 mm grosime, cu conductibilitatea $\lambda = 0{,}1$ kg/m°s care se deplasează în atmosferă la o altitudine de 150 km (corespunzînd unui număr Knudsen de aproximativ 2) cu o viteză $S = 1$. Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiilor $M(\theta)$ şi $N(\theta)$, efectuată grafic, cu ajutorul unui analizor armonic, a arătat că este suficient să se păstreze doar primii trei termeni ai dezvoltării, în speţă M_0, M_1, şi M_2, respectiv N_0, N_1 şi N_2, pentru a obţine un rezultat suficient de exact. Ca urmare, s-a reţinut şi în relaţia (37) acelaşi număr de termeni; astfel, sistemul (38) rămîne numai cu trei ecuaţii şi soluţia problemei se calculează uşor.

În figura 7 s-a reprezentat variaţia în timp a temperaturii peretelui cilindrului, în trei puncte caracteristice A, B, C, indicate pe figura 6.

Se poate observa că, în primele secunde după începerea mişcării, temperatura creşte rapid în punctul de impact A, pînă la o valoare apropiată de cea de regim; în punctul C, din partea din spate a cilindrului, se produce în acelaşi timp o scădere accentuată a temperaturii, şi abia după trecerea unui interval de timp apreciabil, temperatura se apropie de valoarea asimptotică. În punctul B se constată o creştere treptată a temperaturii cu timpul.

Totul se petrece ca şi cînd în învelişul cilindrului se propagă, dinspre partea din faţă spre cea din spate, o undă de temperatură care dă naştere în primele momente unor gradienţi foarte mari de temperatură, care apoi se atenuează treptat.

Timpul de relaxare a fenomenului este de aproximativ 10 minute, în exemplul dat; se vede astfel că, pentru scopuri practice, este necesar să se ţină seama cu atenţie de tensiunile interne datorite neuniformităţii de temperaturi, atunci cînd se calculează rezistenţa structurii unui astfel de corp.

Este necesar de amintit că forma cilindrică aleasă în calculele de mai sus a fost determinată numai din motive de simplificare a calculelor, şi că este de aşteptat o comportare similară şi pentru corpuri avînd o formă mai aerodinamică; acestea pot fi tratate în acelaşi mod ca cel prezentat mai sus, singurele dificultăţi fiind de calcul. Din punct de vedere calitativ totuşi, rezultatele ar fi similare cu cele obţinute în această lucrare.

Primită la redacţie la 23 IX 1958.

О ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА ПРИ ТЕЧЕНИИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается обтекание разреженным газом (при числах Кнудсена, больших чем 2) тел, изготовленных из материалов, имеющих конечную теплопроводность λ, в свободно молекулярном режиме. Целью этой статьи является выявление существования переноса тепла через внутренность тела, вызванного наружным течением газа, что порождает неравномерность температур в теле; в свою очередь внутренний тепловой

поток влияет на распределение давлений, оказываемых наружным течением тем, что вызывает распределение температур на поверхности тела.

Устанавливаются уравнения температуры внутри тела (18), (19) и дается их применение в некоторых простых случаях.

Первый простой предельный случай изолирующего цилиндра ($\lambda=0$) позволяет установить существование очень значительной разности температур на поверхности (уравнение (22) и рис. 2 и 3). Эти отклонения приводят к расхождению значений коэффициента лобового сопротивления до 20%.

В случае тонких теплопроводных стенок общее уравнение упрощается (23) и его можно применить в случае ромбического аэродинамического профиля (рис. 5). Распределение температур вдоль хорды профиля дается уравнениями (26) и (28).

В заключение исследуется перенос тепла при неустановившемся режиме, внутри тонкой металлической оболочки, покрывающей предохранительный изоляционный слой на цилиндре (рис.6). Уравнение (31) решается, допуская разложение (37) для функции T (t, θ), что приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений (38) с решениями (39) и начальным условием (40). Дается численное приближенное решение, и на рис. 7 представлено изменение температуры в трех характеристических точках A, B, C (рис. 6). Отмечается, что в первые моменты в начале движения в оболочке возникают весьма значительные температурные градиенты, затухающие впоследствии благодаря распространению так называемой ,,тепловой волны'' в течение довольно продолжительного периода релаксации. Эти неравномерности температуры могут иметь практическое значение, вследствие влияния, оказываемого на прочность таких структур.

SUR LE TRANSFERT DE CHALEUR DANS L'ÉCOULEMENT EN RÉGIME DE MOLÉCULES LIBRES

RÉSUMÉ

On considère l'écoulement en régime de molécules libres d'un gaz raréfié (nombre de Knudsen supérieur à 2) autour des corps faits d'un matériel de conductibilité thermique finie λ. Le but de l'article est de mettre en évidence l'existence d'un écoulement de chaleur à l'intérieur de ces corps, provoqué par l'écoulement extérieur du gaz, ce qui donne lieu à une répartition non uniforme des températures ; en revanche, le flux intérieur de la chaleur influe sur la valeur des pressions exercées par le fluide extérieur sur le corps, en déterminant la distribution des températures à sa surface.

On a établi les équations de la température à l'intérieur du corps, (18), (19), et on les a appliquées à plusieurs cas simples.

Un premier cas limite simple, celui d'un cylindre isolant ($\lambda = 0$), permet de constater des écarts très importants de température sur la surface (fig. 2 et 3 et relation 22). Ces différences donnent lieu à des écarts pour les valeurs du coefficient de résistance à l'avancement, jusqu'à 20%.

Dans le cas des parois conductibles minces, l'équation générale prend une forme simplifiée (23) et a pu être apliquée au cas d'un profil aérodynamique rhomboïdal (fig. 5). La distribution des températures le long de la corde du profil est donnée par les relations (26) et (28).

Enfin, on étudie le transfert de la chaleur en régime non permanent, à l'intérieur d'un revêtement métallique mince, recouvrant une couche isolante de protection sur un cylindre (fig. 6). L'équation (31) est résolue en admettant le développement (37) pour la fonction $T(\theta, t)$, ce qui conduit à la condition initiale (40). Une solution approximative a été calculée et la variation de la température au cours du temps, en trois points caractéristiques A, B, C (fig. 6), est représentée dans la figure 7. On voit que dans les premiers moments du mouvement, le revêtement est sujet à de très forts gradients de température, qui sont ensuite atténués par la propagation d'une «onde thermique», pendant un temps de relaxation assez important. Ces non-uniformités thermiques peuvent, en pratique, influencer la résistance de telles structures.

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. TSIEN, *Superaerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases*. J. of. Aeronautical Sciences, *13*, 653 (1946).
2. J. R. STALDER, D. JUKOFF, *Heat Transfer to Bodies Travelling at High Speed in the Upper Atmosphere*. NACA Report, *1944* (1949).
3. G. N. PATTERSON, *Molecular Flow of Gases*. New York, 159 (1956).

ANTRENAREA PNEUMATICĂ A ROTOARELOR DE ELICOPTER ÎN ZBORUL LA PUNCT FIX

DE

ŞT. ANDREI

1. INTRODUCERE

Elementele constitutive ale antrenării pneumatice a rotorului de elicopter sînt :

— generatorul de gaze,

— canalizaţiile de aducerea gazelor la palele rotorului,

— canalizaţiile de gaze din palele rotorului cu sau fără prelevări de gaze pentru influenţarea stratului limită, a circulaţiei din jurul profilului palei, sau alte scopuri,

— ajutajele de reacţie (ejecţie), cu sau fără camere de ardere (post combustie).

1.1. Schema generală a circuitelor instalaţiei este arătată în figura 1, din care rezultă că există întotdeauna, cel puţin iniţial, două fluxuri de gaze :

— primul, fluxul rece (relativ) sau fluxul principal, sau fluxul compresor, în care creşterea energiei gazului (de obicei aer curat) se face iniţial, în contul cheltuielii unei energii mecanice furnizate din exterior compresorului (rotativ sau volumetric) ;

— al doilea, fluxul cald, sau fluxul secundar, sau fluxul motor, în care are loc aportul de energie termică în urma arderii combustibilului în motorul (rotaţional sau voltmetric), cu ardere internă.

Motorul este cuplat direct cu compresorul căruia îi furnizează integral cota de energie termică a combustibilului transformată în energie mecanică, restul energiei rămasă netransformată (sub formă sensibilă) fiind transferată, de regulă, total sau parţial, fluxului principal de gaze (în avalul şi în amontele compresorului sau numai în aval sau amonte).

1.2. În fond, generatorul de gaze este un motor compensat, cu dublu flux, în care energia termică furnizată fluxului motor prin arderea unei cantități de combustibil, se regăsește în energia gazelor la ieșirea din generator (într-un flux unic dacă a avut loc amestecul sau în cele două fluxuri dacă acesta nu a avut loc) mai puțin pierderile energetice (energia nerecuperabilă), survenite în cursul transformărilor ce au avut loc în interiorul generatorului de gaze.

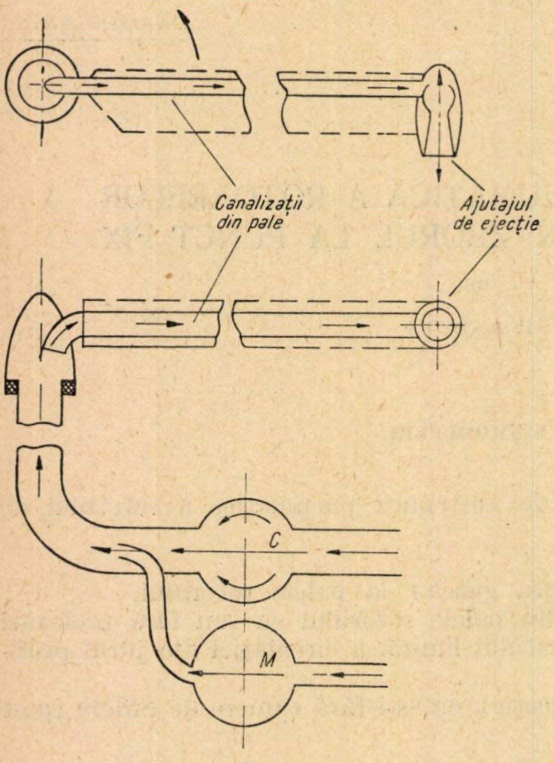


Fig. 1

Valoarea acestor pierderi depinde de modul de organizare al generatorului de gaze.

1.3. Din acest punct de vedere se știe că au fost și pot fi utilizate următoarele combinații :

1.3.1. Motor cu piston (simplu, supraalimentat sau compound) antrenînd un compresor rotațional, cu recuperarea parțială a energiei calorice de răcire a motorului și energiei gazelor de evacuare (generator de gaze moto sau mototurbocompresor).

1.3.2. Turbină cu gaze (cu ciclu simplu sau cu recuperări de căldură) antrenînd un compresor rotațional, cu recuperarea parțială a energiei calorice de răcire a turbinei și a energiei gazelor de evacuare (generator de gaze turbocompresor cu dublu flux echipresiune).

1.3.3. Motocompresor volumetric cu pistoane libere (cap în cap, gen Pescara) cu recuperarea parțială a energiei calorice de răcire și a energiei gazelor de evacuare.

1.4. Energia gazelor furnizate de generator (sub forma unui flux unic dacă a avut loc amestecul în generator sau două fluxuri separate în caz contrar) este utilizată în continuare pentru antrenarea rotorului elicopterului într-un fel de turbină liberă cu reacțiune directă.

Cuplul forțelor de reacție ale jeturilor de gaze trebuie să echilibreze în ultimă instanță cuplul forțelor aerodinamice externe activînd asupra palelor rotorului elicopterului și cuplul forțelor lui Coriolis născute din mișcarea relativă a gazelor în interiorul palelor.

Energia gazelor furnizate de generator se regăsește în energia de propulsie a jeturilor, mai puțin pierderile energetice survenite în scurgerea gazelor prin palele rotorului și în jet.

Aceste pierderi depind de caracteristicile gazelor furnizate de generator (debit, presiune, temperatură), de organizarea scurgerii prin palele rotorului, cît și de caracteristicile geometrice și cinematice ale rotorului (finalmente diametrul, soliditatea și viteza periferică, pentru un profil dat).

1.5. Cerințele în alegerea acestor parametri în vederea reducerii la maximum a pierderilor, sînt în general contradictorii cu acelea pentru obținerea unei eficiențe maxime din punctul de vedere al aerodinamicii externe.

În consecință, trebuie aleasă, de la caz la caz, soluția de compromis optim între cerințele privind aerotermodinamica scurgerilor interne și cele privind aerodinamica externă, pentru a se ajunge la eficiența maximă de ansamblu.

În prezenta expunere se va trata problema aerotermodinamică internă, indicîndu-se căile pentru obținerea soluțiilor celor mai favorabile sau rezultatele pentru o soluție dată, privite prin prisma bilanțului energetic și mărimilor caracteristice ale antrenării pneumatice.

2. NOTAȚII

2.1. Simboluri pentru mărimi caracteristice :

P_u = putere utilă de antrenare a rotorului, $\left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)$
P_c = „ a combustibilului ars, „
P_p = „ propulsivă brută la rotor, „
P_{co} = „ absorbită datorită forțelor lui Coriolis (travaliul forțelor lui Coriolis), „
P_e = „ exercitată, „
P_{ad} = „ adiabatică a generatorului de gaze, „
H_c = putere calorifică a combustibilului, $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right)$
F_{jt} = forța de reacție brută totală a jeturilor, (kg)
Γ_t = cuplul util de antrenare al rotorului, (kgm)
$\mathcal{P}_g$ = pierdere globală de energie în sistemul de antrenare al rotorului, $\left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)$
$\mathcal{P}_{ec}$ = pierdere de energie cinetică în jet, „
$\mathcal{P}_{rr}$ = pierdere de recomprimare în rotor (P_{co}) „
$\mathcal{P}_{ir}$ = pierdere internă în rotor, „
$\mathcal{P}_{rt}$ = $\mathcal{P}_{ec} + \mathcal{P}_{rr} + \mathcal{P}_{ir}$ = pierderile rotorului turbină, „
$\mathcal{P}_{gg}$ = „ generatorului de gaze, „
η_g = randamentul global (aerotermodinamic general) al instalației de antrenare a rotorului,

η_p = randamentul de propulsie al rotorului,

η_e = randamentul extern al rotorului (pierderi de recomprimare în rotor),

η_t = randamentul termic al instalaţiei de antrenare,

η_i = randamentul intern al rotorului,

η_{ad} = randamentul adiabatic al generatorului de gaze,

η_{cc} = ,, circuitului compresor,

η_m = ,, motorului,

C = consum specific de combustibil, $\left(\frac{\text{kg}}{\text{CPh}}\right)$

Q_m = debitul de gaze al motorului, $\left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)$

Q_c = ,, ,, al compresorului, ,,

Q_p = ,, ,, în palele rotorului, ,,

q_m = consumul unitar de combustibil al motorului, ,,

q_p = ,, ,, ,, în circuitul palei (post combustie), ,,

V_j = viteza relativă a gazelor la ieşirea din ajutajul de ejecţie, (m/s)

V_d = viteza de detentă a gazelor pînă la presiunea ambiantă, ,,

U_r = viteza periferică într-un punct al palei rotorului, ,,

ω = viteza de rotaţie medie a palelor rotorului, $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$

F_j = forţă de reacţie brută a jetului, (kg)

F_{co} = ,, a lui Coriolis, ,,

r = distanţa de la axa de rotaţie la un punct al palei rotorului, (m)

R = raza rotorului ($D/2$), ,,

β = coeficientul de bogăţie al motorului,

a_0 = consumul teoretic de aer al motorului, $\left(\frac{\text{kg}}{\text{kg}}\right)$

a = consumul real de aer al motorului, ,,

T = temperatură absolută a gazului, (°K)

p = presiunea absolută a gazului, $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$

K = exponentul adiabatei $\left(\frac{C_p}{C_v}\right)$,

δ = raport de detentă $\left(\frac{p}{p_0}\right)$,

R = constanta gazului, $\left(\frac{\text{kgm}}{\text{kg}^\circ}\right)$

A = echivalentul caloric al lucrului mecanic $\left(\frac{1}{427}\right)$, $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{kgm}}\right)$

φ = coeficientul de pierdere în ajutajul de ejecţie (efuzor).

2.2. Localizarea simbolurilor se face prin indici din care primul arată circuitul (fluxul) la care se referă, iar al doilea, dacă este cazul, secţiunea din circuit.

3. BILANŢUL ENERGETIC

Bilanţul energetic este exprimat în ultima instanţă de randamentul global (aerotermodinamic general) al instalaţiei de forţă pentru antrenarea rotorului, η_g, respectiv de pierderea globală specifică de energie $\overline{\mathcal{P}}_g$, între acestea existînd relaţia : $\overline{\mathcal{P}}_g = (1 - \eta_g)$ în care : $\overline{\mathcal{P}}_g = \dfrac{\mathcal{P}_g}{\Sigma P_c}$

3.1. Expresia cea mai generală a lui η_g este

$$\eta_g = \frac{\Sigma\, P_u}{\Sigma\, P_c} = \frac{P_{ut}}{\Sigma q_m \dfrac{H_c}{A} + \Sigma q_p \left(\dfrac{H_c}{A} + \dfrac{1}{2g} U_r^2\right)} = \frac{\overline{P}_{\grave{u}t}}{\dfrac{H_c}{A}\left[\Sigma \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p\,(1 + b)\right]},$$

în care s-a notat

$$\Sigma P_u = P_{ut}\,;\ \overline{P}_{\grave{u}t} = \frac{P_{ut}}{Q};\quad \bar{q} = \frac{q}{Q}\,;\, b = \frac{A}{2gH_c}\cdot U_r^2\,.$$

N o t ă. 1. La puterea calorifică a combustibilului trebuie adăugată, acolo unde este cazul, energia sa cinetică absolută. Valoarea relativă a acesteia

$$b = \frac{A}{2g\,H_c}\cdot U_r = f\,(U_r)$$

este insignifiantă, în cazurile practice nedepăşind 0,025%, aşa că menţinerea ei în expresia lui ΣP_c nu este făcută decît pentru a păstra rigurozitatea teoretică.

2. Q poate fi unul oarecare din debitele fluxurilor de gaze (Q_m, Q_c, Q_p etc.) explicitarea nefiind necesară decît la aplicaţiile numerice. De preferinţă se ia Q_m.

Cum

$$\overline{P}_{ut} = \sum \overline{P}_p - \sum \overline{P}_{co} = \sum \overline{F}_J \cdot U_r - \sum \overline{F}_{co}\cdot \frac{U_r}{2},$$

iar

$$\overline{F}_J = \frac{\bar{Q}_p}{g}\cdot V_j\,;\ \overline{F}_{co} = \frac{\bar{Q}_p}{g}.\,2U_r,$$

$$\overline{P}_{\grave{u}t} = \sum \frac{\bar{Q}_p}{g}\cdot V_j\cdot U_r - \sum \frac{\bar{Q}_p}{g} U_r^2 = \sum \frac{\bar{Q}_p}{g}\cdot U_r (V_j - U_r) = \sum \frac{\bar{Q}_p}{g}\,(\overline{V}_j - 1)\,U_r^2\,,$$

în care s-a notat

$$\overline{P}_p = \frac{P_p}{Q};\ \overline{P}_{co} = \frac{P_{co}}{Q};\ \overline{F}_j = \frac{F_j}{Q};\ \overline{F}_{co} = \frac{F_{co}}{Q};\ \bar{Q}_p = \frac{Q_p}{Q};\ \overline{V}_j = \frac{V_j}{U_r},$$

rezultă

$$\eta_g = \frac{A}{gH_c} \cdot \frac{\Sigma \bar{Q}_p (\bar{V}_j - 1) U_r^2}{\Sigma \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p (1 + b)} \cdot$$

Notă. Dacă se ia $Q = Q_m$ atunci semnificația lui $\bar{q}_m$ este

$$\bar{q}_m = \frac{q_m}{Q_m} = \frac{1}{1 + \frac{a_0}{\beta}} \text{ cu } \beta = \frac{a_0}{a} \cdot$$

3.2. Pentru o configurație dată, geometrică și aerotermodinamică internă (Q_p, $\bar{q}$ și V_j definite), există o valoare optimă a lui ω respectiv U_r pentru care η_g este maxim.

Aceasta se deduce din anularea derivatei lui η_g în raport cu ω respectiv U_r.

Neglijînd într-o primă aproximație variația lui V_j cu ω și scriind pe η_g sub forma

$$\eta_g = \frac{A}{gH_c} \sum C \cdot r \cdot \omega \, (V_j - r\omega),$$

în care s-a notat

$$C = \frac{\bar{Q}_p}{\Sigma \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p (1 + b)} \; \bar{}$$

expresia derivatei în raport cu ω este

$$\eta_g' = \frac{d\eta_g}{d\omega} = \sum C \cdot r \, (V_j - r\omega) - \sum C r^2 \omega + \sum C' r\omega \, (V_j - r\omega)$$

de unde anulînd derivata și neglijînd pe b

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma \bar{Q}_p \, r V_{j0}}{\Sigma \bar{Q} \, r^2} \cdot$$

3.3. În consecință, expresia lui η_g în cazul vitezei de rotație optime (η_{gM}) devine (cu aproximația admisă a neglijării variației lui V_j cu ω și a lui b)

$$\eta_{gM} = \frac{A}{gH_c} \cdot \omega_0^2 \sum C r^2 \, (\bar{V}_{j0} - 1) = \frac{A}{gH_c} \cdot \omega_0^2 \sum C r^2,$$

$$\eta_{gM} = \frac{A}{gH_c} \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{\Sigma \bar{Q}_p \, r^2}{\Sigma \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p} = \frac{A}{gH_c} \cdot \frac{\Sigma \bar{Q}_p U_{r0}^2}{\Sigma \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p} \cdot$$

3.3.1. Raportul dintre η_g și η_{gM} are ca expresie

$$\frac{\eta_g}{\eta_{gM}} = \bar{\eta}_g = \bar{\omega}^2 \cdot \frac{\Sigma C r^2 \, (\bar{V}_j - 1)}{\Sigma C r^2}, \text{ cu } \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\bar{\eta}_g = \bar{\omega}^2 \cdot \frac{\Sigma \bar{Q}_p r^2 \, (\bar{V}_j - 1)}{\Sigma \bar{Q}_p \, r^2} = \frac{\Sigma \bar{Q}_p U_r^2 \, (\bar{V}_j - 1)}{\Sigma \bar{Q}_p U_{r0}^2} \cdot$$

Notă. Efectul celor n fluxuri independente din pală se poate echivala, din punct de vedere energetic, cu un flux unic de debit $Q_{p\text{ech}} = \frac{\Sigma\, Q_p\, r^2}{(KR)^2}$ avînd o viteză de ejecție, $V_{j\text{ech}} = \frac{\Sigma\, Q_p\, V_j\, r^2}{\Sigma\, Q_p\, r^2}$ într-un punct de aplicație în care viteza periferică este

$$KU = \frac{\Sigma\, \overline{Q}_p \cdot V_j\, r^2}{\Sigma\, \overline{Q}_p \cdot \overline{V}_j\, r^2}$$

deci

$$\overline{V}_{j\text{ ech}} = \frac{\Sigma\, \overline{Q}_p\, \overline{V}_j\, r^2}{\Sigma\, \overline{Q}_p\, r^2} = \frac{\Sigma\, \overline{Q}_p\, \overline{V}_j\, U}{\Sigma\, \overline{Q}_p\, U_r^2} = \frac{\Sigma\, \overline{Q}_p\, V_j\, U_r}{\Sigma\, \overline{Q}_p\, U_r^2}.$$

3.3.2. În tabela 1 se indică expresiile mărimilor caracteristice ale fluxului unic echivalent pentru următoarele cazuri particulare curente:

a) Flux pală (jet) unic, cu jet periferic și fără postcombustie.

b) Idem cu postcombustie în pală.

c) Fluxuri pală independente (compresor și motor) cu jeturi periferice și fără postcombustie).

d) Idem cu postcombustie în pală în flux compresor.

S-a notat cu U viteza periferică la capătul palelor și cu KU aceea în dreptul ajutajului de ejecție, cu $K \leqslant 1$, ($\sim 0{,}97$) care ține seama de poziția ajutajului și unghiul de conicitate al rotorului la regimul considerat.

3.3.3. Expresiile lui η_g și η_{gM} în funcție de caracteristicile fluxului unic echivalent sînt

$$\eta_g = \frac{A}{gH_c} \cdot \frac{\overline{Q}_{p\text{ ech}}\,(\overline{V}_{j\text{ ech}} - 1)\,(KU)^2}{\Sigma\, \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p},$$

$$\eta_{gM} = \frac{A}{4\, gH_c} \cdot \frac{\overline{Q}_{p\text{ ech}} \cdot V_{j\text{ ech}_0}}{\Sigma\, \bar{q}_m + \Sigma\, \bar{q}_p},\ \text{cu } \overline{V}_{j\text{ech}_0} = 2.$$

3.3.4. Analizînd variația lui $\bar{\eta}_g$ se constată că

$$\bar{\eta}_g = \bar{\omega}^2\,(\overline{V}_{j\text{ech}} - 1) = \left(\frac{KU}{KU_0}\right)^2 (\overline{V}_{j\text{ech}} - 1),$$

însă

$$KU_0 = \frac{1}{2}\, V_{j\text{ech}_0};\quad KU = \frac{V_{j\text{ ech}}}{\overline{V}_{j\text{ ech}}}\ \text{și notînd}\ \overline{KU} = \frac{KU}{V_{j\text{ ech}}},$$

$$\bar{\eta}_g = \left(\frac{2}{\overline{V}_{j\text{ech}}}\right)^2 \cdot (\overline{V}_{j\text{ech}} - 1) \left(\frac{V_{j\text{ ech}}}{V_{j\text{ ech}_0}}\right)^2 \sim \left(\frac{2}{\overline{V}_{j\text{ ech}}}\right)^2 (\overline{V}_{j\text{ech}} - 1) = (2\overline{KU})^2 \left(\frac{1}{\overline{KU}} - 1\right),$$

considerînd așa cum s-a mai făcut anterior $\overline{V}_j \sim \overline{V}_{j0}$ (eroarea este nulă la $\omega = \omega_0$ adică $\overline{V}_j = \overline{V}_{j0}$ și mică, în orice caz, în jurul acestor valori, care sînt valorile curente).

3.3.4.1. În diagrama din figura 2, se arată variaţia lui : $\overline{\eta}_g = f(\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}})$ care prezintă un maximum 1 la $\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}} = 2$ aşa cum era de aşteptat şi este 0 la $\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}} = 1$ şi $\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}} = \infty$. Idem în figura 6, $\overline{\eta}_g = f(\overline{KU})$, $\overline{KU}$ variind

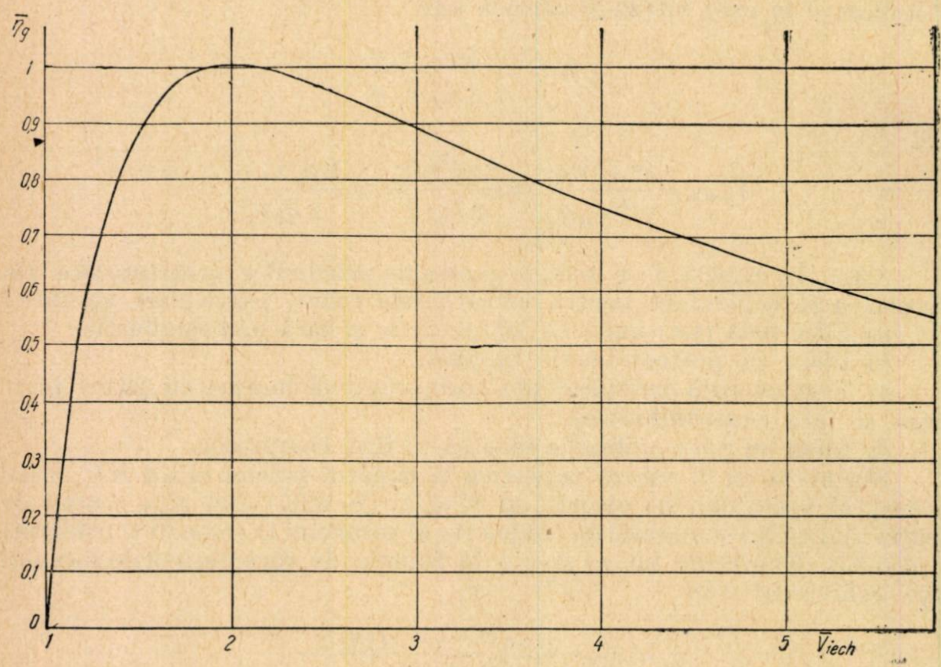


Fig. 2

între 0 şi 1. Cunoscînd pe $\overline{\eta}_g$ şi avînd definite datele problemei, η_g rezultă din relaţia

$$\eta_g = \overline{\eta}_g \cdot \eta_{gM} = f(\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}}) \frac{A}{4\,gH_c} \cdot \frac{\overline{Q}_{p\,\mathrm{ech}} \cdot V^2_{j\,\mathrm{ech}_0}}{\Sigma \overline{q}}.$$

3.4. Relaţiile de mai sus permit pentru o configuraţie dată, geometrică şi aerotermodinamică internă, alegerea parametrului cinematic cel mai convenabil, pentru obţinerea lui η_g maximum, adică pierderi globale de energie

$$100 \frac{\mathcal{P}_g}{\Sigma P_c} = 100\,(1 - \eta_g)\,(\%)$$

minime.

Pentru a obţine însă valoarea minimum minimorum a acestor pierderi (respectiv maximum maximorum a lui η_g) trebuie analizat în ce sens trebuie aleasă configuraţia geometrică aerotermodinamică internă ($\overline{Q}_p$, $\overline{q}$ şi V_j) presupunînd în fiecare caz funcţionarea la parametrul cinematic optim.

În acest scop se va folosi expresia randamentului termic definit prin

$$\eta_g = \eta_p \cdot \eta_e \cdot \eta_t ,$$

în care η_p și η_e nu depind decît de parametri cinematici după cum rezultă din cele de mai jos.

3.4.1. Într-adevăr expresia lui η_p este

$$\eta_p = \frac{\Sigma\, P_p}{\Sigma\, P_e} = \frac{\Sigma\, P_p}{\Sigma\, P_p + \Sigma \mathcal{P}_{ec}} = \frac{\Sigma\, \overline{P}_p}{\Sigma\, \overline{P}_p + \Sigma \overline{\mathcal{P}}_{ec}} = \frac{\Sigma\, \overline{Q}_p \cdot V_j \cdot U_r}{\Sigma\, \overline{Q}_p \cdot V_j \cdot U_r + \frac{1}{2} \Sigma\, \overline{Q}_p\, (V_j - U_r)^2},$$

care în funcție de caracteristicile fluxului unic echivalent devine

$$\eta_p = \frac{2 \overline{V}_{j\,\mathrm{ech}}}{\overline{V}^2_{j\,\mathrm{ech}}\, (1 + \alpha) + 1} = \frac{2 \overline{V}_{j\,\mathrm{ech}}}{\overline{V}^2_{j\,\mathrm{ech}} + 1} = \frac{2\, \overline{KU}}{\overline{KU}^2 + 1},$$

neglijînd pe $\alpha = \dfrac{\Sigma\, Q_{p\,n-1} \cdot Q_{p\,n}\, (V_{j\,n-1} \cdot U_{r\,n-1} - V_{j\,n} \cdot U_{r\,n})^2}{Q_{p\,\mathrm{ech}}\, (KU)^2}$,

față de 1, în practică parantezele

$$(V_{j\,n-1} \cdot U_{r\,n-1} - V_{j\,n} \cdot U_{r\,n}) \sim 0.$$

În diagrama din figura 3 s-a reprezentat grafic

$\eta_p = f(\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}})$ avînd valorile $\eta_p = 1$ la $\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}} = 1$

și $\eta_p = 0$ la $\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}} = \infty$.

De asemenea, în figura 6 s-a reprezentat $\eta_p = f(\overline{KU})$ avînd valorile $\eta_p = 1$ la $\overline{KU} = 1$ și $\eta_p = 0$ la $\overline{KU} = 0$.

3.4.1.2. Cunoscînd pe η_p, $\overline{\mathcal{P}}_{ec}$ se deduce din relația

$$\Sigma\, \overline{\mathcal{P}}_{ec} = 100\, \frac{\Sigma\, P_p\, (1 - \eta_p)}{\Sigma\, P_c \cdot \eta_p}.$$

3.4.2. Tot astfel expresia lui η_e este

$$\eta_e = \frac{\Sigma\, P_u}{\Sigma\, P_p} = \frac{\Sigma\, P_p - \Sigma\, P_{co}}{\Sigma\, P_p} = 1 - \frac{\Sigma\, \overline{P}_{co}}{\Sigma\, \overline{P}_p} = 1 - \frac{\Sigma\, \overline{Q}_p \cdot U_r^2}{\Sigma\, \overline{Q}_p \cdot V_j \cdot U_r} \text{ sau}$$

$$\eta_e = 1 - \frac{1}{\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}}} = 1 - \overline{KU}.$$

3.4.2.1. Valorile corespunzătoare pentru aceleași cazuri particulare considerate sînt arătate în tabela 1.

În diagrama din figura 3 s-a reprezentat grafic funcția

$$\eta_e = f_e(\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}}) = 1 - \frac{1}{\overline{V}_{j\,\mathrm{ech}}},$$

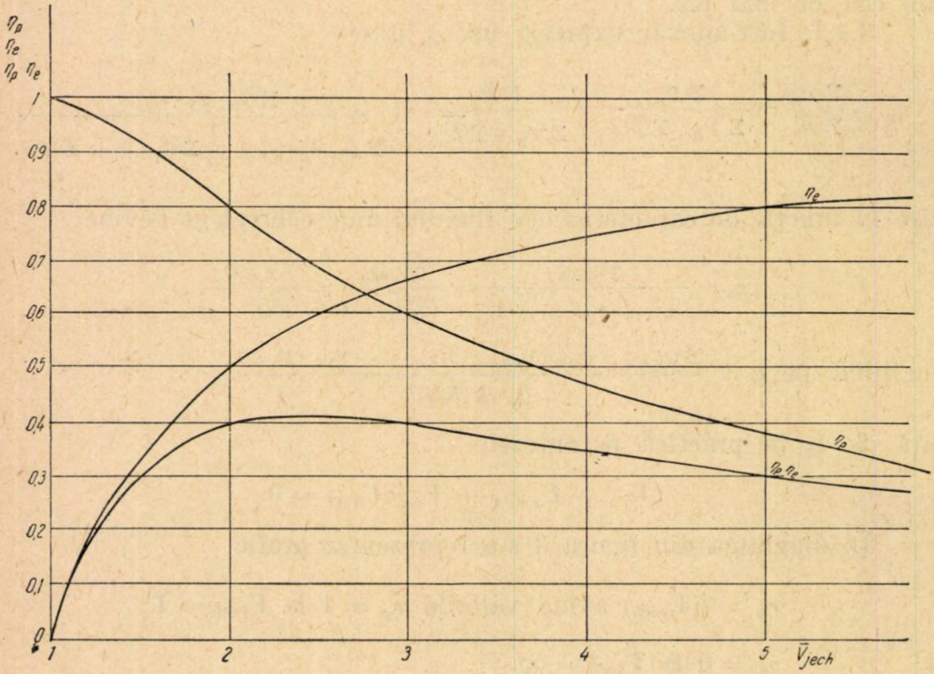


Fig. 3

iar în diagrama din figura 6, funcția

$$\eta_e = f_e(\overline{KU}) = 1 - \overline{KU}.$$

3.4.2.2. Cunoscînd pe η_e, $\overline{\mathcal{P}}_{r_r}$ se deduce din relațiile

$$\sum \overline{\mathcal{P}}_{rr} = 100 \frac{\Sigma \mathcal{P}_{rr}}{\Sigma P_c} = 100 \frac{\Sigma P_{co}}{\Sigma P_c} = 100 \cdot \eta_g \frac{1 - \eta_e}{\eta_e}.$$

3.4.3. Tot în tabela 1 și diagramele din figurile 3 și 6 s-au indicat și valorile pentru produsul $\eta_p \cdot \eta_e$.

3.4.4. Expresia lui η_t este

$$\eta_t = \frac{\Sigma P_e}{\Sigma P_c} = \frac{A}{2gH_c} \cdot \frac{\Sigma \overline{Q}_p (\overline{V}_j^2 + 1) \cdot U_r^2}{\Sigma \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p (1 + b)}$$

sau

$$\eta_t = \frac{A}{2gH_c} \cdot \frac{\bar{Q}_p \,\text{ech}\, (\bar{V}_j^2 \text{ech} + 1)\,(KU)^2}{\Sigma\, \bar{q}_m + \Sigma \bar{q}_p}$$

neglijînd pe α şi b.

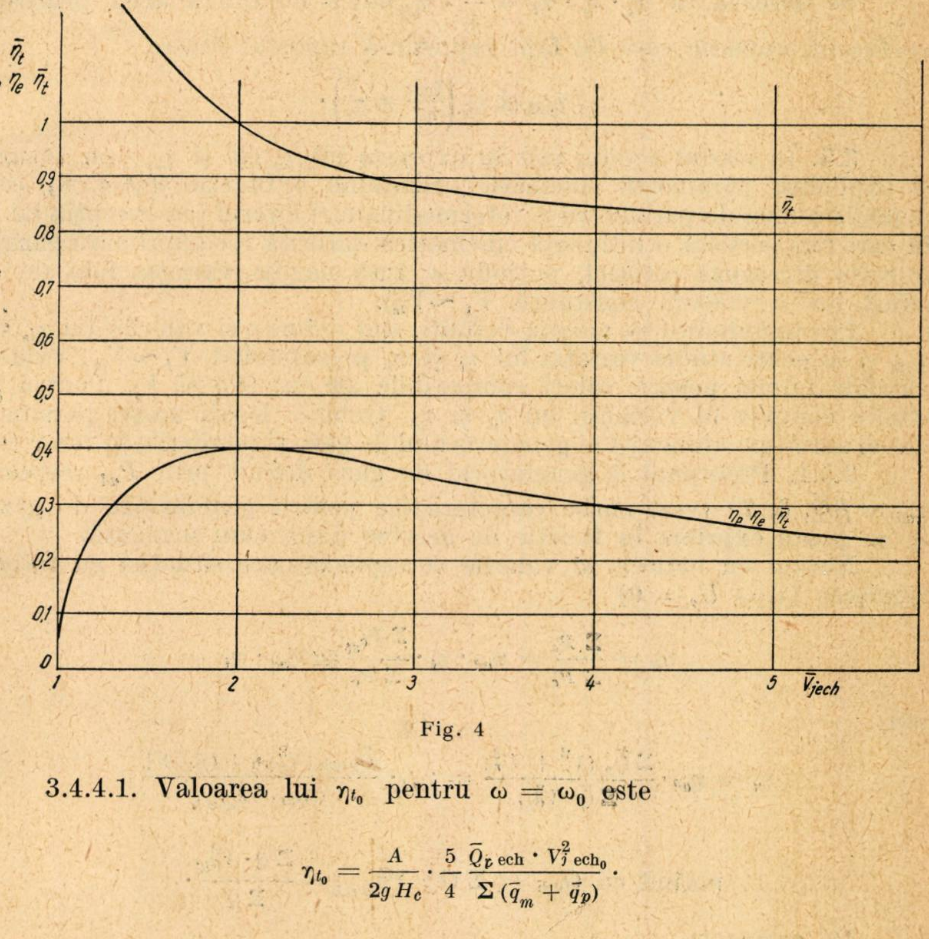


Fig. 4

3.4.4.1. Valoarea lui η_{t_0} pentru $\omega = \omega_0$ este

$$\eta_{t_0} = \frac{A}{2g H_c} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{\bar{Q}_p \,\text{ech} \cdot V_j^2 \,\text{ech}_0}{\Sigma\, (\bar{q}_m + \bar{q}_p)}.$$

3.4.4.2. Variaţia raportului

$$\bar{\eta}_t = \frac{\eta_t}{\eta_{t_0}} = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{\bar{V}_j^2 \text{ech}}\right) = \frac{4}{5}\,(1 + \overline{KU}^2)$$

este reprezentată grafic în diagramele din figurile 4—6 ca şi a produsului

$$\eta_p \cdot \eta_e \cdot \bar{\eta}_t .$$

Notă. Ca şi în cazurile precedente s-a presupus $V_j \sim V_{j_0}$.

3.4.4.3. Pe baza elementelor calculate mai sus η_g poate fi exprimat şi în funcţie de ele, pe baza relaţiei

$$\eta_g = \eta_p \cdot \eta_e \cdot \overline{\eta}_t \cdot \eta_{t_0} = \overline{\eta}_g \cdot \eta_{gM}.$$

Se observă că $\eta_p \cdot \eta_e \cdot \overline{\eta}_t = \frac{2}{5} \cdot \overline{\eta}_g$ adică nu diferă decît printr-un coeficient numeric care de fapt reprezintă raportul dintre

$$\eta_{gM} \text{ şi } \eta_{t_0} \left(\frac{\eta_{gM}}{\eta_{t_0}} = \frac{2}{5}\right).$$

3.5. În modul acesta, atît în expresia lui η_g cît şi η_t s-au separat şi explicitat parametrii cinematici, rămînînd o funcţie $f(Q, q, V_j)$ care depinde numai de parametrii aerotermodinamici interni (cu excepţia lui V_j în care mai persistă o influenţă cinematică datorită recomprimării gazului în rotor din cauza rotaţiei, putîndu-se însă neglija variaţia faţă de V_{j_0} adică lua o valoare constantă $V_j \sim V_{j_0}$).

Presupunîndu-i pe aceştia definiţi, sînt definite şi valorile lui η_{t_0} sau η_{gM} şi se poate studia variaţia lui η_t şi η_g presupunînd $V_j \sim V_{j_0}$, evident valabile numai pentru valori compatibile ale lui Q/q şi V_j. Pentru un studiu complet al variaţiei lui η_t şi η_g trebuie legaţi aceşti parametri de cei aerotermodinamici ai generatorului de gaze şi pierderile în rotor (η_i).

3.5.1. Presupunînd generatorul de gaze definit prin P_{ad} respectiv $\eta_{ad} = f(\overline{Q}, \delta, T)$ (vezi curbe caracteristice pentru generatoare de gaze), η_t se poate exprima în funcţie de acestea după cum urmează.

Notînd cu indicele *st* valorile corespunzătoare situaţiei cu rotorul nemişcat ($\omega = U_r = 0$)

$$\eta_t = \frac{\Sigma P_e}{\Sigma P_c} = \eta_{ad} \cdot \eta_i \cdot \frac{\Sigma P_{c_{st}}}{\Sigma P_c} \cong \eta_{ad} \cdot \eta_i$$

sau

$$\eta_t = \eta_{ad} \cdot \frac{\Sigma \overline{Q}_p \, (V_j^2 + U_r^2)}{\Sigma \overline{Q} \cdot V_{d_{id}}^2} = \eta_{ad} \cdot \frac{\overline{Q}_{p\,\mathrm{ech}} \, [V_{j\,\mathrm{ech}}^2 + (KU)^2]}{\overline{Q}_{\mathrm{ech}} \cdot V_{d_{id}\,\mathrm{ech}}^2}$$

$$\text{notînd cu } Q_{\mathrm{ech}} = \Sigma Q\, ; \; V_{d_{id}\,\mathrm{ech}}^2 = \frac{\Sigma Q \cdot V_{d_{id}}^2}{\Sigma Q}.$$

De asemenea,

$$\eta_{t_0} = \eta_{ad} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{\overline{Q}_{p\,\mathrm{ech}} \cdot V_{j\,\mathrm{ech}_0}^2}{\overline{Q}_{\mathrm{ech}} \cdot V_{d_{id}\,\mathrm{ech}}^2}.$$

Înlocuind pe η_t cu expresia lui din 3.4.4. rezultă relaţia între parametrii generatorului de gaze şi ai rotorului

$$\eta_{ad} = \frac{A}{2g\,H_c} \frac{\overline{Q}_{\mathrm{ech}} \cdot V_{d_{id}\,\mathrm{ech}}^2}{\Sigma\,(\overline{q}_m + \overline{q}_p)}.$$

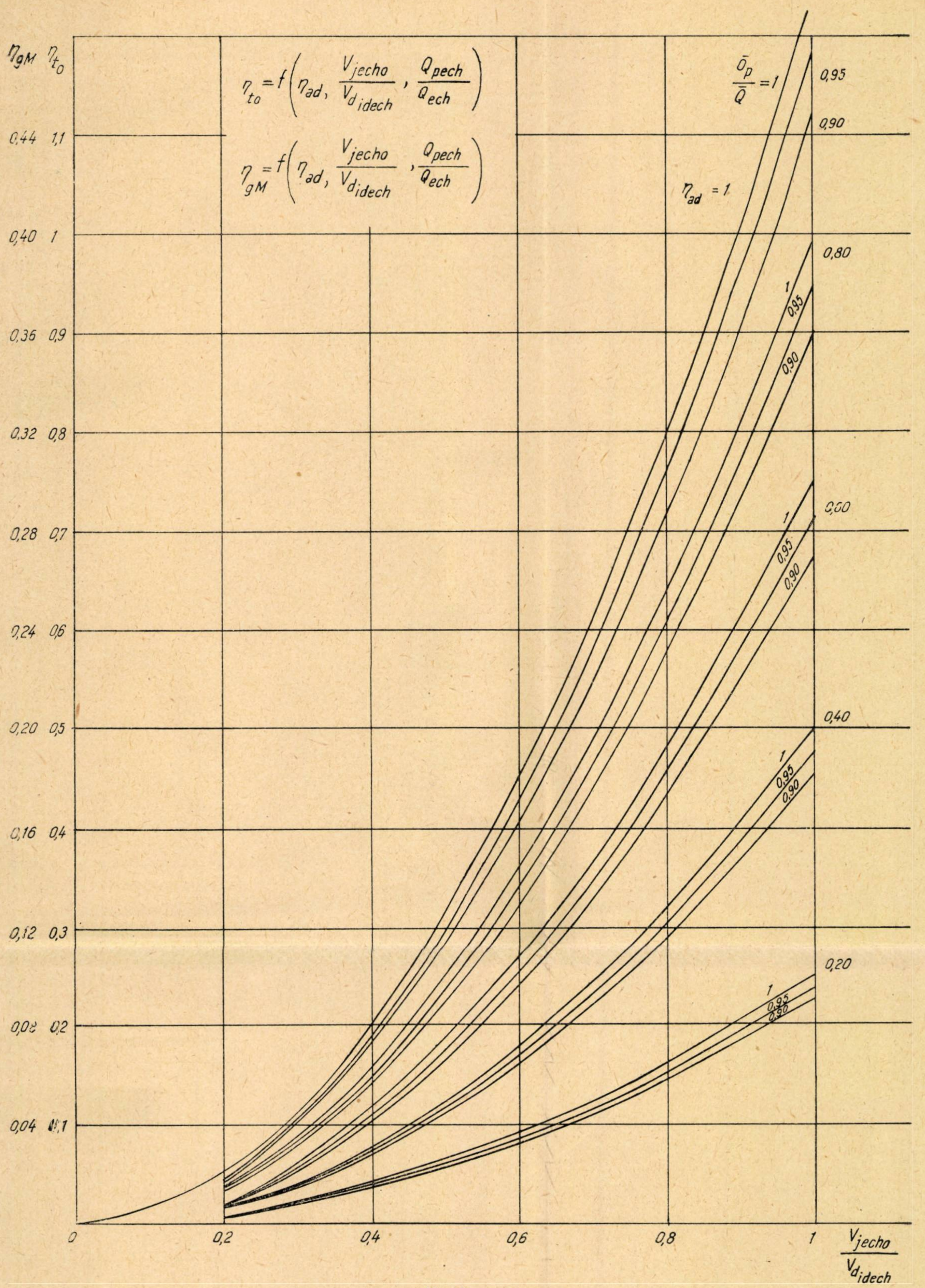

η_{gM}
η_{t_o}
$\eta_{t_o} = f\left(\eta_{ad}, \frac{V_{jecho}}{V_{d_{idech}}}, \frac{Q_{pech}}{Q_{ech}}\right)$
$\eta_{gM} = f\left(\eta_{ad}, \frac{V_{jecho}}{V_{d_{idech}}}, \frac{Q_{pech}}{Q_{ech}}\right)$
$\frac{\bar{Q}_p}{\bar{Q}} = 1$
0,95
0,90
$\eta_{ad} = 1$
0,80
1
0,95
0,90
0,60
1
0,95
0,90
0,40
1
0,95
0,90
0,20
1
0,95
0,90
0,44
1,1
0,40
1
0,36
0,9
0,32
0,8
0,28
0,7
0,24
0,6
0,20
0,5
0,16
0,4
0,12
0,3
0,08
0,2
0,04
0,1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\frac{V_{jecho}}{V_{d_{idech}}}$

Fig. 5

3.5.1.1. Pentru cazurile particulare considerate mai sus η_t și η_{ad} au valorile indicate în tabela 1.

3.5.1.2. Expresiile lui η_t sau η_g în funcție de η_{ad} dedus mai sus, sînt arătate în aceeași tabelă 1.

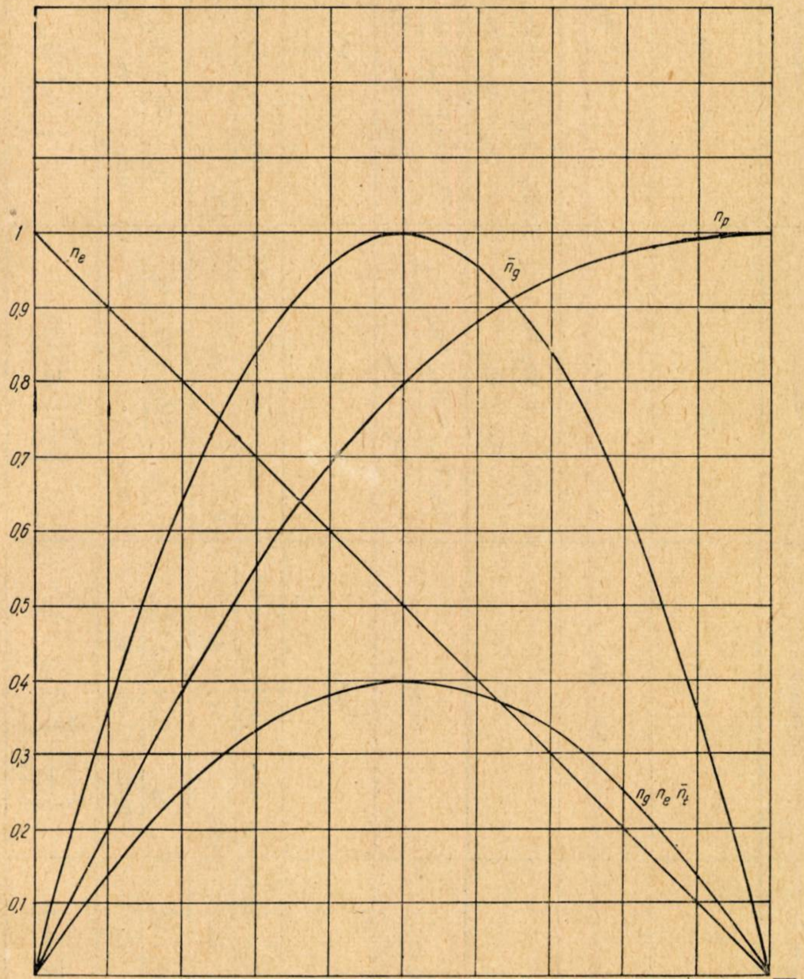


Fig. 6

În figura 5 se arată funcția:

$$\eta_{t_0} = f\left(\eta_{ad}, \frac{Q_{p\,\mathrm{ech}}}{Q_{\mathrm{ech}}}, \frac{V_{j\,\mathrm{ech}_0}}{V_{did\,\mathrm{ech}}}\right)$$

pentru valorile date ale lui $\overline{Q}_p/\overline{Q}$ (valabil și pentru η_{gM} în raportul 5/2).

Tabela 1

	Mărimea	Cazul *a*	Cazul *b*	Cazul *c*	Cazul *d*
1	$Q_{p\text{ech}}$	Q_p	$Q_p + q_p$	$Q_{p_c} + Q_{p_m}$	$Q_{r_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}$
2	$\Sigma q_m + \Sigma q_p$	q_m	$q_m + q_p$	q_m	$q_m + q_{p_c}$
3	$\overline{V}_{j\text{ech}}$	$\overline{V}_j$	$\overline{V}_{jpc}$	$\dfrac{Q_{p_c}\overline{V}_{j_c} + Q_{p_m}\overline{V}_{j_m}}{Q_{p_c} + Q_{p_m}} = \overline{a}$	$\dfrac{(Q_{p_c} + q_{p_c})\,\overline{V}_{j_{cpc}} + Q_{p_m}\,\overline{V}_{j_m}}{Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}} = \overline{a}_{pc}$
4	$V_{j\text{ech}_0}$	V_{j_0}	V_{jpc_0}	$\dfrac{Q_{p_c}\,V_{j_{co}} + Q_{p_m}\,V_{j_{m_0}}}{Q_{p_c} + Q_{r_m}} = \overline{a}_0$	$\dfrac{(Q_{p_c} + q_{p_c})V_{j_{cpc_0}} + Q_{p_m}V_{j_{m_0}}}{Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}} = a_{pc_0}$
5	KU_0	$\dfrac{V_{j_0}}{2}$	$\dfrac{V_{jpc_0}}{2}$	$\dfrac{a_0}{2}$	$\dfrac{a_{pc_0}}{2}$
6	η_g	$\dfrac{A}{gH_c} \cdot \dfrac{Q_p\,(\overline{V}_j - 1)KU^2}{q_m}$	$\dfrac{A}{gH_c} \cdot \dfrac{(Q_p + q_p)\,(V_{j_{pc}} - 1)\,(KU)^2}{q_m + q_p}$	$\dfrac{A}{gH_c} \cdot \dfrac{(Q_{p_c} + Q_{p_m})\,(\overline{a} - 1)\,(KU)^2}{q_m}$	$\dfrac{A}{gH_c} \cdot \dfrac{(Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{p_m})(\overline{Q}_{p_c} - 1)(KU)^2}{q_m + q_{p_c}}$
7	η_{gM}	$\dfrac{A}{4gH_c} \cdot \dfrac{Q_p \cdot V_{j_0}^2}{q_m}$	$\dfrac{A}{4gH_c} \cdot \dfrac{(Q_p + q_p)\,V_{jpc_0}^2}{q_m + q_p}$	$\dfrac{A}{4gH_c} \cdot \dfrac{(Q_{p_c} + Q_{p_m})\,a_0^2}{q_m}$	$\dfrac{A}{4gH_c} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}}{q_m + q_{p_c}}\,a_{pc_0}^2$
8	$\overline{\eta}_g$	$\left(\dfrac{2}{\overline{V}_j}\right)^2 (\overline{V}_j - 1)$	$\left(\dfrac{2}{\overline{V}_{j_{pc}}}\right)^2 (\overline{V}_{jpc} - 1)$	$\left(\dfrac{2}{\overline{a}}\right)^2 (\overline{a} - 1)$	$\left(\dfrac{2}{\overline{a}_{pc}}\right)^2 (\overline{a}_{pc} - 1)$
9	η_p	$\dfrac{2\,\overline{V}_j}{\overline{V}_j^2 + 1}$	$\dfrac{2\,\overline{V}_{jpc}}{\overline{V}_{jpc}^2 + 1}$	$\dfrac{2\,\overline{a}}{\overline{a}^2 + 1}$	$\dfrac{2\,\overline{a}_{pc}}{\overline{a}_{pc}^2 + 1}$

10	η_e	$1 - \dfrac{1}{\overline{V}_j}$	$1 - \dfrac{1}{\overline{V}_{j_{pc}}}$	$1 - \dfrac{1}{\overline{a}}$	$1 - \dfrac{1}{\overline{a}_{pc}}$
11	$\eta_p\ \eta_e$	$\dfrac{2\,(\overline{V}_j - 1)}{\overline{V}_j^2 + 1}$	$\dfrac{2\,(\overline{V}_{jpc} - 1)}{\overline{V}_{jpc}^2 + 1}$	$\dfrac{2\,(\overline{a} - 1)}{\overline{a}^2 + 1}$	$\dfrac{2\,(\overline{a}_{rc} - 1)}{\overline{a}_{pc}^2 + 1}$
12	η_t	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q_p}{q_m} \cdot (\overline{V}_j^2 + 1)(KU)^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q_p + q_p}{q_m + q_p} \cdot (\overline{V}_{jpc}^2 + 1)\,(KU)^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q_{r_c} + Q_{p_m}}{q_m} (\overline{a}^2 + 1)(KU)^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{pm}}{q_m + q_{pc}} (\overline{a}_{rc}^2 + 1)(KU)^2$
13	η_{t_0}	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{Q_p}{q_m} \cdot V_{j0}^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{Q_p + q_p}{q_m + q_p}\, V_{jp_{c_0}}^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{Q_{r_c} + Q_{p_m}}{q_m} \cdot a_o^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{Q_{r_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}}{q_m + q_{p_c}}\, a_{pco}^2$
14	$\overline{\eta}_t$	$\dfrac{4}{5}\left(1 + \dfrac{1}{\overline{V}_j^2}\right)$	$\dfrac{4}{5}\left(1 + \dfrac{1}{\overline{V}_{jpc}^2}\right)$	$\dfrac{4}{5}\left(1 + \dfrac{1}{\overline{a}^2}\right)$	$\dfrac{4}{5}\left(1 + \dfrac{1}{\overline{a}_{p_c}^2}\right)$
15	Q_{ech}	Q	Q	$Q_c + Q_m$	$Q_c + Q_m$
16	V_{did}^2 ech	V_{did}^2	$V_{d_{id}}^2$	$b^2 = \dfrac{Q_c V_{d_{idc}}^2 + Q_m V_{d_{idm}}^2}{Q_c + Q_m}$	$b^2 = \dfrac{Q_c\, V_{d_{idc}}^2 + Q_m\, V_{d_{idm}}^2}{Q_c + Q_m}$
17	η_{ad}	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q V_{d_{id}}^2}{q_m}$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q V_{d_{id}}^2}{q_m + q_p}$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q_c + Q_m}{q_m} \cdot b^2$	$\dfrac{A}{2\,gH_c} \cdot \dfrac{Q_c + Q_m}{q_m + q_{p_c}} \cdot b^2$
18	η_t	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{Q_p}{Q}\left(\dfrac{V_j}{V_{d_{id}}}\right)^2\left(1 + \dfrac{1}{\overline{V}_j^2}\right)$	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + q_p}{Q}\left(\dfrac{V_{jpc}}{V_{d_{id}}}\right)^2\left(1 + \dfrac{1}{\overline{V}_{jpc}^2}\right)$	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + Q_{r_m}}{Q_c + Q_m}\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\left(1 + \dfrac{1}{\overline{a}^2}\right)$	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}}{Q_c + Q_m}\left(\dfrac{a_{pc}}{b}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\overline{a}_{pc}^2}\right)$
19	η_{t_0}	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{5}{4}\, \dfrac{Q_p}{Q}\left(\dfrac{V_{j_o}}{V_{d_{id}}}\right)^2$	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{Q_p + q_p}{Q}\left(\dfrac{V_{jpc_0}}{V_{d_{id}}}\right)^2$	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + Q_{p_m}}{Q_c + Q_m}\left(\dfrac{a_o}{b}\right)^2$	$\eta_{ad} \cdot \dfrac{Q_{p_c} + q_{p_c} + Q_{p_m}}{Q_c + Q_m}\left(\dfrac{a_{pc_0}}{b}\right)^2$

3.5.2. În aceste expresii înlocuind pe η_{ad}, $V_{d_{id}}$, V_j cu expresiile lor în funcție de caracteristicile gazului și anume

$$\eta_{ad} = \sum \frac{A}{2gH_c} \cdot \frac{\bar{Q}}{\bar{q}_m + \bar{q}_p} \cdot V^2_{d\,id} = \sum \frac{A}{H_c} \cdot \frac{Q}{q} \cdot R \frac{K}{K-1} \cdot T^*_g(1 - \delta_g^{\frac{K-1}{K}}),$$

$$V^2_{d_{id}} = 2gR \frac{K}{K-1} \cdot T^*_g \, [1 - \delta_g^{\frac{K-1}{K}}],$$

$$V^2_j = \varphi \, 2gR \frac{K}{K-1} \cdot T^*_p \, [1 - \delta_p^{*\frac{K-1}{K}}] \text{ cu } \delta^* = \frac{p_0}{p^*},$$

se poate obține în cazul cel mai general relația între η_t, respectiv η_g și parametrii gazului furnizat de generatorul de gaze.

4. PUTEREA UTILĂ LA ROTOR

Cunoscînd valoarea și variația lui η_g se poate deduce puterea utilă la rotor, absolută sau specifică, în baza relației cunoscute de definiție

$$\eta_g = \frac{\Sigma P_u}{\Sigma P_c} = \frac{P_{ut}}{\Sigma P_c} = \frac{\bar{P}_{ut}}{\Sigma \bar{P}_c},$$

adică

$$P_{ut} = \eta_g \cdot \sum P_c; \quad \bar{P}_{ut} = \eta_g \sum \bar{P}_c,$$

prezentînd deci același fel de variație cu diferiți parametri ca și η_g de care nu diferă decît printr-o constantă pentru o configurație geometrică și aerotermodinamică internă dată.

4.1. $\bar{P}_{ut}$ poate fi dedus și direct din relațiile sale de definiție

$$\bar{P}_{ut} = \sum \frac{\bar{Q}_p}{g} \cdot (\bar{V}_j - 1) \, U^2_r = \frac{\bar{Q}_{p\,\mathrm{ech}}}{g} \cdot (\bar{V}_{j\,\mathrm{ech}} - 1)\,(KU)^2 = \bar{\eta}_g \cdot \bar{P}_{ut\,\mathrm{M}},$$

cu
$$\bar{P}_{ut\,\mathrm{M}}, = \frac{\bar{Q}_{p\,\mathrm{ech}}}{4g} V^2_{j\,\mathrm{ech}_0},$$

sau

$$\bar{P}_{ut} = (1 - \bar{\mathcal{P}}_g) \sum \bar{P}_c,$$

în care

$$\overline{\mathcal{P}}_g = \frac{\mathcal{P}_g}{\Sigma P_c} = \Sigma\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_{ec} + \overline{\mathcal{P}}_{rr} + \overline{\mathcal{P}}_{ir} + \overline{\mathcal{P}}_{gg}.$$

4.2. Valorile lui $\overline{P}_{ut}$ pentru cazurile particulare considerate se deduc ca mai sus.

5. CONSUMUL SPECIFIC

De asemenea, consumul specific $C_{P_{ut}}$ (raportat la P_{ut}) este definit cunoscînd pe η_g, el fiind exprimat de relația

$$C_{P_{ut}} = \frac{\text{const.}}{\eta_g}.$$

5.1. Valoarea constantei depinde de unitățile de măsură folosite și de valoarea lui H_c. Pentru sistemul tehnic (m ; kgf ; s) și $H_c \sim 10\,500 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right)$

$$C_{P_{ut}} = \frac{632}{H_c\,\eta_g} = \frac{0{,}06}{\eta_g}\left(\frac{K_g}{CP_h}\right).$$

6. CUPLUL DE ANTRENARE

Cuplul de antrenare al rotorului poate fi exprimat fie pornind de la forța de reacție a jeturilor fie de la puterea de antrenare a rotorului pe baza relațiilor

$$\overline{\Gamma}_t = \sum \overline{F}_j \cdot r - \sum \overline{F}_{co}\,\frac{r}{2},$$

sau

$$\overline{\Gamma}_t = \frac{\overline{P}_{ut}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left[\sum \overline{P}_p - \sum \overline{P}_{co}\right] = \frac{1}{\omega}\left[\sum \overline{F}_j \cdot U_r - \sum \overline{F}_{co}\,\frac{U_r}{2}\right],$$

ducînd finalmente la aceeași relație

$$\overline{\Gamma}_t = \sum \frac{\overline{Q}_p}{g}\, V_j r - \sum \frac{\overline{Q}_p}{g} \cdot 2\,U_r \cdot \frac{r}{2} = \sum \frac{\overline{Q}_p}{g} \cdot r \cdot U_r \cdot (\overline{V}_j - 1),$$

$$\overline{\Gamma}_t = \frac{\overline{Q}_{p\,\text{ech}}}{g}\,(KR)^2 \cdot \omega\,(\overline{V}_{j\,\text{ech}} - 1).$$

6.1. Valorile lui $\overline{\Gamma}_t$ pentru cazurile particulare considerate se deduc ca mai sus.

6.1.1. Valoarea maximă a lui $\overline{\Gamma}_t$ are loc la $\omega = 0$ (la pornire) devenind zero la $\overline{V}_{j\,\text{ech}} = 1$.

6.1.2. Valorile lui $\overline{\Gamma}_t$ pentru $\omega = 0$ ($\overline{\Gamma}_{t\text{M}}$) şi $\omega = \omega_0$ pentru care $\eta_g = \eta_{g\text{M}}$ ($\overline{\Gamma}_{t_0}$), cît şi expresiile raportului $\overline{\Gamma}_t/\overline{\Gamma}_{t\text{M}}$ sînt

$$\overline{\Gamma}_{t\,\text{M}} = \frac{\overline{Q}_{p\,\text{ech}}}{g} \cdot KR \cdot V_{j\,\text{ech}\,st} \quad \text{la} \quad \omega = 0,$$

$$\overline{\Gamma}_{t_0} = \frac{\overline{Q}_{p\,\text{ech}}}{2g} \cdot KR \cdot V_{j\,\text{ech}_0} \quad \text{la} \quad \omega = \omega_0,$$

$$\frac{\overline{\Gamma}_t}{\overline{\Gamma}_{t\,\text{M}}} = 1 - \frac{1}{\overline{V}_{j\,\text{ech}}} = 1 - \overline{KU}.$$

6.2. Analizînd variaţia raportului $\overline{\Gamma}_t/\overline{\Gamma}_{t\text{M}}$ se constată că el are aceeaşi expresie ca şi η_e şi deci variaţia sa în funcţie de V_j respectiv $\overline{KU}$ este reprezentată în figurile 3 — 6.

7. DISCUŢIE

Avînd în vedere multitudinea parametrilor care intră în joc, analiza soluţiilor optime trebuie făcută de la caz la caz. Se pot totuşi desprinde din acest studiu cîteva caracteristici generale ale antrenării pneumatice ce vor fi expuse în cele ce urmează.

7.1. În primul rînd variaţia de aproximativ ±5% în jurul indicelui de viteză $\overline{V}_{j\,\text{ech}}$ (sau indicelui echivalent $\overline{KU}$) nu au practic influenţă asupra valorii lui $\eta_{g\text{M}}$. Variaţii pînă la ± 10% nu reduc valoarea acestuia cu mai mult de 1%. Pentru creşteri mai mari pozitive, (viteza de rotaţie mai mare decît cea optimă), η_g scade destul de brutal, scăderea fiind mai puţin brutală pentru vitezele de rotaţie mai mici decît cele optime ($\overline{V}_{j\,\text{ech}} > 2$) reprezentînd aproximativ 10% pentru scăderi pînă la 45%.

7.2. Din expresia randamentului global pusă sub forma

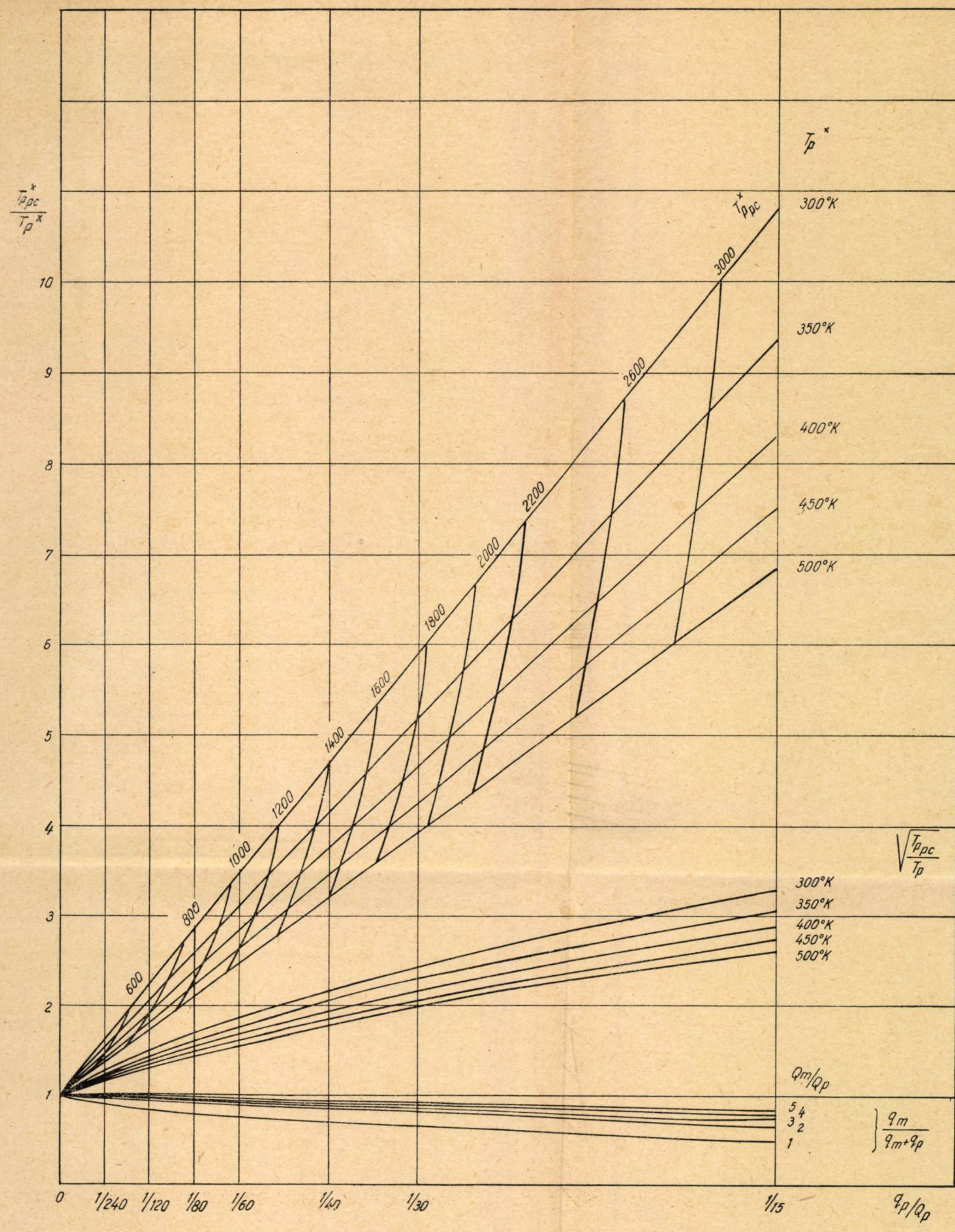
$$\eta_g = \eta_p \cdot \eta_e \cdot \overline{\eta}_t \cdot \eta_{t_0} = \eta_p \cdot \eta_e \cdot \overline{\eta}_t \cdot \frac{\eta_{t_0}}{\eta_{ad}} \cdot \eta_{ad},$$

sau

$$\eta_g = \eta_p \cdot \eta_e \cdot \overline{\eta}_t \cdot \frac{\eta_{t_0}}{\eta_{ad}} \cdot \eta_{ec} \cdot \eta_m,$$

se vede că η_g nu poate depăşi o valoare maximum maximorum de 0,5 η_{ad} respectiv 0,5 η_m.

Acest lucru se realizează la pierderi de sarcină nulă ale gazelor în conductele palelor $\left(\text{cînd } \frac{\eta_{t_0}}{\eta_{ad}} = \frac{5}{4}\right)$, respectiv în circuitul compresor şi la regimul optim de rotaţie corespunzător unei viteze periferice de aproximativ 1/2 din viteza de ejecţie, echivalentă, la care produsul elementelor ce nu depind decît de parametrii cinematici (η_p η_c $\overline{\eta}_t$) este de 0,4.



$\frac{T_{p_{pc}}^{x}}{T_{p}^{x}}$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1/240
1/120
1/80
1/60
1/40
1/30
1/15
q_p/Q_p
T_p^{x}
$T^{x}_{p_{pc}}$
300°K
350°K
400°K
450°K
500°K
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2600
3000
$\sqrt{\frac{T_{p_{pc}}}{T_p}}$
300°K
350°K
400°K
450°K
500°K
Q_m/Q_p
5
4
3
2
1
$\frac{q_m}{q_m+q_p}$

Fig. 7

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁR

Rezultă că sistemul pneumatic de antrenare este un transformator mediocru de energie, fiind avantajos numai în măsura în care problemele de consum nu sînt primordiale și primează alte avantaje pe care le poate oferi în ansamblul funcțional al elicopterului.

7.3. Caracteristica de cuplu asigură o punere rapidă în regim a rotorului, la decolare sau la repriza în zbor.

7.4. Posibilitatea postcombustiei introduce un parametru suplimentar ce mărește supletea de utilizare a sistemului la regimuri de zbor unde este necesar un excedent important de putere.

Presupunînd funcționarea la regimul optim de rotație corespunzător situațiilor fără și cu postcombustie, postcombustia mărește puterea utilă, maximă, în raportul pătratului vitezelor de ejecție echivalente (cu și fără postcombustie și neglijînd influența debitului suplimentar de combustibil necesar postcombustiei), iar cuplul în raportul acestor viteze, viteza de rotație crescînd tot în raportul acestor viteze.

Cum $\left(\frac{V_{jpc}}{V_j}\right)^2 = \frac{T^{\star}_{ppc}}{T^{\star}_p} = \frac{\overline{P}_{utMpc}}{\overline{P}_{utM}}$, variația cu gradul de postcombustie a raportului dintre temperaturi (cu și fără postcombustie) dă și variația puterilor utile maxime la vitezele de rotație optime.

De asemenea

$$\sqrt{\frac{T^{\star}_{ppc}}{T^{\star}_p}} = \frac{\overline{\Gamma}_{opc}}{\overline{\Gamma}t_0} = \frac{\omega_{opc}}{\omega_o}.$$

În diagrama din figura 7 este reprezentată grafic funcția [dedusă din relația calorimetrică : $\bar{q}_p \cdot H_c = (T^{\star}_{ppc} - T^{\star}_p)\, c_p\, \overline{Q}_p$]

$$\frac{T^{\star}_{ppc}}{T^{\star}_p} = 1 + \frac{44\ 000}{T^{\star}_p} \frac{\bar{q}_p}{\overline{Q}_p} = f\left(T^{\star}_p, \frac{\bar{q}_p}{\overline{Q}_p}\right) \text{ și } \sqrt{\frac{T^{\star}_{ppc}}{T^{\star}_p}} = f\left(T^{\star}_p, \frac{\bar{q}_p}{\overline{Q}_p}\right),$$

indicîndu-se și curbele izo — $T^{\star}_{ppc}$.

Randamentul crește și el în funcție de gradul de postcombustie (crește cu pătratul vitezelor și scade cu gradul de postcombustie prima influență fiind predominată) după legea

$$\left(\frac{V_{jpc}}{V_j}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{q_p}{q_m}} = \left(\frac{V_{jpc}}{V_j}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\frac{q_p}{Q_p}}{\frac{q_m}{Q_m} \cdot \frac{Q_m}{Q_p}}} = \frac{T^{\star}_{ppc}}{T^{\star}_p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\frac{q_p}{Q_p}}{\frac{q_m}{Q_m} \cdot \frac{Q_m}{Q_p}}},$$

în care termenul al 2-lea scade cu mult mai încet cu q_p/Q_p decît crește $T^{\star}_{ppc} / T^{\star}_p$ (vezi fig. 7).

Posibilitatea ameliorării puterii și randamentului prin postcombustie deschide largi perspective antrenării pneumatice și prin prisma bilanțului energetic.

Primită la redacție la 24 noiembrie 1958.

ПНЕВМАТИЧЕСКИЙ ПРИВОД НЕСУЩИХ ВИНТОВ ВЕРТОЛЕТА ПРИ ВИСЕНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Устанавливается выражение и изменение характерных величин в самом общем случае произвольного количества приводных газовых потоков, а также произвольного количества первичных энергетических источников.

Указывается способ применения установленных общих формул в четырех простых обычных случаях (единый поток с послесгоранием и без него и двойной поток с послесгоранием и без него в холодном потоке).

Изменение характеристических величин пневматического привода (суммарный к.п.д., удельная полезная мощность, удельный расход топлива, удельный момент) рассматриваются в зависимости от соотношения между скоростью струи— соответственно скоростью эквивалентной струи в случае нескольких приводных потоков — и соответствующей окружной скорости.

Влияние кинематических и внутренних аэротермодинамических параметров на значение характеристических величин устанавливается путем разделения, в соответствующих выражениях, элементов, зависящих лишь от кинематических параметров, от элементов, зависящих только от внутренних аэротермодинамических параметров.

Затем исследуется изменение последних в зависимости от адиабатического к.п.д. газогенератора, соответственно его характеристических параметров и внутренний к.п.д. несущего винта, соответственно соотношение между скоростью струи и идеальной скоростью разрежения газов на выходе из газогенератора.

В заключение рассматривается несколько общих характеристик, вытекающих из вышеприведенного исследования пневматического привода несущих винтов вертолета, а также эффект послесгорания на результаты работы последнего.

ENTRAÎNEMENT PNEUMATIQUE DES ROTORS D'HÉLICOPTÈRE EN VOL À POINT FIXE

RÉSUMÉ

L'auteur établit l'expression et la variation des grandeurs caractéristiques, dans le cas le plus général, d'un nombre quelconque de flux de gaz d'entraînement, ainsi que dans le cas d'un nombre quelconque de sources d'énergie primaire.

Les formules générales établies sont appliquées à quatre cas simples courants (flux unique, avec et sans post-combustion et flux double, avec ou sans post-combustion dans le flux froid).

La variation des grandeurs caractéristiques de l'entraînement pneumatique (rendement global, puissance utile spécifique, consommation spécifique de combustible, couple spécifique) est étudiée en fonction du rapport entre la vitesse du jet — respectivement, entre la vitesse du jet équivalent dans le cas de plusieurs flux d'entraînement — et la vitesse périphérique correspondante.

L'influence des paramètres cinématiques et aérothermodynamiques internes sur la valeur des grandeurs caractéristiques a été établie par séparation, dans les expressions respectives, des éléments ne dépendant que du paramètre cinématique, de ceux qui ne dépendent que des paramètres aérodynamiques internes.

On étudie ensuite la variation de ces derniers paramètres en fonction du randement adiabatique du générateur de gaz, respectivement, ses paramètres caractéristiques et le rendement interne du rotor et, respectivement, le rapport entre la vitesse du jet et la vitesse de détente idéale des gaz à leur sortie du générateur de gaz.

En conclusion l'auteur discute quelques caractéristiques générales qui ressortent de l'étude ci-dessus, sur l'entraînement pneumatique des rotors d'hélicoptère ainsi que l'effet de la post-combustion sur les performances de l'hélicoptère.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Morain, *Etude comparative d'helicoptères thermopropulsés.* Technique et science aéronautique, *3* (1951).
2. René Dorand, *Giravions à rotors thermopropulsés par fluide, moteur à basse pression.* Technique et science aéronautique, *3* (1951).
3. M. P. Morain, *Les hélicoptères à réaction.* Conférences à l'Institut d'Aéronautique de l'Université libre de Bruxelle, 1956.
4. V. N Juriev, *Aerodinamiceskii rascet vertoletov.* Oboronghiz, Moscova, 1956.
5. A. Joung, *Rascet vertoletov.* Oboronghiz, Moscova, 1954.
6. P. R. Payne, *Power loss and fuel pressure rise due to centrifugal pumping in tip driven helicopter rotors.* Journal of Royal Aeronautical Society, *5* (1955).
7. A. Stepan, *The pressure jet helicopter.* Journal of Royal Aeronautical Society, *1* (1958).
8. A. W Morley, *Boost system for helicopter gas turbines.* The journal of the helicopter association of Great Britain, *2* (1958).

ÎNCOVOIEREA DINAMICĂ A FUSELAJELOR DE ELICOPTER

DE

AL. MARINESCU şi E. SILVEANU

Din practică se constată că o importantă sursă de vibraţii a fuselajelor de elicoptere o constituie excentricităţile în repartiţia maselor rotoarelor.

Acestea pot apare din cauza impreciziunilor constructive sau datorită unui dereglaj al palelor ce poate surveni accidental şi în timpul zborului.

În lucrarea de faţă ne-am propus să analizăm datorită cauzelor de mai sus încovoierea dinamică a fuselajelor cîtorva tipuri constructive de elicoptere.

Precizăm că se au în vedere fuselaje cocă utilizate în marea majoritate a cazurilor de care ne ocupăm, şi în special pentru elicoptere de mare tonaj ele se apropie de grinzi cu rigiditate constantă.

I. ELICOPTER CU UN SINGUR ROTOR

Considerăm fuselajul ca o bară liberă la ambele capete avînd prinsă de ea o masă rotitoare, într-unul din modurile de deformare. Raportăm bara unui sistem de axe Oxu astfel că origina acestuia coincide cu capătul din stînga al barei nedeformate (fig. 1).

Fie l lungimea fuselajului nedeformat, M masa rotorului, a excentricitatea acestuia, ω viteza unghiulară a sa, H poziţia axului rotorului faţă de origine cînd fuselajul este nedeformat şi ΔH scurtarea aparentă suferită de H în urma deformării fuselajului.

Punem deflecţiunea fuselajului într-un punct sub forma

$$u = \zeta(t) \cdot Y(x), \tag{1}$$

unde ζ este coordonata generalizată iar Y forma modală într-unul din modurile normale de deformare.

Cu relaţia (1) scurtarea ΔH poate fi exprimată de

$$\Delta H = \frac{1}{2}\,\zeta^2(t)\int_0^H \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{2}$$

Fie EI rigiditatea la flexiune a fuselajului, γ greutatea unităţii de volum,

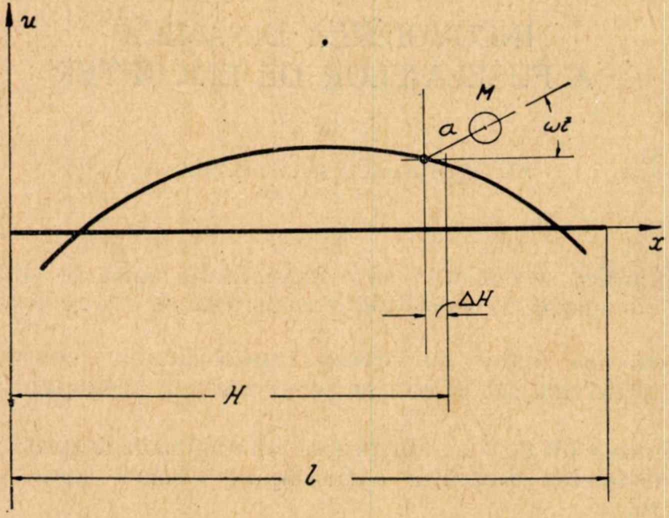


Fig. 1

A aria secţiunii normală pe axul longitudinal, ωt unghiul de poziţie al masei şi

$$\begin{aligned} x &= H - \Delta H + a\cos\omega t, \\ y &\simeq \zeta\cdot Y, \end{aligned} \tag{3}$$

coordonatele centrului masei rotitoare faţă de sistemul Oxu. Energia cinetică şi potenţială a sistemului elastic considerat va fi respectiv

$$T = \frac{\gamma A}{2g}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\,M\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{4}$$

$$V = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\,M\omega^2\,a\,\Delta H\cos\omega t. \tag{5}$$

Notăm cu

$$\Phi_1 = \frac{\gamma A}{2g}\int_0^l Y^2(x).\,dx,$$

$$\Phi_2 = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)^2 dx, \tag{6}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}\int_0^H \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx,$$

şi după ce efectuăm calculele, expresiile (4) şi (5) devin

$$T = \dot\zeta^2\left(\Phi_1 + 2M\zeta^2\Phi_3^2 + \frac{M}{2}Y^2\right) + \\ + 2M\zeta\dot\zeta\,\Phi_3\,a\,\omega\sin\omega t + M\,a^2\,\omega^2\sin^2\omega t, \tag{7}$$

$$V = \zeta^2\left(\Phi_2 + \frac{M}{2}\,a\,\omega^2\,\Phi_3\cos\omega t\right). \tag{8}$$

Cu expresiile (7), (8) ecuaţia lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\zeta}\right) - \frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\zeta} = 0, \tag{9}$$

ne conduce la următoarea ecuaţie diferenţială pe care trebuie s-o satisfacă ζ

$$\ddot\zeta + \Omega^2\,[1 - 2\mu\cos\omega t]\,\zeta + 2\varkappa\,[\zeta\dot\zeta^2 + \ddot\zeta\zeta^2] = 0, \tag{10}$$

în care

$$\Omega^2 = \frac{2\Phi_2}{2\Phi_1 + MY^2}, \tag{11}$$

$$\mu = -\frac{3M\,\Phi_3\,a\,\omega^2}{4\,\Phi_2},$$

$$\varkappa = \frac{2M\Phi_3^2}{2\Phi_1 + MY^2}.$$

Pentru fiecare mod de deformare trebuie cunoscute funcţiile Y, Φ_1, Φ_2, Φ_3 care definesc coeficienţii (11).

În lucrarea [1] am indicat un procedeu care se poate aplica fuselajelor cocă cu rigiditate variabilă.

În lucrarea de faţă ne rezumăm la cazul fuselajelor ce pot fi asimilate cu grinzi de secţiune constantă [2].

Pornim de la expresia generală a formei modale [2]

$$Y(x) = A_1(\cos kx + \mathrm{ch}\,kx) + A_2(\cos kx - \mathrm{ch}\,kx) + \\ + A_3(\sin kx + \mathrm{sh}\,kx) + A_4(\sin kx - \mathrm{sh}\,kx). \tag{12}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI

Extremităţile fuselajului fiind libere avem următoarele condiţii la extremităţi

$$\left[\frac{d^2Y}{dx^2}\right]_{x=0} = 0, \qquad \left[\frac{d^3Y}{dx^3}\right]_{x=0} = 0, \tag{13}$$

$$\left[\frac{d^2Y}{dx^2}\right]_{x=l} = 0, \qquad \left[\frac{d^3Y}{dx^3}\right]_{x=l} = 0.$$

Primele două condiţii (13) impun pentru cazul de faţă forma modală

$$Y(x) = A_1\,(\cos kx + \operatorname{ch} kx) + A_3\,(\sin kx + \operatorname{sh} kx) \tag{14}$$

raportul coeficienţilor A_1, A_3 putînd fi determinat din relaţiile

$$\frac{A_1}{\cos kl - \operatorname{ch} kl} = \frac{A_3}{\operatorname{sh} kl - \sin kl} = \lambda, \tag{15}$$

unde k şi λ sînt cunoscuţi pentru fiecare mod de deformare.

Din prima relaţie (6) ţinînd seama de (14) obţinem funcţia Φ_1 sub forma

$$\Phi_1 = \frac{A\gamma}{2g}\int_0^l [A_1\,(\cos kx + \operatorname{ch} kx) + A_3\,(\sin kx + \operatorname{sh} kx)]^2\,dx. \tag{16}$$

După ce efectuăm integralele şi grupăm termenii, expresia (16) devine

$$\begin{aligned}\Phi_1 = \frac{A\gamma}{2g}\Bigg[& \frac{A_1^2}{2}\left(\frac{1}{2k}\sin 2\,kl + l\right) + \frac{A_1^2}{k}(\operatorname{sh} kl \cos kl + \operatorname{ch} kl \sin kl) + \\ & + \frac{A_1^2}{2}\left(\frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2\,kl + l\right) - \frac{A_1 A_3}{2k}(\cos 2\,kl - 1) + \\ & + \frac{A_1 A_3}{k}(\operatorname{ch} kl \cos kl + \operatorname{sh} kl \sin kl - 1) + \\ & + \frac{A_1 A_3}{k}(\operatorname{sh} kl \sin kl - \operatorname{ch} kl \cos kl + 1) + \\ & + \frac{A_1 A_3}{2k}(\operatorname{ch} 2\,kl - 1) + \frac{A_3^2}{2}\left(l - \frac{1}{2k}\sin 2\,kl\right) + \\ & + \frac{A_3^2}{k}(\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl) + \frac{A_3^2}{2}\left(\frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2kl - l\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{17}$$

A doua relație (6) se scrie acum

$$\begin{aligned}\Phi_2 = \frac{k^4}{2} EI \int_0^l [& A_1^2 (\operatorname{ch}^2 kx - 2 \operatorname{ch} kx \cos kx + \cos^2 kx) + \\ & + 2 A_1 A_3 (\operatorname{sh} kx \operatorname{ch} kx - \operatorname{sh} kx \cos kx - \sin kx \operatorname{ch} kx + \\ & + \sin kx \cos kx) + A_3^2 (\operatorname{sh}^2 kx - 2 \operatorname{sh} kx \sin kx + \sin^2 kx)]\, dx,\end{aligned} \tag{18}$$

care devine efectuînd calculele

$$\begin{aligned}\Phi_2 = \frac{k^4}{2} EI \Big[& \frac{A_1^2}{2} \left(\frac{1}{2k} \operatorname{sh} 2\, kl + l \right) - \frac{A_1^2}{k} (\operatorname{sh} kl \cos kl + \operatorname{ch} kl \sin kl) + \\ & + \frac{A_1^2}{2} \left(\frac{1}{2k} \sin 2kl + l \right) + \frac{A_1 A_3}{2k} (\operatorname{ch} 2kl - 1) - \frac{A_1 A_3}{k} (\operatorname{ch} kl \cos kl + \\ & + \operatorname{sh} kl \sin kl - 1) - \frac{A_1 A_3}{k} (\operatorname{sh} kl \sin kl - \operatorname{ch} kl \cos kl + 1) - \\ & - \frac{A_1 A_3}{2k} (\cos 2kl - 1) + \frac{A_3^2}{2} \left(\frac{1}{2k} \operatorname{sh} 2kl - l \right) - \frac{A_3^2}{k} (\operatorname{ch} kl \sin kl - \\ & - \operatorname{sh} kl \cos kl) + \frac{A_3^2}{2} \left(l - \frac{1}{2k} \operatorname{sh} 2kl \right) \Big].\end{aligned} \tag{19}$$

În sfîrșit, a treia relație (6) se scrie

$$\begin{aligned}\Phi_3 = \frac{k^2}{2} \int_0^H [& A_1^2 (\sin^2 kx - 2 \operatorname{sh} kx \sin kx + \operatorname{sh}^2 kx) + \\ & + 2 A_1 A_3 (- \sin kx \cos kx - \sin kx \operatorname{ch} kx + \operatorname{sh} kx \cos kx + \\ & + \operatorname{sh} kx \operatorname{ch} kx) + A_3^2 (\cos^2 kx + 2 \operatorname{ch} kx \cos kx + \operatorname{ch}^2 kx)]\, dx,\end{aligned} \tag{20}$$

sau după ce efectuăm calculele

$$\begin{aligned}\Phi_3 = \frac{k^2}{2} \Big[& \frac{A_1^2}{2} \left(H - \frac{1}{2k} \sin 2\, kH \right) - \frac{A_1^2}{k} (\operatorname{ch} kH \sin kH - \operatorname{sh} kH \cos kH) + \\ & + \frac{A_1^2}{2} (\operatorname{sh} 2kH - H) + \frac{A_1 A_3}{2k} (\cos 2kH - 1) - \frac{A_1 A_3}{k} (\operatorname{sh} kH \sin kH - \\ & - \operatorname{ch} kH \cos kH + 1) + \frac{A_1 A_3}{k} (\operatorname{ch} kH \cos kH + \operatorname{sh} kH \sin kH - 1) + \\ & + \frac{A_1 A_3}{2k} (\operatorname{ch} kH - 1) + \frac{A_3^2}{2} \left(H + \frac{1}{2k} \sin 2kH \right) + \frac{A_3^2}{k} (\operatorname{sh} kH \cos kH + \\ & + \operatorname{ch} kH \sin kH) + \frac{A_3^2}{2} \left(H + \frac{1}{2k} \operatorname{sh} 2kH \right) \Big].\end{aligned} \tag{21}$$

Cercetarea deformării fuselajului apelează la cunoaşterea soluţiei ecuaţiei (10).

Pentru cerinţele practicii este suficientă cunoaşterea amplitudinii mişcărilor vibratorii care, din fericire pentru cazul de faţă, se poate găsi fără să mai fim nevoiţi a cunoaşte propriu-zis soluţia.

Deoarece în lucrarea [1] s-a arătat în detaliu metoda pentru determinarea amplitudinii, în prezenta lucrare vom face foarte succint acest lucru.

Punem

$$\zeta(t) = \alpha \sin\frac{\omega t}{2} + \beta \cos\frac{\omega t}{2}, \tag{22}$$

din care cauză grupul termenilor neliniari

$$\varphi = 2\varkappa\,[\zeta^2\,\ddot{\zeta} + \zeta\,\dot{\zeta}^2], \tag{23}$$

se poate dezvolta în serie Fourier pe care o reţinem sub forma

$$\varphi = U_0 + U\sin\frac{\omega t}{2} + W\cos\frac{\omega t}{2}. \tag{24}$$

Coeficienţii Fourier U şi W care prezintă interes au expresiile

$$U = -\frac{\varkappa\,\omega^2 A^2}{4}\,\alpha, \tag{25}$$

$$W = -\frac{\varkappa\,\omega^2 A^2}{4}\,\beta,$$

unde $A^2 = \alpha^2 + \beta^2$ este chiar pătratul amplitudinii.

Înlocuind ζ şi φ în ecuaţia diferenţială (10) condiţia ca aceasta să fie valabilă la orice valoare a lui ωt rezultă, deoarece α şi β nu sînt simultani nuli, expresia pătratului amplitudinii

$$A^2 = \frac{\Omega^2(1 \pm 2\mu) - \dfrac{\omega^2}{4}}{\dfrac{\varkappa\,\omega^2}{4}}, \tag{26}$$

care permite lucrul de altfel cel mai important pentru practică, şi cercetarea fenomenului de rezonanţă. Deflecţiunea fuselajului într-un punct se obţine înmulţind amplitudinea cu funcţiunea $Y(x)$.

II. ELICOPTER CU DOUĂ ROTOARE COAXIALE CONTRAROTATIVE

Pentru acest caz (fig. 2) în care se presupun dezaxări aproape egale, viteza unghiulară egală şi de sens contrar ale rotorului, mase egale ale acestora şi defazaje mici, problema se tratează absolut la fel ca în cazul precedent. Chiar dacă se ia riguros pentru coordonatele y_1 şi y_2 ale fiecărui rotor expresiile

$$\begin{aligned} y_1 &= \zeta \cdot Y + a \sin \omega t, \\ y_2 &= \zeta \cdot Y - a \sin \omega t, \end{aligned} \tag{27}$$

se ajunge pe calea indicată anterior la ecuaţia diferenţială pentru ζ

$$\ddot{\zeta} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \omega t)\, \zeta + 2\varkappa\, (\zeta\dot{\zeta}^2 + \ddot{\zeta}\zeta^2) = 0, \tag{28}$$

unde

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\Phi_2}{\Phi_1 + MY^2}, \\ \mu &= -\frac{M\Phi_3}{\Phi_2}\, a\, \omega^2, \\ \varkappa &= \frac{2M\Phi_3^2}{\Phi_1 + MY^2}. \end{aligned} \tag{29}$$

În expresiile (29) trebuie reţinut că M reprezintă masa unui singur rotor. Restul calculelor este uşor de înţeles că se conduce ca şi mai înainte.

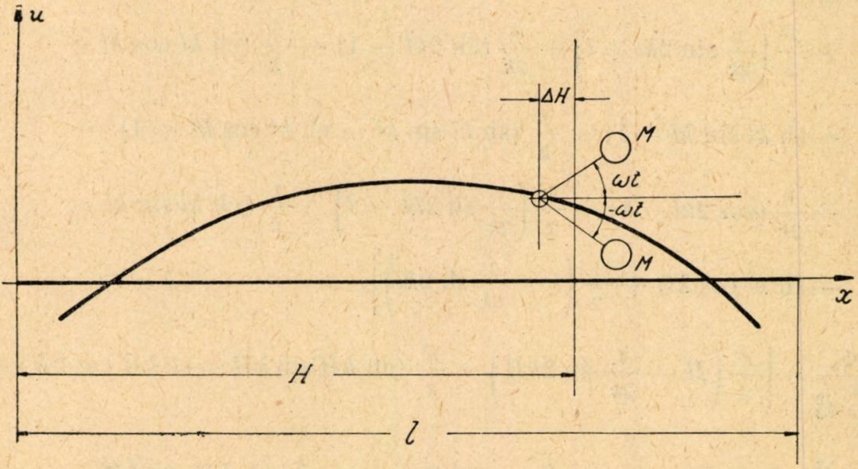


Fig. 2

Pentru aplicaţii este indicat să facem cîteva dezvoltări de calcul. În acest sens vom căuta să punem sub o formă convenabilă funcţiile $Y(H)$, Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Punînd după (15)

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{\cos kl - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl - \sin kl} = \lambda, \tag{30}$$

şi ţinînd seama de (14), (17), (19), (21) funcţiile în cauză se scriu

$$\frac{Y(H)}{A_3} = [\lambda(\cos kH + \operatorname{ch} kH) + (\sin kH + \operatorname{sh} kH)], \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_1}{\frac{A\gamma A_3^2}{2g}} = {} & \biggl[\frac{\lambda^2}{2}\biggl(\frac{1}{2k}\sin 2kl + l\biggr) + \frac{\lambda^2}{k}(\operatorname{sh} kl \cos kl + \operatorname{ch} kl \sin kl) + \\
& + \frac{\lambda^2}{2}\biggl(\frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2kl + l\biggr) - \frac{\lambda}{2k}(\cos 2kl - 1) + \frac{\lambda}{k}(\operatorname{ch} kl \cos kl + \\
& + \operatorname{sh} kl \sin kl - 1) + \frac{\lambda}{k}(\operatorname{sh} kl \sin kl - \operatorname{ch} kl \cos kl + 1) + \\
& + \frac{\lambda}{2k}(\operatorname{ch} 2kl - 1) + \frac{1}{2}\biggl(l - \frac{1}{2k}\sin 2kl\biggr) + \\
& + \frac{1}{k}(\operatorname{ch} kl \sin kl - \operatorname{sh} kl \cos kl) + \frac{1}{2}\biggl(\frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2kl - l\biggr)\biggr],
\end{aligned} \tag{31'}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_2}{\frac{k^4}{2}EI A_3^2} = {} & \biggl[\frac{\lambda^2}{2}\biggl(\frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2kl + l\biggr) - \frac{\lambda^2}{k}(\operatorname{sh} kl \cos kl + \operatorname{ch} kl \sin kl) + \\
& + \frac{\lambda^2}{2}\biggl(\frac{1}{2k}\sin 2kl + l\biggr) + \frac{\lambda}{2k}(\operatorname{ch} 2kl - 1) - \frac{\lambda}{k}(\operatorname{ch} kl \cos kl + \\
& + \operatorname{sh} kl \sin kl - 1) - \frac{\lambda}{k}(\operatorname{sh} kl \sin kl - \operatorname{ch} kl \cos kl + 1) - \\
& - \frac{\lambda}{2k}(\cos 2kl - 1) + \frac{1}{2}\biggl(\frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2kl - l\biggr) - \frac{1}{k}(\operatorname{ch} kl \sin kl - \\
& - \operatorname{sh} kl \cos kl) + \frac{1}{2}\biggl(l - \frac{1}{2k}\operatorname{sh} 2kl\biggr)\biggr],
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_3}{\frac{k^2}{2}A_3^2} = {} & \biggl[\frac{\lambda^2}{2}\biggl(H - \frac{1}{2k}\sin 2kH\biggr) - \frac{\lambda^2}{k}(\operatorname{ch} kH \sin kH - \operatorname{sh} kH \cos kH) + \\
& + \frac{\lambda^2}{2}(\operatorname{sh} 2kH - H) + \frac{\lambda}{2k}(\cos 2kH - 1) - \frac{\lambda}{k}(\operatorname{sh} kH \sin kH - \\
& - \operatorname{ch} kH \cos kH + 1) + \frac{\lambda}{k}(\operatorname{ch} kH \cdot \cos kH + \operatorname{sh} kH \sin kH - 1) + \\
& + \frac{\lambda}{2k}(\operatorname{ch} kH - 1) + \frac{1}{2}\biggl(H + \frac{1}{2k}\sin 2kH\biggr) + \frac{1}{k}(\operatorname{sh} kH \cos kH + \\
& + \operatorname{ch} kH \sin kH) + \frac{1}{2}\biggl(H + \frac{1}{2k}\sin 2kH\biggr)\biggr].
\end{aligned} \tag{33}$$

Pentru cîteva moduri expresiile (31), (31′), (32), (33) au fost calculate şi valorile obţinute sînt înscrise în tabela anexată.

Tabela

	l	H	$\frac{\Phi_1}{\frac{A\gamma A_3^2}{2g}}$	$\frac{\Phi_2}{\frac{k^4}{2} EI A_3^2}$	$\frac{\Phi_3}{\frac{k^2}{2} A_3^2}$	$\frac{Y(H)}{A_3}$
$k_1 l = 0$	10	8	0	0	8	0
	20	16	0	0	16	0
	30	25	0	0	25	0
	40	35	0	0	35	0
$k_2 l = 4{,}73$	10	8	9	−3338	986	0,16
	20	16	18	−6766	1484	0,16
	30	25	27	−10147	2730	0,01
	40	35	36	−13532	5064	−0,26
$k_3 l = 7{,}853$	10	8	11	−1057417	117575	−1
	20	16	19	−2108980	162266	−1
	30	25	30	−3162381	350881	−0,71
	40	35	38	−4216562	826701	−0,27
$k_4 l = 10{,}996$	10	8	9	−101021906	15899704	1,4
	20	16	19	−202044397	20877831	1,4
	30	25	28	−304450383	53942102	1,21
	40	35	38	−404197766	160331994	0,83

Este de observat că metoda mai sus descrisă pune în evidenţă şi forma modală susceptibilă de valorile cele mai mari ale deflecţiunii fuselajului, care constructiv poate fi modificată.

Pentru calculul de rezistenţă propriu-zis, avînd funcţia liniei deformate a fuselajului mersul calculelor este cel obişnuit.

Primită la redacţie la 18 iunie 1958.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ФЮЗЕЛЯЖА ВЕРТОЛЕТА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе излагается метод анализа динамического изгиба фюзеляжа вертолета, причем в качестве решающего динамического фактора принимается эксцентричность распределения масс на несущем винте.

FLEXION DYNAMIQUE DES FUSELAGES D'HÉLICOPTÈRE

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent dans ce travail une méthode pour l'analyse de la flexion dynamique du fuselage d'hélicoptère, en considérant comme facteur dynamique dominant les excentricités dans la répartition des masses sur le rotor.

BIBLIOGRAFIE

1. Al. MARINESCU, *Asupra vibrației consolei anticuplu la elicopterele cu un singur rotor*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *4* (1958).
2. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations*. Paris — Liege, 1948.

CAZURILE PARTICULARE ALE CURBEI CENTRELOR BURMESTER, CU PUNCT DUBLU, ŞI IMPORTANŢA LOR PENTRU TEORIA MECANISMELOR

DE

J. VOLMER *)

1. INTRODUCERE

Pentru evitarea construcţiilor grafice la trasarea curbei centrelor Burmester, se face pe cît posibil uz de cazurile particulare ale acestei curbe. În asemenea cazuri, curba degenerează, transformîndu-se în elemente geometrice care pot fi desenate cu uşurinţă, ca de exemplu hiperbola echilateră, cercul sau dreapta. Pe astfel de cazuri particulare se bazează un mare număr de metode simple ce servesc pentru dimensionarea mecanismelor articulate.

Curba centrelor este o curbă circulară de ordinul al treilea (curbă focală); în general ea se compune din una sau două ramuri. În cazul limită, ea devine o curbă raţională, cu alte cuvinte curba posedă singurul punct dublu posibil care nu se descompune. Curba centrelor cu punct dublu apare în toate cazurile în care cîte două din patru poziţii ale unui plan supus unei translaţii coplanare se află la o depărtare infinit de mică. Cu toate că acest fapt este cunoscut [4], [5], [6], [7], [11] şi cu toate că au fost cercetate pînă în prezent un număr de cazuri particulare ale curbelor centrelor cu punct dublu [1], [2], [3] respectiv au rezultat astfel de cazuri particulare la soluţionarea a diferite probleme de mecanisme [9], [10], [12], [13], [14], [15], lipseşte pînă în prezent o sistematizare a tuturor cazurilor particulare posibile, sistematizare care prezintă importanţă pentru a forma baza unei trasări simplificate a curbei. De aceea, se va da în cele ce urmează o expunere de ansamblu a acestor cazuri particulare. Pe de altă parte se vor clarifica cu ocazia acestor cazuri particulare şi relaţiile ce există între curba centrelor şi curba corespunzătoare a punctelor circulare.

---

*) VEB — Buchungsmaschinenwerk, Karl-Marx-Stadt (R.D.G.).

2. CURBA CENTRELOR CU PUNCT DUBLU

Presupunem că se dau de două ori două poziții învecinate p_1, p_2 şi p_3, p_4 ale unui plan p supus unei mişcări coplanare. Cei doi poli instantanei P_{12} și P_{34} în jurul cărora planul p se roteşte în planul fix q de la p_1 la p_2 respectiv de la p_3 la p_4 sînt de asemenea presupuși ca dați (fig. 1). Ceilalți poli P_{13}, P_{14}, P_{23} şi P_{24} se reunesc în polul P care se determină ca punct de intersecție a perpendicularelor pe mijlocul lui A_1A_3 şi B_1B_3, planul mobil p fiind caracterizat prin distanța AB. În acest caz rezultă următorul procedeu pentru trasarea prin puncte a curbei m a centrelor, pentru care, în cazul general, sînt necesare două perechi de poli contrari : axa centrală (axa focală) z trece prin P și prin centrul distanței P_{12} P_{34}.

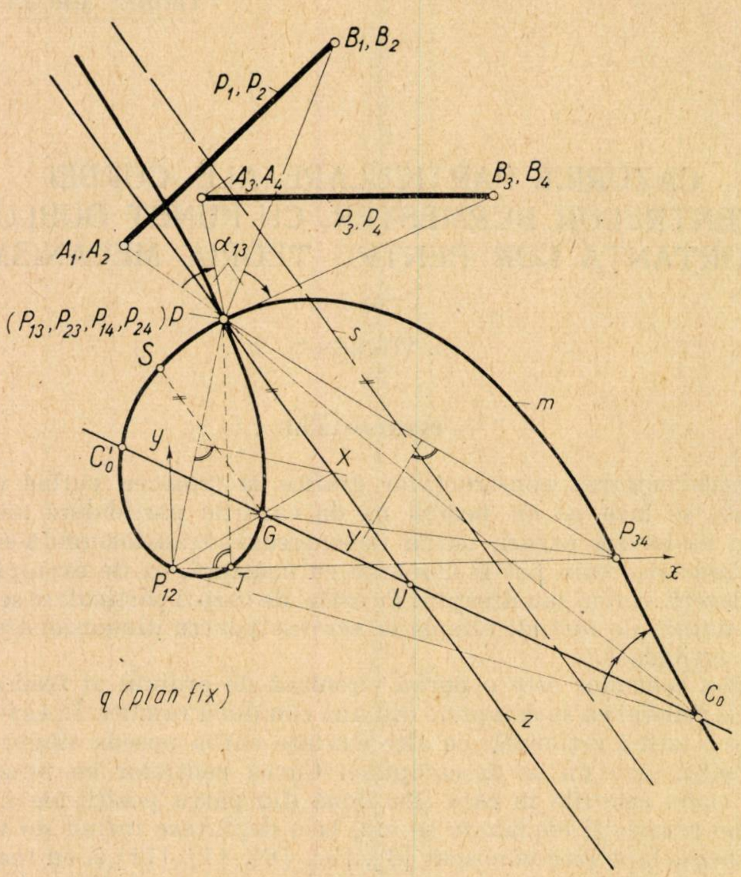


Fig. 1. — Trasarea curbei centrelor de formă generală compusă dintr-o singură ramură și avînd un punct dublu.

Focarul principal G se determină în modul cel mai simplu *) ca punct de intersecție a dreptelor $P_{12}X$ și $P_{34}Y$, X și Y fiind intersecțiile cu z ale perpendicularelor pe mijloacele lui PP_{12} și PP_{34}. Curba centrelor m se obține prin puncte, luînd pe razele duse din G distanțe egale UP, UC_0, și UC_0'. U este punctul de intersecție cu z a razei respective, iar C_0 și C_0' sînt puncte ale curbei centrelor m, care deci va trece prin P_{12}, P_{34} și G, posedînd un punct dublu în P. Punctul S al curbei rezultă ca punct de intersecție al razei paralele cu z, dusă prin G cu perpendiculara dusă în P pe z. O altă metodă de a trasa prin puncte curba m constă în ducerea din P_{12} și P_{34} sau din alte două puncte așa-zise conjugate a unor tangente la niște cercuri în jurul lui P (fig. 3); punctele de intersecție ale tangentelor vor fi puncte ale curbei căutate [11]. Această construcție se bazează pe faptul cunoscut, că se poate considera curba centrelor și ca locul geometric al punctelor din care două distanțe polare — de exemplu $P_{12}P_{13}$ și $P_{24}P_{34}$ sînt văzute sub același unghi. În cazul unei curbe a centrelor cu punct dublu în P va trebui deci ca din fiecare punct al curbei distanțele $P_{12}P$ și PP_{34} să apară sub același unghi (fig. 1 și 3). Pe această bază se poate determina și ecuația curbei. Cu sistemul de coordonate din figură rezultă ecuația

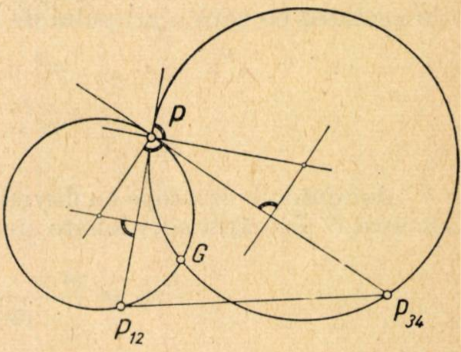


Fig. 2. — Determinarea focarului principal G cu ajutorul a două cercuri.

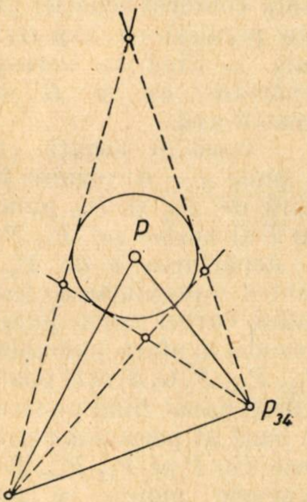


Fig. 3. — Determinarea prin puncte a curbei centrelor compusă dintr-o singură ramură și cu punct dublu, cu ajutorul unor cercuri în jurul polului P și al unor tangente.

$$(x^2 + y^2)\,[2cx - y\,(2b - a) + 2c\,(b - a)] +$$
$$+ (a - 2x)\,[y(c^2 - b^2) + 2\,bcx] = 0, \qquad (1)$$

în care caz polii au coordonatele P_{12} (0, 0), P_{34} (a, 0) și P (b, c). Ecuația arată că este vorba de o curbă circulară de ordinul al treilea. Ea fiind curbă focală, este și locul geometric al focarelor, celor ∞^1 conice, ce pot fi înscrise în patrulaterul degenerat $P_{12}PP_{34}$, și deci care ating dreapta $P_{12}P$ în P_{12} și dreapta

---

*) La o altă metodă grafică două cercuri duse prin P, P_{12} respectiv prin P, P_{34} se intersectează în punctul G, centrele acestor cercuri fiind determinate cu ajutorul perpendicularelor pe mijlocul lui PP_{12} și PP_{34} și a perpendicularelor duse din P pe PP_{12} și PP_{34} conform figurii 2 [1]. Această metodă este bună de aplicat atunci cînd unghiul $P_{12}PP_{34}$ este $\approx 90°$. În cazul cînd unghiul $P_{12}\,PP_{34} = 90°$ punctul G coincide cu T.

PP_{34} în P_{34}, punctul G fiind focarul singurei parabole posibile din acest fascicol. Direcțiile $m = \frac{y}{x}$ ale asimptotelor lor în raport cu axa x se obține prin egalarea cu zero a grupului de termeni de ordinul al treilea

$$m^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

$$m = \frac{2c}{2b - a}. \tag{3}$$

Asimptotele izotrope cu direcțiile $m = \pm\, i$ se intersectează în focarul principal G ale cărui coordonate sînt

$$x_G = \frac{b^2(2b - a) + c^2(2b + a)}{(2b - a)^2 + 4c^2}, \tag{4}$$

$$y_G = \frac{2c\,(b^2 - ba + c^2)}{(2b - a)^2 + 4c^2}, \tag{5}$$

pe cînd asimptota reală s cu pantă conform ecuației (3) este paralelă cu axa centrală z, fiind la aceeași depărtare ca și G de această axă.

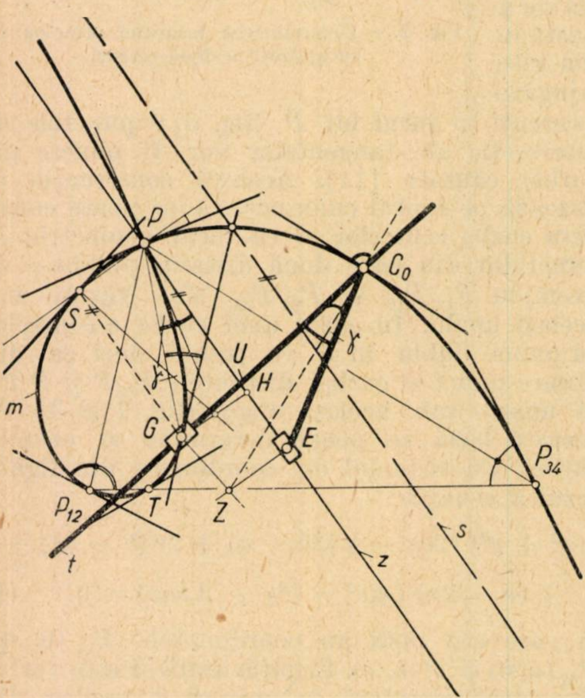


Fig. 4. — Trasarea tangentelor în punctele curbei m a centrelor și generarea pe cale mecanică cu ajutorul unei culise unghiulare.

Dacă în ecuația (1) se pune $y = 0$ rezultă în afară de P_{12} și P_{34} punctul T al curbei pe $P_{12}\,P_{34}$ la depărtarea b de P_{12}. Pentru aproximarea traseului curbei acest punct este util în afara punctelor P_{12}, P_{34}, P, G, S, s; el poate fi determinat fiind punctul de bază al perpendicularei duse din P pe $P_{12}\,P_{34}$. Tot în aceste puncte se pot determina în mod simplu și tangentele conform figurii 4, în felul următor :

În punctul dublu P tangentele sînt perpendiculare una pe cealaltă ; ele bisectează unghiurile formate de axa centrală z cu dreapta GP. Tangenta în P_{12} și $P_{12}\,P_{34}$ formează același unghi cu $P_{12}\,P$. Același lucru se întîmplă și cu tangenta în P_{34}. Normala din S împarte în două părți egale segmentul GH, H fiind punctul de bază al perpendicularei pe z dusă din G. Tangenta în G trece prin punctul de intersecție cu z al perpendicularei pe mijlocul lui GP. Punctul în care această tangentă intersectează asimptota s este un punct al curbei căutate.

Enunțările de mai sus pot fi deduse pe baza ecuației curbei (1), precum și a următoarei construcții generale a tangentelor [4]: pe cale mecanică curba m poate fi generată de punctul de articulație al unei culise unghiulare, a cărei tije t trece în permanență prin G, în timp ce punctul de articulație E alunecă pe z. Din figura 4, se poate deduce direct că triunghiurile GPU și EC_0U sînt egale și inverse, dat fiind că avem $PU = UC_0$ și deci $\gamma = \sphericalangle GPU = \sphericalangle UC_0E$ și $PG = C_0E$.

Centrul instantaneu Z al mișcării bielei va fi punctul de intersecție al perpendicularelor duse prin G și E pe t și z. Rezultă deci că ZC_0 este normala la curbă în punctul C_0 al curbei. Deoarece punctul E al pietrei de culisă este la depărtarea $SP = GH$ de tija t, mecanismul pentru $C_0 \equiv S$ va intra într-o poziție de rebrusment, dincolo de care el va putea descrie curba m sau dreapta trecînd prin G și S. Pentru construcția prin puncte este în majoritatea cazurilor suficient să se traseze axa centrală z și punctele P și G pe o hîrtie transparentă, după care această hîrtie este plasată invers pe foaia de desen iar axa centrală z este trecută ca dreaptă t prin punctul G, iar punctul G de pe foaia transparentă este făcut să alunece pe z ca punct E, în timp ce punctul P al hîrtiei transparente va descrie curba centrelor m, care va fi obținută înțepîndu-se cu un ac diferitele poziții succesive ale punctului P pe foaia de desen.

3. CAZURI PARTICULARE

Pentru anumite forme ale triunghiului alcătuit de polii P, P_{12} și P_{34} se obțin cazuri particulare ale curbei focale. Va exista un caz particular ori de cîte ori curba focală posedă mai mult decît un singur punct dublu, și deci fiind curbă de ordinul 3, va degenera în curbe de ordinul 1 și 2, putînd rezulta următoarele cazuri:

a) un cerc și o dreaptă (două puncte duble);

b) o hiperbolă echilateră și o dreaptă imaginară (două puncte duble);

c) două drepte perpendiculare și o dreaptă imaginară (trei puncte duble);

d) o dreaptă și o dreaptă imaginară luată de două ori (trei puncte duble).

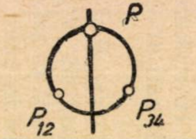
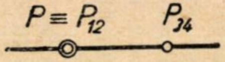
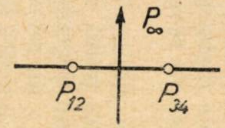
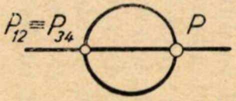
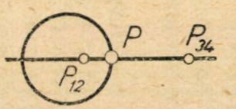
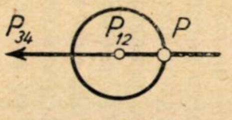
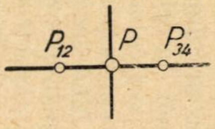
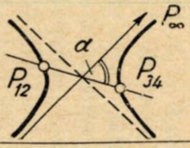
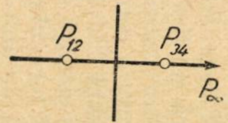
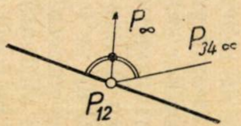
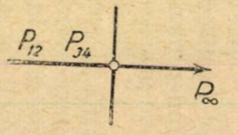
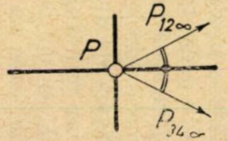
În tabelă sînt indicate toate cazurile particulare posibile arătîndu-se și rezultatul degenerării precum și condițiile de distanță ce trebuie să le îndeplinească cei trei poli. În cele ce urmează se va reveni mai amănunțit asupra acestor cazuri particulare.

În figura 5 este reprezentată o situație a polilor în care P și P_{12} se află la distanță finită, fiind dată și direcția spre polul imaginar $P_{34\infty}$. Pe baza acestei situații a polilor, curba centrelor nu degenerează în mod obligatoriu, însă focarul principal G și axa centrală z nu rezultă în acest caz în mod tot atît de univoc prin metodele grafice indicate la punctul 2.

Din ecuația (1), în care $a \to \infty$, rezultă ca ecuație a curbei

$$(x^2 + y^2)(y - 2c) + y(c^2 - b^2) + 2bcx = 0, \tag{6}$$

Tabela

	Forma curbei	$\frac{m}{k_1}$	Dispoziția polurilor		Forma curbei	$\frac{m}{k_1}$	Dispoziția polurilor
1		cerc dreaptă k_1 : 1,4 R, 8RR	$PP_{12} = PP_{34}$	7		cerc (raza 0) dreaptă k_1 : 7RR	$P \equiv P_{12}$
2		două drepte U_∞ k_1 : 2,6 RR	P_∞ $\measuredangle P_\infty P_{12} P_{34} = 90°$	8		cerc dreaptă k_1 : 1RR, 8RRR	$P_{12} \equiv P_{34}$
3		cerc armonic, dreaptă k_1 : 3RR, curba generală — R	P, P_{12} și P_{34} pe o dreaptă, $PP_{12} \neq PP_{34}$	9		cerc dreaptă k_1: 9RR, curba generală cu $P_{34\infty}R$	P, P_{12} și $P_{34\infty}$ pe o dreaptă
4		două drepte U_∞ k_1 : 1R, 8RRR	P, P_{12} și P_{34} pe o dreaptă, $PP_{12} = PP_{34}$	10		hiperbola echilateră U_∞ k_1 : 10,5R	P_∞ $\measuredangle P_\infty P_{12} P_{34} = \alpha$ $\alpha \neq 90°$
5		două drepte U_∞ k_1 : 10R	P, P_{12} și P_{34} pe o dreaptă P_∞	11		dreapta, de două ori U_∞ k_1 : 11	P_∞ $P_{34\infty}$
6		două drepte U_∞ k_1 : 2RR	P_∞ $P_{12} \equiv P_{34}$	12		două drepte U_∞ k_1 : 12	$P_{12\infty}$ $P_{34\infty}$

care pentru $b = 0$ devine simetrică față de axa x, fiind în această formă curba cunoscută sub denumirea de strofoidă

$$(x^2 + y^2)(y - 2c) + yc^2 = 0. \tag{7}$$

Din ecuația (6) se vede că pentru situația indicată a polilor rezultă tot o curbă de ordinul 3. Metoda lui N. Alt [2] pentru determinarea prin puncte a curbei poate fi în acest caz mult simplificată : ca axă centrală z, a cărei pantă este în general $2c/(2b - a)$ și care trece prin P, rezultă dreapta $y = c$, adică dreapta $PP_{34\infty}$ iar focarul principal G coincide cu P_{12}, deoarece cu $a \rightarrow \infty$ rezultă prin calcul din ecuațiile (6) și (7) $x_G = y_G = 0$. Pe o rază dusă din G se obțin deci punctele C_0 și C'_0 ale curbei, dacă se ia $PU = UC'_0 = UC_0$, U fiind intersecția razei cu axa centrală z (fig. 5). Asimptota reală a curbei s este paralelă cu z și are aceeași distanță de G ca și z. Determinarea grafică a tangentei într-un punct oarecare al curbei precum și a tangentelor în punctele remarcabile P_{12}, P, G și $S \equiv T$ poate fi luată din cazul general al curbei focale.

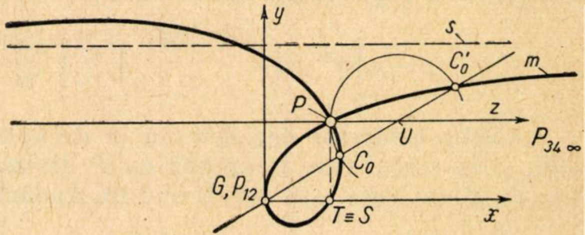


Fig. 5. — Curba centrelor cu pol P_{34} situat la infinit.

Cazurile particulare ale curbei centrelor, care sînt trecute toate în tabelă, pot fi trasate cu ușurință. Construcții speciale devin necesare numai în cazurile particulare 3 și 10 din tabelă, asupra cărora se va reveni. Restul cazurilor particulare se reduc toate la niște drepte, respectiv la o dreaptă și un cerc, iar din figuri reiese clar cum trebuie trasate aceste drepte sau cercuri. Se renunță aici la demonstrarea indicațiilor date în tabelă. Ecuațiile porțiunilor de curbă rezultă din ecuația (1), în care se introduc coordonatele polilor. Ca exemplu se va face următoarea operație pentru cazul *1* :

Polii au coordonatele $P_{12}\,(0, 0)$, $P_{34}\,(a, 0)$, și $P\,(a, c)$, cu alte cuvinte polii P_{12} și P_{34} sînt la aceeași depărtare de P. Deci dacă în ecuația (1) se pune $b = a/2$ rezultă

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{4c^2 - a^2}{4c}\,y - a\,x\right) = 0. \tag{8}$$

Aceasta este ecuația dreptei $x = a/2$, care este în același timp și axa centrală z, precum și a cercului

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{4c^2 - a^2}{8c}\right)^2 = \left(\frac{4c^2 + a^2}{8c}\right)^2 \tag{8 a}$$

care trece prin cei trei poli și al cărui centru G are coordonatele

$$x_G = \frac{a}{2}, \tag{9}$$

$$y_G = \frac{4c^2 - a^2}{8c}, \tag{10}$$

ce rezultă şi din ecuaţiile (4) şi (5) dacă se ia $b = a/2$, drept coordonate ale focarului principal G. Se pot deci generaliza următoarele : cînd curba centrelor degenerează într-un cerc şi o dreaptă, focarul principal este identic cu centrul cercului. De altfel şi aplicarea metodei generale de trasare a curbei duce în mod obligatoriu la aceste elemente ale degenerării curbei.

Cazul particular 3. Dacă P_{12}, P_{34} şi P sînt situate pe aceeaşi dreaptă, iar $P_{12}P = PP_{34}$ se obţine din ecuaţia (1) în care $C = 0$

$$y\left[y^2 + \left(x - \frac{b^2}{2b-a}\right)^2 - \left(\frac{b(b-a)}{2b-a}\right)^2\right] = 0. \tag{11}$$

Curba centrelor degenerează în dreapta $y = 0$ pe care sînt situaţi polii, şi în cercul care împreună cu P divizează armonic distanţa $P_{12}P_{34}$ (fig. 6). Acest cerc este deci cercul lui Apolonius şi deci locul geometric al punctelor din care distanţele $P_{12}P$ şi PP_{34} apar sub acelaşi unghi. Dacă polii sînt daţi, acest cerc poate fi construit prin diferite metode.

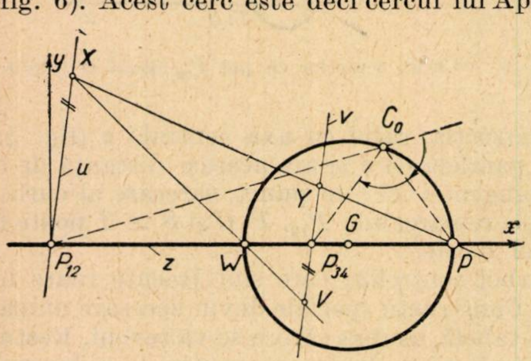


Fig. 6. — Determinarea cercului armonic al lui P_{12}, P_{34}, şi P.

Prin P_{12} şi P_{34} se duc două paralele u şi v care sînt intersectate în X şi Y de o dreaptă oarecare dusă prin P. Făcînd $YP_{34} = P_{34}V$ (fig. 6) dreapta YV va intersecta dreapta z în punctul W, care reprezintă cel de al patrulea punct armonic căutat. Segmentul PW va fi diametrul cercului căutat cu centrul în G. Cînd P este înăuntrul distanţei P_{12} P_{34} se poate de asemenea aplica această metodă.

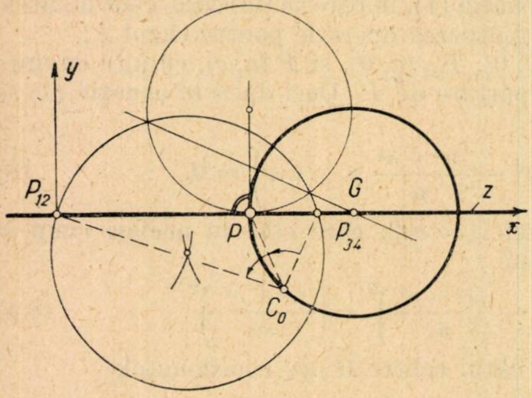


Fig. 7. — Determinarea lui G ca centru de involută.

O altă metodă mai simplă se bazează pe determinarea lui G ca centru al unei involute pe z, determinată prin perechea de puncte P_{12}, P_{34}. Se duce un cerc arbitrar care atinge pe z în P; prin cei doi poli P_{12} şi P_{34} se duce de asemenea un cerc arbitrar. Dreapta care uneşte punctele de intersecţie ale celor două cercuri va intersecta pe z în G astfel că se obţine cercul căutat cu centrul în G şi care trece prin P (fig. 7).

Metodele grafice indicate în figurile 6 şi 7 suferă de anumite imprecizii atunci cînd P este situat aproape de mijlocul lui $P_{12}\, P_{34}$ sau la distanţă mare de $P_{12}\, P_{34}$. În aceste cazuri diametrul cercului devine mare şi este avantajos ca distanţa dintre centrul G al cercului şi P_{12} să fie calculată pe baza distanţelor polare a şi b cu formula

$$x_G = \frac{b^2}{2b - a}. \tag{12}$$

Cînd P este situat în centrul lui $P_{12}\, P_{34}$, adică $b = a/2$, sau la infinit adică $b = \infty$, avem $x_G = \infty$ şi rezultă cazul particular 4 sau 5 respectiv 6 cu $P_{12} \equiv P_{34}$ din tabelă, la care cercul degenerează devenind o dreaptă.

De asemenea, P poate fi situat chiar în P_{12} (sau în P_{34}) adică $b = 0$. În acest caz cercul are raza nulă iar centrul său G devine identic cu P_{12} (sau P_{34}), cazul particular 7.

În cazul $P_{12} \equiv P_{34}$ adică $a = 0$, avem $x_G = b/2$. Diametrul cercului este segmentul $P_{12}\, P \equiv P_{34}\, P$, cazul particular 8.

În sfîrşit, în cazul $a = \infty$ se obţine cazul particular 9, în care P_{34} se află la infinit, G cade pe P_{12} iar segmentul GP este tocmai diametrul cercului.

Cazul particular 10. În cazul particular 10 din tabelă, P_{12} şi P_{34} se află la distanţă finită, iar direcţia spre polul cu distanţă infinită P_∞ este dată prin unghiul α. Substituind în ecuaţia (1) $C = \infty$ şi $b = \infty$ şi

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \tag{13}$$

se va desprinde din ecuaţia (1) dreapta imaginară, iar ecuaţia curbei centrelor devine

$$y^2 - x^2 + ax - ay \operatorname{ctg} 2\alpha + 2xy \operatorname{ctg} 2\alpha = 0. \tag{14}$$

Dacă se alege axa centrală z care leagă centrul O al segmentului $P_{12}P_{34}$ cu P_∞ ca axă $\bar{x}$ a unui nou sistem de coordonate, iar ca axă $\bar{y}$ se ia perpendiculara pe z în punctul O, va rezulta prin transformarea

$$x = \bar{x} \sin\alpha + \bar{y} \cos\alpha + \frac{a}{2}, \tag{15}$$

$$y = \bar{x} \cos\alpha - \bar{y} \sin \alpha, \tag{16}$$

introdusă în (14) ecuaţia

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}. \tag{17}$$

Aceasta este ecuația unei hiperbole echilaterale ale cărei asimptote sînt axele $\bar{x}$ și $\bar{y}$ și pe care se află punctele P_{12} și P_{34} (fig. 8). Se poate face uz de această situație pentru a trasa în mod simplu printr-o metodă cunoscută curba centrelor: prin polii P_{12} și P_{34} se duc drepte paralele cu asimptotele; prin punctele de intersecție ale acestor drepte cu o rază dusă arbitrar prin O se duc de asemenea drepte paralele cu asimptotele; în acest caz aceste paralele se vor intersecta în punctul C_0 aparținînd hiperbolei.

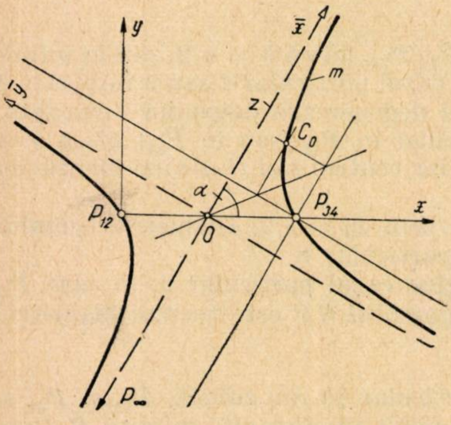


Fig. 8. — Trasarea curbei m ca hiperbolă echilateră cu ajutorul unor drepte paralele cu asimptotele.

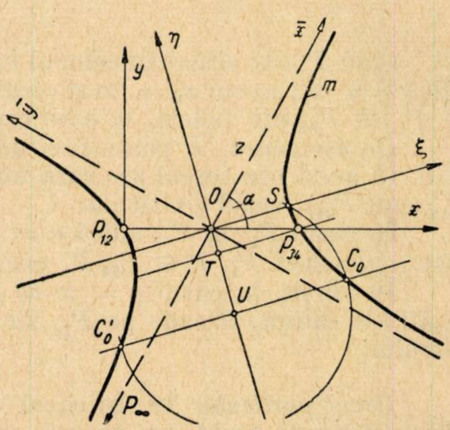


Fig. 9. — Trasarea unei hiperbole echilaterale cu ajutorul unui fascicol de paralele.

Față de punctul O cele două ramuri ale hiperbolei sînt central-simetrice, astfel că este suficient să se determine exact o singură ramură, cealaltă ramură putînd fi apoi găsită prin oglindirea în raport cu O.

O metodă care permite să se traseze hiperbola în mod mai rapid este următoarea (fig. 9): la axele de coordonate $\bar{x}$ și $\bar{y}$ se trasează axele ξ și η formate de bisectoarele unghiurilor. La bisectoarea situată în cadranul în care se află P_{12} și P_{34} se duce un fascicol de paralele, printre care și o paralelă ce trece prin P_{12} respectiv prin P_{34}. Această paralelă intersectează celelalte bisectoare η în punctul T. Pe ξ poate fi determinat vîrful hiperbolei S pe baza relației $TP_{34} = TS$. Pe una din paralelele fascicolului, punctele C_0 și C_0' ale hiperbolei se obțin prin relația $SU = UC_0 = UC_0'$.

4. COORDONAREA PUNCTELOR CURBEI CENTRELOR CU PUNCTELE CURBEI PUNCTELOR CIRCULARE

În general, fiecărui punct al curbei centrelor m îi corespunde un punct pe curba punctelor circulare k, care este situată pe planul mobil și pe care o vom reprezenta aici totdeauna în poziția 1, notînd-o în consecință cu k_1. Curba punctelor circulare se construiește ca și curba centrelor m cu ajutorul polilor P, P_{12} și P_{34}^1, cu alte cuvinte în locul lui P_{34} se utilizează polul P_{34}^{1} ce rezultă din congruenţa triunghiurilor $\Delta A_3 B_3 P_{34} = \Delta A_1 B_1 P_{34}^{1}$ (fig. 10). Şi curba punctelor circulare este o curbă focală cu punct dublu cu o singură ramură ; în poziţia 1, deci ca curbă k_1 ea are polii P şi P_{12} comuni cu curba m.

Pentru ca la studiul cazurilor particulare să se poată face referinţă, se va arăta în cele ce urmează în mod mai amănunţit o metodă simplă pentru a se determina punctul C_1 de pe curba k_1 corespunzător unui punct C_0 de pe curba centrelor m : se uneşte punctul P cu punctul considerat C_0 de pe curba m iar pe dreapta astfel obţinută se trece în sensul corect unghiul $-\alpha_{13}/2$, a cărui latură va intersecta raza $P_{12}\,C_0$ în punctul C_1, deoarece pentru o rotaţie a planului p din poziţia p_1 în poziţia p_3, în jurul lui P rezultă unghiul $\alpha_{13} = \sphericalangle A_1 P A_3 = \sphericalangle B_1 P B_3 = \sphericalangle C_1 P C_3 \ldots$ şi deci trebuie să avem $\sphericalangle C_1 P C_0 = \alpha_{13}/2$ respectiv $\sphericalangle C_0 P C_1 = -\alpha_{13}/2$. Dreapta $P_{12}\,C_0$ este raza polară a mişcării instantanee din poziţia p_1 în poziţia p_2 în jurul lui P_{12}. Bineînţeles că în mod analog se poate determina şi punctul C_0 corespunzător unui punct C_1.

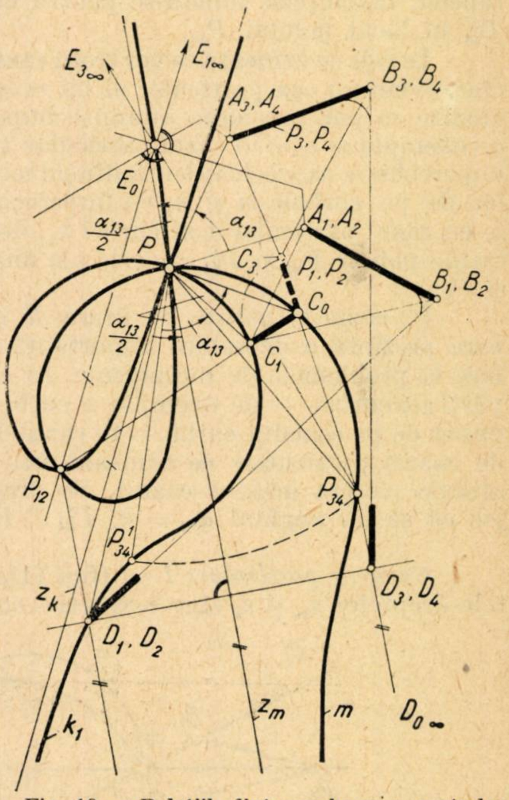


Fig. 10. — Relaţiile dintre curba m a centrelor şi curba k_1 a punctelor circulare.

În particular, se menţionează punctul D_1 pe curba k_1 căruia îi corespunde un centru la distanţă infinită $D_{0\infty}$, precum şi puncul E_0 pe curba m, căruia îi corespunde un punct de rotaţie $E_{1\infty}$ situat la distanţă infinită. Utilizarea acestor puncte conduce la mecanisme cu cuple de translaţie (bielă-manivelă, manivelă cu culisă şi culisă unghiulară). Punctul $D_{0\infty}$ este punctul imaginar al curbei m respectiv al axei centrale z_m a lui m ; acestui punct îi corespunde punctul D_1 care împreună cu punctele sale omoloage D_2, D_3 şi D_4 este situat pe o perpendiculară dusă la z_m. Punctul D_1 care se găseşte grafic conform figurii 10, poate fi deci utilizat ca punct de articulaţie a unei pietre de culisă. În mod analog va exista şi un punct la depărtare infinită E_1 pe curba k_1 ; direcţia spre E_1 este dată de axa centrală z_k a curbei k_1, această axă trecînd prin P şi centrul segmentului $P_{12}\,P_{34}$. Pe axa z_k se va trasa în punctul P unghiul $\alpha_{13}/2$ şi se va determina intersecţia E_0 a laturii acestui unghi cu dreapta $P_{12}\,E_1$ dusă paralel cu z_k. E_0 va fi deci centrul de rotaţie al unui manşon prin care glisează o tijă legată rigid cu planul mobil caracterizat prin dreapta AB'. Împreună cu punctul D_1 se obţine o culisă unghiulară, care trece prin punctele date ale curbei de bielă cu polii instantanei P_{12} şi P_{34}.

Cînd avem unul din cazurile particulare ale curbei m a centrelor, prevăzute în tabelă, curba punctelor circulare corespunzătoare k_1 nu poate fi decît în unul din cazurile particulare trecute în penultima coloană a tabelei, bineînţeles luîndu-se pentru curba k_1 a punctelor circulare polul P_{34}^1 în locul polului P_{34}.

În cele ce urmează se vor trata cazurile de corespondenţă ce apar atunci cînd avem un caz particular al lui m sau k_1. Pentru simplificarea acestor analize se pot considera anumite împerechieri ca fiind echivalente. Dacă de exemplu m este în cazul particular 1 iar k_1 în cazul particular 4, această împerechiere este echivalentă din punctul de vedere al coordonării punctelor de pe curbele m şi k_1 cu împerechierea cazului particular 4 al curbei m cu cazul particular 1 al curbei k_1, deoarece nu sînt de înlocuit decît notaţiile polilor P_{34} şi P_{34}^1 cu cele ale unei perechi de puncte coordonate C_0 şi C_1.

În cazurile notate cu litera R în tabelă apar aşa-numite reduceri, care prezintă o deosebită importanţă pentru aplicarea cazurilor particulare la problemele de mecanisme. În cazul acestor reduceri punctele unei părţi ale curbei — de exemplu a curbei m — sînt coordonate unui singur punct de pe cealaltă curbă — în cazul de faţă k_1. În analiza împerechierilor de cazuri particulare ce urmează mai jos se va atrage în mod deosebit atenţia asupra acestor cazuri. Se presupune în figurile menţionate mai jos că se dă unghiul $\alpha_{13} = \sphericalangle P_{34}^1 P P_{34}$.

Cazurile particulare 1—1 (fig. 11). Punctele cercurilor m şi k_1 şi punctele dreptelor z_m şi z_k sînt respectiv coordonate prin razele duse prin P_{12}.

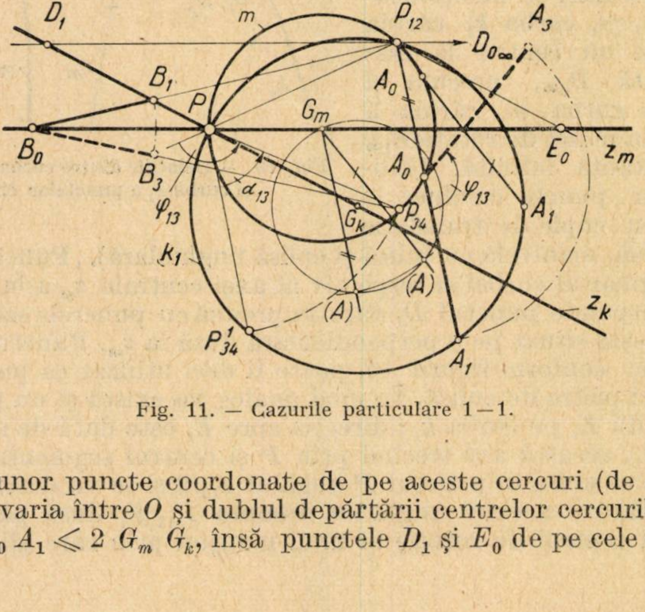


Fig. 11. — Cazurile particulare 1—1.

Depărtarea unor puncte coordonate de pe aceste cercuri (de exemplu A_0 şi A_1) poate varia între O şi dublul depărtării centrelor cercurilor G_m şi G_k, adică $0 \leqslant A_0 A_1 \leqslant 2\ G_m\ G_k$, însă punctele D_1 şi E_0 de pe cele două drepte își au punctele coordonate la o distanță infinit de mare (vezi fig. 10). Aceste puncte D_1 și E_0 sînt determinate prin intersecția cu z_k și z_m a paralelelor duse prin P la z_m și z_k.

Conform figurii 11, unghiul dintre pozițiile $A_0\,A_1$ și $A_0\,A_3$ ale elementului $A_0\,A$ este : $\varphi_{13} = \sphericalangle A_1\,A_0\,A_3 = \sphericalangle P_{12}\,P\,P_{34}$. Se poate realiza o distanță dată $A_0\,A_1$ în felul următor : cu centrul în G_k se duce un cerc prin G_m, iar din G_m se măsoară pe acest cerc lungimea dată $A_0\,A_1$. Trebuie îndeplinită însă condiția ca $A_0\,A_1 \leqslant 2\,G_m\,G_k$. În felul acesta rezultă două segmente $G_m\,(A)$ la care se vor duce raze paralele prin punctul P. Pe cercurile m și k_1 aceste raze vor determina prin intersecție două perechi de puncte $A_0\,A_1$ care vor avea distanța prescrisă.

Cazurile particulare 1—4 (fig. 12). Punctele dreptelor z_m și z_k sînt coordonate reciproc prin raze duse prin P_{12}. Punctele F_0 ale cercului sînt coordonate punctelor F_1 ale dreptei imaginare. Punctele B_1 de pe dreapta k_1 se referă în totalitate la polul P ; avem deci o reducere, care poate servi pentru îndeplinirea unei condiții suplimentare.

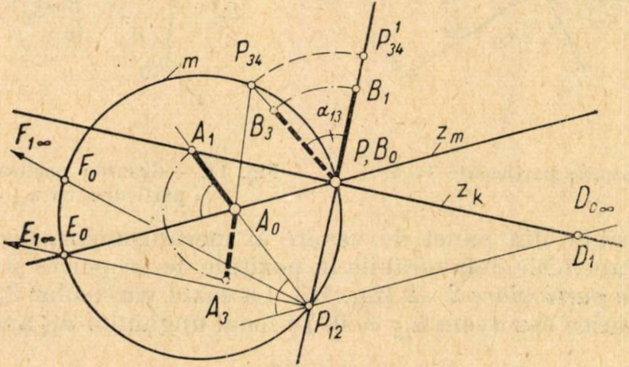


Fig. 12. — Cazurile particulare 1—4.

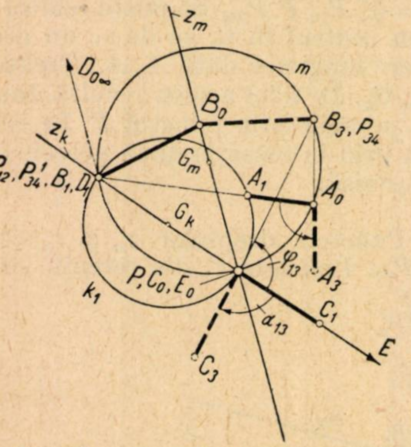
Cazurile particulare 1—8 (fig. 13). Coordonarea punctelor de pe cercurile m și k_1 se face prin raze duse din P_{12}. Punctele B_0 de pe dreapta z_m sînt coordonate polului $P_{12} = P_{34}^1 = B_1$, iar punctele C_1 de pe dreapta z_k sînt coordonate polului $P \equiv C_0$. Avem deci două reduceri. Punctul D_1 coincide cu P_{12}, iar punctul E_0 coincide cu P. Faptul că punctelor dreptei le corespunde numai cîte un singur punct poate avea o mare utilitate în problemele de mecanisme.

Ca și în cazul 1 pozițiile unui balansier cu articulațiile situate pe cercurile considerate închid unghiul invariabil $\varphi_{13} = \sphericalangle A_1\,A_0\,A_3 = \sphericalangle P_{12}\,P\,P_{34}$. Și în acest caz o distanță dată $A_0\,A_1$ poate fi respectată în felul arătat mai sus cu ajutorul unui cerc cu centrul în G_m respectiv G_k.

Cazurile particulare 4—8 (fig. 14). În cazul împerechierii acestor două cazuri particulare avem unghiul $\alpha_{13} = 180°$. De aceea z_m coincide cu k_1 (respectiv z_k cu m). Această coordonare conține trei reduceri și anume : punctele A_1 de pe z_k sînt coordonate polilor identici $P_{12} \equiv P_{34}$, punctele

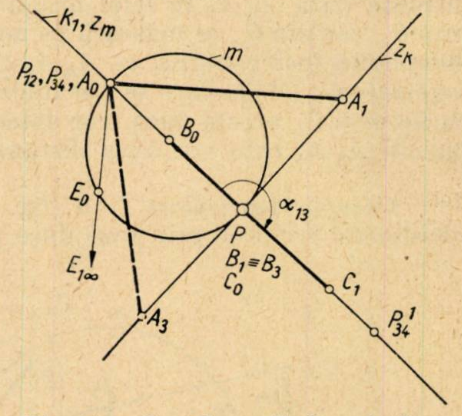
B_0 de pe z_m polului P, iar punctele C_1 de pe $k_1 \equiv z_m$ tot polului P. Punctele corespunzătoare punctelor E_0 de pe m se află pe dreapta imaginară.

Din cauza valorii mari a lui α_{13}, această împerechiere constituie un caz particular cu întrebuințări mai rare, iar cele trei reduceri nu prezintă avantaje sensibile din punct de vedere al mecanismelor, deoarece duc la condiții de transmisie defavorabile în pozițiile de acoperire și de tracțiune.



z_m
$D_{0\infty}$
m
z_k
B_0
B_3, P_{34}
$P_{12}, P'_{34}, B_1, D_1$
G_m
A_1
A_0
G_k
φ_{13}
A_3
P, C_0, E_0
k_1
C_1
α_{13}
C_3
E

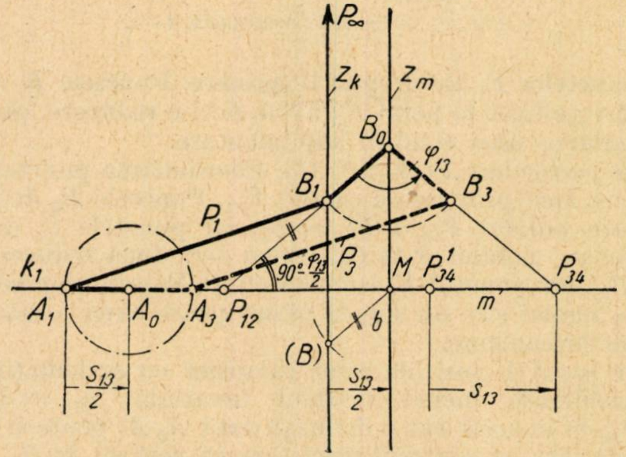
Fig. 13. — Cazurile particulare 1—8.



k_1, z_m
m
z_k
P_{12}, P_{34}, A_0
A_1
B_0
E_0
α_{13}
P
$B_1 \equiv B_3$
C_0
$E_{1\infty}$
C_1
A_3
P^1_{34}

Fig. 14. — Cazurile particulare 4—8, caz particular cu $\alpha_{13} = 180°$.

Cazurile particulare 2—2 (fig. 15). La cazul particular 2, P era situat la infinit. În orice caz avem $\alpha_{13} = 0$. În locul unghiului α_{13} avem porțiunea de translație $S_{13} = P^1_{34}\, P_{34}$, determinată de depărtarea dintre pozițiile paralele p_1 și p_3 ale planului mobil p.



P_∞
z_k
z_m
B_0
φ_{13}
B_1
B_3
P_1
k_1
$90°-\frac{\varphi_{13}}{2}$
P_3
M
P^1_{34}
P_{34}
m
A_1
A_0
A_3
P_{12}
b
(B)
$\frac{S_{13}}{2}$
$\frac{S_{13}}{2}$
S_{13}

Fig. 15. — Cazurile particulare 2—2.

Razele duse prin P_{12} determină coordonarea punctelor B_0 de pe dreapta z_m cu punctele B_1 de pe dreapta z_k. Pe dreptele ce se acoperă $m \equiv$

$\equiv k_1$ punctele A_0 sînt coordonate punctelor A, la depărtarea $S_{13}/2$. Din figura 15 se vede că trebuie luat în considerație sensul porțiunii S_{13}. Unghiul închis de pozițiile acestor balansiere de lungime constantă $S_{13}/2$ este totdeauna de 180°. Pentru balansierul $B_0\,B_1$ se poate alege B_0 astfel pe z_m, încît să rezulte un unghi dat $\varphi_{13} = \sphericalangle B_1\,B_0\,B_3$. Pentru aceasta se va duce prin P_{12} o rază care închide cu m respectiv k_1 unghiul $90 - \varphi_{13}/2$. Pentru a se realiza o anumită lungime $B_0\,B_1$ se va duce cu centrul în M (intersecția lui m cu z_m) un cerc cu raza $b = B_0\,B_1$, care intersectează pe z_k în punctul (B). Raza dusă prin P_{12} paralelă cu $M\,(B)$ va da prin intersecție cu z_m și z_k punctele B_0 și B_1 situate la depărtarea dorită.

Cazurile particulare 2—6 (fig. 16). Distanța de translație a pozițiilor paralele ale planului este $S_{13} = P^1_{34}\,P_{34}$; polii P_{12} și P_{34} sînt identici. Avem următoarele coordonări : punctele A_0 și A_1 de pe $m \equiv k_1$ sînt reciproc coordonate la distanța $S_{13}/2$. Punctelor B_1 de pe z_k le este coordonat polul $P_{12} \equiv P_{34}$, iar punctelor E_0 de pe dreapta z_m polul P_∞ situat la depărtare infinită.

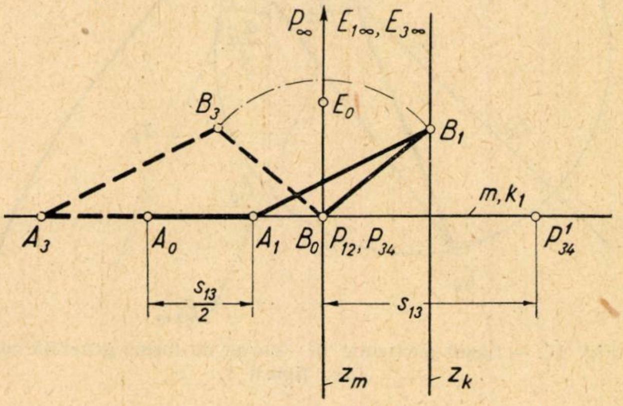


Fig. 16. — Cazurile particulare 2—6.

Ca și în cazul 2—2 se pot satisface în cazul acestei împerechieri și condiții suplimentare.

Cazul particular 3 — curba generală (fig. 17). În general, cazul particular 3, care conform figurilor 6 și 7 constă din dreapta ce trece prin cei trei poli și din cercul armonic, este coordonat unei curbe de formă generală, deoarece prin rotirea lui P_{34} în poziția P^1_{34} în jurul lui P, rezultă triunghiul general $P_{12}\,P\,P^1_{34}$. Această împerechiere conține o reducere : în timp ce toate punctele A_0 și C_0 ale cercului m sînt coordonate prin raze duse din P_{12} punctelor A_1 și C_1 de pe curba k_1, polul P constituie punctul de rotație $B_1 \equiv B_3$ al tuturor punctelor B_0 de pe dreapta z_m.

Paralela dusă prin P_{12} la z_k determină prin intersecția cu cercul m punctul E_0, căruia îi este coordonat punctul nereal $E_{1\infty}$. Unghiul $\sphericalangle E_0PE_1 = -\alpha_{13}/2$ arată care din cele două intersecții cu m ale paralelei este punctul E_0.

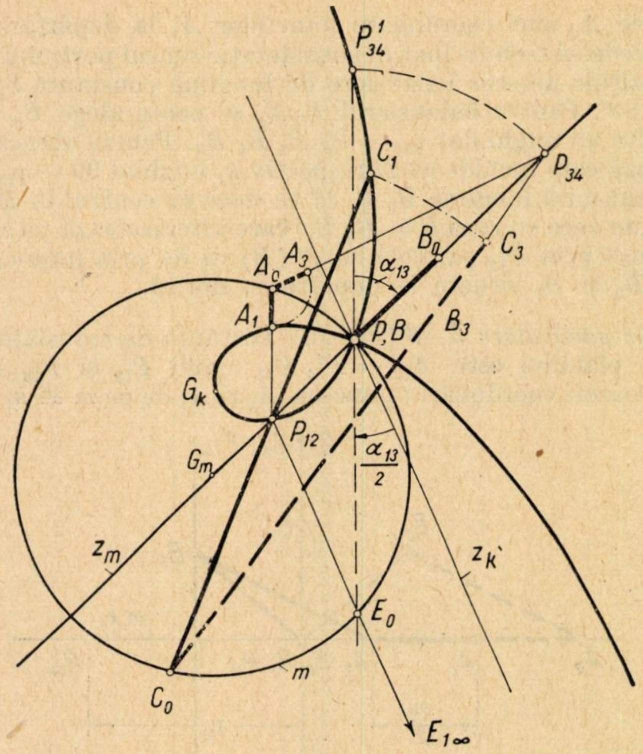

P'34
C1
P34
B0
C3
A0
A3
α13
A1
P,B
B3
Gk
P12
Gm
α13/2
zm
zk
E0
m
C0
E1∞

Fig. 17. — Cazul particular 3 — curbă de formă generală conform figurii 1.

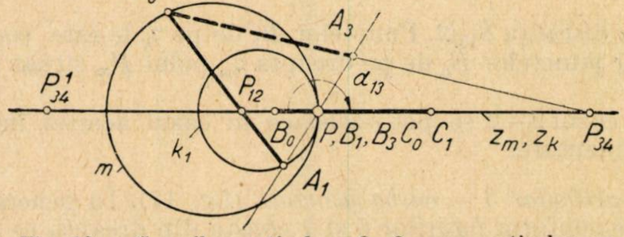

A0
A3
P'34
α13
P12
B0
P,B1,B3 C0
C1
zm, zk
P34
k1
m
A1

Fig. 18. — Cazurile particulare 3—3, caz particular cu $\alpha_{13} = 180°$.

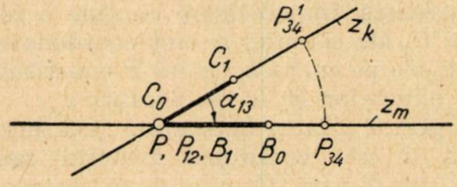

P'34
zk
C1
C0
α13
zm
P, P12, B1
B0
P34

Fig. 19. — Cazurile particulare 7—7.

Cazurile particulare 3—3 (fig. 18). La această împerechiere particulară unghiul α_{13} este de 180°, astfel că z_m conincide cu z_k'. Această împerechiere comportă două reduceri și anume punctele B_0 ale lui $z_m \equiv z_k'$ sînt coordonate polului $P \equiv B_1$ iar punctele C_1 ale lui $z_m \equiv z_k'$ sînt coordonate tot polului P care joacă rol de punct C_0. Punctele A_0 și A_1 de pe cercurile m și k_1 sînt reciproc coordonate prin razele duse prin P_{12}. Este de observat că A_1, P și A_3 sînt situate pe aceeași dreaptă deoarece avem $\alpha_{13} = 180°$. După cum se poate ușor demonstra valoarea lungimii balansierelor A_0A_1 nu poate fi situată între mărimile diametrelor celor două cercuri.

Cazurile particulare 7—7 (fig. 19). Din cazul particular 7, care este reprezentat de o dreaptă și un cerc cu raza zero, nu poate rezulta decît același caz particular. Coordonarea comportă două reduceri: punctele B_0 de pe dreapta z_m sînt coordonate polului $P \equiv B_1 \equiv B_3$ iar punctele C_1 de pe dreapta z_k' sînt coordonate polului $P \equiv C_0$.

Din cauză că polul P are o dublă interpretare, această împerechiere nu poate fi decît în mod condiționat utilizată la soluționarea problemelor de sinteză a mecanismelor.

Cazul particular 9 — curba generală cu $P_{34\infty}$ (fig. 20). Cazului particular 9 îi este în general coordonată o curbă de forma generală din figura 5 cu un pol $P^1_{34\infty}$ situat la distanță infinită. Analog împerechierii 7, avem și aici punctele A_0 și C_0, de pe cercul m, coordonate prin raze duse prin P_{12} punctelor A_1 și C_1 de pe curba k_1. Paralela dusă la z_k prin P_{12} determină prin intersecție cu cercul m punctul E_0 și avem $\sphericalangle E_{1\infty} P E_0 = \alpha_{13}/2$. Din cauză că punctele B_0 de pe dreapta z_m sînt coordonate polului $P \equiv \equiv B_1 \equiv B_3$, avem o reducere.

Cazurile particulare 9—9 (fig. 21). La această împerechiere particulară avem unghiul $\alpha_{13} = 180°$. De aceea, m și k_1 coincid în întregime : cele două curbe sînt identice. Punctele A_0 de pe cerc sînt coordonate punctelor lor diametrale A_1, astfel că distanțele $A_0\,A_1$ sînt totdeauna egale cu diametrul cercului. Deoarece $A_0\,A_3$ este totdeauna paralel cu z_m, este ușor să se determine pe cerc A_0 astfel ca să se respecte un unghi dat φ_{13}. Deoarece $\alpha_{13} = 180°$ punctele A_1, P și A_3 sînt situate pe o dreaptă. Avem două reduceri determinate de faptul că punctele B_0 de pe $z_m \equiv z_k$ și punctele C_1 de pe $z_k \equiv z_m$ sînt coordonate polului $P \equiv B_1 \equiv B_3 \equiv C_0$.

Cazurile particulare 10—10 (fig. 22). Această împerechiere comportă două hiperbole cu o asimptotă comună și cu două asimptote paralele situate la depărtarea $S_{13}/2$ ce corespunde jumătății distanței de translație $S_{13} = P^1_{34}\,P_{34}$. Razele duse prin P_{12} determină coordonarea punctelor de pe cele două hiperbole. Este ușor să se găsească puncte coordonate A_0 și A_1 astfel ca unghiul $\sphericalangle A_1\,A_0\,A_3 = \varphi_{13}$ să aibă o valoare prescrisă.

Cazurile particulare 10—5 (fig. 23). La această împerechiere valoarea lui S_{13} este atît de mare încît P^1_{34}, P_{12} și P_∞ sînt situate pe o dreaptă. Cu

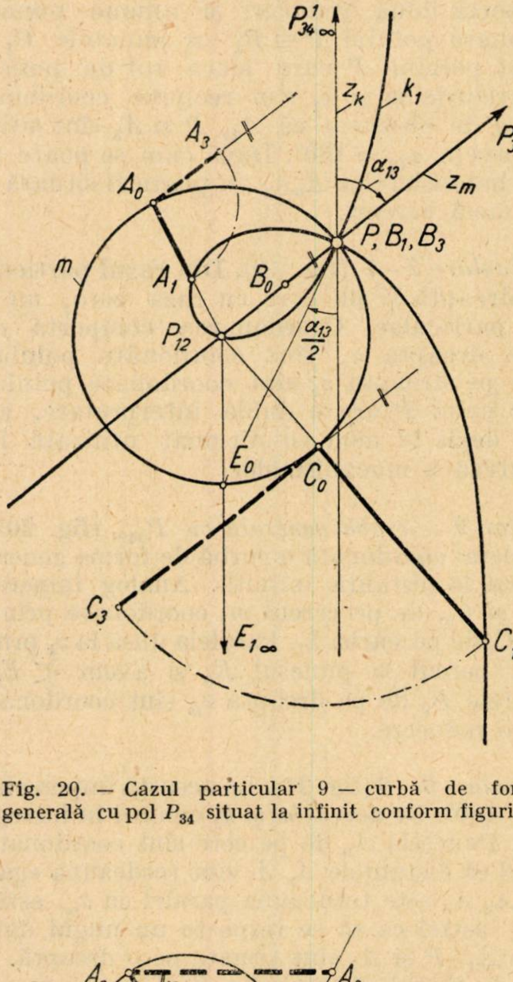

P¹34∞
zk
k1
P34∞
α13
zm
A3
A0
P, B1, B3
m
A1
B0
P12
α13/2
E0
C0
C3
E1∞
C1

Fig. 20. — Cazul particular 9 — curbă de formă generală cu pol P_{34} situat la infinit conform figurii 5.

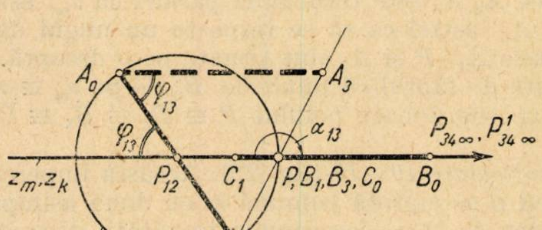

A0
A3
φ13
φ13
α13
P34∞, P¹34∞
zm, zk
P12
C1
P, B1, B3, C0
B0
m, k1
A1

Fig. 21. — Cazurile particulare 9—9, caz particular cu $\alpha_{13} = 180°$.

aceasta punctele hiperbolei în m sînt coordonate prin razele duse din P_{12} punctelor A_1 de pe dreapta k_1, iar fiecare punct D_1 de pe dreapta z_k este coordonat polului imaginar P_∞. Această din urmă coordonare constituie o reducere.

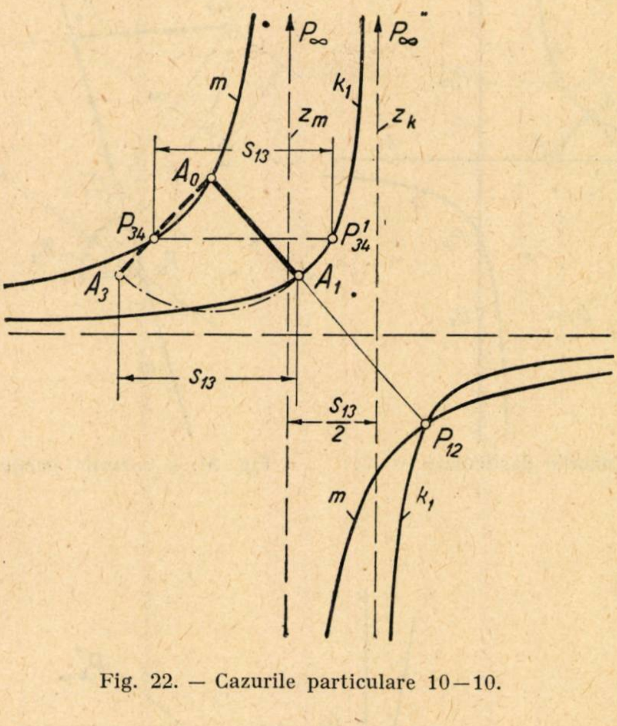


Fig. 22. — Cazurile particulare 10—10.

Punctele A_0 pot fi determinate cu ușurință, astfel încît unghiul de rotație $\sphericalangle A_1A_0A_3$ să corespundă unui unghi φ_{13} de valoare prescrisă.

Cazurile particulare 11—11 (fig. 24). În cazul acestei împerecheri punctele coordonate $C_0\,C_1$ se află toate la aceeași depărtare, care rezultă din lungimea de translație S_{13} și unghiul $\sphericalangle P_\infty P_{12} P_{34} = \varphi_{13}/2$

$$C_0\,C_1 = \frac{S_{13}}{2\sin\frac{\varphi_{13}}{2}}\,. \tag{18}$$

Rezultă deci că toate punctele C_0 de pe dreapta m sînt coordonate punctelor C_1 de pe aceeași dreaptă k_1, iar depărtarea $C_0\,C_1$ este constantă. De asemenea și unghiul $\varphi_{13} = \sphericalangle C_1\,C_0\,C_3$ este același pentru toate punctele de pe dreapta $m \equiv k_1$.

Cazurile particulare 12—12 (fig. 25). Curba centrelor și curba punctelor circulare constau fiecare din cîte un sistem de axe de coordonate rectangulare. Punctele A_0 de pe dreapta m sînt coordonate punctelor A_1 de

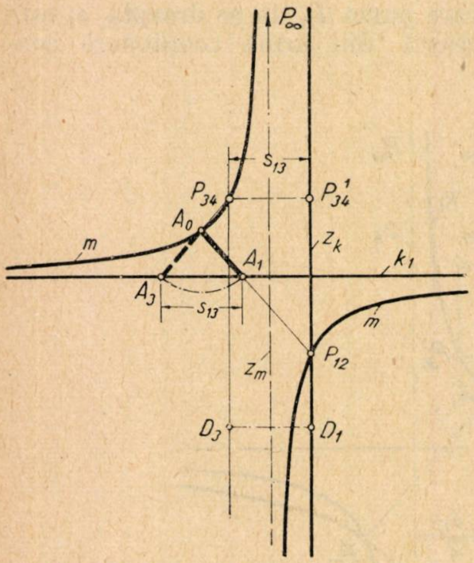

P_∞
s_{13}
P_{34}
P'_{34}
A_0
m
z_k
A_1
k_1
A_3
s_{13}
m
P_{12}
z_m
D_3
D_1

Fig. 23. — Cazurile particulare 10—5.

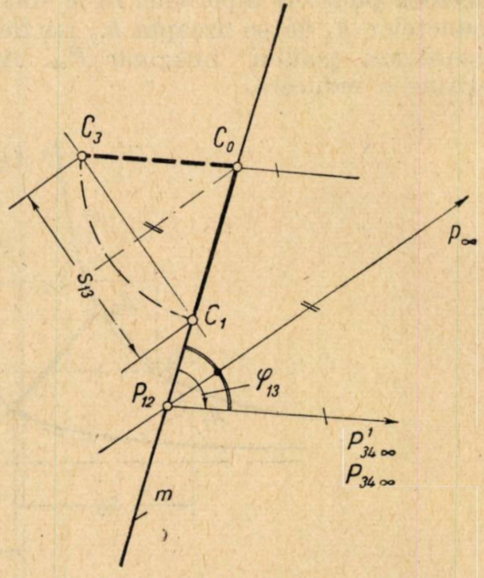

C_3
C_0
p_∞
s_{13}
C_1
φ_{13}
P_{12}
$P'_{34\infty}$
$P_{34\infty}$
m

Fig. 24. — Cazurile particulare 11—11.

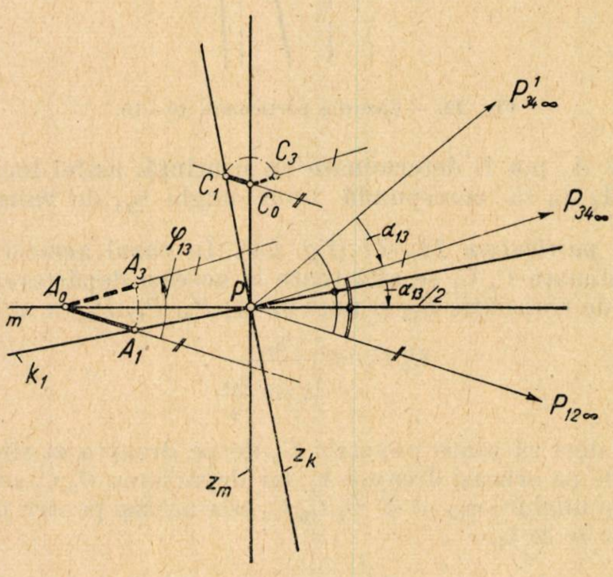

$P'_{34\infty}$
C_3
C_1
C_0
$P_{34\infty}$
α_{13}
φ_{13}
A_3
A_0
P
$\alpha_{13}/2$
m
A_1
k_1
$P_{12\infty}$
z_k
z_m

Fig. 25. — Cazurile particulare 12—12.

pe dreapta k_1, iar punctele C_0 de pe dreapta z_m sînt coordonate punctelor C_1 de pe dreapta z_k. Dreptele k_1 şi z_k rezultă din dreptele m şi z_m printr-o rotaţie cu unghiul $\alpha_{13}/2 = \frac{1}{2} \sphericalangle P^1_{34\infty}\, P\, P_{34\infty}$. Razele coordonatoare sînt situate paralel cu direcţia care duce spre polul imaginar $P_{12\infty}$.

Unghiul închis de poziţiile balansierelor $A_0\, A_1$ sau $C_0\, C_1$ este constant pentru toate perechile posibile de puncte A_0, A_1 şi C_0, C_1 ; acest unghi are valoarea $\varphi_{13} = \sphericalangle P_{12\infty}\, P\, P_{34\infty}$.

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1958.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КРИВОЙ ЦЕНТРОВ БУРМЕСТЕРА С ДВОЙНОЙ ТОЧКОЙ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ В ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе дается систематическое изложение всех форм, которые может принять кривая центров Бурместера при наличии двойной точки; ранее были рассмотрены некоторые частные формы или были выведены такие формы при разработке методов синтеза механизмов. Общая фокальная кривая с двойной точкой может принять частную форму тогда, когда треугольник, образованный характеристическими полюсами, определенными четырьмя положениями подвижной плоскости расположенными парами бесконечно близко, принимает особую форму, например, когда этот треугольник становится равносторонним или бесконечно сплющенным. Таким образом, получаются 12 частных случаев (таблица 1), позволяющих, в свою очередь, получить 15 различных комбинаций. Некоторые из этих спариваний, в которых одна их кривых является кривой центров, а другая — кривой кольцевых точек, представляют особый интерес для синтеза механизмов, так как содержат так называемые ,,приведения''. В случае таких приведений определенной точки (полюсу) на одной из кривых, соответствуют все точки одной ветви другой кривой. При помощи приведений можно простым образом удовлетворить заданным дополнительным условиям в задачах синтеза механизмов.

Частные случаи кривой центров Бурместера и кривой кольцевых точек представляют особый интерес для синтеза механизмов. Так, например, спарение частных случаев 1—8 (рис. 13) содержится в классическом построении мертвых точек кривошипно-балансирного механизма, разработанного Альтом. Точно так же и Гайн [9] воспользовался частными случаями при построении шатунных кривых на основании положения точек, в которых касательная имеет заданное направление. Были использованы также частные случаи, примерно такого же рода, как и рассматриваемые в этой работе, и для синтеза шарнирного четырехзвенника с передаточным отношением, предложенным Черкудиновым [14, 15], и при

построении мертвых точек шестизвенника с двумя точками остановки [13]. Приведенные примеры указывают на значения этих частных случаев при разработке простых графических методов для расчета механизмов. В другом месте рассматриваются и другие возможности применения частных случаев кривой центров, состоящей из одной ветви и имеющей двойную точку для решения задач синтеза механизмов.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Построение кривой центров общей формы, состоящей из одной ветви и имеющей двойную точку.

Рис. 2. — Определение главного фокуса G при помощи двух кругов.

Рис. 3. — Определение точками кривой центров, состоящей из одной ветви и имеющей двойную точку, при помощи кругов вокруг полюса P и касательных.

Рис. 4. — Проведение касательных в точках кривой m центров и построение механическим путем при помощи углообразной кулисы.

Рис. 5. — Кривая центров с полюсом P_{34} на бесконечности.

Рис. 6. — Определение гармонической окружности P_{12}, P_{34} и P.

Рис. 7. — Определение G, как центра инволюты.

Рис. 8. — Построение кривой m, как равносторонней гиперболы при помощи параллельных асимптотам прямых.

Рис. 9. — Построение равносторонней гиперболы при помощи пучка параллельных линий.

Рис. 10. — Соотношения между кривой m центров и кривой K_1 кольцевых точек.

Рис. 11. — Частные случаи 1—1.

Рис. 12. — Частные случаи 1—4.

Рис. 13. — Частные случаи 1—8.

Рис. 14. — Частные случаи 4—8, частный случай при $\alpha_{13} = 180°$.

Рис. 15. — Частные случаи 2—2.

Рис. 16. — Частные случаи 2—6.

Рис. 17. — Частный случай 3 — кривая общей формы согласно рис. 1.

Рис. 18. — Частные случаи 3—3, частный случай при $\alpha_{13} = 180°$.

Рис. 19. — Частные случаи 7—7.

Рис. 20. — Частный случай 9 — кривая общей формы с полюсом P_{34}, расположенным на бесконечности согласно рис. 5.

Рис. 21. — Частные случаи 9—9, частный случай при $\alpha_{13} = 180°$.

Рис. 22. — Частные случаи 10—10.

Рис. 23. — Частные случаи 10—5.

Рис. 24. — Частные случаи 11—11.

Рис. 25. — Частные случаи 12—12.

LES CAS PARTICULIERS DE LA COURBE DES CENTRES DE BURMESTER, À POINT DOUBLE, ET LEUR IMPORTANCE POUR LA THÉORIE DES MÉCANISMES

RÉSUMÉ

L'auteur présente dans ce travail un exposé systématique de toutes les formes que peut prendre la courbe des centres de Burmester dans le cas où elle possède un point double ; ceci après avoir antérieurement, lors de l'élaboration de quelques méthodes de synthèse des mécanismes, ana-

lysé certaines formes particulières isolées ou déduit de telles formes. La courbe focale générale à point double peut prendre une forme particulière lorsque le triangle formé par les pôles caractéristiques, déterminés par quatre positions du plan mobile situées deux à deux infiniment près, prend une forme spéciale ; par exemple, lorsque ce triangle devient équilatéral ou infiniment aplati. Il en résulte 12 cas particuliers (tableau 1), lesquels, à leur tour, permettent 15 combinaisons différentes. Parmi les appariements de ces courbes, dont l'une est la courbe des centres et l'autre la courbe des points circulaires, certains présentent un intérêt particulier pour la synthèse des mécanismes, du fait qu'ils contiennent ce qu'on appelle des réductions. Dans le cas de telles réductions, tous les points d'une branche de l'une des courbes sont coordonnés à un certain point (pôle) situé sur l'autre courbe.

Les réductions permettent de satisfaire d'une façon simple à des conditions supplémentaires imposées par les problèmes de synthèse des mécanismes. Les cas particuliers de la courbe des centres de Burmester et de la courbe des points circulaires présentent un intérêt spécial pour la synthèse des mécanismes. C'est ainsi, que l'appariement des cas particuliers 1 à 8 (fig. 13) est compris dans la construction classique des points morts du mécanisme à manivelle et à balancier, dû à Alt. De la même façon, Hain [9] a appliqué les cas particuliers à la génération des courbes de bielle sur la base de la position des points où la tangente a une direction donnée. En outre, des cas particuliers similaires à ceux qui sont étudiés dans le présent travail ont servi pour la synthèse du quadrilatère articulé ayant un rapport de transmission prescrit suivant Tcherkoudinov [14, 15], ainsi que pour la construction des points morts du mécanisme composé de six éléments à deux points d'arrêt [13]. Ces quelques exemples font ressortir l'importance de ces cas particuliers pour l'élaboration de certaines méthodes graphiques, simples, destinées à déterminer les dimensions des mécanismes. Dans un travail à venir, on trouvera l'exposé d'autres possibilités d'application, à la solution des problèmes de synthèse des mécanismes, des cas particuliers de la courbe des centres, à une seule branche et possédant un point double.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Tracé de la courbe des centres de forme générale composée d'une seule branche et possédant un point double.

Fig. 2. — Détermination du foyer principal G à l'aide de deux cercles.

Fig. 3. — Détermination par points de la courbe des centres, composée d'une seule branche et possédant un point double, à l'aide de cercles autour du pôle P et de tangentes.

Fig. 4. — Tracé des tangentes aux points de la courbe m des centres et génération par voie mécanique à l'aide d'une coulisse angulaire.

Fig. 5. — Courbe des centres au pôle P_{34} situé à l'infini.

Fig. 6. — Détermination du cercle harmonique de P_{12}, P_{34} et P.

Fig. 7. — Détermination de G comme centre d'involution.

Fig. 8. — Tracé de la courbe m comme hyperbole équilatère à l'aide de droites parallèles aux asymptotes.

Fig. 9. — Tracé d'une hyperbole équilatère au moyen d'un faisceau de parallèles.

Fig. 10. — Relations entre la courbe m des centres et la courbe k_1, des points circulaires.

Fig. 11. — Cas particuliers 1—1.
Fig. 12. — Cas particuliers 1—4.
Fig. 13. — Cas particuliers 1—8.
Fig. 14. — Cas particuliers 4—8, cas particulier où $\alpha_{13} = 180°$.
Fig. 15. — Cas particuliers 2—2.
Fig. 16. — Cas particuliers 2—6.
Fig. 17. — Cas particulier 3— courbe de forme générale selon la figure 1.
Fig. 18. — Cas particuliers 3—3, cas particuliers où $\alpha_{13} = 180°$.
Fig. 19. — Cas particuliers 7—7.
Fig. 20. — Cas particulier 9— courbe de forme générale au pôle P_{34} situé à l'infini, selon la figure 5.
Fig. 21. — Cas particuliers 9—9, cas particulier où $\alpha_{13} = 180°$.
Fig. 22. — Cas particuliers 10—10.
Fig. 23. — Cas particuliers 10—5.
Fig. 24. — Cas particuliers 11—11.
Fig. 25. — Cas particuliers 12—12.

BIBLIOGRAFIE

1. ALT H., *Über Totlagen von Getriebegliedern.* Getriebetechnik, *8*, 173 (1940).
2. — *Sonderfälle der Mittelpunktkurve.* Getriebetechnik, *8*, 309 (1940).
3. — *Sonderfälle der Mittelpunktkurve.* Getriebetechnik, *8*, 401 (1940).
4. BEYER R., *Technische Kinematik.* Leipzig, 1931.
5. — *Kinematische Getriebesynthese.* Springer-Verlag, Berlin, 1953.
6. — *Zur Krausschen s_{14} -Kurve.* Getriebetechnik, *8*, 206 (1938).
7. BURMESTER L ., *Lehrbuch der Kinematik.* Leipzig, 1888.
8. ДОБРОВОЛЬСКИЙ В. В., *Общая теория механизмов для образования плоских кривых.* Труды Семинара по Теории ММ., т. 10, 1950 г., выпуск 36,Москва.
9. HAIN K., *Punktlagenzuordnungen mit gegebener Tangentenrichtung am Gelenkviereck.* Ingenieur-Archiv, *18*, 145 (1950).
10. KIPER G., *Einfache Konstruktion von Gelenkvierecken für vier Lagenzuordnungen.* Konstruktion, *6*, 5 (1954).
11. KRAUS R., *Zur Synthese des ebenen Gelenkvierecks.* Getriebetechnik, *6*, 149 (1938) ; Ein Beitrag zur Verwendung der Mittelpunktkurve. VD7 — Bericht, Band 5, Düsseldorf 1955.
12. — *Einfache Konstruktion von Gelenkvierecken durch Lagenreduktion und Zerfall der Mittelpunktkurve.* Feinwertechnik, *54*, 69 (1954).
13. RÖSSNER W., *Totlagenkonstruktion des sechsgliedrigen Zweistandgetriebes.* Maschinenbautechnik, *6*, 105 (1957).
14. ЧЕРКУДИНОВ С. А., *О мертвых положениях ведомого звена.* Труды Семинара по Теории ММ., **2**, *8*, Москва (1947).
15. — *К общей теории геометрических мест метрического синтеза.* Труды Семинара по Теории ММ., **I**, *4*, Москва (1947).
16. ЧЕРКУДИНОВ С. А. и СПЕРАНСКИЙ Н. В., *К синтезу плоских шарнирных механизмов с остановками.* Труды Семинара по Теории ММ., **II**, *43*, Москва (1951).

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

CONSIDERAȚII ASUPRA CINEMATICII LAGĂRELOR DE ROSTOGOLIRE CU ROLE ÎN CAZUL UNGERII HIDRODINAMICE

DE

AL. NICA

Se vor considera frecările între corpurile de rulare și căile de rulare în cazul lagărelor de rostogolire cu role sau ace, avînd o sarcină radială constantă.

Într-o lucrare recentă [1], se arată că în cazul vitezelor mari și încărcărilor reduse, între corpurile de rulare și căile respective se formează un film de ulei, prezentînd caracteristicile ungerii hidrodinamice.

Comparîndu-se distribuția eforturilor, obținută pe baza teoriei lui Hertz cu distribuția presiunilor, găsită considerînd corpurile de rulare lubrificate hidrodinamic, se constată o deosebire în aspectul curbelor capacitatea portantă fiind sensibil egală în ambele cazuri [2].

Se ajunge deci la concluzia că rezultatele obținute considerînd lagărele de rostogolire lubrificate hidrodinamic, corespund fenomenelor reale.

Folosind rezultatele obținute în lucrări anterioare [3], [4], se pot scrie momentele de frecare asupra rolei, considerînd corpurile (*1*) și (*2*), apoi (*1*) și (*3*), (figura 1)

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{2r_1\mu_1 b\, V_{12}}{\nu\, a_\delta\, \delta_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2-1}} \ln \frac{e^{\nu(\theta_1+\theta_2)} + e^{\nu\theta_1}(2a-\sqrt{4a^2-1}) + e^{\nu\theta_2}(2a+\sqrt{4a^2-1}) + 1}{e^{\nu(\theta_1+\theta_2)} + e^{\nu\theta_1}(2a+\sqrt{4a^2-1}) + e^{\nu\theta_2}(2a-\sqrt{4a^2-1}) + 1}, \\
M_2 &= \frac{2r_1\mu_1 b\, V_{13}}{\nu\, a_\delta\, \delta_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2-1}} \ln \frac{e^{\nu(\theta_1+\theta_2)} + e^{\nu\theta_1}(2a-\sqrt{4a^2-1}) + e^{\nu\theta_2}(2a+\sqrt{4a^2-1}) + 1}{e^{\nu(\theta_1+\theta_2)} + e^{\nu\theta_1}(2a+\sqrt{4a^2-1}) + e^{\nu\theta_2}(2a-\sqrt{4a^2-1}) + 1}, \\
a &= 1 - \frac{1}{a\delta}\cdot
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

În aceste expresii s-a considerat $q = 0$ (viscozitatea constantă), iar F_n (componenta presiunilor normală pe linia centrelor) $= 0$; r_1, b sînt raza respectiv lățimea rolei, μ_1 viscozitatea lubrifiantului, iar θ_1, θ_2 unghiurile la centru ale zonei de suprapresiuni, δ_2 grosimea minimă a filmului de lubrifiant, ν și a_δ funcții de δ_2, θ_1, și θ_2, [3]. Se obțin pentru o poziție oarecare a rolei, admițînd o distribuție a sarcinii totale asupra rolelor de forma [5]

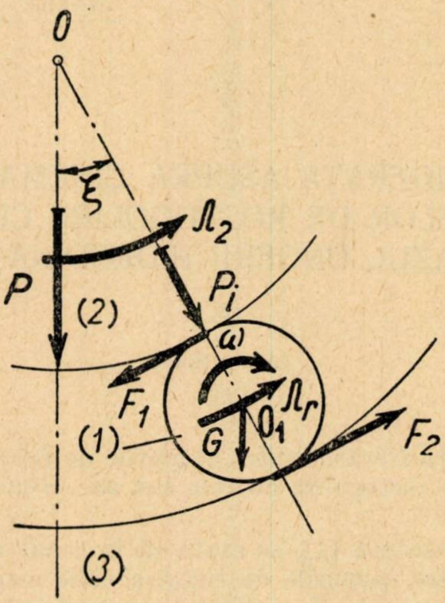


Fig. 1

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i , \tag{2}$$

în care

$$P_i = P_0 \cdot \cos^{3/2} \xi \qquad \left(\text{pt.} -\frac{\pi}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{2} \right), \tag{3}$$

și $P_0 = K_n P$, K_n fiind o constantă care se determină pentru un număr dat de corpuri de rulare.

Deoarece condițiile geometrice și funcționale nu variază decît puțin cu ξ, se poate face aproximația :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= K_1 V_{12} , \\ M_2 &= K_2 V_{13} , \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

K_1, K_2 fiind considerate constante.

Vitezele relative dintre rolă şi căile de rulare V_{12} şi V_{13} au forma

$$\left.\begin{aligned} V_{12} &= r_2\,(\Omega_2 - \Omega_r) - r_1\,\omega, \\ V_{13} &= r_3\,\Omega_r - r_1\,\omega, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

în care Ω_r şi ω sînt vitezele unghiulare ale centrului rolei faţă de O, respectiv a rolei faţă de O_1.

Coeficienţii de frecare dintre rolă şi calea interioară de rulare f_1 şi dintre rolă şi calea exterioară de rulare f_2, sînt daţi de expresiile

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{M_1}{r_1\,F_{t_1}}, \\ f_2 &= \frac{M_2}{r_2\,F_{t_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

F_{t_1} şi F_{t_2} sînt rezultantele presiunilor din pelicula de lubrifiant dintre corpurile considerate [4].

F_{t_1} şi F_{t_2} au deci valoarea forţelor care se transmit de la inelul interior la rolă, respectiv de la rolă la inelul exterior

$$\left.\begin{aligned} F_{t_1} &= P_i, \\ F_{t_2} &= P_i + (r_1 + r_2)\frac{G}{g}\Omega_r^2 + G\cdot\cos\xi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Forţele de frecare F_1 şi F_2 sînt date de relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= f_1\,P_i, \\ F_2 &= f_2\left[P_i + (r_1 + r_2)\frac{G}{g}\,\Omega_r^2 + G\cdot\cos\xi\right], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

iar condiţiile de echilibru conduc la expresiile :

$$\left.\begin{aligned} &-F_1 + F_2 - G\cdot\sin\xi + (r_1 + r_2)\frac{G}{g}\,\frac{d\Omega_r}{dt} = 0, \\ &-F_1 r_1 - F_2 r_1 + I\,\frac{d\omega}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Din

$$\frac{d\Omega_r}{dt} = \frac{d\Omega_r}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}\,;\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}\,, \tag{10}$$

rezultă

$$\frac{d\Omega_r}{dt} = \frac{d\Omega_r}{d\xi}\cdot\Omega_r\,;\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\xi}\cdot\Omega_r. \tag{11}$$

Înlocuind F_1 şi F_2 prin expresiile (8) şi luînd în consideraţie relaţiile (3), (6) şi (7), sistemul (9) va căpăta forma

$$\left.\begin{aligned} & -\frac{K_1 V_{12}}{r_1} + \frac{K_2 V_{13}}{r_1} - G \cdot \sin\xi + (r_1 + r_2)\frac{G}{g}\cdot\frac{d\Omega_r}{d\xi}\,\Omega_r = 0, \\ & -K_1 V_{12} - K_2 V_{13} + I\frac{d\omega}{d\xi}\,\Omega_r = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Exprimînd pe V_{12} şi V_{13} cu ajutorul relaţiilor (5), rezultă

$$\left.\begin{aligned} & A\,\Omega_r + B\omega + C\frac{d\Omega_r}{d\xi}\,\Omega_r + D = 0, \\ & A'\,\Omega_r + B'\omega + C'\frac{d\omega}{d\xi}\,\Omega_r + D' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

în care

$$\begin{aligned} & A = K_1\frac{r_2}{r_1} + K_2\frac{r_2 + 2r_1}{r_1} && ;\ A' = K_1 r_2 - K_2(r_2 + 2r_1), \\ & B = K_1 - K_2 && ;\ B' = K_1 r_1 + K_2 r_1, \\ & C = (r_1 + r_2)\frac{G}{g} && ;\ C' = I, \\ & D = -\frac{K_1\Omega_2 r_2}{r_1} && ;\ D' = -K_1\,\Omega_2\,r_2. \end{aligned} \tag{14}$$

S-a neglijat componenta $G \cdot \sin\,\xi$, greutatea rolei fiind mică în raport cu celelalte forţe din lagăr.

Din prima ecuaţie a sistemului (13) se obţine valoarea lui ω, care introdusă în a doua ecuaţie, conduce la relaţia

$$\begin{aligned} & (BD' - B'D) + (A'B - AB')\,\Omega_r - (B'C + AC')\,\Omega_r\frac{d\Omega_r}{d\xi} - \\ & \qquad - CC'\,\Omega_r\left(\frac{d\Omega_r}{d\xi}\right)^2 - CC'\,\Omega_r^2\,\frac{d^2\Omega_r}{d\xi^2} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Folosind succesiv substituţiile

$$\frac{d\Omega_r}{d\xi} = p \tag{16}$$

şi

$$\Omega_r \cdot p = u, \tag{17}$$

obţinem expresia

$$(BD' - B'D) + (A'B - AB')\,\Omega_r - (B'C + AC')u - CC'\,u\frac{du}{d\Omega_r} = 0 \tag{18}$$

şi o nouă substituţie

$$\frac{du}{d\Omega_r} = v, \tag{19}$$

ne permite să scriem ecuaţia (18) sub forma

$$\alpha + \beta\,\Omega_r - u\,(\gamma + \lambda\,v) = 0, \tag{20}$$

$$u = \frac{\alpha + \beta\Omega_r}{\gamma + \lambda v} = \bar{\alpha}\,(v) + \bar{\beta}\,(v)\,\Omega_r, \tag{21}$$

$$\frac{du}{d\Omega_r} = \bar{\alpha}'\,(v)\,\frac{dv}{d\Omega_r} + \bar{\beta}'\,(v)\,\frac{dv}{d\Omega_r}\,\Omega_r + \bar{\beta}\,(v) = 0. \tag{22}$$

Se obţine ecuaţia

$$\frac{d\Omega_r}{dv} = \frac{\bar{\alpha}'\,(v) + \bar{\beta}'\,(v)\,\Omega_r}{v - \bar{\beta}\,(v)} = \bar{\bar{\alpha}}\,(v) + \bar{\bar{\beta}}\,(v)\,\Omega_r \tag{23}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \bar{\bar{\alpha}}\,(v) &= \frac{\alpha\lambda}{(\gamma + \lambda v)\,[v\,(\gamma + \lambda v) - \beta]}, \\ \bar{\bar{\beta}}\,(v) &= \frac{\beta\lambda}{(\gamma + \lambda\,v)\,\,[v\,(\gamma + \lambda\,v) - \beta]}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Integrarea ecuaţiei (23) este imediată, găsindu-se soluţia pentru Ω_r sub forma

$$\Omega_r = (v - v_1)^{k_1} \cdot (v - v_2)^{k_2} \cdot (v - v_3)^{k_3} \cdot [\mathcal{C}_1 + \alpha\lambda\,\mathcal{J}_{(v)}\,], \tag{25}$$

v_1, v_2, v_3, fiind soluţiile ecuaţiei

$$(\gamma + \lambda\,v)\,\,[v\,(\gamma + \lambda\,v) - \beta] = 0, \tag{26}$$

iar

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\beta\lambda\,(v_3 - v_2)}{v_2 v_3\,(v_2 - v_3) + v_1 v_3\,(v_3 - v_1) + v_1\,v_2\,(v_1 - v_2)} = \frac{\beta\lambda\,(v_3 - v_2)}{n}, \\ k_2 &= \frac{\beta\lambda\,\,(v_3 - v_1)}{n}, \\ k_3 &= \frac{\beta\lambda\,\,(v_1 - v_2)}{n}, \\ \mathcal{J}_{(v)} &= \int \frac{dv}{(v - v_1)^{k_1+1}\,(v - v_2)^{k_2+1}\,(v - v_3)^{k_3+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Din ecuaţia (21) rezultă

$$u = \varphi\,(v). \tag{28}$$

Eliminîndu-se v între ecuațiile (25) și (28), se găsește expresia: $u = \psi(\Omega_r)$ și mai departe, din relațiile (16) și (17)

$$d\xi = \frac{\Omega_r \, d\Omega_r}{\psi(\Omega_r)}; \qquad \xi = \int \frac{\Omega_r \, d\Omega_r}{\psi(\Omega_r)} + \mathcal{C}_2. \tag{29}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ se consideră ecuațiile (7), din care putem obține [3]:

$$\left.\begin{aligned} \delta_2 &= \delta_2(\Omega_r, \xi), \\ \theta_{1.2} &= \theta_{1.2}(\xi), \end{aligned}\right\}$$

respectiv

$$\delta_2 = \delta_2(\xi, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2); \quad \theta_{1.2} = \theta_{1.2}(\xi). \tag{30}$$

Din ecuațiile (1) rezultă

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= K_1(\xi, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), \\ K_2 &= K_2(\xi, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

și condiția (4) ne conduce la sistemul

$$\left.\begin{aligned} K_1(\xi_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &= K_1(\xi_2, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), \\ K_2(\xi_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &= K_2(\xi_2, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

din care obținem $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$.

O soluție aproximativă, dar simplă, a problemei se poate obține observînd că parametrul $B = K_1 - K_2$ din prima ecuație a sistemului (13) tinde spre zero, deoarece valorile lui K_1 și K_2 nu diferă cu mult.

Se obține ecuația

$$A\Omega_r + C\frac{d\Omega_r}{d\xi}\Omega_r + D = 0, \tag{33}$$

cu soluția evidentă

$$\xi = \frac{DC}{A^2}\left[\ln\left(\Omega_r + \frac{D}{A}\right) - 1\right] - \frac{C}{A}\Omega_r + \mathcal{C}_1, \tag{34}$$

sau

$$\xi = \frac{DC}{A^2}\left[\ln\frac{D}{A}\left(1 + \frac{A}{D}\Omega_r\right) - 1\right] - \frac{C}{A}\Omega_r + \mathcal{C}_1. \tag{35}$$

Deoarece $\frac{A}{D} < \frac{1}{500}$ putem admite aproximația

$$\xi = \frac{DC}{A^2}\left(\ln\frac{D}{A} - 1\right) - \frac{C}{A}\Omega_r + \mathcal{C}_1, \tag{36}$$

de unde se obține

$$\Omega_r = \frac{D}{A}\left(\ln\frac{D}{A} - 1\right) + \frac{A}{C}\left(\mathcal{C}_1 - \xi\right), \tag{37}$$

şi din (13)

$$\omega = e^{-C'\int\Omega_r\,d\xi}\left[\mathcal{C}_2 - \int(A'\,\Omega_r + D')\cdot e^{C'\int\Omega_r\,d\xi}\right]. \tag{38}$$

Constantele de integrare $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ se pot determina în modul arătat.

Cu ajutorul lui Ω_r şi ω se pot apoi obține momentele de frecare din relațiile (1), care însumate pentru întregul rulment dau momentul rezistent total, iar cu ajutorul expresiilor (6) se pot găsi coeficienții de frecare.

Primită la redacție la 16 decembrie 1958.

О КИНЕМАТИКЕ РОЛИКОПОДШИПНИКОВ В СЛУЧАЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СМАЗКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются роликоподшипники с гидродинамической смазкой. Исходя из некоторых предшествующих результатов записываются выражения моментов и коэффициенты трения. Определяются скорости роликов и выводятся затем значения коэффициентов трения и общего момента сопротивления.

CONSIDÉRATIONS SUR LA CINÉMATIQUE DES PALIERS À ROULEAUX DANS LE CAS DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

RÉSUMÉ

On considère les paliers à rouleaux, à lubrification hydrodynamique. En partant de certains résultats antérieurs, on écrit les expressions des moments et des coefficients de frottement. On détermine les vitesses des rouleaux et l'on peut ainsi obtenir les valeurs des coefficients de frottement et du moment résistant total.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Palmgren, B. Snare, *Influence of Load and Motion on the Lubrication and Wear of Rolling Bearings*. Paper 52, Conference on Lubrication and Wear, London 1—3 octombrie 1957.
2. D. T. Barwell, *Lubrication of Bearings*, London, 1956.
3. N. Tipei, *Lubrificația suprafețelor cilindrice cu mișcare de rostogolire și alunecare*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
4. N. Tipei, Al. Nica, *Presiunile și caracteristicile globale în lubrificația suprafețelor cilindrice cu mișcare de rostogolire și alunecare*. Studii și cercetări de mecanică aplicată **IX**, *2* (1958).
5. R. D. Beizelman, B. V. Tîpkin, *Rulmenți*. Ed. tehnică, București, 1956.

ÎN LEGĂTURĂ CU CALCULUL DE ORDINUL II AL CAPACITĂȚII PORTANTE A CADRELOR

DE

ST. BĂLAN, S. RĂUTU și V. PETCU

Determinarea capacității portante a cadrelor se face în prezent printr-un calcul de ordinul I, care nu ține seama de influența deformațiilor asupra eforturilor și deci asupra sarcinii de rupere.

O serie de experiențe executate [1], [2], au arătat că deformațiile duc la micșorarea sarcinii de rupere și deci la reducerea coeficientului de siguranță.

De această problemă se ocupă W. H. King și D. E. Jenkins [3], care fac calculul capacității portante a unor cadre simple, ținînd seama de influența deformațiilor asupra sarcinii de rupere. În acest scop, ei scriu ecuațiile de echilibru al fiecărui element de bară (limitat de noduri sau de o articulație plastică) în stare deformată. În studiul lor, ei neglijează influența deformațiilor elastice, introducînd în calcul numai deformațiile plastice. Acest lucru nu este justificat în cazul construcțiilor rațional proiectate la care coeficientul de redistribuție este mic (1,2—1,4) și deformațiile elastice sînt de același ordin de mărime cu cele plastice.

Prezenta lucrare prezintă o metodă simplă pentru calculul de ordinul II al capacității portante a cadrelor.

Se admite că deformațiile sînt mici și se poate neglija pătratul deformațiilor raportate la deformații. Această ipoteză este justificată de încercări și de concluziile lucrării [3].

Determinarea sarcinii de rupere se face analog ca și în cazul calculului de ordinul I. Se cunosc punctele în care pot lua naștere articulații plastice precum și diversele mecanisme ce se pot astfel forma. Se alege dintre toate mecanismele posibile acela căruia îi corespunde sarcina de rupere minimă. Capacitatea portantă a cadrului se obține scriind ecuația de lucru mecanic virtual al sistemului în momentul ruperii.

Se știe [4] că în cazul calculului de ordinul II, ecuația de lucru mecanic virtual se obține dînd o deformație infinit mică de la poziția de echilibru (poziţia deformată a cadrului). Ecuaţia de lucru mecanic are forma

$$\sum Q \cdot \bar{\delta}_q + \sum \int P \cdot \varphi \cdot \bar{\varphi} \cdot ds = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \tag{1}$$

unde s-a notat cu

Q — forţele transversale care acţionează sistemul;
P — forţele normale;
M — momentele încovoietoare ce iau naştere în sistem;
$\bar{M}$ — momentele încovoietoare produse de deplasarea virtuală;
$\bar{\delta}_q$, $\bar{\varphi}$ — deplasările liniare şi unghiulare date (deplasare virtuală);
φ — deplasarea unghiulară reală a sistemului.

Partea dreaptă a relaţiei (1) reprezintă lucrul mecanic interior al sistemului şi este egal cu lucrul mecanic produs de momentele plastice M_{ir}. În consecinţă relaţia (1) devine

$$\sum Q \cdot \bar{\delta}_q + \sum \int P \cdot \varphi \cdot \bar{\varphi} \cdot ds = \sum M_{ir} \bar{\varphi}_i \tag{2}$$

În cazul cînd sarcina axială este constantă pe fiecare porţiune, ea poate fi scoasă de sub semnul integral ca şi deplasarea $\bar{\varphi}$ şi relaţia (2) se poate scrie

$$\sum Q \cdot \bar{\delta}_q + \sum P_{ab} \cdot \bar{\varphi}_{ab} \int_a^b \varphi \cdot ds = \sum M_{ir} \cdot \bar{\varphi}_i,$$

sau (3)

$$\sum Q \bar{\delta}_q + \sum P_{ab} \cdot \bar{\varphi}_{ab} (y_b - y_a) = \sum M_{ir} \cdot \bar{\varphi}_i .$$

După cum reiese din relaţia (3) deosebirea între un calcul de ordinul I şi calculul de ordinul II, constă în introducerea termenului al doilea în partea stîngă a relaţiei.

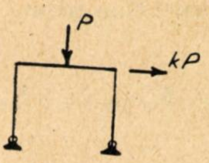
În tabloul din figura 1 se dă calculul de ordinul I şi de ordinul II pentru un cadru simplu.

Din exemplul de mai sus rezultă că deformaţiile influenţează atît mărimea sarcinii de rupere cît şi graniţele dintre domeniile în care au loc ruperi după diverse tipuri de mecanisme.

În cazul încercărilor pe cadre din masă plastică [2], este evident că deformaţiile vor fi proporţional mult mai mari decît în realitate, iar legile de similitudine pentru calculul de ordinul II nu sînt respectate. În acest caz, trebuie să se urmărească care este influenţa deformaţiilor asupra modelului şi a prototipului şi corectate rezultatele experimentale.

De exemplu în cazul cadrului din figura 2 [2], [7], sarcina de rupere de ordinul I este

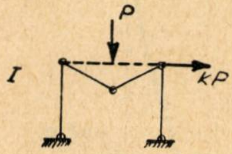
$$P_I = \frac{8M_c}{l}.$$



I = const.
$\overline{\varphi}$ — deplasarea virtuală unghiulară
φ — deplasarea reală unghiulară
N_1 — sarcina axială în bara 0—1
N_2 — sarcina axială în bara 2—3

IPOTEZE DE RUPERE

Calculul de ordinul I și de ordinul II se confundă

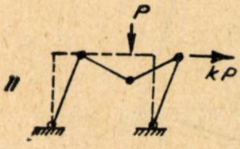


Ecuația de lucru mecanic virtual

$$P_r \frac{l}{2} \overline{\varphi} - 4\, M\, \overline{\varphi} = 0$$

$$P_r = \frac{8M}{l}$$ Domeniul de aplicare $k = 0$

Calculul de ordinul I



Ecuația de lucru mecanic virtual

$$P_r \frac{l}{2} \overline{\varphi} + k\, P_r\, \overline{\varphi} l - 4\, M\, \overline{\varphi} = 0$$

$$P_r = \frac{8M}{l\,(1 + 2k)}$$ Domeniul de aplicare $0 < k < \frac{1}{2}$

Calculul de ordinul II

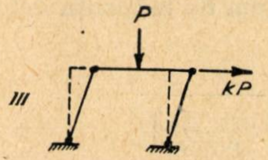
Ecuația de lucru mecanic virtual

$$P_r \frac{l}{2} \overline{\varphi} + kP_r\, l\, \overline{\varphi} + N_1\, \varphi\, l\, \overline{\varphi} + N_2\, \varphi l \varphi - 4M\overline{\varphi} = 0$$

$$P_r = \frac{8M}{l\left(1 + 2k + 2\varphi \dfrac{N_1 + N_2}{P}\right)} = \frac{8M}{l\,(1 + 2k + 2\varphi)}$$

Domeniul de aplicare $0 < K + \varphi < \frac{1}{2}$

Calculul de ordinul I



$$kP_r\, l\varphi - 2M\, \overline{\varphi} = 0$$

$$P_r = \frac{2M}{lk}$$ Domeniul de Aplicare $k > \frac{1}{2}$

Calculul de ordinul II

$$kP_r\, l\overline{\varphi} + P_r\, l\, \varphi\overline{\varphi} = 2\, M\overline{\varphi}$$

$$P_r = \frac{2M}{l\,(k + \varphi)}$$ Domeniul de aplicare $k + \varphi > \frac{1}{2}$

Fig. 1

Scriind ecuaţia de lucru mecanic virtual care ţine seama şi de lucrul mecanic al sarcinilor axiale

$$P \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot d\varphi + 2 \times 0{,}75 \cdot P \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot d\varphi - 10\, M_c\, d\varphi + N_1 \cdot y_1\, d\varphi + N_2 \cdot y_2 \cdot d\varphi = 0,$$

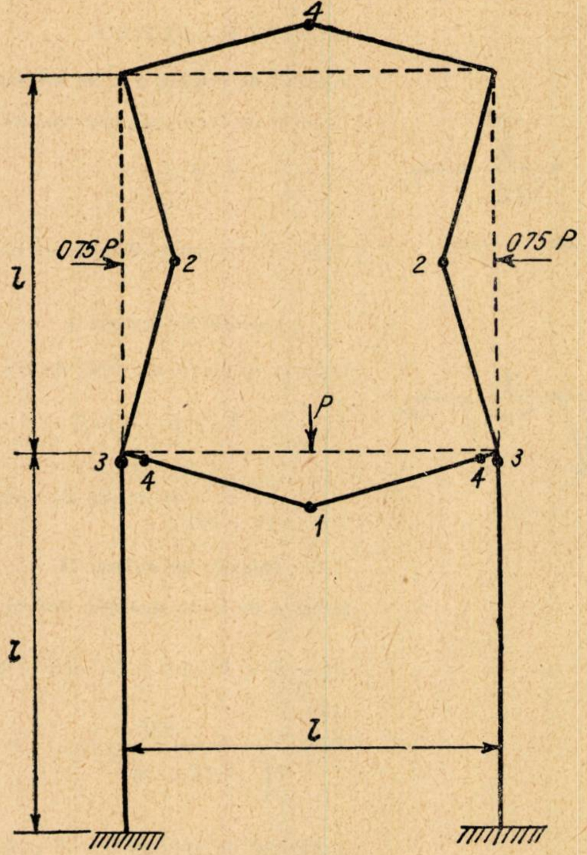


Fig. 2

se obţine valoarea sarcinii critice, ţinînd seama de influenţa deformaţiilor asupra capacităţii portante

$$P_{II} = \frac{8M_c}{l} \cdot \frac{1}{1 + 1{,}6\left(\frac{N_1}{P} \cdot \frac{y_1}{l} + \frac{N_2}{P} \cdot \frac{y_2}{l}\right)}. \tag{4}$$

În cazul acestui exemplu sarcina de rupere printr-un calcul de ordinul II poate fi pusă sub forma

$$P_{II} = \beta \,.\, P_I. \tag{5}$$

Coeficientul β depinde de natura construcţiei, tipul solicitării şi caracteristicile elastice ale structurii. În cazul cînd sînt respectate legile de similitudine, coeficientul β este acelaşi atît pentru model cît şi pentru prototip.

Similitudinea între model şi prototip nu se poate realiza pe modele de mase plastice.

Pentru a realiza acest lucru rezultă din expresia coeficientului β că este necesar că se respecte relaţiile

$$\frac{N_i^m}{P^m} = \frac{N_i^p}{P^p}, \tag{6}$$

$$\frac{\delta_i^m}{\delta_i^p} = \frac{l^m}{l^p}. \tag{7}$$

Scara forţelor (6) este satisfăcută; săgeţile pe model sînt proporţional mult mai mari decît în realitate şi relaţia (7) nu este satisfăcută. Din această cauză este necesar să se calculeze un coeficient de corecţie

$$P_r^p = \alpha \cdot \lambda^2 \cdot P_{r.\,\mathrm{ex.}}^m \frac{\beta^p}{\beta^m}, \tag{8}$$

unde $\alpha = \frac{\sigma_c^p}{\sigma_c^m}$, $\lambda = \frac{l^p}{l_m}$, $P_{r.\,\mathrm{ex.}}^m$ = sarcina de rupere experimentală a modelului,

β^p — coeficientul β pentru prototip,
β^m — coeficientul β pentru model.

Dacă se cunoaşte coeficientul β pentru model se poate uşor calcula şi pentru prototip

$$\beta^m = \frac{1}{1+1{,}6\left(\frac{N_1^m}{P^m}\cdot\frac{y_1^m}{l^m} + \frac{N_2^m}{P^m}\cdot\frac{y_2^m}{l^m}\right)} = \frac{1}{1+\alpha},$$

deoarece

$$\frac{N_i^m}{P_1^m} = \frac{N_i^p}{P^p}, \tag{9}$$

rezultă

$$\beta^p = \frac{1}{1+1{,}6\left(\frac{N_1}{P}\cdot\frac{y_1^p}{l^p} + \frac{N_2}{P}\cdot\frac{y_2^p}{l^p}\right)} = \frac{1}{1+\alpha\gamma},$$

unde

$$\gamma = \frac{\sigma_c^p}{\sigma_c^m}\cdot\frac{E^m}{E^p}\cdot\frac{1}{\lambda}. \tag{10}$$

Cunoscînd materialul din care este făcut modelul şi prototipul precum şi scara de reducere a modelului, rezultă coeficientul γ.

★

Sarcina de rupere în cazul calculului de ordinul II este funcţie şi de deformaţiile sistemului în momentul ruperii. Calculul acestor deformaţii se poate face simplu dacă se ştie care este ultima articulaţie plastică a cărei apariţie a dus la transformarea cadrului într-un mecanism. Înaintea apariţiei ultimei articulaţii plastice sistemul este static determinat. În consecinţă, se calculează acest sistem, avînd articulaţii perfecte în toate punctele unde au apărut articulaţii plastice, la acţiunea sarcinilor exterioare şi a momentelor de plastifiere. Se determină diagrama de momente şi cu ajutorul ei se pot determina deplasările în toate punctele sistemului [5].

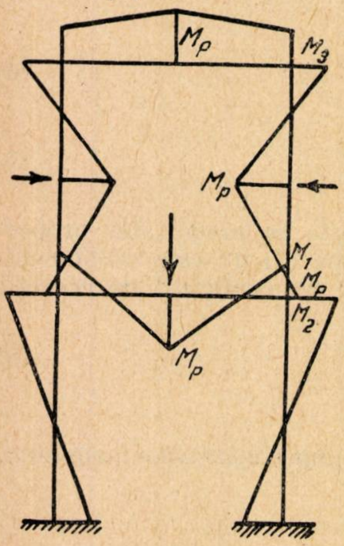


Fig. 3

Dacă nu se cunoaşte ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice, ea se poate determina prin încercări ţinînd seama că în cazul cînd luăm ca ultimă articulaţie plastică pe acea reală se obţine săgeata maximă a construcţiei [6].

În cazul încercărilor pe modele ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice este cunoscută şi în consecinţă calculul deplasărilor se face relativ simplu.

Astfel, pentru modelul studiat, stadiul care precede apariţia ultimei articulaţii este dat în figura 4. În această situaţie, diagrama de momente încovoietoare este dată în figura 3.

Valorile ordonatelor acestei diagrame rezultă din următoarele relaţii de echilibru :

$$M_1 = \frac{Pl}{4} - M_p,$$

$$M_2 = 2M_p - \frac{Pl}{4},$$

$$M_3 = \frac{5Pl}{8} - 4M_p.$$

Forţele axiale sînt

$$N_1 = \frac{15\,M_p}{2l} - \frac{P}{2} \text{ (rigla inferioară)},$$

$$N_2 = \frac{5P}{4} - \frac{6M_p}{l} \text{ (rigla superioară)}.$$

Săgeţile se calculează folosind diagramele unitare pe sistemul de bază (fig. 4 *a* şi *b*).

Se obţin următoarele rezultate:

$$y_1 = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{25\,Pl^3}{192} - \frac{3M_p\,l^2}{4} \right),$$

$$y_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_p \cdot l^2}{12} - \frac{M_3 \cdot l^2}{24} \right).$$

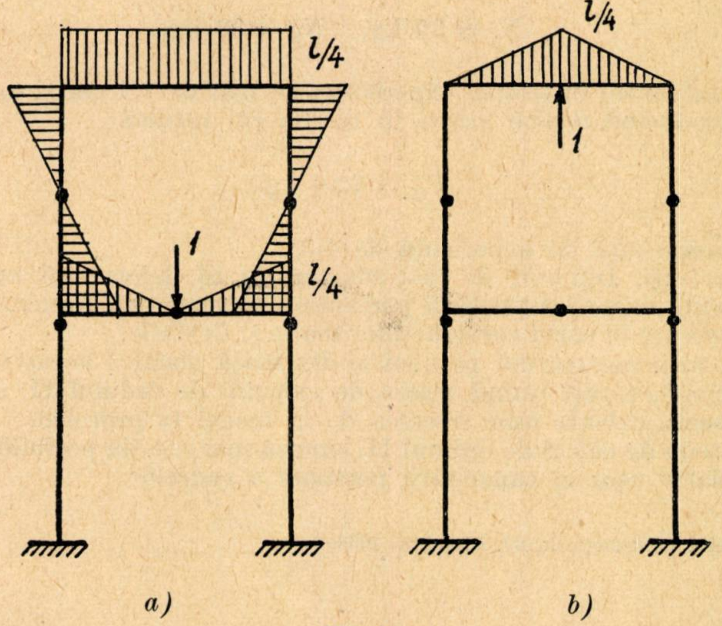


Fig. 4

Pentru valorile

$$E = 36\,000 \text{ kg/cm}^2,$$
$$I = 0{,}0512 \text{ cm}^4,$$
$$l = 10 \text{ cm},$$
$$M_p = 103 \text{ kg/cm},$$

rezultă

$$y_1 = 0{,}0707\,P - 4{,}2, \tag{11}$$
$$y_2 = 0{,}0141\,P - 0{,}47.$$

Introducînd aceste valori ale deformaţiilor în formula (4) se obţine o ecuaţie de gradul II cu ajutorul căreia se determină valoarea lui P_{II}.

Practic este mai simplu a se determina mărimea sarcinii critice prin încercări succesive. Se dă o valoare sarcinii de rupere P (inferioară lui P_I) şi se determină săgeţile din relaţiile (11). Aceste valori se introduc în relaţia (4) şi se determină din nou valoarea sarcinii de rupere. Calculul se opreşte cînd eroarea este suficient de mică.

În cazul de față se pornește cu valoarea rezultată din experiența [2] $P = 76$ kg.

Rezultă săgețile

$$y_1 = 1{,}15 \text{ cm}, \ y_2 = 0{,}60 \text{ cm}$$

și sarcinile axiale :

$$N_1 = 39 \text{ kg}, \quad N_2 = 33 \text{ kg}.$$

Săgețile măsurate în timpul experienței au fost de 1,2 cm și de 0,66 cm.

Introducînd aceste valori în relația (4) rezultă

$$P_{II} = 72{,}6 \text{ kg},$$

deci o eroare față de experiență de 4,5%.

Concluzii. Din cele de mai sus rezultă că deformația unui sistem are influență asupra capacității portante a construcției. Această influență are importanță în cazul construcțiilor înalte și flexibile.

În cazul încercărilor pe modele din masă plastică această influență este sensibilă, totuși ținînd seama de calculul de ordinul II, expus mai sus, se poate calcula ușor trecerea de la model la prototip.

Metoda de calcul de ordinul II, expusă mai sus, dă posibilitatea unui calcul relativ ușor al capacității portante a cadrelor.

Primită la redacție la 29 octombrie 1958.

В СВЯЗИ С РАСЧЕТОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ РАМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе представлен простой метод расчета 2-го порядка несущей способности рам. Несущая способность получается, записав уравнение виртуальной работы системы в момент разрыва, с учетом работы осевых сил.

Для определения деформаций системы, входящих в уравнение виртуальной работы, рассматривается стадия, предшествующая образованию последнего шарнира, превращающего систему в механизм.

Даются соотношения подобия для случаев, в которых несущая способность рам определяется при помощи моделей из пластмассы, и приводится пример расчета, иллюстрирующий этот метод.

SUR LE CALCUL DU SECOND ORDRE DE LA CAPACITÉ PORTANTE DES CADRES

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent une méthode simple pour le calcul du second ordre de la capacité portante des cadres. La capacité portante s'obtient en écrivant l'équation du travail mécanique virtuel du système au moment de sa rupture, en tenant compte du travail mécanique effectué par les forces axiales.

Afin de déterminer les déformations du système qui interviennent dans l'équation du travail mécanique virtuel, on considère le stade précédant la formation de la dernière articulation qui transforme le système en un mécanisme.

On donne les relations de similitude pour les cas où l'on détermine la capacité portante des cadres en faisant usage de maquettes en matière plastique. La méthode est illustrée par un exemple de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. J. F. Baker, *Tests on full-scale.* ICE-PI, *1* (1952).
2. Ştefan Bălan, S. Răutu, V. Petcu, *Introducerea masei plastice SDP*-1 *în studiul construcţiilor pe modele la scară redusă.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, *9* (1958).
3. J. W. H. King, D. E. Jenkins, *Effect of distortion of a stiff-jointed frame on its plastic collaps load.* The Engineer, aprilie, *13* (1957).
4. M. B. Корноухов, *Прочность и устойчивость стержневых систем.* Стройиздат, Москва, 1949.
5. A. A. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия.* Стройиздат, Москва, 1949.
6. P. S. Sysmonds, B. G. Neal, *The interpretations of failure loads in the plastic theory of continuous beams and frames.* Journ. Aero. Sci., *1* (1952).
7. Г. И. Розенблат, *Применение метода деформаций к расчету рам за пределом упругости.* Исследования по теории сооружений, **VII**, Москва, 1957.

ELASTICITATE — REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA PROBLEMELOR DINAMICE ALE LUI BOUSSINESQ ȘI HERTZ

DE

M. MIȘICU

Problema semispațiului mărginit de un plan acționat de o forță verticală este punctul de plecare a numeroase procedee de rezolvare de probleme mai complexe ale Teoriei elasticității. Acestea privesc comportarea elastică a semispațiului pentru diferite condiții la limită, cît și a contactului elastic a două corpuri elastice.

Problemele dinamice de o deosebită importanță atît în domeniul contactului elastic, cît și referitor la problema semispațiului, apărînd la fundații de mașini, grinzi de rulare pentru elemente mobile, lagăre, angrenaje etc. nu își găsesc însă aceeași extindere.

În cele ce urmează este expusă o cale de rezolvare a problemelor dinamice pornind de la rezolvarea problemei Boussinesq tridimensională.

În privința problemei Boussinesq ne vom referi la cazul semispațiului elastic încărcat dinamic de o forță fixă sau mobilă. Această problemă tratată inițial de Boussinesq [1] și reluată în cazul dinamic de H. Lamb [2] sub raportul comportării semispațiului la limita sa superioară este extinsă în diferite cazuri în literatură. D. I. Serman a dat o formulare a acestei probleme cu ajutorul ecuațiilor integrale reușind a analiza calitativ fenomenele din interiorul corpului [3]—[7]. Jan Sneddon expune în cartea sa [8] o metodă de obținere a deplasărilor și tensiunilor în semispațiul elastic sub acțiunea unor forțe mobile normale la limită, sub forma unor integrale (neefectuate în raport cu funcțiile de transformare).

Actualmente sînt tratate diferite probleme statice legate de semispațiul elastic încărcat parțial [9]—[12].

Contactul elastic (static) al corpurilor astfel cum a fost considerat inițial de H. Hertz [13], a putut fi extins și în alte cazuri [14], [15] în special în urma cercetărilor lui I. A. Staerman [16], [17], [18], [19] prin utilizarea potențialului discului eliptic. Menționăm de asemenea lucrările lui A. Lurie [20].

I. PROBLEMA SEMISPAŢIULUI SOLICITAT LA LIMITA SA DE FORŢE FIXE SAU MOBILE VARIABILE ÎN TIMP

1. Funcţii de tensiune în cazul axial simetric

Vom utiliza următoarea expresie a deplasărilor:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \psi, \tag{1}$$

unde φ şi ψ sînt funcţii de z, iar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ limita semispaţiului este dată de constanta $t = 0$.

Vom folosi următoarele notaţii ale operatorilor:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Box_l = \Delta - \frac{1}{c_l^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \Box_t = \Delta - \frac{1}{c_t^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{2}$$

unde

$$\frac{1}{c_l} = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}; \quad \frac{1}{c_t} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

sînt vitezele de propagare a undelor longitudinale şi transversale.

Ecuaţiile de continuitate ale lui Cauchy sînt în acest caz

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu \Box_t u &= 0 \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu \Box_t v &= 0 \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu \Box_t w &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

şi se scriu în baza relaţiilor (2) sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\lambda + \mu}{\mu}\left(\Delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \Box_t \varphi\right\} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\lambda + \mu}{\mu}\left(\Delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \Box_t \varphi\right\} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\lambda + \mu}{\mu}\left(\Delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \Box_t \varphi\right\} + \Box_t \psi = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

În cazul analizat în această lucrare, ecuaţiile precedente se pot scinda în următoarele :

$$\Box_t \psi = 0 \tag{I}$$

$$\Box_l \varphi + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \tag{II}$$

deoarece operatorii $\Box_l$ şi $\Box_t$ sînt legaţi prin intermediul relaţiei

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \Box_l = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \Delta + \Box_t . \tag{5}$$

În ipoteza legii lui Hooke :

$$\begin{gathered} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{gathered} \tag{6}$$

tensiunile tangenţiale se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} \psi \right), \\ \tau_{yz} &= 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} \psi \right), \\ \tau_{xy} &= 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Funcţia dilatării elastice are expresia

$$\theta = \Delta \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{c_l^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{8}$$

astfel că tensiunile normale devin

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\lambda}{c_l^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\lambda}{c_l^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_z &= \mu \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\lambda}{c_l^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

În cele ce urmează vor fi determinate funcţiile de tensiune φ, ψ introduse în cazul problemei dinamice Boussinesq.

2. Condiţiile la limită satisfăcute de funcţiile de tensiune în cazul problemei dinamice de tip Boussinesq

Vom pune condiţiile ca la limita superioară a semispaţiului elastic ($z = 0$) să avem satisfăcute următoarele relaţii :

$$\tau_{zx} = \tau_{xy} = 0\,; \qquad \sigma_z = -\,p\,(x, y, t)\,; \qquad (z = 0), \tag{10}$$

p fiind o forţă variabilă în timp, aplicată la limita superioară a semispaţiului.

În baza relaţiilor (7) şi (9), condiţiile (10) se mai scriu :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\psi}{2} = 0, \qquad (z = 0), \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu}\,\psi + 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} + \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{c_l^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = +\,\frac{1}{\mu}\,p\,; \quad (z = 0).$$

Se ştie că în cazul static, funcţia ψ fiind armonică, avem din (II)

$$\varphi = -\,\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\cdot\frac{1}{2}\,z\psi + \varphi_0\,; \qquad \Box_l\,\varphi_0 = 0, \tag{12}$$

condiţiile la limită fiind

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \frac{\mu}{2\,(\lambda + 2\mu)}\cdot\psi = 0\,; \qquad (z = 0), \tag{13}$$

$$2\,\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\,\frac{p}{\mu}\,; \qquad (z = 0).$$

Soluţia corespunzătoare ultimei condiţii este potenţialul de strat simplu

$$2\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \psi = -\,\frac{1}{2\,\mu\,\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{r}\,; \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \tag{14}$$

Scăzînd din (14) prima din relaţiile (13) amplificată cu 2 se deduce că

$$\psi = -\,\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\,(\lambda + \mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,(\xi, \eta)\,d\,\xi\,d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}. \tag{15}$$

De asemenea se calculează şi expresia deplasărilor

$$w = \psi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \psi + \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\cdot\frac{1}{2}\left(\psi + z\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \frac{\lambda + 3\mu}{2\,(\lambda + 2\mu)}\,\psi = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \frac{\mu}{2\,(\lambda + 2\mu)}\,\psi\right) + \frac{\psi}{2}. \tag{16}$$

La limita superioară, în baza primei condiţii la limită, se deduce că

$$w = -\frac{1-\nu^2}{\pi \cdot E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \tag{17}$$

ţinînd seama de următoarele relaţii între coeficienţii lui Lamé, Poisson şi Young :

$$E = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu};\quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)};\quad \frac{1-\nu^2}{E} = \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}. \tag{18}$$

Acest rezultat stabilit în mod diferit şi care rezolvă problema Boussinesq poate fi extins şi în cazul dinamic. Pentru aceasta va fi necesar stabilirea în prealabil a legăturii între cele două funcţii de tensiune φ şi ψ care în cazul static sînt date de relaţia (12).

3. Integrarea expresiei funcţiei de tensiune ψ

Vom presupune că

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\omega^2\varphi. \tag{19}$$

Aceste ipoteze evident particulare corespund unei soluţii particulare ce se poate obţine din cazul general prin descompunerea încărcărilor în serii Fourier în raport cu timpul. În acest mod soluţia generală se poate reconstitui sumînd soluţiile ce sînt studiate în cele ce urmează. Vom alege următoarea formă a funcţiei φ suficient de generală pentru cazul ce interesează :

$$\varphi = \varphi_0 + \sum \chi_n(z)\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n},$$

$$\Box_l\,\varphi_0 = 0.$$

Pe de altă parte, este clar că, ţinînd seama de relaţia (I)

$$\Box_l\,\psi = (\Box_l - \Box_t)\,\psi = \left(\frac{1}{c_t^2} - \frac{1}{c_l^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \omega^2\delta\psi.$$

În baza relaţiei (19) acceptată anterior se deduce de asemenea că

$$\Box_l\,\varphi = \sum_n\left\{(\Box_l\,\chi_n)\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n} + \chi_n\Box_l\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n} + 2\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\cdot\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial z^{n+1}}\right\} =$$

$$= \sum_n\{\chi_n'' + \delta\omega^2\chi_n + 2\chi_{n-1}'\}\cdot\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n}, \tag{19'}$$

unde

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

ecuația (II) transformîndu-se în următoarele :

$$\chi_0'' + \delta\omega^2 \chi_0 = 0$$

$$\chi_1'' + \delta\omega^2 \chi_1 + 2\chi_0' = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$$

$$\chi_2'' + \delta\omega^2 \chi_2 + 2\chi_1' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\chi_n'' + \delta\omega^2 \chi_n + 2\chi_{n-1}' = 0 ; \qquad n = 3,\ 4,\ \ldots \tag{20}$$

Vom considera următoarele soluții ale sistemului de ecuații (20) :

$$\chi_0 = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{2\sqrt{\delta}\,\omega}\cdot\sin(\sqrt{\delta}\,\omega z) = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{2\sqrt{\delta}\,\omega}\sum_{0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\delta}\,\omega z)^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!},$$

$$\chi_1 = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,2\,\frac{4/3}{\delta\omega^2}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{\delta}\,\omega}{2}z\right) - \frac{1}{2}\sin(\sqrt{\delta}\,\omega z)\right] =$$

$$= \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{\delta\omega^2}\left[\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^4}{4!} - 2\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^6}{6!} + 3\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^8}{8!} - 4\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{10}}{10!} + \right.$$

$$\left. + 5\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{12}}{12!}\ldots\right],$$

$$\chi_2 = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{2}{(\sqrt{\delta}\,\omega)^3}\left[\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^5}{5!} - 3\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^7}{7!} + 6\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^9}{9!} - \right.$$

$$\left. - 10\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{11}}{11!} + \ldots\right], \tag{21}$$

$$\chi_3 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{2^2}{(\sqrt{\delta}\,\omega)^4}\left[\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^6}{6!} - 4\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^8}{8!} + 7\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{10}}{10!} - \right.$$

$$\left. - 17\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{12}}{12!} + \ldots\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\chi_n = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{2^{n-1}(-1)^{n-1}}{(\sqrt{\delta}\,\omega)^{n+1}}\left[q_{n0}\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{n+3}}{(n+3)!} - q_{n1}\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{n+5}}{(n+5)!} + \right.$$

$$\left. + q_{n2}\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{n+7}}{(n+7)!} - \ldots + (-1)^m q_{nm}\,\frac{(z\sqrt{\delta}\,\omega)^{n+3+2m}}{(n+3+2m)!} + \ldots\right],$$

unde

$$q_{nm} = \sum_{N_n=1}^{N_n=m} \cdots \sum_{N_2=1}^{N_2=N_3} \sum_{N_1=1}^{N_1=m} \sum_{\text{de } N_1 \text{ ori}} 1.$$

Avem

$$\begin{aligned} q_{0m} &= 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \\ q_{1m} &= 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m,\ \ldots, \\ q_{2m} &= 1,\ \ldots,\ \frac{m(m+1)}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Aceste valori se deduc în baza relaţiilor imediate:

$$\sum_{N_1=1}^{N_1=m} = m; \quad \sum_{N_2=1}^{N_2=m} \sum_{N_1=1}^{N_1=N_2} = \sum_{N_2=1}^{N_2=m} N_2 = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{23}$$

Analog se deduc următoarele valori:

$$q_{3m} = \sum_{N_3=1}^{N_3=m} \sum_{N_2=1}^{N_2=N_3} \sum_{N_1=1}^{N_1=N_2} 1 = \sum_{N_3=1}^{N_3=m} \frac{N_3\,(N_3+1)}{2} = \frac{1}{4}\, m(m+1) + $$

$$+ \frac{1}{2}\, \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}, \tag{24}$$

$$q_{4m} = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3!} = \frac{1}{3}\left[m(m+1) + \frac{3m(m+1)(2m+1)}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2(m+1)^2}{4}\right] = m(m+1)(m+2)(m+3)\,\frac{1}{4!},$$

$$q_{nm} = \frac{1}{n!}\, m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n-1)! = C^n_{m+n-1}.$$

În definitiv, funcţiile $\chi_n(z)$, (20), se scriu sub forma

$$\chi_n(z) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2^{n-1}}{(\sqrt{\delta}\,\omega)^{n+1}} (-1)^{n-1} \sum (-1)^m\, C^n_{m+n-1}\, \frac{(\sqrt{\delta}\,\omega z)^{n+3+2m}}{(n+3+2m)!} \tag{25}$$

obţinîndu-se implicit funcţia $\varphi - \varphi_0$.

4. Comportarea la limită a funcţiilor de tensiune

Vom studia comportarea la limită pentru $z = 0$, a funcţiilor $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, ψ, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$. Pentru aceasta este necesară cunoaşterea comportării la limită a funcţiei $\chi_n(z)$.

Din (25) se deduce că pentru $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\chi_n(0) = 0; n = 0, 1, 2, \ldots \\ &\left.\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right|_0 = 0, \ n = 1, 2, \ldots \\ &\frac{\partial \chi_0}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \\ &\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial z^2} = 0; \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

De asemenea la limita $z = 0$ funcția φ va fi caracterizată prin următoarele condiții:

$$\varphi(0) = \varphi_0(0)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_0 = \sum \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \chi_n'(z)\frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} + \chi_n(z)\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial z^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\psi(_0) + \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right|_0 = \sum \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \chi_n''(z)\frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} + 2\chi_n'(z)\cdot\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial z^{n+1}} + \chi_n(z)\cdot\frac{\partial^{n+2}\psi}{\partial z^{n+2}}\right)\Bigg|_{z=0} = \tag{27}$$

$$= -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z} + \left.\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2}\right|_{z=0}.$$

Condițiile la limită (11) devin

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\psi}{2} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\psi = 0, \quad z = 0 \tag{III}$$

$$\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z} + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\omega}{c_l}\right)^2 \varphi_0 = -\frac{p(x, y, t)}{\mu}, \ z = 0. \tag{IV}$$

În mod analog ca în cazul static vom transcrie condițiile (IV) în forma următoare:

$$\frac{2\,\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\omega}{c_l}\right)^2 \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{-p(x, y, t)}{\mu}. \tag{IV'}$$

Să punem

$$\Gamma(x, y, z, t) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\psi. \tag{28}$$

E clar că la limita $z = 0$, $\Gamma(x, y, z, t) = 0$. Funcția Γ satisface următoarea ecuație diferențială:

$$\Box_l \Gamma - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\Box_l \psi = 0. \tag{29}$$

Deoarece $\Box_l\,\psi = (\Box_l - \Box_t)\,\psi = (1/c_t^2 - 1/c_l^2)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (1/c_l^2 - 1/c_t^2)\,\omega^2\,\psi =$

$= - \delta\omega^2\psi$, unde $\delta = {}^1/c_t^2 - {}^1/c_l^2$, se deduce că funcţia Γ satisface o ecuaţie analogă cu ecuaţia de tip Helmholtz a undelor monocromatice (II) unde în loc de coeficientul $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$ apare coeficientul $\frac{\mu\delta\,\omega^2}{2(\lambda+2\mu)}$ iar în loc de funcţia $\partial\psi/\partial z$ apare funcţia ψ. Funcţia Γ va fi deci de forma

$$\Gamma = \Gamma_0 - \frac{\mu\,\delta\omega^2}{2(\lambda+\mu)}\sum \chi_n(z)\frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial z^{n-1}}, \tag{30}$$

unde Γ_0 e o funcţie satisfăcînd ecuaţia

$$\Box_l \cdot \Gamma_0 = 0 \tag{31}$$

funcţiile $\chi_n(z)$ fiind aceleaşi ca în cazul relaţiei (25).

La limită funcţia Γ satisface, conform condiţiilor (26), relaţia :

$$\Gamma(x, y, z, t) = \Gamma_0(x, y, 0, t) = 0. \tag{32}$$

Aşadar funcţia Γ_0 satisfăcînd ecuaţia (31) este nulă în tot spaţiul. În baza expresiei (32) a funcţiei Γ se deduce că

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} = \frac{\partial\Gamma}{\partial z} - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\mu\,\delta\omega^2}{2(\lambda+\mu)}\sum\left(\chi_n'(z)\frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial z^{n-1}} + \chi_n(z)\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n}\right) - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{33}$$

În baza condiţiei (26) urmează că la limită

$$\left.\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}\right|_{z=0} = \frac{\mu\,\delta\omega^2}{2(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\Psi - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}, \tag{34}$$

unde

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \psi.$$

Pe de altă parte, funcţia φ_0 poate fi luată astfel ca la limită $\varphi_0(x, y, 0, t) = 0$. Condiţia (IV′) va deveni deci

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu\delta\,\omega^2\Psi}{2(\lambda+2\mu)} = -\frac{p(x, y, t)}{\mu}. \tag{IV''}$$

5. Soluţia staţionară a ecuaţiei undelor monocromatice de tip Helmholtz în cazul semispaţiului elastic

Conform formulei lui Kirchoff, soluţia ecuaţiei (I) pentru condiţiile la limite (IV″) este dată de potenţialul retardat de prim strat de forma

$$\Phi = -\frac{\lambda+2\mu}{2\pi\,\mu(\lambda+\mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\xi, \eta, t - r/c_l)}{r}\,d\xi\cdot d\eta\,;\ r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}, \tag{35}$$

unde p este conform ipotezelor, o funcţie periodică de timp astfel că

$$p\,(x,\ y,\ t - r/c_t) = p\,(x,\ y) \cdot [A \cos \omega\,(t - r/c_t) + B \sin \omega\,(t - r/c_t)],$$
$$A^2 + B^2 = 1. \tag{36}$$

Pentru o expunere mai clară vom considera asemenea condiţii iniţiale astfel ca $A = 1$, $B = 0$.

Expresia deplasării normale la limita $z = 0$ este

$$w\,(x,\ y,\ 0,\ t) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_0 + \left.\psi\right|_0 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\mu}{2\,(\lambda + 2\mu)}\psi\right) + \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}. \tag{37}$$

Într-o primă etapă de aproximare se poate considera drept soluţie a problemei date chiar funcţia $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \approx \psi$; $w \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$.

Pentru o rezolvare exactă va fi necesară integrarea expresiei funcţiei Ψ, care se obţine din (11) scrisă în baza soluţiei (35) sub forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\mu\,\delta\omega^2}{2\,(\lambda + \mu)}\Psi = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\,\mu\,(\lambda + \mu)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r}\cos \omega\left(t - \frac{r}{c_t}\right) \tag{38}$$

sau

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1 - 2\nu}{2}\delta\,\omega^2\,\Psi = -\frac{2\,(1 - \nu^2)}{\pi E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,(\xi,\eta)\cdot d\xi \cdot d\eta}{r}\cos \omega\left(t - \frac{r}{c_t}\right)$$

deoarece

$$\frac{\mu}{2\,(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda + \mu - \lambda}{2\,(\lambda + \mu)} = \frac{1}{2} - \nu = \frac{1 - 2\nu}{2}. \tag{39}$$

Prin integrare rezultă

$$\psi = -\frac{2\,(1 - \nu^2)}{\pi E}\int_0^z d\zeta \cdot \frac{\sin \delta\omega^2\,(1 - 2\nu)\,(z - \zeta)}{\delta\omega^2\,(1 - 2\nu)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot$$
$$\cdot\, d\eta\,\frac{p\,(\xi,\eta)\cos \omega\left(t - \dfrac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}{c_t}\right)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}. \tag{40}$$

Se deduce apoi că

$$w\,(x,\ y,\ 0,\ t) =$$
$$= -\frac{1 - \nu^2}{\pi E}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}\cos \omega\left(t - \frac{1}{ct}\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}\right). \tag{41}$$

Expresia deplasării în cazul general este

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \psi, \tag{42}$$

unde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\sum_0^\infty\chi_n\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n}=\Gamma-\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\,\psi-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\,\psi+$$
$$+\sum\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_n\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n}\right)+\frac{(\lambda+\mu)\;\psi}{2(\lambda+2\mu)}\right]=\Gamma-\frac{\psi}{2}+\sum\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_n\frac{\partial^n\psi}{\partial z^n}\right)+\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\,\psi\right]. \qquad (43)$$

Se deduce

$$w=(1+L)\,\frac{\psi}{2}\,, \qquad (44)$$

unde, în baza relației (30), L reprezintă operatorul

$$L=\sum_0^\infty 2\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\right)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}-\frac{\mu\,\delta\omega^2}{\lambda+\mu}\sum_0^\infty\chi_n'(z)\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}. \qquad (45)$$

Pentru $z=0$ se obține expresia (41) stabilită anterior.

6. **Problema semispațiului elastic solicitat de forțe variabile în timp, mobile, fără frecare**

Vom considera transformatele Fourier

$$\overline{\psi}(\xi,\eta,\zeta,\tau)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y,z,t)\,e^{i(\xi x+\eta y+\tau t)}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\overline{\varphi}_1(\xi,\eta,\zeta,\tau)+z\overline{\varphi}_2(\xi,\eta,\zeta,\tau)=$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y,z,t)\,e^{i(\xi x+\eta y+\tau t)}\,dx\,dy\,dt, \qquad (46)$$

unde $\varphi=\varphi_1+z\varphi_2$, $\Box_l\,\varphi_1=0$.

Amplificînd ecuațiile (I) și (II) cu $e^{i(\xi x+\eta y+\tau t)}\cdot dx\;dy\;dt$ și integrînd se obține (impunînd ca la $\pm\infty$ funcțiile ψ și φ să tindă către zero), respectiv din ecuația (I)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,dy\,dt\,e^{i(\xi x+\eta y+\tau t)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c_t^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx\;dy\;dt\,e^{i(\xi x+\eta y+\tau t)}\Big[-(-(i\xi)^2)-(-(i\eta)^2)+ \qquad (47)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(-\frac{1}{c_t^2}(i\,\tau)^2\right)\Big]\,\psi=0$$

sau

$$\frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial z^2} = \left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_t^2}\right)\overline{\psi} \tag{48}$$

şi respectiv din ecuaţia (II)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, dt\, e^{i(\xi x + \eta y + \tau t)}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, dt\, e^{i(\xi x + \eta y + \tau t)} \cdot \left[- i\xi\,(- i\xi\varphi) - i\eta\,(- i\eta\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_l^2}(- i\,\tau\,(- i\,\tau\varphi) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}(- i\,\tau)\psi\right] = \tag{49}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, dt \cdot e^{i(\xi x + \eta y + \tau t)}\left[-\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}\right)\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\, i\,\tau\psi\right] = 0$$

sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 z^2} - \left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}\right)\right)\overline{\varphi}_2 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\, i\,\tau \cdot \overline{\psi} = 0. \tag{50}$$

Din condiţia $\Box_l\ \varphi_1 = 0$ avem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}\right)\right)\overline{\varphi}_1 = 0. \tag{51}$$

Cu acestea se deduce că $\overline{\varphi}_1$ are forma (tinzînd la zero către infinit)

$$\overline{\varphi}_1 = B \cdot e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau}{c_l^2}} \cdot z}. \tag{52}$$

Analog se deduce că

$$\overline{\psi} = A \cdot e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}} \cdot z}. \tag{53}$$

Din (50) rezultă că

$$\overline{\varphi}_{2'} = C \cdot e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}} \cdot z} \tag{54}$$

astfel că

$$\tau^2\left(\frac{1}{c_l^2} - \frac{1}{c_t^2}\right)C - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\, i\,\tau A = 0. \tag{55}$$

Comportarea funcţiilor la limita $z = 0$ este următoarea:

$$\bar{\varphi}_1 = B; \quad \bar{\psi} = A; \quad \bar{\varphi}_2 = C; \quad z = 0,$$

$$\begin{gathered}
\frac{\overline{\partial \varphi_1}}{\partial z} = -B\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}}; \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = -A\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}};\\
\frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial z} = -\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_t^2}} \cdot C, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^2} = B\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}\right); \qquad (56)\\
\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_2}{\partial z^2} = C\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}\right); \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}.
\end{gathered}$$

Să aplicăm acum transformata inversă. Conform unei teoreme cunoscute, vom avea

$$\begin{gathered}
\psi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x + \eta y + \tau t)} \cdot \bar{\psi},\\
\varphi_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x + \eta y + \tau t)} \cdot \bar{\varphi}_1, \qquad (57)\\
\varphi_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x + \eta y + \tau t)} \cdot \bar{\varphi}_2.
\end{gathered}$$

La limita $z = 0$ condiţiile (III) se scriu

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \psi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta \cdot e^{-i(\xi x + \eta y + \tau t)} \Bigl[-2\Bigl(B\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}} &+\\
+ c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_t^2}}\Bigr) + A\Bigr] &= 0. \qquad (58)
\end{aligned}$$

Condiţia (IV) devine

$$\begin{aligned}
\frac{P}{\mu} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu}\psi + 2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &=\\
= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x + \eta y + \tau t)} \cdot \Bigl\{\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu}\Bigl(-A\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_t^2}}\Bigr) &+\\
+ 2\Bigl[B\Bigl(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_l^2}\Bigr) + C\Bigl(\xi^2 + \eta^2 - \frac{\tau^2}{c_t^2}\Bigr)\Bigr] + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{c_l^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B + C)\Bigr\}&. \qquad (59)
\end{aligned}$$

Ecuaţiile (55), (58), (59) constituie un sistem cu trei necunoscute A, B, C, A şi B fiind funcţii de x, y, z şi t; avem

$$C = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{i}{\tau\left(\dfrac{1}{c_l^2}-\dfrac{1}{c_t^2}\right)}\,A\,(x, y, t) = I_1\cdot A, \tag{60}$$

$$A=\frac{2\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x+\eta y+\tau t)}\sqrt{\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_l^2}}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x+\eta y+\tau t)}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{i}{\tau\left(1/c_l^2-1/c_l^2\right)}\sqrt{\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_t^2}}\right)}B=I_2B.$$

Din (59) se deduce

$$\frac{P}{\mu}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x+\eta y+\tau t)}\cdot\left[\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_t^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\,2\left(\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_l^2}+I_1I_2\left(\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_t^2}\right)\right)+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{c_l^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(1+I_1I_2)\right]B=I_3\,B$$

sau (61)

$$B=\frac{P}{\mu I_3}\,;\; I_3=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x+\eta y+\tau t)}\,\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\sqrt{\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_t^2}}+2\left(\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_l^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,I_1I_2\cdot\left(\xi^2+\eta^2-\frac{\tau^2}{c_t^2}\right)\right)+\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{1}{c_l^2}\,(1+I_1I_2)\right]\cdot$$

Deplasările la limita $z = 0$ sînt:

$$w=\frac{\psi(0)}{2}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\tau\, e^{-i(\xi x+\eta y+\tau t)}\cdot I_2\,\frac{P}{\mu I_3}\cdot \tag{62}$$

Forma obţinută este complicată şi greu de aplicat. Pentru acest motiv, s-a prezentat anterior (punctul 5) altă metodă pentru studiul problemei dinamice Boussinesq.

II. PROBLEMA DINAMICĂ A CONTACTULUI ELASTIC

7. Potenţialul discului eliptic în cazul dinamic

Vom considera în primul rînd contactul elastic al semispaţiului cu o placă rigidă. Vom folosi calea adoptată pentru cazul static în lucrarea [19] a lui I. A. Staerman *).

---

*) p. 197–225.

Vom avea de integrat expresia potențialului

$$V\,(x, y, 0, t) = \iint \frac{p\,(x', y')\,dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} \cos\,\omega\left[\frac{1}{c_t}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}-t\right]. \tag{63}$$

Vom presupune ca anterior doar cazul monocromatic

Presupunem în limita ipotezelor uzuale din problemele de contact, următoarea dezvoltare a expresiei presiunilor de contact :

$$p\,(x', y') = \sum_{m=0}^{m} a_m \frac{\left(1-\left(\frac{x'}{a}\right)-\left(\frac{y'}{b}\right)^2\right)^m}{\sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2}}. \tag{64}$$

astfel că potențialul va avea forma

$$V\,(x, y, 0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, f_m\,(x, y, t), \tag{65}$$

unde

$$f_m\,(x, y, t) = \iint \left(1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2\right)^{m-1/2} \frac{dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \cdot$$
$$\cdot \cos\,\omega\left[\frac{1}{c_t}\sqrt{(x-x')+(y-y')^2}-t\right]. \tag{66}$$

Notînd

$$x' = x + R\cos\varphi\,; \quad y' = y + R\cos\,\varphi, \quad d\sigma = R\cdot dR\cdot d\varphi$$

(elementul de suprafață) se deduce că

$$f_m\,(x, y, t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_0(\varphi)}\left[1-\frac{(x+R\cos\varphi)^2}{a^2}-\frac{(y+R\sin\varphi)^2}{b^2}\right]^{m-1/2}\cdot\cos\,\omega\,(R/_{c_t}-t). \tag{67}$$

În expresiile de mai sus R reprezintă lungimea razei vectoare. Vom nota apoi prin x'', y'' coordonatele punctelor situate pe elipsa de semiaxe a, b :

$$\left(\frac{x''}{a}\right)^2+\left(\frac{y''}{b}\right)^2 = 1. \tag{68}$$

Conform unei notații uzitate și în [19]

$$x'' = x + R_0\cos\varphi\,; \qquad y'' = y + R\sin\,\varphi, \tag{69}$$

unde R_0 reprezintă lungimea razei vectoare a unui punct pe elipsă, ecuația elipsei se mai scrie

$$\left(\frac{x+R_0\cos\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{y+R_0\sin\varphi}{b}\right)^2 = 1. \tag{70}$$

De asemenea utilizînd notaţiile introduse în [19]:

$$L(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}; \quad M(\varphi) = \frac{x \cos \varphi}{a^2} + \frac{y \sin \varphi}{b^2}; \quad N = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{71}$$

şi

$$R_0(\varphi) = \frac{-M(\varphi) + \sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}{L(\varphi)} \tag{72}$$

se va obţine următoarea expresie a funcţiilor $f_m(x, y, t)$:

$$f_m(x, y, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} [N - 2RM(\varphi) - R^2 L(\varphi)]^{m - 1/2} \cos \omega (R/c_t - \\ - t) \cdot dR = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0(\varphi)} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N\right]^{m - 1/2} \left\{1 - \\ - \left(\frac{M(\varphi) + RL(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}\right)^2\right\}^{m - 1/2} \cos \omega (R/c_t - t)\, dR . \tag{73}$$

Luînd ϑ ca nouă variabilă astfel ca

$$\cos \vartheta = \frac{M(\varphi) + RL(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}};$$

se deduce că

$$-\sin \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{L(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}} dR, \tag{74}$$

$$dR = -\sqrt{\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N} \cdot \frac{\sin \vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}; \quad R = -\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} + \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{\frac{M^2}{L(\varphi)} + M},$$

$R = R_0(\varphi)$ pentru $\vartheta = 0$.

Se obţine

$$f_m(x, y, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N\right]^m \sin^{2m} \vartheta \cos \omega \left(\frac{1}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} + \\ + \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N}\right) - t\right), \tag{75}$$

unde pentru $R = 0$ vom avea în loc de $\cos \vartheta$ valoarea

$$\cos \theta(\varphi) = \frac{M(\varphi)}{\sqrt{M^2(\varphi) + NL(\varphi)}}. \tag{76}$$

Punînd $\varphi = \pi + \psi$ se obține

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N\right]^m \sin^{2m} \vartheta \cdot d\vartheta \cos \omega \left[\frac{1}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right) - \right.$$

$$\left. - t\right] = \int_{0}^{\pi} d\psi \int_{0}^{\theta(\pi+\psi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi+\psi)}} \left[\frac{M^2(\pi+\psi)}{L(\pi+\psi)} + N\right]^m \sin^{2m} \vartheta d\vartheta \cdot \tag{77}$$

$$\cdot \cos \omega \frac{1}{c_t}\left(-\frac{M(\pi+\psi)}{L(\pi+\psi)} + \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\pi+\psi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi+\psi)}{L(\varphi+\psi)}}\right) - t\Big] \cdot$$

Observînd că $L(\pi + \psi) = L(\psi)$; $M(\pi + \psi) = - M(\psi)$; $\cos \theta(\pi + \psi) = - \cos \theta(\psi)$; $\theta(\pi + \psi) = \pi - \theta(\psi)$ se vede că expresia anterioară se mai scrie

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi-\theta(\psi)} \frac{1}{\sqrt{L(\psi)}} \left[\frac{M^2(\psi)}{L(\psi)} + N\right]^m \sin^{2m} \vartheta \cdot d\vartheta \cos \omega \left[\frac{1}{c_t}\left(\frac{M(\psi)}{L(\psi)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\psi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\psi)}{L(\psi)}}\right) - t\right] \cdot \tag{78}$$

Punînd $\vartheta = \pi - \vartheta'$ va rezulta apoi că

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left[\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N\right]^m \sin^{2m} \vartheta \, d\vartheta \cos \omega \left[\frac{1}{c_t}\left(-\frac{M(\psi)}{L(\psi)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\psi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\psi)}{L(\psi)}}\right) - t\right] = \int_{0}^{\pi} d\psi \int_{\theta(\psi)}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{L(\psi)}} \left(\frac{M^2(\psi)}{L(\psi)} + \right. \tag{79}$$

$$\left. + N\right)^m \sin^{2m} \vartheta' \, d\vartheta' \cos \omega \left[\frac{1}{c_t}\left(\frac{M(\psi)}{L(\psi)} - \frac{\cos \vartheta'}{\sqrt{L(\psi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\psi)}{L(\psi)}}\right) - t\right] \cdot$$

Funcțiile f_m date de (75) vor fi transcrise în forma

$$f_m(x, y, t) = \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\theta(\varphi)} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left(\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + N\right)^m \sin^{2m} \vartheta \, d\vartheta \cos \omega \left[\frac{1}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right) - t\right] + \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{\theta(\varphi)}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \left(\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)} + \right.$$

$$\left. + N\right)^m \sin^{2m} \vartheta \cdot d\vartheta \cos \omega \left[\frac{1}{c_t}\left(\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} - \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right) - t\right] \cdot \tag{80}$$

Întrucît

$$\begin{aligned}\cos\omega\left[\frac{1}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)-t\right]&=\cos\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\right.\\ \left.+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\cos\omega t+\sin\frac{\omega}{c_t}&\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\sin\omega t,\end{aligned}\tag{81}$$

$$\begin{aligned}\cos\omega\left[\frac{1}{c_t}\left(\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}-\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)-t\right]&=\cos\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\right.\\ \left.+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\cdot\cos\omega t&-\sin\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\right.\\ &\left.+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{M+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\sin\omega t,\end{aligned}$$

relația (80) se mai scrie

$$\begin{aligned}f_m(x,y,t)&=\int_0^\pi\int_0^\pi d\varphi\, d\vartheta\,\sin^{2m}\vartheta\cdot\cos\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\right.\\ &\left.+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\cos\omega t\frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}}\left(\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}+N\right)^m+\\ &+\int_0^\pi\int_0^\pi d\varphi\, d\vartheta\,\sin^{2m}\vartheta\left\{\sin\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)+\right.\\ &\left.+\sin\frac{\omega}{c_t}\left(\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right\}\right.\cdot\sin\,\omega t\cdot\frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}}\left(\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}+N\right)^m.\end{aligned}\tag{82}$$

Întrucît

$$\begin{aligned}\sin\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)+\sin\frac{\omega}{c_t}\left(\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}+\right.\\ \left.+\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)=2\sin\left(\frac{\omega}{c_t}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N+\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c_t}\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right)\end{aligned}\tag{83}$$

avem în definitiv

$$\begin{aligned}f_m(x,y,t)&=\int_0^\pi\mathcal{C}_m(\varphi,t)\,d\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}}\left(\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}+N\right)^m+\\ &+\int_0^\pi\mathcal{D}_m(\varphi,t)\,d\varphi\,\frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}}\left(\frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}+N\right)^m,\end{aligned}\tag{84}$$

unde

$$\mathcal{C}_m(\varphi) = \int_0^\pi d\vartheta \sin^{2m} \vartheta \cos\frac{\omega}{c_t}\left(-\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} + \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right)\cos\omega t,$$

$$\mathfrak{D}_m(\varphi) = \int_0^\pi d\vartheta \sin^{2m}\vartheta\, 2\sin\left(\frac{\omega}{c_t}\cdot\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c_t}\cdot\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right)\cdot\sin\omega t\,\cdot\right.$$

Pentru integrarea coeficienţilor $\mathcal{C}_m$ şi $\mathfrak{D}_m$ vom utiliza următoarea formulă, care defineşte funcţiile cilindrice Bessel :

$$\mathcal{J}_p(q) = \frac{(q/2)^p}{\Gamma(p + {}^1\!/_2)\,\Gamma({}^1\!/_2)}\int_0^\pi e^{\pm iq\cdot\cos\varphi}\cdot\sin^{2p}\varphi\, d\varphi, \tag{85}$$

$$\mathcal{Re}\,(p + {}^1\!/_2) > 0,$$

unde

$$\mathcal{J}_p(K) = \left(\frac{K}{2}\right)^p \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(K/2)^{2q}(-1)^q}{q!\,\Gamma(p+q+1)} = \left(\frac{K}{2}\right)^p \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(K/2)^{2q}(-1)^q}{q!\,(p+q)!} \tag{86}$$

se deduce că

$$\mathcal{C}_m(\varphi, t) = \int_0^\pi \sin^{2m}\vartheta\cdot d\vartheta\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c_t}\frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\cos\vartheta\right)\cdot\cos\frac{\omega}{c_t}\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\cdot$$

$$\cos\omega t = \frac{\Gamma(m + {}^1\!/_2)\cdot\Gamma({}^1\!/_2)}{(K/2)^m}\mathcal{J}_m(K)\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c_t}\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right)\cdot\cos\omega t, \tag{87}$$

$$\mathfrak{D}_m(\varphi, t) = 0,$$

unde

$$K = \frac{\omega}{c_t}\frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}}\sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}$$

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4^m}\cdot\frac{2m!}{m!}\,;\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,;\ \Gamma(1) = 1. \tag{88}$$

În definitiv, coeficienţii $\mathcal{C}_m(\varphi, t)$ au expresia

$$\mathcal{C}_m(\varphi, t) = C_m\cdot m!\,\frac{\mathcal{J}_m(K)}{(K/2)^m}\cos\left(\frac{\omega}{c_t}\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right)\cdot\cos\omega t =$$

$$= C_m\cdot m!\sum_{p=0}^{\infty}\frac{K^{2p}(-1)^p}{2^{2p}\cdot p!\,(p+m)!}\cos\left(\frac{\omega}{c_t}\frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right)\cos\omega t \tag{89}$$

$$C_m = \frac{2m-1}{2m}\cdot C_m - 1 = \pi\cdot\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}$$

regăsind valorile coeficienţilor potenţialului din cazul static al discului eliptic.

Cu acestea potenţialul discului eliptic în cazul dinamic este

$$V(x, y, 0, t) = \pi_{ab} \int_0^{\pi} \Big[a_0 \mathfrak{J}_0 (K) + \sum_{m=1}^{\infty} a_n \frac{1.3.5 \ldots (2m-3) \cdot (2m-1)}{2.4.6 \ldots (2m-2) \cdot 2m} \cdot \frac{\mathfrak{J}_m (K)}{(K/_2)^m} \cdot m! \Big] \tag{90}$$

$$\left[1 - \frac{(x \sin \varphi \, y - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right]^m \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{c_t} \cdot \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} \right) \cdot \cos(\omega t).$$

8. Contactul elastic al stampei rigide cu secţiune transversală eliptică aplicată pe semispaţiul elastic

Asupra ipotezelor uzuale ale contactului elastic static, trimitem la lucrările citate. În cazul dinamic vom face ipoteza suplimentară că în decursul variaţiei zonei de contact în regim dinamic nu se produc desprinderi. Vom presupune în cele ce urmează existenţa contactului semiplanului elastic cu o stampă rigidă transversal eliptică a cărei ecuaţie este

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \, ; \; a < b. \tag{91}$$

Notînd $\vartheta (1 - \mu)^2/\pi E$, vom avea că deplasarea la limita superioară este

$$w = - \vartheta \iint_{\Sigma} \frac{p(x', y') \, dx' \, dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \cdot \cos \omega \left[\frac{1}{c_t} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} - t \right]. \tag{92}$$

Deplasarea în dreptul stampei va fi

$$w = f(x, y, t) \tag{93}$$

identică cu ecuaţia bazei plăcii. În ipoteza contactului permanent în regim dinamic cu placa, vom considera ca şi în cazul static o primă formă a distribuţiei presiunilor pe fundul stampei

$$p(x', y') = \frac{a_0}{\sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2}} \, .$$

Forma bazei plăcii, compatibilă cu expresia aleasă a presiunilor, nu va fi însă, ca în cazul static, plan ci va diferi de forma plană cu cît fenomenul dinamic este mai accentuat. Pentru a rezolva problema directă corespunzătoare bazei plane, va fi necesară alegerea unui număr mare de coeficienţi a_n.

În cele ce urmează ne vom limita deocamdată la rezolvarea problemei inverse pentru $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ În acest caz avem

$$V(x, y, 0, t) = \pi \cdot a \cdot b \cdot a_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\omega}{c_t} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right) \cdot \cos\omega\, t}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega}{c_t} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right) \cdot d\varphi. \quad (94)$$

Cu ajutorul relației

$$P = \iint p(x', y')\, dx'\, dy' = a_0 \iint \frac{dx'\, dy'}{\sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2}} \quad (95)$$

se obține presiunea maximă pe placă.

Integrînd expresia (95) se obține [19]:

$$a_0 = \frac{P}{2\pi a \cdot b} \cdot \quad (96)$$

Funcția deplasării va fi

$$w = \frac{P\vartheta}{2b} \int_0^{\pi} \frac{\cos\left[\left(\frac{\omega}{c_t} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right) - \omega t\right]}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega}{c_t \sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}\right) d\varphi, \quad (97)$$

unde $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$ astfel că $L = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)/a^2$.

Să observăm acum că în cazul frecvențelor joase integrala precedentă devine

$$w = \frac{P\vartheta}{2b}\left[F(\pi, e) \cos\left(\frac{\omega}{c_t} \frac{M(\pi)}{L(\pi)}\right) \cdot \cos(\omega t)_0 \mathcal{J}_0 \frac{\omega}{c_t} \frac{M(\pi)}{L(\pi)} \sqrt{1 + \frac{NL(\pi)}{M(\pi)}}\right) - I\right], \quad (98)$$

unde

$$F(\varphi, e) = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (99)$$

reprezintă funcția eliptică a lui Euler, iar

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \cdot F(\varphi, e) \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\cos\left(\frac{\omega}{c_t} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right) \cdot \mathcal{J}_0\left(\frac{\omega}{c_t} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} \sqrt{1 + \frac{NL(\varphi)}{M(\varphi)}}\right)\right\} \cos \omega t \quad (100)$$

se poate neglija în cazul frecvențelor joase.

Această aproximație corespunde condiției

$$\left|\frac{\omega}{c_t} \frac{M(\pi)}{L(\pi)}\right| \simeq \left|\frac{\omega}{c_t} \frac{x \cos \pi + (q/b)^2 y \sin \pi}{1 - e^2 \sin^2 \pi}\right| = \left|-\frac{\omega x}{c_t}\right| < < 1. \quad (101)$$

Luînd $c_t = 800$ m/s va trebui ca pentru $x = 1$ m să avem $\omega \lll 800$m/s condiție destul de uzuală.

În cazul vibrațiilor înalte integrala (97) va trebui dezvoltată în serie. Vom trata cazul stampei cu secțiune circulară limitîndu-ne la studiul în apropierea conturului elipsei cînd $N = 0$. În acest caz, pentru $e = 0$, se obține $L = 1/a^2$; $M(\varphi) = (x\cos\varphi + y\sin\varphi)/a^2$. În această situație notînd

$$\mathcal{J} = \frac{\omega}{c_t}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \tag{102}$$

deplasările au expresia

$$w = \frac{P\vartheta}{2b}\int_0^\pi \cos\zeta\, \mathcal{J}_0(\zeta)\, d\varphi \cos\omega t. \tag{103}$$

Vom utiliza dezvoltările în serie

$$\cos\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \frac{\zeta^8}{8!}\dots$$

$$\mathcal{J}_0(\zeta) = \sum_0^\infty \frac{(i\zeta/2)^{2m}}{(m!)^2} = 1 - \left(\frac{\zeta}{2!}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^4 - \frac{1}{36}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^6 + \frac{1}{576}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^8 \dots \tag{104}$$

$$\cos\zeta\cdot\mathcal{J}_0(\zeta) = 1 - \frac{3}{4}\zeta^2 + \frac{35}{192}\zeta^4 - \frac{77}{3840}\zeta^6 + \frac{143}{16384}\zeta^8\dots$$

Ținînd seama că

$$\int_0^\pi d\varphi = \pi;\ \int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2};\ \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2};\ \int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{8};\ \int_0^\pi \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{8};\ \int_0^\pi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{8} \tag{105}$$

$$\int_0^\pi \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = 0;\ \int_0^\pi \cos\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi \cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{5\pi}{16};\ \int_0^\pi \sin^6\varphi\, d\varphi = \frac{5\pi}{16};\ \int_0^\pi \cos^4\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{16};$$

$$\int_0^\pi \cos^2\varphi\sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{16};\ \int_0^\pi \cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi = 0;\ \int_0^\pi \cos^5\varphi\sin\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi \cos\varphi\sin^5\varphi\, d\varphi = 0;\ \int_0^\pi \cos^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{2m-1}{2m}\dots\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\pi$$

va rezulta că

$$\int_0^\pi \zeta^2\, d\varphi = \int_0^\pi \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 (x^2 \cos^2\varphi + y^2 \sin^2\varphi + 2\, xy \sin\varphi \cos\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 (x^2 + y^2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\pi \zeta^4\, d\varphi = \frac{3\pi}{8}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^4 (x^2 + y^2)^2 \\
&\int_0^\pi \zeta^6\, d\varphi = \frac{5\pi}{16}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^6 (x + y^2)^3
\end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

$$\int_0^\pi \zeta^{2m}\, d\varphi = \frac{2m-1}{2m} \cdots \frac{1}{2}\, \pi \left(\frac{\omega r}{c_t}\right)^{2m}; \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Se deduce din (103) că deplasarea în apropierea limitei conturului va fi

$$w = \frac{\pi}{2}\, \frac{P\vartheta}{b}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\omega r}{c_t}\right)^2 + \frac{35}{512}\left(\frac{\omega r}{c_t'}\right)^4 - \frac{715}{262114}\left(\frac{\omega r}{c_t}\right)^6 + \dots\right] \cos \omega t. \qquad (107)$$

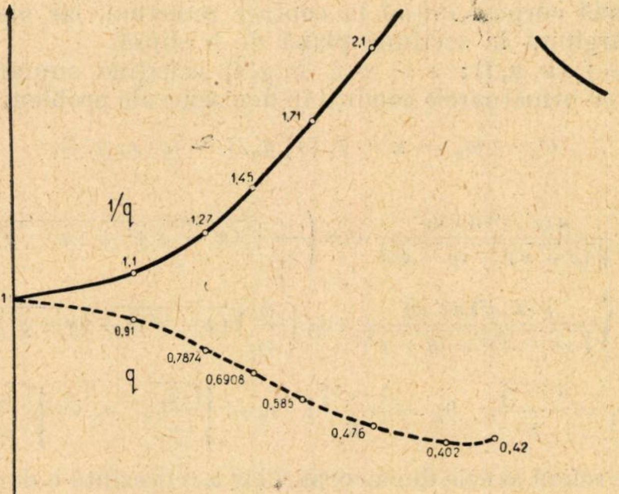


Fig. 1

Pentru cazul static se obține valoarea

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P\vartheta}{b}. \qquad (108)$$

Vom nota

$$\lambda = \frac{\omega}{c_t} r$$

$$q = 1 - \frac{3\lambda^2}{8} + \frac{35}{512}\lambda^4 - \frac{715}{262114}\lambda^6 ; \quad \omega = \omega_0 q \cos \omega t. \tag{109}$$

În figură este arătată variaţia lui q pentru $\lambda < 2$.

Este de notat că prin ipoteză, stampa oscilează în jurul poziţiei definite de limita superioară a spaţiului. Dacă stampa se consideră complet rezemată pe semispaţiu, ea va oscila în jurul poziţiei statice w_0 astfel că $w = (1 + q)\, w_0$.

Observăm că datele numerice au fost calculate pe baza coeficienţilor determinaţi anterior. Pentru analiza comportării dinamice în cazul unor frecvenţe foarte mari $\lambda \gg 1$ va fi necesară evaluarea coeficienţilor de ordin superior.

9. Contactul dinamic a două corpuri elastice

Vom presupune existenţa unui contact elastic permanent în regim dinamic a două corpuri iniţial în contact punctual, iar ulterior, după o suprafaţă mărginită în secţiune plană de o elipsă.

Fie $z = f_1(x, y, t)$; $z = -f_2(x, y, t)$ ecuaţiile suprafeţelor corpurilor. Vom avea următoarele condiţii în deplasări ale problemei de contact :

$$w_1 - w_2 = \alpha - f_1(x, y, t) - f_2(x, y, t), \tag{110}$$

unde

$$w_1 = -\vartheta_1 \iint \frac{p(x', y')\, dx'\, dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \cos\left(\frac{\omega}{c_1}\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} - \omega t\right),$$

$$w_2 = -\vartheta_2 \cdot \iint \frac{p(x', y')\, dx'\, dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \cos\left(\frac{\omega}{c_2}\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} - \omega t\right), \tag{111}$$

$$\vartheta_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{E}, \quad \vartheta_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{E}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}.$$

Indicii 1, 2 se referă la cele două corpuri iar α reprezintă o deplasare neelastică (rigidă).

Vom presupune că forma corpurilor este dată de următoarele expresii ale funcţiilor

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_0^m A_{mn} x^m y^n ; \quad A_0 = A_1 = A_2 = 0, \\ f_2 &= \sum_0^m B_{mn} x^m y^n ; \quad B_0 = B_1 = B_2 = 0, \\ A_{12} &+ B_{12} = 0 ; \quad A = A_{11} + B_{11} > A_{22} + B_{22} = B. \end{aligned} \tag{112}$$

Coeficienţii A_{mn}, B_{mn} în cazul static sînt constanţi; în cazul dinamic sînt funcţie de x, y. Această ipoteză permite rezolvarea pe cale inversă a problemei de contact.

Vom presupune existenţa unu contact după o suprafaţă mărginită de o elipsă $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Vom considera atunci potenţialul discului eliptic pentru $n = 1$, $a_1 = 0$, $n \neq 1$. Rămîne de stabilit forma corpurilor compatibilă cu această situaţie, precum şi dimensiunile zonei de contact, deplasările şi valoarea presiunilor:

$$P = \iint p\,(x', y')\, dx'\, dy'. \tag{113}$$

Utilizînd condiţia (110) se obţine în cazul potenţialului discului eliptic (90)

$$\begin{aligned} I = \iint \frac{p\,(x', y')\, dx'\, dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \left(\vartheta_1 \cos \omega \left(\frac{1}{c_1} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} - t\right) + \right. \\ \left. + \vartheta_2 \cos \omega \left(\frac{1}{c_2} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 - t}\right)\right) = \alpha - f_1 - f_2 = \\ = \frac{\pi\, ab\, a_1}{2} \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\right] \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \cdot \\ \cdot \left[\vartheta_1 \mathcal{J}_1 (K_1) \cos \left(\frac{\omega}{c_1} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right) + \vartheta_2 \mathcal{J}_2 (K_2) \cos \left(\frac{\omega}{c_2} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right)\right] \cdot \cos \omega t, \end{aligned} \tag{114}$$

unde

$$K_1 = \frac{\omega}{c_1} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}; \qquad K_2 = \frac{\omega}{c_2} \frac{1}{\sqrt{L(\varphi)}} \sqrt{N + \frac{M^2(\varphi)}{L(\varphi)}}. \tag{115}$$

Conform [19] *) se deduce prin integrare din (113) că

$$a_1 = \frac{3P}{2\pi ab}. \tag{116}$$

Expresia (I) o vom descompune în forma

$$I = I_0 (x, y, t) - I_1 (x, y, t)\, x^2 + I_2 (x, y, t) \cdot xy - I_3 (x, y, t) \cdot y^2, \tag{117}$$

---

* p. 211.

unde

$$I_0(x, y, t) = \frac{\pi}{2} aba_1 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \cdot H(\varphi, x, y, t),$$

$$I_1(x, y, t) = \frac{\pi}{2} aba_1 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} H(\varphi, x, y, t), \tag{118}$$

$$I_2(x, y, t) = \pi aba_1 \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} H(\varphi, x, y, t),$$

$$I_3(x, y, t) = \frac{\pi ab}{2} a_1 \int_0^\pi \frac{\cos^2 \varphi \cdot d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} H(\varphi, x, y, t),$$

$$H(\varphi, x, y, t) = \left(\vartheta_1 \mathcal{J}_1(K_1) \cos \frac{\omega}{c_1} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)} + \vartheta_2 \mathcal{J}_2(K_2) \cos \frac{\omega}{c_2} \frac{M(\varphi)}{L(\varphi)}\right) \cos \omega t.$$

În cazul static aceste expresii sînt integrate în [19] *). Pentru o exemplificare mai simplă ne vom limita la cazul discului circular pentru valori ale coordonatelor situate la limita zonei de contact ($N = 0$), cînd :

$$I_0(x, y, t) = \frac{\pi}{2} a \cdot a_1 \int_0^\pi d\varphi \cdot H(\varphi, x, y, t),$$

$$I_1(x, y, t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} a_1 \int_0^\pi d\varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot H(\varphi, x, y, t),$$

$$I_2(x, y, t) = \pi \frac{1}{a} a_1 \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot H(p, x, y, t), \tag{119}$$

$$I_3(x, y, t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} a_1 \int_0^\pi d\varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot H(\varphi, x, y, t),$$

$$H(\varphi, x, y, t) = (\vartheta_1 \mathcal{J}_1(\zeta_1) \cos \zeta_1 + \vartheta_2 \mathcal{J}_2(\zeta_2) \cos \zeta_2) \cdot \cos \omega t.$$

Utilizînd dezvoltările (104) se deduce că

$$I_0(x, y, t) = \frac{\pi^2}{2} aa_1 (\vartheta_1 q_1 + \vartheta_2 q_2) \cos \omega t. \tag{120}$$

Coeficienţii q_1, q_2 sînt obţinuţi din (109) luînd respectiv $\lambda_1 = \omega r / c_1$, $\lambda_2 = \omega r / c_2$. Avem apoi

$$I_3(x, y, t) = 0,$$

$$x^2 I_1(x, y, t) + y^2 I_3(x, y, t) = \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{a} \int_0^\pi d\varphi \, (x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi) \cdot$$

$$\cdot H(\varphi, x, y, t) = \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{a} \int_0^\pi d\varphi \, (r^2 - (x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 p)) \cdot \tag{121}$$

$$\cdot H(\varphi, x, y, t) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 I_0(x, y, t) - \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{a} \int_0^\pi d\varphi \, (x^2 \cos^2 \varphi +$$

$$+ y^2 \sin^2 \varphi) H \cdot (\varphi, x, y, t).$$

---

*) p. 214–216.

Deoarece se poate adăuga la expresia anterioară termenul nul xyI_2 și observînd că

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 = \left(\frac{c_1}{\omega_1} \zeta_1\right)^2 = \left(\frac{c_2}{\omega_2} \zeta_2\right)^2 \tag{122}$$

rezultă că

$$\begin{gathered} x^2 I_1 (x, y, t) + y^2 I_2 (x, y, t) = \frac{\pi^2}{2} aa_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 (\vartheta_1 q_1 + \vartheta_2 q_2) \cos \omega t - \\ - \frac{\pi}{2} \frac{a_1}{a} \left[\vartheta_1 \left(\frac{c_1}{\omega}\right)^2 \int_0^\pi d\varphi\, \zeta_1^2 \left(1 - \frac{3}{4} \zeta_1^2 + \frac{35}{192} \zeta_1^4 - \frac{77}{3840} \zeta_1^6 + \right.\right. \\ \left. + \frac{143}{16384} \zeta_1^8 \ldots \right) + \vartheta_2 \left(\frac{c_2}{\omega}\right)^2 \int_0^\pi d\varphi\, \zeta_2^2 \left(1 - \frac{3}{4} \zeta_2^2 + \frac{35}{192} \zeta_2^4 - \frac{77}{3840} \zeta_2^6 + \right. \\ \left.\left. + \frac{143}{16384} \zeta_2^8 \ldots \right)\right] \cos \omega t \end{gathered} \tag{123}$$

În baza formulelor (106) se calculează că

$$\begin{gathered} x^2 I_1 (x, y, t) + y^2 I_2 (x, y, t) = \frac{\pi^2}{2} aa_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 (\mathcal{J}_1 q_1 + \mathcal{J}_2 q_2) \cos \omega t - \\ - \frac{\pi}{2} \left(\frac{a_1}{a}\right) \left[\vartheta_1 \left(\frac{c_1}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \lambda_1^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3\pi}{8} \lambda_1^4 + \frac{35}{192} \cdot \frac{5\pi}{16} \cdot \lambda_1^6 - \frac{77}{3840} \cdot \frac{35}{128} \pi \lambda_1^8 \ldots \right) + \right. \\ \left. + \vartheta_2 \left(\frac{c_2}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \lambda_2^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3\pi}{8} \lambda_2^4 + \frac{35}{192} \cdot \frac{5\pi}{16} \lambda_2^6 - \frac{77}{3840} \cdot \frac{35}{128} \pi \lambda_2^8 \ldots \right)\right] \cos \omega t = \\ = \frac{\pi^2}{2} aa_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos \omega t \left\{ \vartheta_1 \left(q_1 - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} \lambda_1^2 - \frac{175}{3072} \lambda_2^4 + \frac{539}{98304} \lambda_2^6 - \ldots \right) + \right. \\ \left. + \vartheta_2 \left(q_2 - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} \lambda_2^2 - \frac{175}{3072} \lambda_2^4 + \frac{539}{98304} \lambda_2^6 - \ldots \right)\right\} \cdot \end{gathered} \tag{124}$$

Se deduce că

$$I = \frac{\pi^2}{2} aa_1 \left\{ \vartheta_1 q_1 + \vartheta_2 q_2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{2} (\vartheta_1 s_1 + \vartheta_2 s_2) \right\} \cdot \cos \omega t, \tag{125}$$

unde

$$s = 2 \left(q - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} \lambda^2 - \frac{175}{3072} \lambda^4 + \frac{539}{98304} \lambda^6 \ldots \right). \tag{126}$$

Pentru cazul static se obţine

$$I = \frac{\pi^2}{2} aa_1 (\vartheta_1 + \vartheta_2) \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right). \tag{127}$$

Pentru o deplasare rigidă

$$\alpha = \frac{\pi^2}{2} aa_1 (\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos \omega t = \frac{3\pi}{4} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} P \cos \omega t \tag{128}$$

corespunde următoarele ecuaţii ale suprafeţelor

$$f_1 = \frac{A}{A + B}\left[\frac{\pi^2}{4} aa_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \vartheta_1 s_1 - \frac{\pi^2}{2} aa_1 (\vartheta_1 (q_1 - 1) + \vartheta_2 (q_2 - 1))\right] P \cos \omega t,$$

(129

$$f_2 = \frac{B}{A + B}\left[\frac{\pi^2}{4} aa_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \vartheta_2 s_2 - \frac{\pi^2}{2} aa_1 (\vartheta_1 (q_1 - 1) + \vartheta_2 (q_2 - 1))\right] P \cos \omega t.$$

Mărimea razei cercului de contact se determină din ecuaţia

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{r^2}{f_1 + f_2} (\vartheta_1 s_1' + \vartheta_2 s_2')}, \tag{130}$$

unde

$$s' = s - 2 (q - 1) \left(\frac{\omega a}{c\lambda}\right)^2 = 2\left(q - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} \lambda^2 - \frac{175}{3072} \lambda^4 + \right.$$

$$\left. + \ldots - (q - 1) \left(\frac{\omega a}{c\lambda}\right)^2\right) = 1 - \frac{3}{16} \lambda^2 + \frac{35}{1536} \lambda^4 - \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 \left[- \frac{3}{4} \lambda^2 + \right. \tag{131}$$

$$\left. + \frac{35}{256} \lambda^4 \ldots\right] = 1 - \frac{(3 - 4l^2)}{16} \lambda^2 + \frac{35 - 6l^2}{1536} \lambda^4 ; \quad l = \frac{\omega a}{c}.$$

Pentru ca a să fie constant rezultă

$$f_1 + f_2 = Ar^2 \frac{\vartheta_1 s_1' + \vartheta_2 s_2'}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \tag{132}$$

astfel că

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{8} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{A} P} \cdot \cos \omega t. \tag{133}$$

Presupunînd următoarea exprimare

$$f_1 + f_2 = \sum_1^{\infty} A_m r^m \tag{134}$$

rezultă $A_1 = A$ şi deci

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{8} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{A_1} P} \cdot \cos \omega t. \tag{135}$$

Avem apoi

$$A_3 = -\frac{1}{16} \frac{(3 - 4l_1^2)(\vartheta_1/c_1)^2 + (3 - 4l_2^2)(\vartheta_2/c_2)^2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \omega^2 A,$$

$$A_5 = \frac{1}{1536} \frac{(35 - 6l_1^2)(\vartheta_1/c_1)^2 + (35 - 6l_2^2)(\vartheta_2/c_2)^2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \omega^2 A. \tag{136}$$

În acelaşi mod se calculează şi coeficienţii de ordin superior.

Aceste exemple le considerăm utile şi pentru atacarea problemelor de contact elastic dinamic mai complete, cît şi pentru problemele plane care n-au fost tratate în prezenta lucrare.

Primită la redacţie la 29 noiembrie 1959.

О ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ БУССИНЕСКА И ГЕРЦА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются динамические задачи Буссинеска и Герца, причем получается выражение перемещений и напряжений в случае нормально приложенных к верхней границе упругого полупространства сил, изменяющихся во времени (подвижных).

Произведенные расчеты относятся к частному случаю колебательного по гармоническому закону явления и, в рамках контактной задачи, выводится потенциал эллиптического диска, перемещения и форма контактной поверхности в случае эллиптического штампа.

В случае двух упругих контактных поверхностей определяются перемещения и контактные поверхности в случае тел, ограниченных поверхностью, имеющей степень больше 2.

DES PROBLÈMES DYNAMIQUES DE BOUSSINESQ ET HERTZ

RÉSUMÉ

L'auteur étudie les problèmes dynamiques de Boussinesq et Hertz et obtient l'expression des déplacements et des tensions pour le cas de forces normales à la limite supérieure du demi-espace élastique et variables dans le temps (mobiles).

Les calculs sont effectués dans le cas d'un phénomène vibratoire suivant une loi harmonique et l'on déduit, dans le cadre du problème de contact, le potentiel du disque elliptique, les déplacements, ainsi que la forme de la surface de contact, dans le cas de l'estampe elliptique.

S'il s'agit de deux surfaces de contact élastique, on détermine les déplacements et les superficies de contact dans le cas de corps limités par des surfaces d'un degré supérieur à 2.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris, 1885.
2. H. Lamb, Proceedings of the London Mathematical Society, **34**, 276 (1902).
3. Д. И. Шерман, *К теории установившихся колебаний среды при заданных внешних силах на всей границе*. ПММ, *13*, 557—560 (1946).
4. — *К некоторым задачам теории потенциала*. ПММ, **9**, *6*, 779—788 (1955).
5. — *О некоторых пространственных задачах теории потенциала*. ПММ, **12**, *3*, 329—338 (1946).
6. — ПММ, **XI**, *2*, 259—266 (1947).
7. — *Об установившихся упругих колебаниях при заданиях смещения на границе среды*. ПММ, **10**, *5 — 6*, 617—622 (1946).
8. Jan Sneddon, *Fourier Transforms*. New York, 1951.
9. Muki Rokuro, *On the Sneddon's Method by Hankel Transforms for the Three-Dimensional Problem of Elasticity Theory*. Proceedings 5-th Japan National Congress of Applied Mechanics, Tokyo, 119—194 (1956).
10. A. Lové, *The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure of Part of the Boundary*. Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. 17, *228*, 77 (1929).
11. W. R. Dean, H. W. Parsons, I. N. Sneddon, *A type of Stress Distribution on the Surface of a Semi-Infinite Elastic Solid*. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **40**, part. I., 5—19 (1944).
12. Н. И. Мушхелишвили, *Основание граничной задачи для полуплоскости*. Сооружения. Груз. ССР, ЕАН, *10* (1941).
13. H. Hertz, *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal für Mathematik (Crelle) *92*, 156 (1882); Gesammelte Werke *3*, 179—195 (1895).
14. А. Н. Диппик, *Формула Герца и ее опытная проверка*. Журнал физ. хим. **38**, *4*, 242—249 (1906).
15. Н. Н. Беляев, *Применение теории Герца к расчету местных напряжений в токе соприкасания колеса*. Вестник инж. и тех. *2* (1917).
16. И. А. Штаерман, *К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел*. ДАН СССР, **29**, *3*, 360—361 (1939).
17. — *Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел*. ДАН СССР, **29**, *3*, 179—181 (1940).
18. — *Об одной обобщенной задаче Герца*. ПММ, **5**, *3* (1941).
19. — *Контактная задача теории упругости*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
20. А. И. Лурье, *Исследования случая несимметричного давления жесткого плоского стампа эллиптического сечения на упругом полупространстве*. ДАН СССР, **29**, *8*, 759—763 (1939).

FORMULE DE FLAMBAJ PENTRU BARE GRELE

DE

N. S. PÎRVULESCU

Oricare ar fi condițiile de rezemare, flambarea barelor grele verticale depinde de gradul de încărcare $\alpha(L)$, exprimat prin raportul dintre lungimea porțiunii comprimate h și distanța dintre reazeme L (lungimea deschiderii sau a barei respective), astfel

$$\alpha(L) = h/L. \tag{1}$$

În adevăr, s-a arătat [1], [2] că ecuația flambajului barelor grele este

$$A\frac{d^4y}{dx^4} = x\left[1 - \alpha(x)\right]\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

care exprimă ecuația diferențială a fibrei medii deformate elastic (linia elastică) și care se mai poate pune sub forma

$$A\frac{d^3y}{dx^3} = x\left[1 - \alpha(x)\right]\frac{dy}{dx} + C, \tag{3}$$

în care

y este săgeata liniei elastice la depărtarea x de reazemul inferior

$$\alpha(x) = h/x, \tag{4}$$

C este constanta de integrare,

A — volumul de rigiditate al barei la gravitație dat de expresia

$$A = EI/q, \tag{5}$$

în care

E — modulul de elasticitate al barei,

I — momentul de inerție al secțiunii transversale,

q — greutatea barei pe unitatea de lungime.

Prin integrarea [3] ecuației (2) se obține expresia săgeții y și a derivatelor sale în funcție de $\Xi_j^{(i)}(x)$, expresii care la rîndul lor sînt

$$\Xi_j^{(i)}(x) = f\,[\alpha(x), z(x)], \tag{6}$$

în care

$$z\,(x) = x^3/A. \tag{7}$$

Punînd condițiile la limită (bicondițiile), pentru determinarea constantelor de integrare, se obține [4] condiția de flambaj

$$\Xi_j^{(i)}(L)\Xi_{j'}^{(i')}(L) - \Xi_j^{(i')}(L)\Xi_{j'}^{(i)}(L) = 0, \tag{8}$$

unde

$$\Xi_j^{(i)}(L) = f\,[\alpha(L),\ z(L)], \tag{9}$$

devenită din (6) prin înlocuirea lui x prin L în relațiile (4) și (7), devenite (1) și

$$z(L) = L^3/A\,; \tag{10}$$

$z\,(L)$, denumit cubul supleței la gravitație [5], este constant pentru barele de secțiune constantă și constituie o caracteristică a barei.

Prin urmare gradul de încărcare $\alpha\,(L)$, dat de relația (1) constituie parametrul condiției de flambaj (8) în bicondițiile de rezemare, exprimate prin valorile indicilor j și i.

Indicele j se referă la extremitatea inferioară și anume

$$\left.\begin{array}{ll} \text{în cazul articulației} & j = 1, \\ \text{în cazul încastrării} & j = 2, \\ \text{în ambele cazuri} & j' = 3. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Indicele i se referă la extremitatea superioară și anume

$$\left.\begin{array}{ll} \text{în cazul încastrării} & i\ = 1 \\ \text{în cazul articulației} & i\ = 2 \\ \text{fără deplasare laterală} & i' = 0 \\ \text{cu deplasare laterală normală} & i' = 3 \\ \quad\text{(în direcție perpendiculară pe bară).} & \end{array}\right\} \tag{12}$$

Ca să avem compresiune în bară trebuie ca h să fie pozitiv și prin urmare $\alpha\,(L)$ poate să varieze de la 0 la $+\infty$. Dacă $\alpha\,(L) < 0$, h devine negativ, compresiunea devine tensiune și prin urmare nu mai poate fi vorba de flambaj.

Dacă $\alpha\,(L) = 1$, conform relației (1) $h = L$, ceea ce înseamnă că bara este comprimată cu propria sa greutate, pe care o transmite total reazemului inferior. Dacă $\alpha\,(L) < 1$ avem $h < L$ și bara devine subîncărcată, ceea ce înseamnă că numai o parte din greutatea sa este transmisă prin compresiune reazemului inferior, cealaltă parte atîrnînd de reazemul superior, caută să întindă bara pe porțiunea respectivă. Dacă $\alpha(L) > 1$ avem $h > L$, ceea ce înseamnă că, în afară de propria sa greutate, bara mai este încărcată cu o suprasarcină, echivalentă cu greutatea barei de lungime $h - L$.

Dacă h este foarte mare față de L, greutatea proprie poate fi neglijată și problema se reduce la soluția clasică stabilită de Euler. Acest caz corespunde la $\alpha(L) = \infty$ și constituie poziția extremă a problemei.

Cazurile particulare pentru $\alpha(L) = 1$ și $C = 0$ în relația (3), unde una din extremitățile barei este liberă să se deplaseze în direcția orizontală, au fost rezolvate de A. G. Greenhill [5] servindu-se de funcțiile Bessel.

În mod general, problema a fost rezolvată [4], [6], [7] cu ajutorul seriilor de puteri întregi. S-a ajuns la expresia lungimii comprimate critice h

$$h = c_{j,j'}^{i,i'} \sqrt[3]{A}\,, \tag{13}$$

în care coeficientul de flambaj $c_{j,j'}^{i,i'}$ este dat de expresia

$$c_{j,j'}^{i,i'} = \alpha(L) \sqrt[3]{z(L)}\,, \tag{14}$$

unde $z(L)$ capătă valoarea critică, care satisface condiția (8) de flambaj. Astfel problema flambajului se reduce la aflarea coeficientului de flambaj $c_{j,j'}^{i,i'}$.

Valorile coeficientului de flambaj în cazurile capătului de jos articular ($C_{1,3}^{i,i'}$) [4], [6] și în cazurile capătului de jos încastrat ($C_{2,3}^{i,i'}$) [7], au fost determinate valabil pe un interval în care $2 > \alpha(L) > 1/3 \ldots 1/5$. De asemenea, au fost determinate valorile limită către care tinde coeficientul de flambaj $c_{j,j'}^{i,i'}$, cînd $\alpha(L) \to 0$.

Verificări experimentale cu modele construite din resorturi de sîrmă au fost făcute [4] cam pe același interval, lărgit însă pînă la $h/L = 1/16$, și numai pentru cazul $C_{1,3}^{1,0}$.

Ne interesează însă valorile coeficientului de flambaj $c_{j,j'}^{i,i'}$ și în afara intervalului menționat mai sus și anume: în cazul barei grele supraîncărcate, $h/L > 2$, pentru construcții înalte (turle de sondă) și în cazul barei grele subîncărcate, $h/L < 1/3$, pentru garnitura de foraj.

În scopul menționat mai sus și pentru a interpola valorile coeficientului de flambaj fără calcule anevoioase, ne-am propus să stabilim formule empirice, a căror valabilitate și precizie să fie verificată pe considerația datelor obținute pînă în prezent, atît pe cale teoretică cît și pe cea experimentală.

Deosebim cazurile cu articulație la extremitatea inferioară $C_{1,3}^{i,i'}$, de cazurile cu încastrare la extremitatea inferioară $C_{2,3}^{i,i'}$.

Cazurile $C^{i,i'}_{j,j'}$ determinate de condițiile de rezemare ale reazemelor, sînt precizate [8] în tabela 1 în conformitate cu expresiile (11) și (12).

Tabela 1

Grupa	Fără deplasare laterală	Cu deplasare normală	Condițiile de rezemare
I	$C^{1,0}_{1,3}$	$C^{1,3}_{1,3}$	articulat jos, încastrat sus
	$C^{2,0}_{1,3}$	$C^{2,3}_{1,3}$	ambele capete articulate
II	$C^{1,0}_{2,3}$	$C^{1,3}_{2,3}$	ambele capete încastrate
	$C^{2,0}_{2,3}$	$C^{2,3}_{2,3}$	încastrat jos, articulat sus

I. CAZURILE ARTICULATE JOS $C^{i,i'}_{1,3}$

Deosebim domeniul de supraîncărcare pentru care $h/L > 1$, de domeniul de subîncărcare unde $h/L < 1$.

a. *Supraîncărcarea barei.* S-a arătat [8] că în cazurile euleriene ($h/L = \infty$) condiția (8) de flambaj devine

$$\alpha(L)z(L) = K^2\pi^2, \tag{15}$$

în care valorile K sînt date în tabela 2, iar k reprezintă numărul de bucle. Cel mai probabil și totodată cel mai acoperitor este cazul $k = 1$.

Tabela 2

Cazurile de rezemare	$C^{1,0}_{1,3} = C^{2,0}_{2,3}$	$C^{1,3}_{1,3}$	$C^{2,0}_{1,3}$	$C^{2,3}_{1,3}$	$C^{1,0}_{2,3}$
K	$\sqrt{2}$	$k - \frac{1}{2}$	k	$k\sqrt{2}$	$2k$

Ținînd seama de (1) și (10) relația precedentă devine

$$hA = K^2\pi^2/L^2. \tag{16}$$

Sarcina de flambaj este

$$N_0 = qh \tag{17}$$

și prin urmare ținînd seamă de (5) și înlocuind în (15) se regăsește formula clasică

$$N_0 = K^2\pi^2 EI/L^2. \tag{18}$$

Ținînd seama de (14) condiția (15) devine

$$c^{i,i'}_{j,j'} = \alpha(L)\sqrt[3]{K^2\pi^2/\alpha(L)}\,. \tag{19}$$

În acest domeniu formula coeficientului de flambaj trebuie să tindă către formula (19) cînd $(h) \to \infty$. Pentru acest motiv propunem următoarea formulă :

$$\boxed{\bar{c}^{i,i'}_{1,3} = \alpha(L)\sqrt[3]{\frac{K^2\pi^2}{\alpha(L) - \varkappa}}}\,, \tag{20}$$

care exprimă o reprezentare asimptotică și satisface condiția cerută pentru un $\varkappa$ de valoare finită.

Notația $\bar{c}^{i,i'}_{1,3}$ reprezintă valoarea coeficientului de flambaj determinată de această formulă aproximativă, suprabararea corespunzînd domeniului de supraîncărcare.

Formula propusă trebuie să satisfacă și valorile $c^{i,i'}_{1,3}$ determinate în intervalul studiat deja. Să notăm cu $c^{i,i'\star}_{1,3}$ valorile determinate în a 5-a aproximație. Avînd în vedere aceste valori și explicitînd pe $\varkappa$ din formula (20) obținem

$$\varkappa = \alpha(L) - \left[\frac{\alpha(L)}{c^{i,i'\star}_{1,3}}\right]^3 K^2\pi^2. \tag{21}$$

Curbele de variație a coeficientului de flambaj, urmînd să se întîlnească pentru $\alpha(L) = 1$, punem această condiție în formula (21) și ținînd seama de tabela 2 pentru diferite condiții de rezemare, obținem valorile $\varkappa$, trecute în tabela 3.

Tabela 3

Cazurile de rezemare	$c^{1,0}_{1,3}$	$c^{1,3}_{1,3}$	$c^{2,0}_{1,3}$	$c^{2,3}_{1,3}$
$\varkappa$	0,35	0,30	0,47	0,23

Înlocuind aceste valori $\varkappa$ în formula (20), s-au calculat valorile coeficientului $\bar{c}^{i,i'}_{1,3}$, trecute în tabelele 4—7 pentru diferite condiții de rezemare. Valorile valabile sînt încadrate. Variațiile coeficientului $\bar{c}^{i',i'}_{1,3}$ s-au trasat pe diagramele din figurile 1 și 2, cu alternanțe de linie punct pentru intervalul valabil $(h/L > 1)$ și punctat pentru intervalul nevalabil $(h/L < 1)$. Pentru comparație s-au trasat pe aceste diagrame variațiile coeficientului $c^{i,i'\star}_{1,3}$ cu linie plină pentru intervalul valabil și cu linie barată pentru intervalul nevalabil. Observăm că valorile $\bar{c}^{i,i'}_{1,3}$ prezintă abateri față de $c_{1,3}^{i,i'*}$ mai pronunțate în primul caz considerat (tabela 4)

Tabela 4

$\alpha(L)$	$c_{1,3}^{-1,0}$	$c_{1,3}^{1,0*}$	$\underline{c}_{1,3}^{1,0}$	dif. %
4	7,02	—	19,92	—
2	4,58	4,50	6,48	+1,78
1,5	3,87	(3,65)	4,52	+6,03
1	3,12	3,12	3,12	0
1/1,5	2,64	2,55	2,50	−1,96
1/2	2,54	2,30	2,28	−0,87
1/2,5		2,18	2,18	0
1/3		2,09	2,12	+1,43
1/4		2,31	2,07	—

și din ce în ce mai puțin pronunțate în celelalte cazuri, iar abaterile maxime apar pentru $2 > \alpha(L) > 1$, adică tocmai în intervalul studiat, unde la rigoare poate fi folosită curba $c_{1,3}^{i,i'*}$.

Pe figura 1 sînt redate cazurile articulate jos și încastrate sus, iar pe figura 2, cazurile articulate la ambele capete.

Tabela 5

$\alpha(L)$	$c_{1,3}^{-1,3}$	$c_{1,3}^{1,3*}$	$\underline{c}_{1,3}^{1,3}$	dif. %
4	3,50	—	9,32	—
2	2,27	2,26	3,08	+0,44
1,33	1,78	(1,72)	1,92	+3,49
1	1,52	1,52	1,52	0
1/1,5	1,26	(1,31)	1,23	—6,10
1/2	1,16	1,19	1,13	−5,03
1/2,5	1,16	(1,09)	1,08	−0,92
1/3	1,40	1,03	1,06	+2,95
1/4		1,02	1,03	
1/4,5		1,02	1,02	

b. *Subîncărcarea barei.* S-a arătat [6], [7] că dacă $\alpha(L) \to 0$, coeficientul $\underline{c}_{1,3}^{i,i'}$ tinde către o limită λ, care pentru cazurile cu deplasare laterală $\lambda = 1$, iar pentru cazurile fără deplasare laterală $\lambda = 2$.

Propunem următoarea formulă asimptotică, care să satisfacă această condiție :

$$\underline{c}_{1,3}^{i,i'} = \lambda + \delta\,[\alpha(L)]^{\beta}, \tag{22}$$

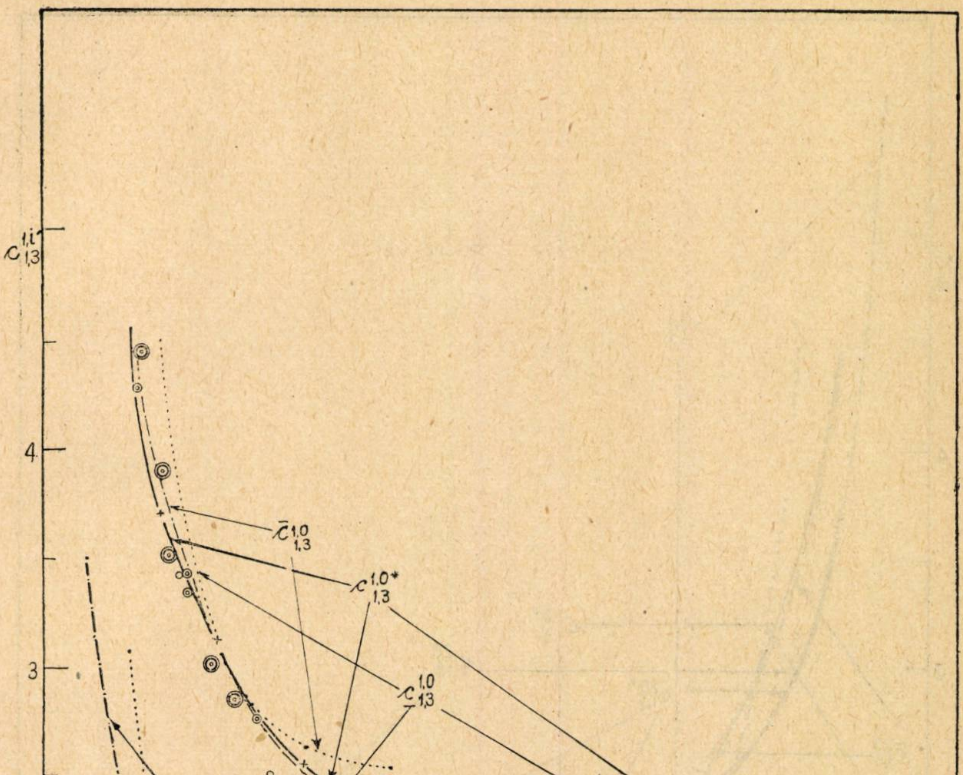

$c^{1,i}_{1,3}$
4
3
2
1
$\bar{c}^{1,0}_{1,3}$
$c^{1,0*}_{1,3}$
$\underline{c}^{1,0}_{1,3}$
$\bar{c}^{1,3}_{1,3}$
$c^{1,3*}_{1,3}$
$\underline{c}^{1,3}_{1,3}$
4
2
4/3
1
2/3
1/2
2/5
1/3
2/7
1/4
2/9
α(L)

Fig. 1

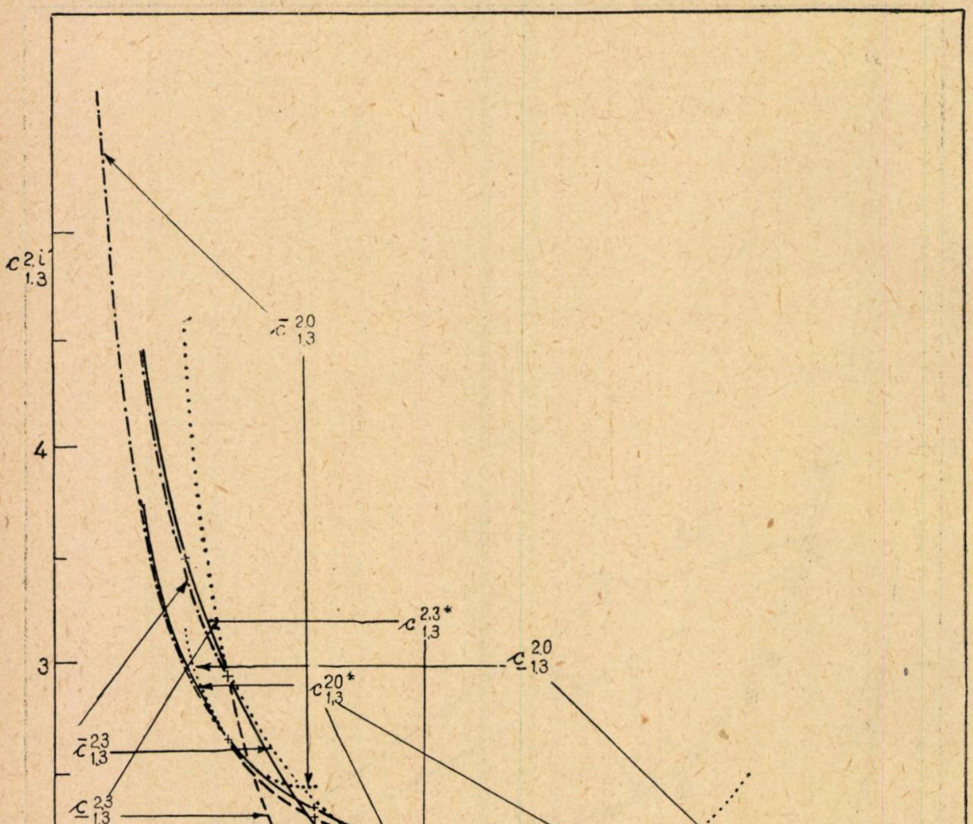

$c^{2,i}_{1,3}$
$\bar{c}^{2,0}_{1,3}$
$c^{2,3*}_{1,3}$
$\underline{c}^{2,0}_{1,3}$
$c^{20*}_{1,3}$
$\bar{c}^{2,3}_{1,3}$
$\underline{c}^{2,3}_{1,3}$
4
3
2
1
4
2
4/3
1
2/3
1/2
2/5
1/3
2/7
1/4
2/4
α (L)

Fig. 2

Tabela 6

$\alpha(L)$	$\overline{c}^{2,0}_{1,3}$	$c^{2,0\star}_{1,3}$	$\underline{c}^{2,0}_{1,3}$	dif. %
5	—	6,40	—	—
4	5,64	—	—	—
2	3,72	3,74	4,600	−0,54
1,50	3,18	—	3,460	—
1,33	3,01	(3,05)	3,155	−1,31
1	2,65	2,65	2,65	0
1/1,5	2,44	(2,33)	2,389	−1,76
1/2	—	2,18	2,162	−0,82
1/2,5	—	2,10	2,104	+1,90
1/3	—	2,05	2,072	+1,07
1/3,5	—	2,07	2,053	
1/4	—	—	2,041	
1/4,5	—	—	2,032	

Tabela 7

$\alpha(L)$	$\overline{c}^{2,3}_{1,3}$	$c^{2,3\star}_{1,3}$	$\underline{c}^{2,3}_{1,3}$	dif. %
4	6,96	—	—	—
2	4,46	4,50	8,81	−0,89
1,33	3,48	3,50	4,49	−0,57
1	2,95	2,95	2,95	0
1/1,5	—	—	1,865	—
1/2	2,38	1,83	1,488	−18,7
1/2,5	2,09	(1,57)	1,312	−16,4
1/3	1,95	1,41	1,217	−13,7
1/3,5	1,94	(1,29)	1,160	−10,1
1/4	2,49	1,197	1,122	−6,25
1/5		1,093	1,088	−0,46

Tabela 8

Cazurile de rezemare	$C^{1,0}_{1,3}$	$C^{1,3}_{1,3}$	$C^{2,0}_{1,3}$	$C^{2,3}_{1,3}$
δ	1,12	0,52	0,65	1,95

notaţia subbarată a coeficientului de flambaj se referă la expresia empirică (22) valabilă în domeniul de subîncărcare al barei.

Se verifică uşor că dacă δ şi β sînt finiţi, $\underline{c}_{1,3}^{i,i'}$ tinde către λ cînd $\alpha(L) \rightarrow 0$.

Încercările cu $\beta = 1$ au dovedit o apropiere de asimptotă prea lentă. Propunem $\beta = 2$ şi relaţia (22) devine

$$\underline{c}_{1,3}^{i,i'} = \lambda + \delta\,[\alpha(L)]^2. \qquad (23)$$

Avînd în vedere valorile $c_{1,3}^{i,i'\star}$ şi explicitînd pe δ se obţine

$$\delta = (c_{1,3}^{i,i'\star} - \lambda)/[\alpha(L)]^2. \qquad (24)$$

Pentru determinarea lui δ procedăm în mod analog ca şi la determinarea lui $\varkappa$, înlocuind în (24) $\alpha(L)$ cu 1 şi $c_{1,3}^{i,i'\star}$ cu valoarea corespunzătoare din tabelele 4—7, se obţin valorile trecute în tabela 8.

Înlocuind aceste valori δ în formula (23), s-au calculat valorile coeficientului $\underline{c}_{1,3}^{i,i'}$, trecute în tabelele 4—7, pentru diferite condiţii de rezemare. Variaţiile coeficientului $\underline{c}_{1,3}^{i,i'}$ s-au trasat, pe diagramele din figurile 1 şi 2, cu linii întrerupte pentru intervalul valabil $h/L < 1$ şi punctat pentru intervalul nevalabil $h/L > 1$. Observăm că valorile $\underline{c}_{1,3}^{i,i'}$ prezintă abateri faţă de $c_{1,3}^{i,i'\star}$, mai pronunţate în ultimul caz (tabela 7), unde maximul abaterii se află în vecinătatea $\alpha(L) = 1/2$, de unde scade o dată cu $\alpha(L)$, rămînînd negative şi deci acoperitor. Şi aici la rigoare poate fi folosită curba $c_{1,3}^{i,i'\star}$.

Pe figura 1 s-a trecut şi rezultatul încercărilor experimentale cu modele din resoarte de sîrmă cu următoarele notaţii :

— cu un cerc pentru modelul cu $A^{1/3} = 0{,}96$ dm,

— cu două cercuri concentrice pentru modelul cu $A^{1/3} = 1{,}495$ dm,

— cu trei cercuri concentrice pentru modelul cu $A^{1/3} = 2{,}555$ dm.

Condiţiile de rezemare au fost încastrate sus şi articulate jos, însă nu s-a putut împiedica cu rigurozitate deplasarea orizontală a capătului de jos, rezemat pe talerul unei balanţe care putea să oscileze în jurul cuţitului de care era suspendat [9]. Din această cauză punctele determinate experimental sînt ceva mai coborîte decît linia teoretică a cazului fără deplasare laterală, apropiindu-se într-o mică măsură de curba teoretică a cazului cu deplasare laterală. Se observă că această deviere, faţă de curba teoretică $C_{1,3}^{1,0\star}$, este cu atît mai pronunţată cu cît modelele sînt mai rigide şi prin urmare forţa orizontală din reazem şi deplasarea talerului sînt mai însemnate.

II. CAZURILE ÎNCASTRATE JOS $C_{2,3}^{i,i'}$

În această grupă a cazurilor de rezemare ne vom mărgini la subgrupa ambelor capete încastrate, întrucît grupa cazurilor încastrate jos şi articulate sus a fost mai puţin studiată şi prin urmare posibilitatea de verificare a unei formule este mai puţin sigură.

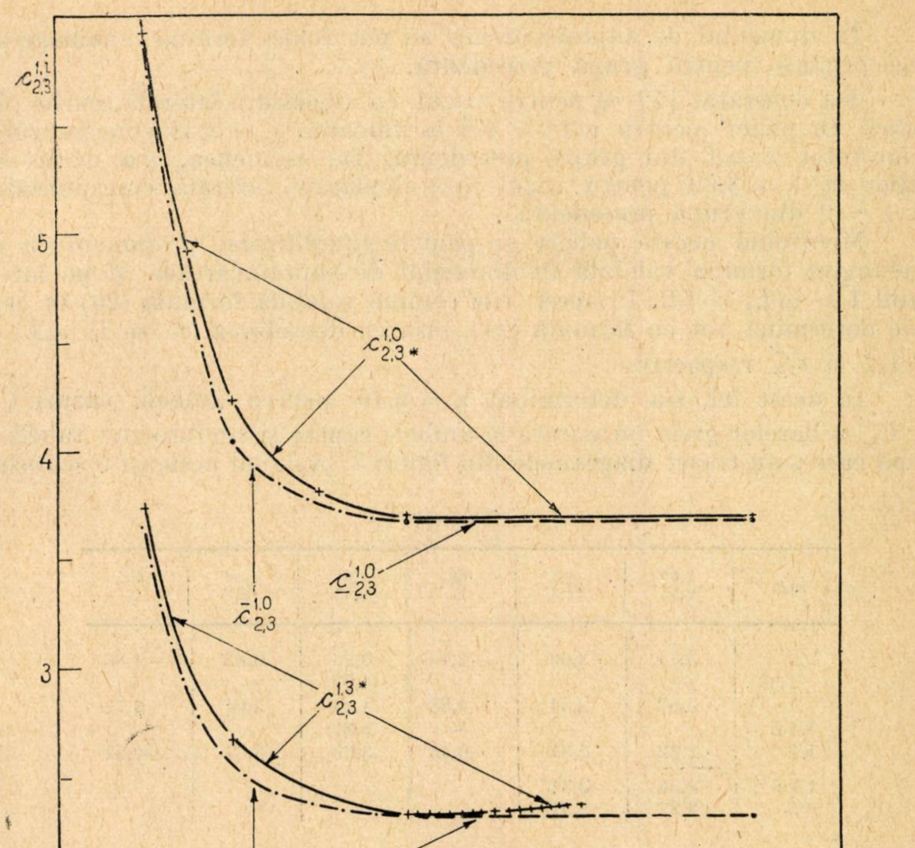

$c_{2,3}^{1,i}$
5
4
3
2
1
$c_{2,3}^{1,0}*$
$\bar{c}_{2,3}^{1,0}$
$\underline{c}_{2,3}^{1,0}$
$c_{2,3}^{1,3}*$
$\bar{c}_{2,3}^{1,3}$
$\underline{c}_{2,3}^{1,3}$
4
3
4/3
1
2/3
1/2
2/5
1/3
2/7
1/4
2/9
α(L)

Fig. 3

În domeniul de supraîncărcare se pot folosi formule analoage cu cele propuse pentru grupa precedentă.

S-a constatat [7] că pentru cazul cu deplasare laterală, curba $c_{1,3}^{2,3*}$ indică un palier pentru $\alpha(L) < 1/2$ la valoarea $\lambda = 2{,}32$ corespunzător asimptotei $\lambda = 1$ din grupa precedentă. De asemenea, s-a dedus un palier la $\lambda = 3{,}69$ pentru cazul fără deplasare laterală corespunzător la $\lambda = 2$ din grupa precedentă.

Menţinînd aceste paliere şi pentru simplificare, propunem ca să prelungim formula valabilă în domeniul de supraîncărcare şi pe intervalul $1 > \alpha(L) > 1/2$. În acest caz rămîne valabilă formula (20) în care $\varkappa$ se determină tot cu formula (21), însă cu deosebirea că se ia $\alpha(L) = 1/2$ şi $c_{1,3}^{i,i'}$ respectiv.

În acest fel, s-a determinat $\varkappa = 0{,}40$ pentru ambele cazuri $C_{2,3}^{1,0}$ şi $C_{2,3}^{1,3}$ a barelor grele încastrate la ambele capete şi s-a întocmit tabela 9 după care s-au trasat diagramele din figura 3, păstrînd aceleaşi însemnări.

Tabela 9

$\alpha(L)$	$c_{2,3}^{1,3*}$	$\bar{c}_{2,3}^{1,3}$	dif. %	$c_{2,3*}^{1,0}$	$\bar{c}_{2,3}^{1,0}$	dif. %
2	3,74	3,66	−2,14	5,93	5,82	−1,86
1,33	—	—	—	4,92	—	—
1	2,67	2,54	−4,88	4,24	4,04	−4,72
1/1,5	—	—	—	3,81	—	—
1/2	2,32	2,31	−0,43	3,69	3,67	−0,54
1/2,5	2,34	2,31				
1/3	2,37	2,31				

$c_{2,3*}^{1,0}$ reprezintă valorile aproximative determinate prin comparaţie cu $c_{2,3}^{1,3*}$ şi trecute în tabela 6 din [7].

Observăm că abaterile sînt maxime pentru $\alpha(L) = 1$ şi aceasta din cauza modificării menţionate; însă, întrucît diferenţele sînt negative, formula propusă rămîne acoperitoare.

CONCLUZII

Avînd în vedere formula (13), problema de flambaj al barelor grele se reduce la aflarea valorii coeficientului $c_{j,j'}^{i,i'}$ o funcţie de gradul de încărcare h/L, în condiţiile de rezemare determinate de indicii j şi i.

S-a urmărit să se stabilească formule simple, care să acopere întregul domeniu de la $h/L = 0$ pînă la $h/L = \infty$, ca să se evite inter- şi extrapolări sau calcule numerice laborioase.

Pentru grupul de cazuri al barelor grele articulate la extremitatea inferioară şi în domeniul de supraîncărcare ($h/L > 1$) se propune formula (20), care exprimă o reprezentare asimptotică şi în care se iau valorile din tabela 3, conform condiţiilor de rezemare.

Ținînd seama de relațiile (5), (10), (13) formula (20) devine

$$q(h - \varkappa L) = K^2 \pi^2 EI/L^2. \tag{25}$$

Sub această formă se pune în evidență că, pentru domeniul de supraîncărcare, problema de flambaj a barelor grele se poate reduce la formula Euler, dacă se repartizează o parte din greutatea proprie și anume: $\varkappa qL$ pe reazemul inferior și numai $(1 - \varkappa)\, qL$ se adaugă la sarcina utilă $q\,(h - L)$ pentru a constitui sarcina de flambaj $q\,(h - xL)$.

S. Timoshenko [5] ajunge la constatarea că, pentru cazul ambelor capete articulate și fără deplasare laterală, se obține o aproximație suficientă, dacă se presupune că jumătate din greutatea barei este aplicată la capătul ei inferior.

În acest caz $C_{1,3}^{2,0}$, conform tabelei 3, $1-x$ reprezintă 53%, adică foarte aproape de jumătate din greutatea barei, cum se indică mai sus. Pentru celelalte cazuri, conform aceleiași tabele, valorile sînt mult diferite. Urmărind pe diagrame ramurile formulei (20), trasate punctat, se vede că aceasta se abate considerabil de la valorile determinate deja și anume cu cît $\alpha\,(L)$ scade, încît formula (20) nu mai rămîne valabilă.

Pentru acest caz $C_{1,3}^{2,0}$ formula (20), în care $\varkappa = 1/2$, a mai fost folosită în [10] sub forma relației (40).

În domeniul de subîncărcare $(h/L < 1)$ se propune formula (23), de asemenea asimptotică, în care λ capătă respectiv valorile 1 sau 2, după cum bara are libertatea să se deplaseze lateral sau nu, iar δ ia valorile din tabela 8.

Pentru barele grele încastrate la ambele capete, cu și fără deplasare laterală, se propune tot formula (20), cu $\varkappa = 0{,}40$ pentru ambele cazuri, care acoperă un domeniu mai larg, de la $h/L = \infty$ la $h/L = 1/2$. Pe restul domeniului rămîn palierele $\lambda = 2{,}32$, în cazul deplasării laterale și $\lambda = 3{,}69$, în cazul fără deplasare laterală.

Se completează astfel intervalul $2 > h/L > 1/3$ studiat anterior, ceea ce permite rezolvarea problemelor de flambaj, atît din domeniul de supraîncărcare în vederea construcțiilor înalte, cum sînt turlele de sonde, cît și din domeniul de subîncărcare, ca în cazul garniturilor de foraj și țevile de extracție.

Primită la redacție la 18 decembrie 1958.

ФОРМУЛЫ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА ТЯЖЕЛЫХ СТЕРЖНЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Формула (13) сводит задачу продольного изгиба тяжелых стержней к определению коэффициента $C_{j,j'}^{i,i'}$, исследованного ранее в интервале $2 > h/L > 1/3$ в условиях опирания j и i. Предлагаются эмпирические формулы (20) для перегрузки и (23) для недогрузки стержня, покрывая

таким образом всю область h/L от 0 до ∞. Это дает решение задач продольного изгиба, как перегруженных тяжелых стержней, как в случае высотных конструкций (нефтяных вышек), так и недогруженных, как в случае бурильных колонн и обсадных труб.

FORMULES DE FLAMBAGE POUR LES BARRES LOURDES

RÉSUMÉ

La formule (13) réduit le problème du flambage des barres lourdes à la détermination du coefficient $C_{j,j'}^{i,i'}$, qui a été déjà étudié pour l'intervalle $2 > h/L > 1/3$ et les conditions j et i des appuis. Les formules empiriques (20) en cas de surcharge et (23) en cas de sous-charge sont proposées, afin d'embrasser l'entier domaine de $h/L = 0$ à $h/L = \infty$. On peut en faire l'application aux barres lourdes surchargées des constructions élevées, telles les tours des sondes, et à des barres lourdes sous-chargées, comme les trains de tiges de forage et de tubings.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÎRVULESCU, *Sur les contributions aux flambage et vibrations rotatives des tiges verticales, lourdes et sveltes.* Bull. sect. scient. Acad. R.P.R., **XXX**, *9*, 527 (1948).
2. — *Asupra instalației tijelor verticale grele, svelte și în rotație. Ecuația diferențială a liniei elastice.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **II**, 157 (1951).
3. — *Despre integrarea ecuației liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele și svelte.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **III**, *1—2*, 53 (1952).
4. — *Despre flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **III**, *3—4*, 205 (1952).
5. S. TIMOSHENKO, *Théorie de la stabilité élastique.* Paris, 1947, 110.
6. N. S. PÎRVULESCU, *Flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie. Cazurile capătului de jos articulat.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **V**, *1—2*, 119 (1954).
7. — *Flambajul tijelor verticale încastrate la extremitatea inferioară și adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *1—2*, 17 (1955).
8. — *Cazurile particulare ale unei clase de funcții cu aplicații la flambajul tijelor.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **V**, *1—2*, 119 (1954).
9. — *On the instability of drill pipe strings.* Revue de Mécanique appliquée, **I**, *2*, 159 (1956).
10. — *Rezistența la încovoiere a prăjinilor grele încărcate axial cu o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *3*, 705 (1956).

ELASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA UNOR PROBLEME DE STABILITATE A BARELOR ELASTICE ÎN MIȘCARE PLANĂ

DE

F. DINCĂ și V. MANEA

În lucrarea de față se studiază unele probleme legate de comportarea elasto-dinamică a barelor drepte în mișcare plană.

Se insistă în special asupra posibilităților de pierdere a stabilității barei. Am ales cîteva aplicații, care se întîlnesc mai frecvent în practică, punînd în evidență efecte suplimentare, care modifică din punct de vedere matematic aspectul problemei, conducînd la ecuații diferențiale ordinare, cu coeficienți aproape periodici.

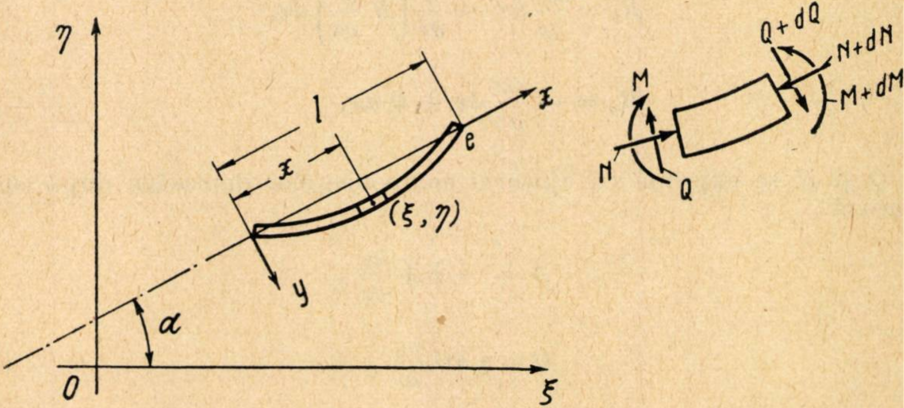


Fig. 1

Fie o bară de lungime l, ale cărei capete sînt legate într-un mod oarecare față de sistemul mobil $xO'y$. Să presupunem că este cunoscută mișcarea sistemului $xO'y$ față de sistemul fix $\xi O \eta$. În acest caz, dacă notăm cu ξ', η' coordonatele unui punct oarecare al barei nedeformate faţă de sistemul fix, şi cu u' şi v' componentele vectorului deplasării elastice, faţă de acelaşi sistem, atunci coordonatele punctului respectiv vor fi date pentru orice t de relaţiile

$$\xi = \xi' + u',$$
$$\eta = \eta' + v'. \tag{1}$$

Deoarece am presupus cunoscută mişcarea sistemului $xO'y$, rezultă că ξ' şi η' sînt funcţii cunoscute de timp. Dacă u şi v sînt componentele deplasării elastice, faţă de sistemul mobil, deplasările u' şi v' sînt date de relaţiile

$$u' = u \cos\alpha + v \sin\alpha,$$
$$v' = u \sin\alpha - v \cos\alpha, \tag{2}$$

α fiind unghiul (variabil) dintre direcţia pozitivă a axei $O'x$ şi direcţia pozitivă a axei $O\xi$.

Componentele pe direcţiile $O'x$ şi $O'y$ ale forţelor elastice precum şi momentul care acţionează asupra unui element de bară (fig. 1) sînt

$$R_x = -\frac{\partial N}{\partial x} dx,$$
$$R_y = \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial x}\left(N \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx, \tag{3}$$
$$M_z = -\frac{\partial M}{\partial x} dx + Q\, dx,$$

M, Q şi N se exprimă cu ajutorul componentelor deplasării după cum urmează

$$N = -EA\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$Q = qAG\frac{\partial v_2}{\partial x}, \tag{4}$$
$$M = EJ\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}.$$

S-a notat cu E modulul de elasticitate, A suprafaţa secţiunii transversale, G modulul de alunecare, J momentul de inerţie al secţiunii transversale, q un coeficient de formă. Am notat prin v_1 componenta deplasării transversale, datorită încovoierii pure şi prin v_2 componenta datorită alunecării pure, astfel că $v = v_1 + v_2$.

Ținînd seama de cele de mai sus, ecuațiile de echilibru dinamic pentru elementul de bară sînt

$$m\ddot{\xi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(qAG\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial\,(v_1+v_2)}{\partial x}\right]\right\}\sin\alpha,$$

$$m\ddot{\eta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\alpha - \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(qAG\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[EA\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial\,(v_1+v_2)}{\partial x}\right]\right\}\cos\alpha, \quad (5)$$

$$-\rho I\left(\alpha - \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right) + qAG\,\frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

În ecuațiile (5) am notat prin m masa unității de lungime a barei, iar prin ρ densitatea materialului barei. Aceste ecuații împreună cu condițiile inițiale și la limită corespunzătoare, furnizează un sistem neliniar, cu coeficienți variabili, foarte complicat în cazul general. Ecuațiile se complică și mai mult dacă ținem seama și de efectele neliniare : elasticitate neliniară, amortizare neliniară etc. [1].

Vom observa în treacăt că, prin neglijarea efectului undelor axiale, și presupunînd mișcarea de rigid nulă, se obține ecuația cunoscută în care se ține seama de efectul inerției de rotație și alunecării transversale [5].

Dacă se neglijează inerția de rotație, efectul alunecării sub acțiunea forței tăietoare, și mișcarea de rigid, se obține cazul tratat în lucrarea [1], în care ia în considerație influența undelor axiale în problema rezonanței parametrice.

În cele ce urmează, vom studia unele cazuri particulare ale sistemului de ecuații (5).

1. Bara în mișcare uniform accelerată, în lungul axei sale, acționată la unul din capete de o forță periodică

Dacă facem ca axa $O'x$ să coincidă cu axa $O\xi$, coordonatele ξ' și η' sînt date de

$$\xi' = \frac{1}{2}\,at^2,$$

$$\eta' = 0, \quad (6)$$

α fiind accelerația mișcării. Ecuațiile diferențiale (5) se scriu

$$c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a,$$

$$EJ\,\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EA\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

unde s-a notat $c^2 = \frac{EA}{m}$. Deplasările v_2 datorite alunecărilor sub acțiunea forțelor tăietoare, au fost neglijate. Pentru prima ecuație condițiile inițiale se pot lua nule, cele la limită fiind

$$u(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(e, t)}{\partial x} = \frac{1}{EA}(p_0 + p_1 \cos \theta t). \tag{8}$$

Vom căuta soluția primei ecuații (7) sub forma

$$u = u_0 + u_p, \tag{9}$$

unde u_0 este soluția generală a ecuației omogene ce satisface condiții la limită omogene, iar u_p este o soluție particulară a ecuației cu membrul drept, care satisface condițiilor la limită (8).

Pentru ca soluția (9) să satisfacă condițiile inițiale omogene, este necesar ca

$$u_0(x, 0) = -u_p(x, 0),$$

$$\frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial u_p(x, 0)}{\partial t}. \tag{10}$$

Vom lua soluția u_p de forma

$$u_p = a_0 x + \frac{a}{2c^2} x^2 + u_1(x) \cos \theta t, \tag{11}$$

care introdusă în prima ecuație (7) ne conduce la următoarea ecuație diferențială ordinară, pentru determinarea funcției $u_p(x)$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \left(\frac{\theta}{c}\right)^2 u_1 = 0. \tag{12}$$

Ținînd seama de condițiile la limită (8) soluția u_p se scrie

$$u_p(x, t) = \left(\frac{p_0}{EA} - \frac{al}{c^2}\right) x + \frac{a}{2c^2} x^2 + \frac{c}{\theta} \frac{p_1}{EA} \frac{\sin \frac{\theta}{e} x}{\cos \frac{\theta}{c} l} \cos \theta t. \tag{13}$$

Ținînd seama de cele de mai sus vom avea

$$u_0(x, t) = \sum_0^\infty [A_{2m+1} \cos \lambda_{2m+1} t + B_{2m+1} \sin(\lambda_{2m+1} t)] \sin(k_{2m+1} x), \tag{14}$$

unde

$$\lambda_{2m+1} = \frac{(2m+1)\pi c}{2l},$$

$$k_{2m+1} = \frac{(2m+1)\pi}{2l},$$

iar A_{2m+1} şi B_{2m+1} sînt coeficienţii Fourier ce se determină pe baza condiţiilor (10). Rezultă imediat

$$B_{2m+1} = 0.$$

Cea de-a doua ecuaţie (7) devine

$$\begin{aligned} EJ\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EA\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\sum_0^\infty \big(A_{2m+1}k_{2m+1}\cos(k_{2m+1}x)\cos(\lambda_{2m+1}t)\big) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{P_0}{EA} - \frac{al}{c^2} + \frac{a}{c^2}x + \frac{P_1}{EA}\frac{\cos\frac{\theta}{c}x}{\cos\frac{\theta}{c}l}\cos\theta t\right]\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \qquad (15) \end{aligned}$$

Presupunînd bara articulată la capete, astfel încît una din articulaţii să permită o deplasare axială, putem aplica metoda lui Galerkin luînd sistemul complet $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$.

Dacă punem în prima aproximaţie

$$v = T(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad (16)$$

din ecuaţia (15) cu ajutorul metodei indicate se obţine

$$\begin{aligned} T'' + \omega_n^2\left[\frac{1}{2P_{*n}}\sum_0^\infty EA\,k_{2m+1}A_{2m+1}\frac{\cos(k_{2m+1}l)-1}{\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 - k_{2m+1}^2}\cos(\lambda_{2m+1}t) + \right. \\ \left. + 1 - \frac{p_0 - \frac{\rho\,al}{2}}{p_{*n}} - \frac{p_1}{p_{*n}}\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{c}l}{\frac{\theta}{c}l} - \frac{\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{\theta}{c}\right)^2}{\left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{\theta}{c}\right)^2}\cos\theta t\right]T = 0, \qquad (17) \end{aligned}$$

în care am folosit notaţiile

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

$$p_{*n} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 EJ. \qquad (18)$$

Se observă că dacă θ, frecvenţa forţei perturbatoare coincide cu una din frecvenţele proprii, avem rezonanţă pentru vibraţiile undelor axiale, conform formulei (13).

În cazul în care raportul dintre frecvenţa forţei excitatoare şi oricare dintre frecvenţele proprii λ_{2m+1} este un număr raţional diferit de un întreg, ecuaţia (17) este o ecuaţie de tip Hill, care are domenii de instabilitate ce pot fi determinate pe baza teoremelor generale [3], [4].

Dacă acest raport este un număr iraţional, ecuaţia (17) are coeficienţii aproape periodici, studiul ei revenind la acela al unei ecuaţii de tip Hill, pe un interval de timp finit. Remarcăm existenţa unor teoreme de instabilitate a soluţiilor ecuaţiilor cu coeficienţi aproape periodici, care pot fi aplicate în cazul de faţă [2].

2. Bara în mişcare axială după o lege periodică acţionată la unul din capete de o forţă de asemenea periodică

Practic, o asemenea mişcare se întîlneşte la diferite mecanisme, tije de pompe etc. Presupunem că mişcarea de rigid al unui punct al barei este dată de legea

$$\xi' = b \sin \omega t. \tag{19}$$

Cazul mai general în care în membrul doi al formulei (19) apare o funcţie periodică oarecare, se tratează în mod analog. De asemenea, vom considera forţa ce acţionează la unul din capete de forma

$$p(t) = p_0 + p_1 \cos \theta t. \tag{20}$$

Neglijînd efectul inerţiei de rotaţie şi al alunecării, prima ecuaţie (5) devine

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\, b\, \omega^2 \sin \omega t. \tag{21}$$

Luînd condiţiile iniţiale nule şi condiţiilor la limită de forma

$$u\,(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial u\,(l, t)}{\partial x} = \frac{1}{EA}\,(p_0 + p_1 \cos \theta t) \tag{22}$$

vom căuta ca şi în cazul precedent, soluţia sub forma

$$u = u_0 + u_p.$$

Soluţia particulară u_p ce satisface condiţiilor la limită (22) este

$$u_p = b \left[\frac{\cos \frac{\omega}{c}(x - l)}{\cos \frac{\omega}{c}\, l} - 1 \right] \sin \omega t + \frac{p_0}{EA}\, x + \frac{c}{\theta}\, \frac{p_0}{EA}\, \frac{\sin \frac{\theta}{c}\, x}{\cos \frac{\theta}{c}\, l} \cos \theta t. \tag{23}$$

Soluţia ecuaţiei omogene este de aceeaşi formă ca şi (14) coeficienţii Fourier determinîndu-se din condiţiile (10) cu u_p dat de (23). Remarcăm posibilitatea de rezonanţă a vibraţiilor axiale în raport cu frecvenţele ω şi θ; aceasta poate avea loc cînd $\cos\frac{\omega}{c}l = 0$ sau $\cos\frac{\theta}{c}l = 0$.

Ecuaţia vibraţiilor transversale va fi

$$EJ\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EA\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\sum_0^\infty k_{2m+1}(A_{2m+1}\cos(\lambda_{2m+1}t) + B_{2m+1}\sin(\lambda_{2m+1}t))\cos(k_{2m+1}x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\omega b\sin\frac{\omega}{c}(x-l)}{c\cdot\cos\frac{\omega}{c}l}\sin\omega t - \frac{p_0}{EA} - \frac{p_1}{EA}\,\frac{\cos\frac{\theta}{c}x}{\cos\frac{\theta}{c}l}\right]\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (24)$$

Aplicînd aceleaşi raţionamente ca în exemplul precedent, se pot trage concluzii similare în privinţa existenţei anumitor domenii de instabilitate, intervenind aici în plus parametrul ω care conduce la unele modificări în configuraţia acestor domenii.

3. Bara în mişcare uniformă în lungul axei sale oprită brusc

Dacă o bară este oprită brusc dintr-o mişcare uniformă în lungul axei sale, în momentul $t = \tau$ va suporta acceleraţii foarte mari. O reprezentare a acestor acceleraţii poate fi dată de expresia

$$\ddot{\xi}' = \frac{1}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + (t-\tau)^2}, \qquad (25)$$

α fiind un parametru ce depinde de modul în care este oprită bara. Dacă bara este oprită brusc, α este nul iar funcţia din membrul drept al relaţiei (25) este funcţia $\delta\,(t-\tau)$ a lui Dirac. Practic bara nu este oprită brusc, datorită intervenţiei elasticităţii reazemelor iar α are o valoare ce se determină experimental.

Prima ecuaţie (5) se scrie

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + (t-\tau)^2}. \qquad (26)$$

Luăm condiţiile iniţiale şi la limită omogene adică

$$u\,(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u\,(x, 0)}{\partial t} = 0, \qquad (27)$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

respectiv

$$u(0, t) = 0,$$
$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0. \tag{27'}$$

Vom considera ecuaţia mai generală

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t), \tag{28}$$

unde $f(t)$ este o funcţie periodică de perioadă t_1. Cazul ecuaţiei (26) poate fi considerat ca un caz particular, dacă funcţia din membrul drept al acestei ecuaţii se prelungeşte periodic, în afara intervalului $(0, t_1)$, t_1 fiind timpul în care se epuizează practic fenomenul datorit opririi bruşte a barei şi care se determină experimental.

Dacă punem funcţia $f(t)$ sub forma unei serii pare

$$f(t) = \sum_0^\infty a_n \cos \frac{n\pi}{t_1} t, \tag{29}$$

ceea ce presupune implicit simetrie în raport cu dreapta $(2t = t_1)$ şi căutăm soluţia ecuaţiei (27) sub forma

$$u = u_0 + u_p,$$

unde u_0 este soluţia generală a ecuaţiei omogene, care este dată de expresia (14) şi care satisface condiţiilor la limită (27′), iar u_p este o soluţie particulară a ecuaţiei (28) cu membrul drept, care se determină pe aceeaşi cale ca în exemplele precedente, avem în acest caz

$$u_p = \sum_0^\infty \frac{a_n}{\left(\frac{n\pi}{t_1}\right)^2} \left(1 - \frac{\cos \frac{n\pi}{ct_1}(x - l)}{\cos \frac{n\pi}{ct_1} l}\right) \cos \frac{n\pi}{t_1} t + \frac{a_0}{c^2}\left(\frac{x^2}{2} - xl\right). \tag{30}$$

Impunînd satisfacerea condiţiilor iniţiale, rezultă

$$B_{2m+1} = 0,$$

$$\sum_0^\infty A_{2m+1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{2l} x = \sum_0^\infty \frac{a_n}{\left(\frac{n\pi}{t_1}\right)^2} \left(\frac{\cos \frac{n\pi}{ct_1} x - l}{\cos \frac{n\pi}{ct_1} l} - 1\right) - \frac{a_0}{c^2}\left[\frac{x^2}{2} - xl\right], \tag{31}$$

de unde se pot determina valorile coeficienţilor A_{2m+1}. Practic, calculele sînt operante, dacă în seria (28) ne putem limita la un număr restrîns de termeni, fără a afecta prea mult gradul de precizie a reprezentării funcţiei $f(t)$.

În consecinţă, se poate scrie soluţia ecuaţiei (26) sub forma

$$u = \sum_{0}^{\infty} A_{2m+1} \cos(\lambda_{2m+1} t) \sin(k_{2m+1} x) - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{n\pi}{t_1}\right)^2} \left(\frac{\cos\frac{n\pi}{ct_1}(x-l)}{\cos\frac{n\pi}{ct_1} l} - 1 \right) \cos\frac{n\pi}{t_1} t + \frac{a_0}{c^2}\left(\frac{x^2}{2} - xl\right). \tag{32}$$

Se observă posibilitatea de rezonanţă ce poate avea loc dacă

$$\cos\frac{n\pi}{ct_1} = 0.$$

Ecuaţia vibraţiilor transversale este

$$EJ\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EA\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\sum_{0}^{\infty} A_{2m+1} k_{2m+1} \cos(k_{2m+1}x)\cos(\lambda_{2m+1} t) + \frac{a_0}{c^2}(x-l) + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{\frac{n\pi}{ct_1}} \frac{\sin\frac{n\pi}{ct_1}(x-l)}{\cos\frac{n\pi}{ct_1} l} \cos\frac{n\pi}{t_1} t\right]\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{33}$$

Studiul acestei ecuaţii se face sub două aspecte, după cum bara are o singură oprire sau opriri repetate la intervale egale de timp.

În primul caz, se pune problema determinării efective a deplasărilor transversale, iar în cel de-al doilea caz, se pune în plus problema stabilităţii soluţiei. Se vede uşor că, utilizînd metoda lui Galerkin ecuaţia (33) se reduce la o ecuaţie de ordinul doi, cu coeficienţi aproape periodici în cazul general iar în unele cazuri particulare la o ecuaţie de tip Hill. În ambele cazuri sînt valabile cele spuse la aplicaţiile precedente.

Din cele cîteva exemple pe care le-am prezentat, au ieşit în evidenţă unele probleme de stabilitate, care apar la barele elastice în mişcare plană. Numărul exemplelor poate fi mărit printr-o serie de cazuri, care apar în practică, cum ar fi de exemplu bara în mişcare transversală, sau în rotaţie, cazuri ce se întîlnesc frecvent în construcţia diferitelor mecanisme şi organe de maşini.

Primită la redacţie la 29 decembrie 1958.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ В ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе даются общие уравнения динамического равновесия прямого упругого стержня в плоском движении. В некоторых частных случаях выявляются возможности потери устойчивости.

QUELQUES PROBLÈMES DE STABILITÉ DES BARRES ÉLASTIQUES EN MOUVEMENT PLAN

RÉSUMÉ

Les auteurs donnent dans ce travail les équations générales d'équilibre dynamique de la barre élastique droite en mouvement plan. Ils mettent en évidence, dans quelques cas particuliers du mouvement, les possibilités de perte de la stabilité.

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Москва, 1956.
2. A. Halanay, *Soluţii aproape periodice ale ecuaţiei Riccati.* Studii şi cercetări matematice, **IV**, *3–4* (1953).
3. — *Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
4. А. П. Проскуряков, Исследование устойчивости решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, Прикладная математика и механика, **XXII**, *2* (1958).
5. S. P. Timoshenko, *Théorie des vibrations.* Paris-Liège (1947).

ASUPRA DETERMINĂRII STĂRII DE EFORTURI DE MEMBRANĂ ÎN PLĂCILE CURBE SUBȚIRI DE ROTAȚIE

DE

MIRCEA SOARE

Scopul studiului de față este de a stabili sub formă explicită, expresiile eforturilor de membrană în plăcile curbe subțiri de rotație, pentru o clasă foarte largă de sarcini exterioare. Deducerea formulelor se bazează pe analogia de comportare dintre plăcile curbe subțiri de rotație și console. Lucrarea își are originea într-o observație mai veche a lui Fr. Dischinger [1] trecută aproape neobservată în literatura de specialitate.

Necesitatea determinării stării de deformații va fi examinată, de la caz la caz, în funcție de realizarea ipotezelor care stau la baza teoriei de membrană.

1. NOTAȚII. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE BAZĂ

Cu notațiile eforturilor interioare, ale componentelor sarcinii exterioare și ale elementelor geometrice, reprezentate în figura 1, ecuațiile de echilibru în coordonatele φ, θ ale unui element de placă curbă subțire de rotație se scriu

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_{\varphi\theta} r_0)}{\partial \varphi} + N_{\theta\varphi} \cdot r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta \cdot r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z. \tag{1''}$$

Un procedeu obişnuit de căutare a soluţiilor ecuaţiilor (1), (1′), (1″) constă în dezvoltarea expresiei eforturilor şi componentelor sarcinii exterioare în serii trigonometrice

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum X_n \sin n\theta, \\ Y &= \sum Y_n \cos n\theta, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ Z &= \sum Z_n \cos n\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= \sum N_{\varphi n} \cos n\theta, \\ N_\theta &= \sum N_{\theta n} \cos n\theta, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ N_{\varphi\theta} &= N_{\theta\varphi} = \sum N_{\varphi\theta n} \sin n\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2′}$$

în care X_n, Y_n, Z_n sînt funcţii bine determinate de unghiul φ, în timp ce $N_{\varphi n}$, $N_{\theta n}$ şi $N_{\varphi\theta n}$ sînt funcţii pure de φ, care urmează să fie determinate.

Mai departe se va arăta cum se transformă relaţiile şi rezultatele, cînd în locul unghiului meridian φ, se alege cota z în lungul axei de rotaţie.

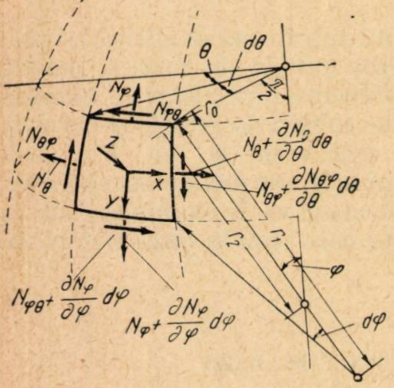


Fig. 1

Seriile (2) vor satisface în ansamblu ecuaţiile cu derivate parţiale independent de valorile lui θ, numai dacă fiecare termen în parte va satisface aceaste ecuaţii. În cele ce urmează, vom conduce calculele pentru termenul de rang n, urmînd apoi să aplicăm principiul suprapunerii efectelor.

Introducînd expresiile (2) în relaţiile (1), (1′), (1″) simplificînd liniile trigonometrice ale lui θ şi eliminînd apoi necunoscuta $N_{\theta n}$, se ajunge final la următoarele *ecuaţii diferenţiale de bază* ale plăcilor curbe subţiri de rotaţie, în teoria de membrană:

$$nr_2 \cdot N_{\varphi n} + \frac{d(N_{\varphi\theta n} r_0)}{d\varphi} + N_{\theta\varphi n} \cdot r_1 \cos\varphi = -(X_n \sin\varphi + nZ_n)\, r_1 r_2, \tag{3}$$

$$nr_1 \cdot N_{\theta\varphi n} + \frac{d(N_{\varphi n} r_0)}{d\varphi} + N_{\varphi n} \cdot r_2 \cos\varphi = -(Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi)\, r_1 r_2. \tag{3′}$$

O dată cunoscut $N_{\varphi n}$, efortul inelar $N_{\theta n}$ va fi dat de relaţia

$$N_{\theta n} = -Z_n r_2 - N_{\varphi n} \frac{r_2}{r_1}\,. \tag{4}$$

În cele ce urmează, vom admite că la marginea inferioară, placa este rezemată continuu și identic în lungul cercului paralel și de asemenea că placa este completă (unghiul θ variază între 0 și 2π).

Cu aceste precizări, vom putea trece să examinăm efectul diferitelor armonici.

2. STAREA DE EFORTURI SIMETRICĂ

Cazul $n = 0$ corespunde sarcinilor simetrice, deoarece rezultă $X_0 \equiv 0$ și $N_{\varphi\theta 0} \equiv 0$. Ecuația (3) este identic verificată, iar din (3′) rezultă ușor

$$N_{\varphi 0} = -\frac{1}{r_0 \sin\varphi}\int_{\varphi_0}^{\varphi} (Y_0 \sin\varphi + Z_0 \cos\varphi)\, r_0 r_1\, d\varphi, \qquad (5)$$

în care φ_0 reprezintă un unghi meridian constant (la cupole deschise, el definește poziția marginii superioare, iar la cupole închise care admit un plan tangent la creștet $\varphi_0 = 0$) *).

Relația (5) are o interpretare statică simplă. Integrala din (5) înmulțită cu 2π, reprezintă rezultanta sarcinilor deasupra unui cerc paralel r_0 (paralelă cu axa de rotație) și o notăm cu P_φ

$$P_\varphi = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} (Y_0 \sin\varphi + Z_0 \cos\varphi)\, r_0 r_1\, d\varphi. \qquad (6)$$

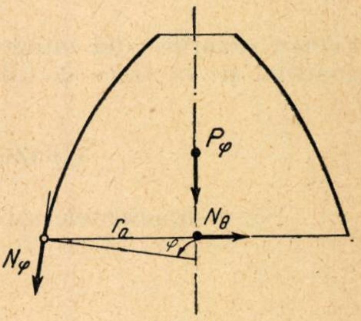


Fig. 2

Din (5) rezultă atunci imediat (fig. 2) **)

$$N_{\varphi 0} = -\frac{P_\varphi}{2\pi\, r_0 \sin\varphi}. \qquad (7)$$

Semnul (—) apare deoarece s-a presupus că N_φ este dirijat spre φ crescător (efort de întindere).

Așadar, eforturile meridiane $N_{\varphi 0}$ joacă rolul eforturilor dintr-o bară supusă la compresiune axială.

Majoritatea sarcinilor curente corespund acestui caz de solicitare: greutatea proprie, zăpada, presiunea uniformă sau variabilă în lungul axei de rotație etc.

★

---

*) Prin introducerea limitelor integralei, se satisfac condițiile limită de la marginea superioară, pentru cazul sarcinilor distribuite pe suprafață. Introducerea unei constante de integrare permite luarea în considerare a unei forțe concentrate aplicată la creștet și acționînd după direcția axei de rotație.

**) În cazul forței concentrate aplicată la creștet, valoarea ei se va îngloba în expresia lui P_φ.

Pentru trecerea la variabila z se va ține seama de următoarele relații geometrice :

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= r_2 \sin\varphi, \\ r_1 d\varphi &= \frac{dz}{\sin\varphi}. \end{aligned}\right\}$$

O formă interesantă o ia relația (5) în cazul greutății proprii. Componentele încărcării sînt

$$g = \gamma\delta_z ; \quad Y_0 = g \sin\varphi ; \quad Z_0 = g \cos\varphi.$$

Cu aceasta se obține după efectuarea tuturor simplificărilor

$$N_{\varphi 0} = -\frac{\gamma}{r_0 \sin\varphi} \int_{z_0}^{z} r_2 \delta_z dz. \tag{8}$$

Pentru cazurile cînd integralele din expresia lui $N_{\varphi 0}$ nu pot fi efectuate analitic, se va trece la calculul numeric.

3. CAZUL PRIMEI ARMONICE ($n = 1$)

Fie componentele sarcinii exterioare

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1 \sin\theta, \\ Y &= Y_1 \cos\theta, \\ Z &= Z_1 \cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

și eforturile interioare

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= N_{\varphi 1} \cos\theta, \\ N_\theta &= N_{\theta 1} \cos\theta, \\ N_{\varphi\theta} &= N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta 1} \sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Plecînd de la sistemul (3), (3′) în care se consideră $n = 1$, vom face schimbarea de funcții necunoscute definită de relațiile

$$N_{\varphi 1} = \frac{\mathfrak{M}}{\pi r_0^2 \sin\varphi}, \tag{10}$$

$$N_{\varphi\theta 1} = \frac{\mathfrak{M}}{\pi r_0^2 \operatorname{tg}\varphi} - \frac{\mathcal{H}}{\pi r_0}. \tag{10'}$$

Semnificația fizică a noilor necunoscute va fi precizată mai departe.

Introducînd expresiile (10), (10′) în (3), (3′) și efectuînd derivatele, se ajunge la sistemul

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi}-\mathcal{H}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi-\frac{d\mathcal{H}}{d\varphi}\cdot r_0\operatorname{tg}\varphi=-\pi r_0^2r_1\operatorname{tg}\varphi\left(X_1+\frac{Z_1}{\sin\varphi}\right),\\ &-\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi}+\mathcal{H}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi \qquad\qquad\qquad\quad =+\pi r_0^2r_1\left(Y_1\sin\varphi+Z_1\cos\varphi\right),\end{aligned}\right\}$$

din care se deduce imediat

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{d\varphi}&=\pi r_0r_1\left(X_1-Y_1\cos\varphi+Z_1\sin\varphi\right), &&(11)\\ \frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi}&=\mathcal{H}r_1\sin\varphi-\pi r_0^2r_1\left(Y_1\sin\varphi+Z_1\cos\varphi\right). &&(11')\end{aligned}\right\}$$

Vom arăta acum că $\mathcal{H}$ reprezintă componenta rezultantei sarcinilor exterioare, normală pe axa de rotație și paralelă cu direcția $\theta = 0°$, deasupra unui cerc paralel φ, iar $\mathfrak{M}$ reprezintă momentul sarcinilor exterioare de deasupra aceluiași cerc paralel φ, în raport cu diametrul $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Expresia lui $\mathcal{H}$ se poate scrie ușor sub forma generală

$$\mathcal{H}=2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\int_0^{\pi}\left(X_1\sin^2\theta-Y_1\cos\varphi\cdot\cos^2\theta+Z_1\sin\varphi\cdot\cos^2\theta\right)r_1d\varphi\cdot r_0d\theta.$$

Efectuînd integrarea în raport cu θ, se regăsește relația (11); astfel expresia lui $\mathcal{H}$ devine *)

$$\mathcal{H}=\pi\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(X_1-Y_1\cos\varphi+Z_1\sin\varphi\right)r_0r_1\,d\varphi. \qquad (12)$$

La fel de simplu se stabilește expresia lui $\mathfrak{M}$. Ea se compune din doi termeni, primul reprezintă momentul dat de componenta orizontală a sarcinilor, fie

$$d\mathfrak{M}_H=\mathcal{H}dz=\mathcal{H}r_1d\varphi\sin\varphi\,;$$

al doilea termen reprezintă momentul dat de componenta verticală a sarcinilor, fie

$$d\mathfrak{M}_V=-dV\cdot r_0=-2r_0\int_0^{\pi}\left(Y_1\sin\varphi+Z_1\cos\varphi\right)\cos^2\theta\cdot r_1d\varphi\cdot r_0d\theta=$$

$$=-\pi r_0^2r_1\left(Y_1\sin\varphi+Z_1\cos\varphi\right)d\varphi.$$

---

*) În cazul aplicării unei forțe concentrate tangentă la creștet și cuprinsă în planul meridian de referință, valoarea ei se va adăuga în membrul al doilea al relației (12), respectiv (14).

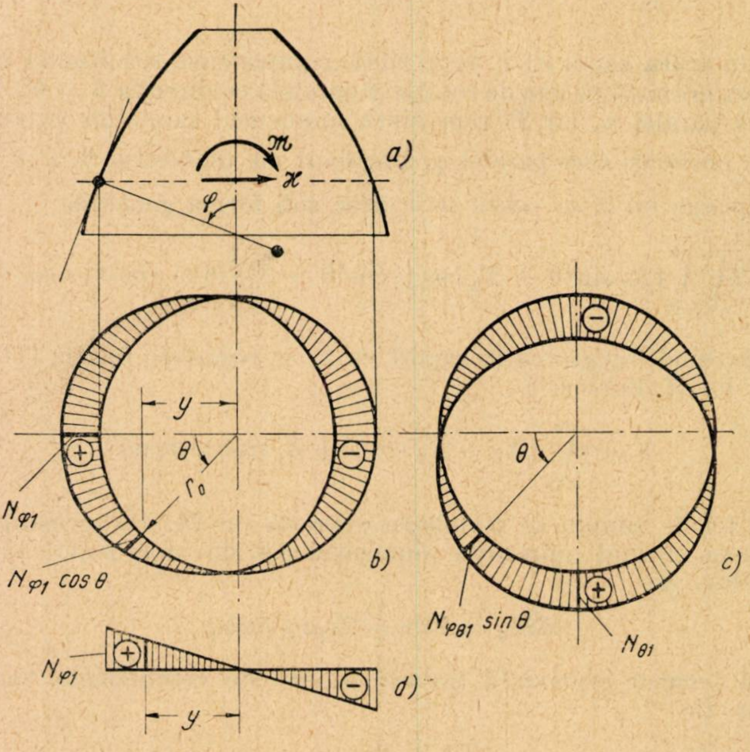
Făcînd suma $d(\mathfrak{M}_H + \mathfrak{M}_V)$ şi integrînd în raport cu φ *), rezultă final

$$\mathfrak{M} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{H} r_1 \sin\varphi \cdot d\varphi - \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} (Y_1 \sin\varphi + Z_1 \cos\varphi)\, r_0^2 r_1\, d\varphi. \tag{13}$$

În cazul cînd în locul lui φ, se lucrează cu variabila z, formulele (12), (13) devin

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \int_{z_0}^{z} (X_1 - Y_1 \cos\varphi + Z_1 \sin\varphi)\, r_2\, dz, & (14)\\ \mathfrak{M} &= \int_{z_0}^{z} \mathcal{H} dz - \pi \int_{z_0}^{z} (Y_1 \sin\varphi + Z_1 \cos\varphi)\, r_0 r_2\, dz. & (14') \end{aligned}\right\}$$

O dată determinaţi $\mathcal{H}$ şi $\mathfrak{M}$, eforturile $N_{\varphi 1}$ şi $N_{\varphi\theta 1}$ rezultă din (10) şi (10′), iar $N_{\theta 1}$ din (4).



$\mathfrak{M}$
$\mathcal{H}$
a)
φ
y
θ
r_0
+
−
$N_{\varphi 1}$
$N_{\varphi 1} \cos\theta$
b)
−
θ
+
c)
$N_{\varphi\theta 1} \sin\theta$
$N_{\theta 1}$
+
−
$N_{\varphi 1}$
d)
y

Fig. 3 *a*, *b*, *c*, *d*

Relaţiile (10) se pot stabili şi direct observînd că distribuţia eforturilor $N_{\varphi 1}$ într-o secţiune transversală se face după legea lui Navier.

---

*) În cazul aplicării la creştet a unui moment al cărui vector este normal pe planul meridian de referinţă, valoarea lui se va adăuga în membrul al doilea al relaţiei (13), respectiv (14′).

Într-adevăr, conform (9′) efortul meridian N_φ variază cosinusoidal în lungul unui cerc paralel (fig. 3*b*), luînd valorile extreme pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$ şi anulîndu-se pentru $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Dacă acum, în locul variabilei unghiulare θ, se introduce distanţa $y = r_0 \cos\theta$ (fig. 3 *d*), rezultă

$$N_\varphi = \frac{N_{\varphi 1}}{r_0}\, y.$$

Raportul $N_{\varphi 1}/r_0$ fiind constant pentru o aceeaşi secţiune transversală (φ = const.), relaţia precedentă indică o variaţie liniară pe diametrul $\theta = 0$, conform ipotezei lui Navier de la grinda dreaptă.

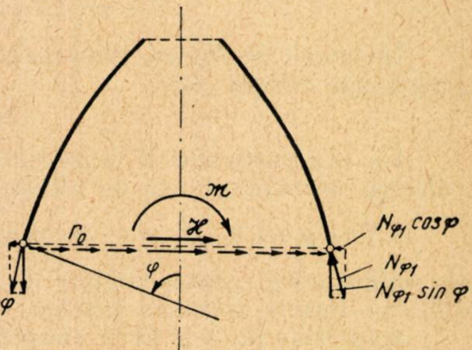


Fig. 4

Aşadar, în ansamblu, placa subţire de rotaţie se comportă ca o consolă încastrată la bază şi supusă la încovoiere; momentele încovoietoare $\mathfrak{M}$, deduse cu ajutorul formulei (13) sau (14′), acţionează în planul $\theta = 0$ şi produc eforturile unitare de încovoiere $\sigma_\varphi = N_\varphi/\delta$.

Într-o secţiune φ = const., momentul $\mathfrak{M}$ este preluat de componentele paralele cu axa de rotaţie ale eforturilor meridiane N_φ (fig. 3*a*). Valoarea maximă a efortului normal va rezulta din formula lui Navier

$$N_{\varphi 1} \sin\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{W_\varphi},$$

în care W_φ reprezintă modulul de rezistenţă al cercului paralel din secţiune. Cu notaţiile din figura 3*b*, se obţin uşor momentul de inerţie şi modulul de rezistenţă

$$\left.\begin{aligned} I_\varphi &= 4\int_0^{\pi/2} y^2 \cdot ds = 4\int_0^{\pi/2} r_0^2 \cos^2\theta \cdot r_0 d\theta = \pi r_0^3,\\ W_\varphi &= \frac{I_\varphi}{r_0} = \pi r_0^2. \end{aligned}\right\}$$

Cu acestea se obţine relaţia (10). Momentul $\mathfrak{M}$ se consideră pozitiv dacă roteşte în sensul descrescător al unghiului meridian φ (fig. 3*a*).

După ce am determinat pe $N_{\varphi 1}$ şi $N_\varphi = N_{\varphi 1} \cos\theta$, rămîne să stabilim eforturile de lunecare $N_{\varphi\theta}$. Pentru aceasta se poate scrie o ecuaţie de proiecţii pe secţiunea transversală, în direcţia $\theta = 0$. În această ecuaţie intervin (fig. 4)

— componenta $\mathcal{H}$, normală pe axa de rotație, a rezultantei sarcinilor exterioare, deasupra cercului paralel r_0,

— eforturile de lunecare $N_{\varphi\theta} = N_{\varphi\theta 1} \sin\theta$,

— componentele eforturilor meridiane N_φ, normale pe axa de rotație.

Considerînd sensul pozitiv al eforturilor de la stînga ($\theta = 0$) spre dreapta ($\theta = \pi$), această ecuație se scrie

$$\mathcal{H} - 2\int_0^\pi N_{\varphi 1} \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot r_0 d\theta \cdot \cos\theta + 2\int_0^\pi N_{\varphi\theta 1} \sin\theta \cdot r_0 d\theta \cdot \sin\theta = 0,$$

sau efectuînd integralele

$$\mathcal{H} = \pi r_0 (N_{\varphi 1} \cos\varphi - N_{\varphi\theta 1}).$$

Înlocuind pe $N_{\varphi 1}$ cu valoarea găsită precedent și explicitînd pe $N_{\varphi\theta 1}$, se regăsește relația (10′).

★

Un caz particular îl reprezintă forțele masice acționînd paralel cu o direcție normală pe axa de rotație. Fie componentele încărcării

$$X = p \sin\theta, \quad Y = -p \cos\varphi \cdot \cos\theta, \quad Z = +p \sin\varphi \cdot \cos\theta,$$

(ele reprezintă greutatea proprie în cazul cînd axa de rotație este orizontală sau forțele seismice într-un calcul convențional).

Expresiile lui $\mathcal{H}$ și $\mathfrak{M}$ se simplifică, luînd formele

— pentru variabilele φ, θ

$$\mathcal{H} = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} p\, r_0 r_1\, d\varphi, \quad \mathfrak{M} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{H}\, r_1 \sin\varphi\, d\varphi, \tag{15}$$

— pentru variabilele z, θ

$$\mathcal{H} = 2\pi \int_{z_0}^{z} p\, r_2\, dz, \quad \mathfrak{M} = \int_{z_0}^{z} \mathcal{H}\, dz, \tag{15′}$$

(p s-a considerat variabil cu grosimea plăcii, deci cu φ sau z).

Relațiile (10), (10′) au fost stabilite direct de Fr. Dischinger [1] pe baza analogiei cu consola, fără însă a explicita pe $\mathfrak{M}$ și $\mathcal{H}$. În lucrarea menționată, autorul dezvoltă doar cazul simplu al conului și al cupolei sferice. O. Belluzzi [2] a indicat o metodă similară, fără însă a stabili formule explicite.

O altă metodă de integrare prin cuadraturi a fost indicată de V. V. Novojilov [3] și M. Soare [4].

4. CAZUL ARMONICELOR SUPERIOARE

În cazul general nu se mai poate obține o soluție explicită pentru necunoscutele $N_{\varphi n}$ și $N_{\varphi\theta n}$. Dischinger a extins analogia de la cazul precedent, demonstrînd că în ansamblu, suprafața lucrează tot la încovoiere.

Pentru armonica de rangul n, în secţiunea transversală apar $3n$ axe neutre.

O tratare analitică similară cu aceea de la paragraful precedent se poate aplica şi în cazul general.

Analog relaţiilor (10), (10′), vom face următoarea schimbare de funcţii necunoscute :

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi n} &= \mathfrak{M} \cdot A, \\ N_{\varphi\theta n} &= \mathfrak{M} \cdot B + \mathcal{K} \cdot C, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

în care A, B, C sînt funcţii încă necunoscute de φ, pe care urmează să le determinăm din condiţia ca să rezulte ecuaţii de formă cît mai simplă.

Substituind expresiile (16) în (3), (3′) şi grupînd convenabil termenii, se obţine final

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi} + \mathfrak{M}\left(\frac{A}{B}\cdot\frac{n}{\sin\varphi} + \frac{1}{B}\cdot\frac{dB}{d\varphi} + \frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}\right) + \mathcal{K}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{dC}{d\varphi} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{C}{B}\cdot\frac{2}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}\right) + \frac{d\mathcal{K}}{d\varphi}\cdot\frac{C}{B} = -\frac{(X_n \sin\varphi + nZ_n)\, r_1 r_2}{B r_0}, \qquad (17) \\ &\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi} + \mathfrak{M}\left(\frac{B}{A}\cdot\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi} + \frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}\cdot\frac{dr_0}{d\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right) + \\ &\qquad + \mathcal{K}\cdot\frac{C}{A}\cdot\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi} = -\frac{(Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi)\, r_1 r_2}{A r_0}. \qquad (17') \end{aligned}\right\}$$

Vom determina pe A, B, C din condiţiile ca coeficienţii lui $\mathfrak{M}$ şi $\mathcal{K}$ din cele două ecuaţii să fie identici. Rezultă astfel uşor ecuaţiile

$$\frac{dB}{d\varphi} + B\left(\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi - \frac{1}{A}\frac{dA}{d\varphi}\right) - B^2\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi} + A\frac{n}{\sin\varphi} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dC}{d\varphi} = \left(\frac{B}{A}\cdot\frac{n}{\cos\varphi} - 2\right)\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}. \tag{18'}$$

Ecuaţia diferenţială (18) se poate aduce la forma mai simplă

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{B}{A}\right) + \left(\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi\right)\frac{B}{A} - \frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{n}{\sin\varphi} = 0\,; \tag{19}$$

funcţiile A şi B intervin doar prin raportul lor. Soluţia ecuaţiei (19) care este de tip Riccatti se poate obţine prin cuadraturi, doar dacă se cunoaşte o integrală particulară, ceea ce este posibil doar în cazuri izolate (de exemplu pentru cazul sferei şi al parabolei).

O dată cunoscut raportul B/A, din (18′) se deduce

$$C = \frac{1}{r_0^2}\cdot e^{n\int \frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}\,d\varphi}. \tag{20}$$

Ținînd seama de aceste rezultate, prin scăderea relațiilor (17), (17′), membru cu membru, se obține

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\varphi}=\frac{r_1 r_2}{C r_0}\left[\frac{B}{A}\left(Y_n \sin\varphi+Z_n\cos\varphi\right)-\left(X_n\sin\varphi+nZ_n\right)\right]. \qquad (21)$$

Necunoscuta $\mathcal{H}$ rezultă prin integrarea relației (21) și introduce o constantă de integrare C_1.

Rămîne să mai precizăm una din funcțiile A sau B. Pentru aceasta, se poate impune — de exemplu — condiția ca coeficientul lui $\mathfrak{M}$ din (17′) să fie nul

$$\frac{B}{A}\cdot\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}+\frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{d\varphi}+\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}+\operatorname{ctg}\varphi=0.$$

Ținînd seama că raportul B/A este cunoscut, cît și de relația (20), se obține ușor

$$A=\frac{1}{r_0\sin\varphi}\cdot e^{-n\int\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}d\varphi}=\frac{1}{r_0^3\sin\varphi}. \qquad (22)$$

Cu acestea, ecuația (17′) se reduce la forma

$$\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi}=-\mathcal{H}\cdot\frac{C}{A}\cdot\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\varphi}-\frac{\left(Y_n\sin\varphi+Z_n\cos\varphi\right)r_1 r_2}{A r_0}. \qquad (23)$$

Necunoscuta $\mathfrak{M}$ rezultă prin integrarea relației (23) și introduce o constantă de integrare C_2.

Constantele C_1 și C_2 se vor determina astfel încît $N_{\varphi n}$ și $N_{\varphi\theta n}$ să satisfacă condițiile limită la marginea superioară.

În particular, pentru plăcile curbe deschise (la partea superioară) precum și la cupolele la care componenta normală a sarcinii exterioare este nulă la creștet ($Z_{n,0}=0$), eforturile $N_{\varphi n}$ și $N_{\varphi\theta n}$ trebuie să fie nule la marginea superioară.

Mai trebuie remarcat că, prin schimbarea de funcții definită de (16), necunoscutele $\mathfrak{M}$ și $\mathcal{H}$ pot să nu mai aibă semnificația fizică de moment și forță tăietoare.

Ca exemplu de aplicare a acestei metode, vom particulariza formulele din cadrul acestui paragraf pentru cazul cupolei sferice de rază a.

Ținînd seama că $r_0=a\sin\varphi$, ecuația (19) se reduce la

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{B}{A}\right)+\frac{n}{\sin\varphi}\left[1-\left(\frac{B}{A}\right)^2\right]=0;$$

dintre soluțiile particulare $\frac{B}{A}=\pm 1$, vom reține soluția cu semnul (+), fie $A=B$.

Funcția C se deduce din (20) și se scrie (mai puțin factorul de proporționalitate $1/a^2$)

$$C=\frac{\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi}.$$

Necunoscuta $\mathcal{H}$ rezultă din (21)

$$\mathcal{H} = a\int \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}} [\,-X_n \sin\varphi + Y_n \sin\varphi - (n - \cos\varphi)\, Z_n]\, d\varphi + C_1.$$

Cu ajutorul relației (22) se precizează funcțiile A și B

$$A = B = \frac{1}{a^3 \sin^2\varphi \cdot \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}}.$$

În sfîrșit, $\mathfrak{M}$ rezultă din (23)

$$\mathfrak{M} = -\,a^4 \int \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \sin\varphi \left(\frac{n\mathcal{H}}{a} \cdot \frac{\operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi} + Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi \right) d\varphi + C_2.$$

În paragraful următor, teoria precedentă este ilustrată prin cîteva exemple de calcul, iar în anexă s-au indicat expresiile generale ale eforturilor pentru cîteva cazuri interesante.

5. EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul de calcul nr. 1

Să se determine eforturile într-o cupolă parabolică, supusă acțiunii vîntului. Componentele sarcinii exterioare se vor lua

$$X = Y \equiv 0\,; \quad Z = p \sin\varphi \cdot \cos\theta = Z_1 \cos\theta$$
$$(Z_1 = p \sin\varphi, \quad n = 1).$$

Pentru rezolvare se va utiliza metoda analogiei lui Dischinger expusă la punctul 3.

Ecuația parabolei meridiane este

$$z = \frac{a}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

(cotele z se măsoară de la creștet ; a reprezintă raza de curbură la creștet).

Din relația precedentă se deduce

$$r_0 = a \operatorname{tg}\varphi\,; \quad r_2 = \frac{a}{\cos\varphi}\,; \quad r_1 = \frac{a}{\cos^3\varphi}\,.$$

Din (12) se deduce următoarea expresie a lui $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} p \sin \varphi \cdot \sin \varphi \cdot a \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{a}{\cos^3 \varphi} \cdot d\varphi = \pi p a^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi =$$

$$= \pi p a^2 \left(\frac{1}{3 \cos^3 \varphi} - \frac{1}{3 \cos^3 \varphi_0} - \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi_0} \right)$$

(pentru o mai mare generalitate, s-a considerat mai sus că cupola este deschisă la marginea superioară; semideschiderea unghiulară φ_0).

Expresia lui $\mathfrak{M}$ se deduce din (13)

$$\mathfrak{M} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{H}\, a \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi - \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} p \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{a}{\cos^3 \varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{H}\, a \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi - \mathcal{H}\, a.$$

Introducînd expresia lui $\mathcal{H}$ obținută precedent, rezultă succesiv

$$\mathfrak{M} = \pi p a^3 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{3 \cos^6 \varphi} - \frac{\sin \varphi}{3 \cos^3 \varphi_0 \cos^3 \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0 \cos^3 \varphi} \right) d\varphi -$$

$$- \pi p a^3 \left(\frac{1}{3 \cos^3 \varphi} - \frac{1}{3 \cos^3 \varphi_0} - \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi_0} \right).$$

Efectuînd integrala, se obține final

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi p a^3}{30} \cdot \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\cos^5 \varphi_0 \cos^5 \varphi} \cdot [(30 \cos^4 \varphi_0 - 5 \cos^2 \varphi_0 - 3) \cos^4 \varphi -$$

$$- \cos \varphi_0 (3 + 5 \cos^2 \varphi_0) \cos^3 \varphi + 2 \cos^2 \varphi_0 (1 - 10 \cos^2 \varphi_0) \cos^2 \varphi +$$

$$+ 2 \cos^3 \varphi_0 \cos \varphi + 2 \cos^4 \varphi_0].$$

Cu ajutorul acestor două expresii, se pot calcula imediat $N_{\varphi 1}$, $N_{\varphi \theta 1}$ și $N_{\theta 1}$. Expresiile generale sînt complicate și de aceea este mai comod să se calculeze numeric.

În particular pentru cupola închisă ($\varphi_0 \to 0$), rezultă

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\pi p a^2}{3} \cdot \frac{(1 - \cos \varphi)^2 (1 + 2 \cos \varphi)}{\cos^3 \varphi}, \\ \mathfrak{M} &= - \frac{\pi p a^3}{15} \cdot \frac{(1 - \cos \varphi)^2 (11 \cos^3 \varphi + 7 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi - 1)}{\cos^5 \varphi}. \end{aligned} \right\}$$

Ducînd aceste expresii în (10), (10′), rezultă următoarele formule care determină eforturile :

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi 1} &= -\frac{pa}{15}\cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{11\cos^3\varphi + 7\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 1}{\cos^3\varphi\,(1+\cos\varphi)}, \\ N_{\varphi\theta 1} &= -\frac{pa}{15}\cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^3\varphi + 2\cos^2\varphi + 8\cos\varphi + 4}{\cos^2\varphi\,(1+\cos\varphi)}, \\ N_{\theta 1} &= -\frac{pa}{15}\cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{-11\cos^3\varphi + 8\cos^2\varphi + 32\cos\varphi + 16}{\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)}. \end{aligned}\right\}$$

Aceste rezultate au mai fost stabilite de autor pe o altă cale [4].

Exemplul de calcul nr. 2

Să se determine eforturile într-un turn de răcire care are forma unui hiperboloid de rotație, provenind din sarcinile seismice. Accelerația orizontală se va lua $\frac{1}{20}$ din accelerația gravității. Grosimea plăcii este constantă la partea superioară, apoi crește liniar.

Date numerice (vezi fig. 5*a*)

— raza cercului colier (semiaxa mică a hiperbolei meridiane) $a = 12{,}750$ m (secțiunea $z = 0$);

— raza cercului paralel inferior $r_{0,i} = 22{,}320$ m (la cota $z = -44$ m);

— înălțimea efectivă a turnului hiperbolic $H = 50$ m, din care $h_s = 6$ m deasupra cercului colier și $h_i = 44$ m dedesubt;

— grosimea este constantă și egală cu 12 cm la partea superioară pe o înălțime de 30 m, apoi crește liniar cu înălțimea pînă la $\delta_i = 32$ cm;

— greutatea tehnică a betonului armat $\gamma = 2{,}6$ t/m³.

Ecuația cartesiană a hiperbolei meridiane are forma

$$\frac{r_0^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

în care b reprezintă semiaxa mare. Din condiția $r_0 = r$, pentru $z = z_i$ rezultă

$$b = \frac{z_i}{\sqrt{\frac{r_{0,i}^2}{a^2} - 1}} = \frac{44}{\sqrt{\left(\frac{22{,}32}{12{,}75}\right)^2 - 1}} = 30{,}622 \text{ m}.$$

În funcție de cota z, raza cercului paralel se determină din formula de mai sus

$$r_0 = a\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}.$$

Din ecuaţia hiperbolei se mai deduce

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dz}{dr_0} = \frac{r_0}{z}\operatorname{tg}^2 A,$$

în care

$\operatorname{tg} A = \frac{b}{a} = \frac{30{,}622}{12{,}750} = 2{,}40176$ (A unghiul asimptotelor hiperbolei meridiane cu axa Or_0).

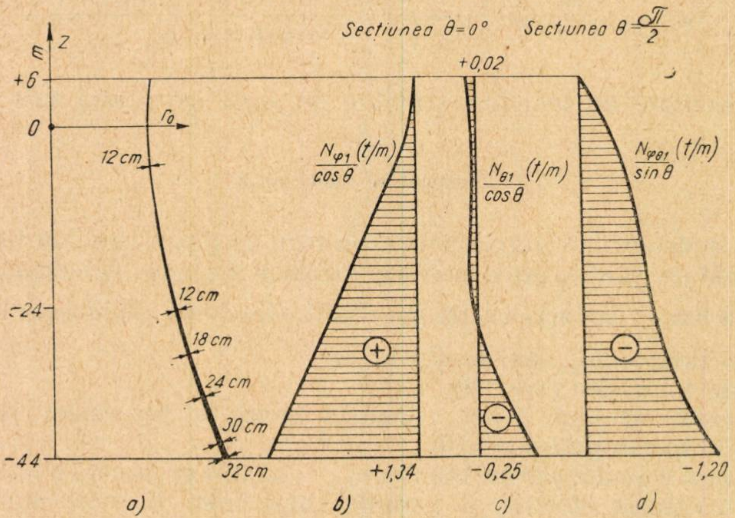

Secțiunea θ=0°
Secțiunea θ=π/2
z
m
+6
0
-24
-44
r₀
12cm
12cm
18cm
24cm
30cm
32cm
+0,02
Nφ1/cosθ (t/m)
Nθ1/cosθ (t/m)
Nφθ1/sinθ (t/m)
+
−
−
+1,34
-0,25
-1,20
a)
b)
c)
d)

Fig. 5 *a*, *b*, *c*, *d*

Grosimea plăcii variază după legile :

$$\delta_z = \delta = 0{,}12 \qquad \text{pentru} \; +\; 6 \geqslant z \geqslant -24;$$

$$\delta_z = -\delta - \alpha z = -0{,}12 - \frac{z}{100} \qquad ,, \quad -24 \geqslant z \geqslant -44;$$

(z şi δ_z în metri).

Conform enunţului, sarcina orizontală va fi $p = \frac{1}{20}\gamma\,\delta_z$, iar componentele sarcinii sînt respectiv

$$X_1 = p\,;\; Y_1 = -p\sin\varphi\,;\; Z_1 = +p\cos\varphi.$$

Utilizînd relaţiile (15′), avem

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\pi\gamma}{10}\int_{z_0}^{z}\delta_z\cdot r_2\,dz,\\ \mathfrak{M} &= \int_{z_0}^{z}\mathcal{H}\,dz.\end{aligned}\right\}$$

Integrala care determină pe $\mathcal{H}$ se poate efectua analitic, însă este mai comod calculul numeric.

În figurile 5 *b*, *c*, *d* a fost reprezentată variaţia eforturilor $N_{\varphi 1}$, $N_{\theta 1}$ şi $N_{\varphi\theta 1}$.

Exemplul de calcul nr. 3

Să se determine eforturile într-un turn de răcire care are forma unui hiperboloid de rotaţie, supus acţiunii vîntului. Datele numerice ale elementelor geometrice vor fi aceleaşi ca în exemplul de calcul nr. 2.

Distribuţia presiunii vîntului în lungul unui cerc paralel se va lua după legea

$$X = Y \equiv 0\,; \quad Z = Z_0 + Z_1 \cos\theta.$$

$$Z_0 = -\,0{,}258\, p_v \sin\varphi\,; \quad Z_1 = +\,0{,}488\, p_v \sin\varphi.$$

Pentru o mai mare generalitate vom face abstracţie în calcule de coeficienţii numerici din expresiile lui Z_0, Z_1, considerînd

$$Z_0, Z_1 = p_v \sin\varphi.$$

şi urmînd ca final să înmulţim rezultatele cu coeficientul numeric al armonicei respective.

Armonica $n = 0$ corespunde unei stări de eforturi simetrice. Rezultatele se obţin uşor prin integrare directă

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi 0} &= \frac{pa\cos^2 A}{4}\cdot\frac{a}{r_0\zeta}\left[f_1(\zeta) - f_1(\zeta_0)\right], \\ N_{\theta 0} &= -\,pr_0 - N_{\varphi}\frac{r_2}{r_1}, \end{aligned}\right\}$$

$$\zeta = \frac{\sin\varphi}{\sin A}\,; \quad f_1(\zeta) = \frac{2\zeta}{1-\zeta^2} + \ln\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1},$$

ζ_0 reprezintă valoarea lui ζ la marginea superioară ($\varphi = \varphi_0$).

În figurile 6 *b*, *c* este redată variaţia eforturilor $N_{\varphi 0}$ şi $N_{\theta 0}$.

Pentru *armonica* $n = 1$ se aplică metoda analogiei lui Dischinger. Relaţiile care determină pe $\mathcal{H}$ şi $\mathfrak{M}$ devin pentru cazul de încărcare considerat

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi p_v \int_{z_0}^{z} r_0 \sin\varphi\, dz\,; \\ \mathfrak{M} &= \int_{z_0}^{z} \mathcal{H}\, dz - \pi p_v \int_{z_0}^{z} r_0^2 \cos\varphi\, dz. \end{aligned}\right\}$$

Efectuînd numeric integralele precedente pentru intervale $\Delta z = 3$ m, s-au stabilit diagramele de variaţie ale lui $N_{\varphi 1}$, $N_{\theta 1}$ şi $N_{\varphi\theta 1}$ reprezentate în figurile 7 *b*, *c*, *d*.

Primită la redacţie la 29 octombrie 1958.

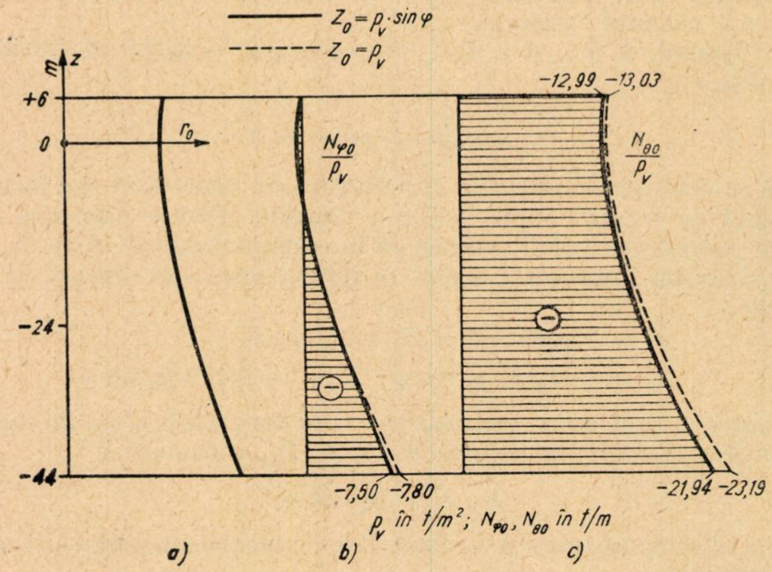


Fig. 6 *a*, *b*, *c*

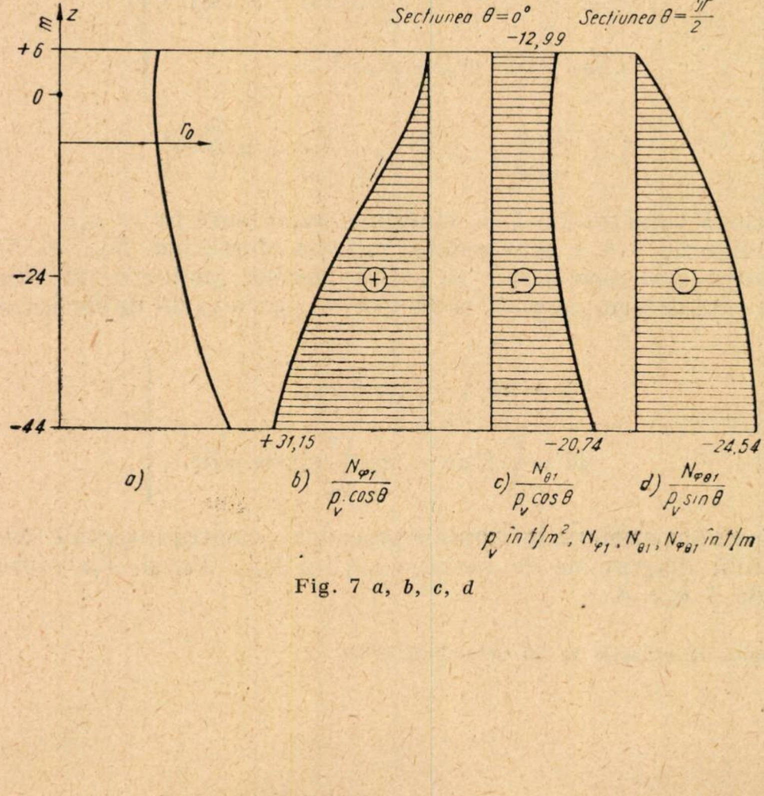


Fig. 7 *a*, *b*, *c*, *d*

ANEXĂ

Forma suprafeței mediane. Elemente geometrice	Sarcini	Expresiile eforturilor
Cupola sferică $r_1 = r_2 = a$ $r_0 = a \sin\varphi$	Acțiunea vîntului $X = Y \equiv 0$ $Z = p_v \sin\varphi \cdot \cos\theta$	$N_\varphi = -\frac{p_v a}{3} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cos\varphi \cdot \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \cos\theta$ $N_{\varphi\theta} = -\frac{p_v a}{3} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \sin\theta$ $N_0 = -\frac{p_v a}{3} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2}\left[2(1+\cos\varphi) + \frac{1}{1+\cos\varphi}\right]\cos\theta$
	Acțiunea seismică $X = p \sin\theta$ $Y = -p\cos\varphi \cdot \cos\theta$ $Z = +p\sin\varphi \cdot \cos\theta$	$N_\varphi = +pa \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos\varphi} \cdot \cos\theta$ $N_{\varphi\theta} = -pa \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{2+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \cdot \sin\theta$ $N_0 = -pa \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2}\left(1+\cos\varphi + \frac{1}{1+\cos\varphi}\right)\cos\theta$
Cupola parabolică $z = \frac{a}{2} \cdot \text{tg}^2\varphi$ $r_0 = a\,\text{tg}\,\varphi$ $r_1 = \frac{a}{\cos^3\varphi}$ $r_2 = \frac{a}{\cos\varphi}$	Acțiunea vîntului $X = Y \equiv 0$ $Z = p_v \sin\varphi \cdot \cos\theta$	$N_\varphi = -\frac{p_v a}{15} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{11\cos^3\varphi + 7\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 1}{\cos^3\varphi(1+\cos\varphi)} \cdot \cos\theta$ $N_{\varphi\theta} = -\frac{p_v a}{15} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos^3\varphi + 2\cos^2\varphi + 8\cos\varphi + 4}{\cos^2\varphi(1+\cos\varphi)} \cdot \sin\theta$ $N_0 = -\frac{p_v a}{15} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{-11\cos^3\varphi + 8\cos^2\varphi + 32\cos\varphi + 16}{\cos\varphi(1+\cos\varphi)} \cdot \cos\theta$
	Acțiunea seismică $X = p\sin\theta$ $Y = -p\cos\varphi \cdot \cos\theta$ $Z = +p\sin\varphi \cdot \cos\theta$	$N_\varphi = \frac{pa}{15} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{3\cos^3\varphi + 6\cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 2}{\cos^2\varphi(1+\cos\varphi)} \cdot \cos\theta$ $N_{\varphi\theta} = -\frac{pa}{15} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{10\cos^4\varphi + 17\cos^3\varphi + 14\cos^2\varphi + 6\cos\varphi - 2}{\cos^3\varphi(1+\cos\varphi)} \cdot \sin\theta$ $N_0 = -\frac{pa}{15} \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{3\cos^4\varphi + 6\cos^3\varphi + 19\cos^2\varphi + 23\cos\varphi + 5}{\cos\varphi(1+\cos\varphi)} \cdot \cos\theta$

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОСТОЯНИЯ МЕМБРАННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются возможности интегрирования уравнения равновесия при помощи тригонометрических рядов. Для случая состояния симметрических напряжений относительно оси вращения, а также для первой гармоники автор приходит к простым выражениям напряжений. Эти выражения были выведены по аналогии с консолью, путем обобщения более раннего исследования Дишингера.

В заключение приведены три примера расчета и дается приложение, содержащее формулы нескольких обычных случаев.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES CONTRAINTES DE MEMBRANE DANS LES COQUES DE RÉVOLUTION

RÉSUMÉ

L'auteur examine les possibilités d'intégrer les équations d'équilibre par les séries trigonométriques. Dans le cas des coques chargées symétriquement par rapport à l'axe de révolution et du premier harmonique, on arrive à des expressions simples pour les efforts. Leur déduction est basée sur l'analogie avec la poutre en porte-à-faux, en généralisant une ancienne observation de Dischinger.

A la fin de l'étude, l'auteur donne trois exemples de calcul et une annexe contenant les expressions des efforts dans quelques cas intéressants.

BIBLIOGRAFIE

1. FR. DISCHINGER, *Handbuch für Eisenbetonbau.* **6**, cap. 2, *Schalen und Rippenkuppeln.* W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1928.
2. O. BELLUZZI, *Scienza delle costruzioni.* **3.** Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1954.
3. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек.* Судпромгиз, Москва, 1951.
4. M. SOARE, *Suprafețe subțiri de rotație. Teoria de membrană la încărcări nesimetrice.* Construcții, *4* (1951).
5. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke.* Ed. a 4-a, Springer-Verlag, Wien, 1956, p. 384.
6. J. LEDWON, *Metodă pentru calculul succesiv al eforturilor în turnurile de răcire hiperbolice, la acțiunea vîntului* (l. polonă), Inzynieria Budownictwo, 1957, 219.
7. P. LAYRANGUES, *Calcul des contraintes de membrane dans un voile mince de révolution.* Annales des Ponts et Chaussées, sept.-oct. (1957).

STUDII ASUPRA PARAMETRILOR AŞCHIERII CU CUŢITE DE STRUNG DIN OŢEL RAPID ROMÎNESC

DE

M. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU

1. GENERALITĂŢI

Aşchierea pe strung a început acum cîteva secole, cînd pentru cuţitele de strung se utiliza oţelul carbon. În decursul anilor, materialele din care se confecţionau sculele aşchietoare au suferit îmbunătăţiri substanţiale. Astfel în prezent se folosesc oţeluri carbon de scule, oţeluri aliate de scule, oţeluri rapide, carburi metalice, materiale mineralo-ceramice, diamant etc. Varietatea aceasta de materiale destinate construcţiei sculelor este cerută de complexitatea fenomenelor ce însoţesc aşchierea în diferitele cazuri de prelucrare. Cerinţele pe care factorii economiei şi producţiei le impun acestor materiale, duc la o continuă îmbogăţire a sortimentului lor, iar condiţiile tehnologice fac ca unele din ele, care deşi nu permit realizarea unor performanţe ridicate în ceea ce priveşte regimurile de aşchiere, să aibă încă o largă utilizare. În această gamă se găseşte şi oţelul rapid, care nu permite obţinerea unor viteze de aşchiere ridicate cum ar fi cele obţinute cu plăcuţe din carburi metalice şi mineralo-ceramice, aceasta în special datorită faptului că el nu îşi poate menţine calităţile mecanice decît pînă în preajma temperaturilor de aproximativ 500°C. Aceste temperaturi sînt depăşite în cazul prelucrărilor cu viteze sau avansuri mari de aşchiere, făcînd astfel inutilizabil oţelul rapid pentru prelucrarea metalelor în aceste condiţii.

Sculele din oţel rapid sînt însă utilizate cu mult succes la prelucrările cu şocuri sau la acelea în care condiţiile tehnologice sau constructive nu permit realizarea unor viteze mari de aşchiere, precum şi la aşchierea metalelor şi aliajelor uşoare.

Urmarea acestui fapt este că se continuă şi azi cercetările privind aceste oţeluri, ele mergînd pe linia asigurării unei bune funcţionări la o temperatură cît mai ridicată și a unui preț cît mai scăzut. Astfel s-a ajuns ca să se contureze între altele, două clase de oțeluri rapide obișnuite, unele aliate pe bază de wolfram și altele pe bază de molibden.

Cercetările ale căror rezultate sînt prezentate în lucrarea de față, au fost efectuate cu cîte un oțel din clasele sus-menționate, adică cu oțelul RA1 (0,76% C; 4% Cr; 19% W; 0,15% Mo; 1% V) și oțelul RPO*) (0,84% C; 4,1% Cr; 5,4% W; 5% Mo; 1,64% V), ambele elaborate la Uzinele 23 August. Cuțitele au avut duritatea 63—65 H_{RC}.

Experiențele au fost făcute în paralel pe două oțeluri de construcție OL 38 (STAS 500 — 49, avînd $\sigma_r = 39 - 46$ kgf/mm²) și oțelul aliat 35MoCN20 (0,36 — 0,39% C; 0,66 — 0,67% Mn; 0,70 — 0,80% Cr; 0,18—0,22% Mo; 1,80—1,90% Ni, avînd $\sigma_r = 67 - 73$ kgf/mm²).

Pentru sistematizarea studiului, la fel ca în alte lucrări [1], [2], [3], [4], parametrii așchierii au fost astfel împărțiți, încît între grupe să existe o slabă interdependență ce poate fi practic neglijată:

1. Parametrii geometrici ai cuțitului,
2. Parametrii regimului de așchiere,
3. Materialele din care sînt confecționate cuțitele.

Această grupare indică în același timp și capitolele mai însemnate ale lucrării de față.

La baza studiului a stat urmărirea pe cale optică a evoluției uzurii fețelor active ale cuțitului. Datorită faptului că uzura de pe fața de așezare secundară prezintă cea mai mare importanță pentru precizia prelucrării și calitatea suprafeții așchiate, s-a urmărit îndeosebi uzura de pe această față, care de altfel a fost luată în considerare drept criteriu de uzură. În aceste condiții limita superioară admisă pentru uzură a fost $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm.

2. STUDIUL PARAMETRILOR GEOMETRICI

Acest capitol al lucrării are drept scop determinarea acelor parametri care asigură durabilitatea relativă maximă a cuțitului. Astfel trebuie determinate valorile unghiurilor γ, α, α_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$, λ, care imprimă uzurii evoluția cea mai lentă.

Datorită deformațiilor suferite în cursul procesului de așchiere de către sculă, materialul de prelucrat și așchie, iau naștere suprafețele reale de contact dintre ele, prin care se transmit eforturile de așchiere. Mărimile suprafețelor reale de contact depind de parametrii regimului de așchiere și de cei geometrici. În cursul unor experiențe menținînd constanți parametrii regimului de așchiere și variind doar parametrii geometrici, mărimile suprafețelor reale de contact vor varia și ele. Aceasta se datorește atît unui efect direct, dictat de modificarea poziției feței active legată de mărimea unghiului studiat, cît și unui efect indirect cauzat de variația deformațiilor ce iau naștere în acest caz. O dată cu modificarea mărimilor suprafețelor reale de contact, se schimbă și condițiile de uzură. Astfel făcînd experiențele în acest sens, adică menținînd constanți parametrii regimului de așchiere, se poate studia influența parametrilor geometrici asupra durabilității cuțitului.

---

*) Începînd din anul 1959, Uzinele 23 August fabrică curent acest oțel rapid sub denumirea RBO.

Rezultatele ce se obțin în acest caz vor fi prezentate [3] în funcție de coeficientul de corecție al durabilității, care este o mărime adimensională, definit de relația

$$\tau_i = \frac{T_i}{T_{i\,\mathrm{opt}}} \qquad (i = \gamma,\ \alpha \text{ etc.}), \tag{1}$$

unde s-a notat

T_i — durabilitatea sculei pentru diferite valori ale unghiului studiat, min ;

$T_{i\,\mathrm{opt}}$ — durabilitatea sculei pentru valoarea optimă a unghiului studiat, min.

Durabilitățile T_i și $T_{i\,\mathrm{opt}}$ fiind determinate în condițiile arătate mai înainte, adică pentru aceiași parametri ai regimului de așchiere, se poate considera că în limitele uzuale, coeficienții τ_i sînt independenți de acești parametri, ei rămînînd să reflecte doar influența parametrilor geometrici asupra durabilității.

Prezentarea rezultatelor sub această formă, pe lîngă simplitate, mai are și avantajul că permite efectuarea comparațiilor între diferite oțeluri de prelucrat, cît și între scule confecționate din diferite materiale.

Coeficienții τ_i de corecție ai durabilității servesc, de asemenea, pentru determinarea coeficienților K_i de corecție ai vitezei în funcție de parametrii geometrici.

Unghiul γ *de degajare.* Studiul acestui unghi arată că există o anumită valoare optimă specifică fiecărui oțel prelucrat. Această mărime este optimă datorită faptului că asigură durabilitatea relativă maximă în cazul variației unghiului γ, ceea ce se poate explica prin echilibrul de eforturi și deformări ce se produc în zona de desprindere a așchiei. Faptul că unghiul de degajare optim are o anumită valoare pentru un oțel prelucrat, se datorește desigur proprietăților mecanice ale acestuia, care fac ca condițiile cele mai avantajoase de desprindere a așchiei să fie diferite de la caz la caz.

Rezultatele experimentale sînt date în figurile 1 și 2, cît și în tabela 1.

În tabela 1 sînt dați coeficienții K_γ de corecție ai vitezei, funcție de unghiul de degajare, care se stabilesc cu ajutorul coeficientului τ_γ, așa după cum se va arăta ulterior.

Din examinarea rezultatelor experimentale prezentate mai înainte, se vede că orice abatere de la valoarea optimă are ca efect o scădere a durabilității. În cazul oțelului OL38 se observă însă că pentru intervalul $\gamma = 15-17°$ se poate considera cu o bună aproximație $K_\gamma = 1$, ceea ce revine la a afirma că în acest caz avem practic de-a face cu un domeniu optim.

De asemenea, este de reținut că evoluția durabilității în cazul nerespectării valorii optime, este diferită de la un material de sculă la altul.

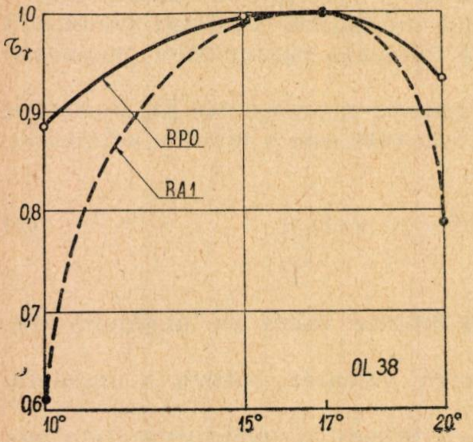


Fig. 1. — Variația coeficientului τ_γ în funcție de unghiul γ în cazul așchierii oțelului OL 38 cu cuțite RA 1 și RPO la viteza medie de respectiv 126 m/min și 125 m/min.

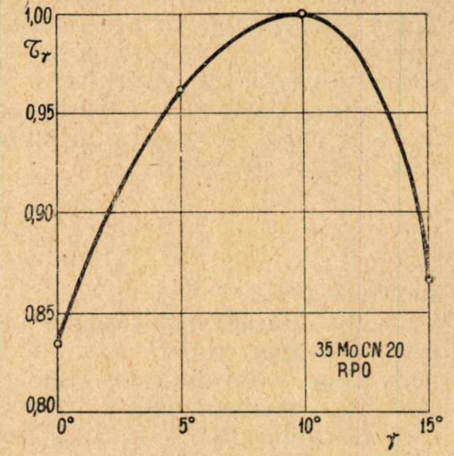


Fig. 2. — Variația coeficientului τ_γ în funcție de unghiul γ în cazul așchierii oțelului 35MoCN20 cu cuțit RPO la viteza medie de 32 m/min.

Tabela 1

γ Material		0°	5°	10°	15°	17°	20°
OL 38	τ_γ	—	—	0,61	0,99	1	0,79
cuțit RA 1	K_γ	—	—	0,89	~1	1	0,94
OL 38	τ_γ	—	—	0,88	0,99	1	0,93
cuțit RPO	K_γ	—	—	0,98	~1	1	0,99
35MoCN20	τ_γ	0,84	0,96	1	0,87	—	—
cuțit RPO	K_γ	0,97	0,99	1	0,98	—	—

Această variaţie a unghiului atrage după sine o modificare a eforturilor de aşchiere, care sînt dictate în bună măsură şi de coeficientul dinamic de frecare. Astfel sculele fiind puse să lucreze în condiţii mecanice şi termice diferite, vor rezista în mod deosebit, datorită proprietăţilor lor.

Trebuie subliniat că tot din rezultatele experimentale mai reiese şi faptul că valoarea optimă este aceeaşi în cazul utilizării cuţitelor făcute din oţelurile rapide RA 1 şi RPO. Explicaţia acestui fenomen se poate da tot cu ajutorul suprafeţelor reale de contact. Într-adevăr, sub efectul unor eforturi de aşchiere similare, ce se dezvoltă în cazul respectării aceloraşi parametri ai regimului de aşchiere, deformaţiile materialului prelucrat vor căpăta o anumită valoare. În acest caz, pentru ca mărimile suprafeţelor reale de contact să varieze, este necesar ca deformaţiile sculelor utilizate să fie diferite între ele. Numai aşa se pot obţine condiţii diverse de evoluţie a uzurii. Această situaţie nu este posibilă decît numai în cazul unor scule cu proprietăţi mecanice mult deosebite unele de altele. Dar cum în cazul de faţă, cuţitele confecţionate din cele două oţeluri rapide, au proprietăţi mecanice foarte apropiate, ca de exemplu duritatea, mărimile deformaţiilor lor vor fi şi ele sensibil apropiate. Ca atare mărimile suprafeţelor reale de contact rămînînd practic neschimbate, uzura evoluează la fel, ceea ce face ca valorile optime să fie practic aceleaşi pentru cele două calităţi de oţeluri rapide experimentate.

Unghiul α de aşezare principal. Valoarea optimă a acestui unghi este dictată de mărimea deformaţiilor plastice ce se dezvoltă în zona vîrfului cuţitului. Variind unghiul α, deformaţiile corespunzătoare se transmit şi feţei de aşezare secundară, a cărei uzură este urmărită.

În figurile 3, 4 şi în tabela 2 sînt date rezultatele experimentale.

Menţinem aceleaşi observaţii făcute mai înainte, referitoare la valoarea optimă şi la urmările ce au loc în cazul abaterilor de la ea, atunci cînd urmărim comparativ cele două oţeluri RA 1 şi RPO.

Unghiul α_1 de aşezare secundar. Variind unghiul α_1 se modifică poziţia feţei de aşezare secundară ceea ce are ca urmare şi variaţia mărimii suprafeţelor reale de contact. Cu alte cuvinte, aceasta revine la a arăta că variaţia unghiului α_1 are o influenţă directă asupra evoluţiei uzurii cuţitului de strung ce este ţinută sub observaţie în lucrarea de faţă.

Din rezultatele experimentale redate în figurile 5 şi 6, cît şi în tabela 3, reiese că există o suprafaţă optimă care creează condiţiile evoluţiei celei mai lente a uzurii şi ca urmare determină valoarea optimă a unghiului de aşezare secundară.

Observaţiile făcute anterior asupra valorii optime indicate de cuţitele din oţelurile Ra 1 şi RPO cît şi asupra evoluţiei uzurii la alte valori diferite de cea optimă, rămîn valabile şi în acest caz.

Unghiul $\varkappa$ de atac principal are o comportare diferită de a celorlalte unghiuri, în sensul că nu admite o valoare optimă. Astfel, o dată cu creşterea unghiului $\varkappa$, lungimea muchiei principale aşchietoare scade, ceea ce conduce la o concentrare a eforturilor de aşchiere şi deci la o mărire a gradului de deformare. În acest fel se ajunge la situaţia, cînd uzura feţei de aşezare secundară evoluează mai repede.

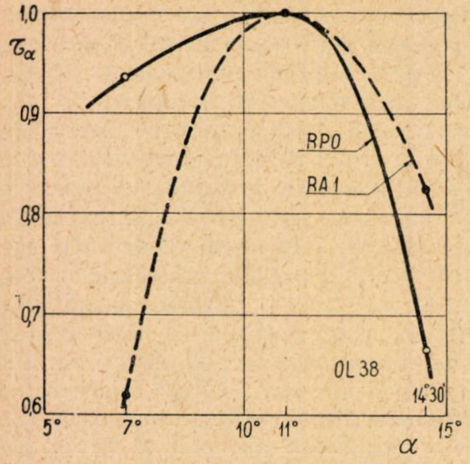


Fig. 3. — Variația coeficientului τ_α în funcție de unghiul α în cazul așchierii oțelului OL 38 cu cuțite RA 1 și RPO la viteza medie de respectiv 148 m/min și 145 m/min.

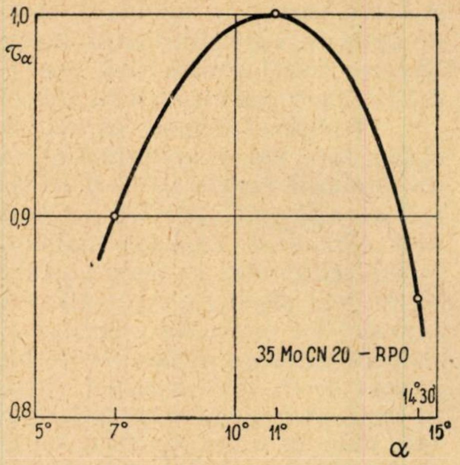


Fig. 4. — Variația coeficientului τ_α în funcție de unghiul α în cazul așchierii oțelului 35MoCN20 cu cuțit RPO la viteza medie de 40 m/min.

Tabela 2

Material \ α		7°	11°	14°30′
OL 38	τ_α	0,62	1	0,83
cuțit RA 1	K_α	0,90	1	0,96
OL 38	τ_α	0,94	1	0,67
cuțit RPO	K_α	0,99	1	0,94
35MoCN20	τ_α	0,90	1	0,86
cuțit RPO	K_α	0,98	1	0,98

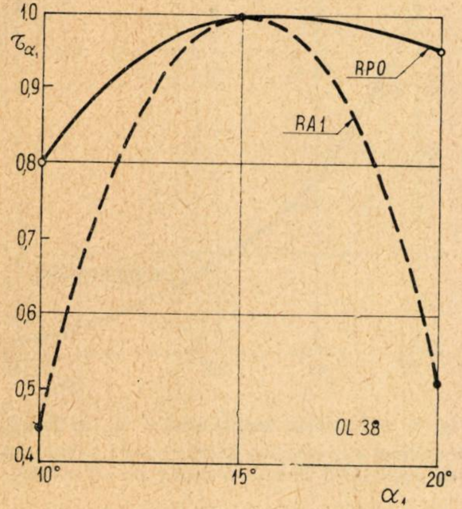


Fig. 5. — Variația coeficientului τ_{α_1} în funcție de unghiul α_1 în cazul așchierii oțelului OL 38 cu cuțite RA 1 și RPO la viteza medie de respectiv 157 m/min și 159 m/min.

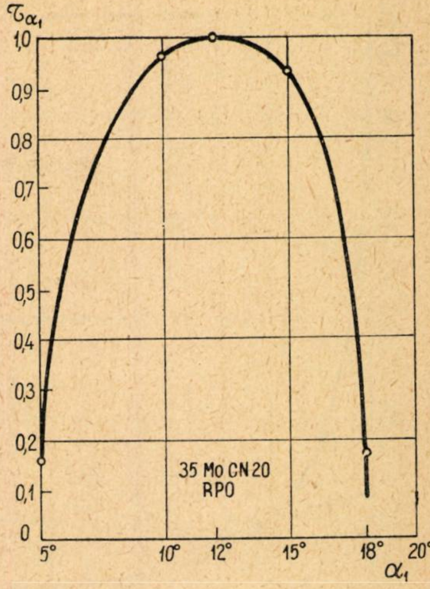
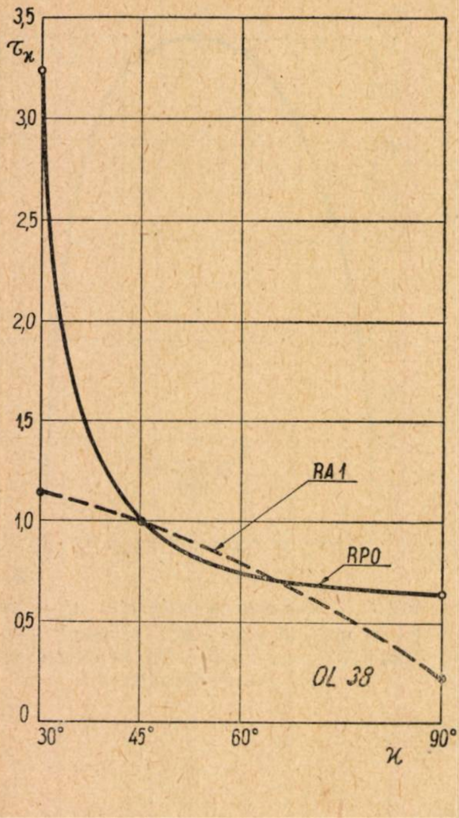


Fig. 6. — Variația coeficientului τ_{α_1} în funcție de unghiul α_1 în cazul așchierii oțelului 35MoCN20 cu cuțit RPO la viteza medie de 40 m/min.

Tabela 3

Material \ α_1		10°	12°	15°	18°	20°
OL 38	τ_{α_1}	0,45	—	1	—	0,51
cuțit RA 1	K_{α_1}	0,83	—	1	—	0,88
OL 38	τ_{α_1}	0,80	—	1	—	0,95
cuțit RPO	K_{α_1}	0,96	—	1	—	0,99
35MoCN20	τ_{α_1}	0,97	1	0,93	0,18	—
cuțit RPO	K_{α_1}	0,99	1	0,98	0,77	—



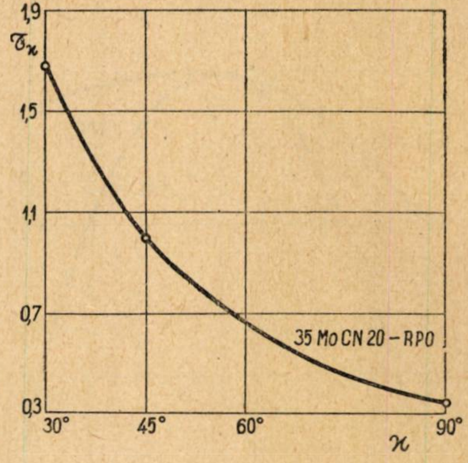


Fig. 8. — Variația coeficientului $\tau_{\varkappa}$ în funcție de unghiul $\varkappa$ în cazul așchierii oțelului 35MoCN20 cu cuțit RPO la viteza medie de 42 m/min.

Fig. 7. — Variația coeficientului $\tau_{\varkappa}$ în funcție de unghiul $\varkappa$ în cazul așchierii oțelului OL 38 cu cuțite RA 1 și RPO la viteza medie de respectiv 135 m/min și 139 m/min.

Tabela 4

Material \ ϰ		30°	45°	60°	90°
OL 38	$\tau_{\varkappa}$	1,14	1	—	0,22
cuțit RA 1	$K_{\varkappa}$	1,04	1	—	0,72
OL 38	$\tau_{\varkappa}$	3,24	1	—	0,65
cuțit RPO	$K_{\varkappa}$	1,20	1	—	0,93
35MoCN20	$\tau_{\varkappa}$	1,68	1	0,67	0,35
cuțit RPO	$K_{\varkappa}$	1,09	1	0,94	0,84

Pentru prezentarea rezultatelor sub formă adimensională, s-a ales drept termen de comparație valoarea $\varkappa = 45°$. Cu această observație făcută, rezultatele apar în figurile 7, 8 și tabela 4.

Unghiul $\varkappa_1$ *de atac secundar.* Variațiile acestui unghi modifică poziția feței de așezare secundară, și în consecință suprafața reală de contact și uzura care a fost ținută sub observație. Mai trebuie amintit că variațiile lui $\varkappa_1$ au influență și asupra calității suprafeței prelucrate și a preciziei execuției.

Rezultatele experimentale sînt date în figurile 9, 10 și tabela 5 și ele permit a se face asupra lor aceleași observații ca mai înainte.

Unghiul λ *de înclinație a muchiei principale tăietoare.* În alte lucrări [1], [3], s-a arătat că variațiile acestui unghi între limitele uzuale $-5°$ și $+5°$ nu are urmări importante pentru deformațiile plastice din zona așchierii. Aceeași situație o regăsim și în cazul de față și ca atare nu mai revenim asupra ei.

3. STUDIUL PARAMETRILOR REGIMULUI DE AȘCHIERE

Parametrii regimului de așchiere sînt : viteza de așchiere, avansul și adîncimea de tăiere. În această parte a lucrării se urmăresc relațiile ce există între acești parametri, precum și legăturile lor cu durabilitatea sculei.

Relațiile dintre avans, adîncimea de tăiere și durabilitate. Dependența avansului și a adîncimii de tăiere în funcție de durabilitate arată că există o variație continuă a fenomenului, în cazul cînd viteza și respectiv adîncimea de tăiere sau avansul sînt menținute constante. La valorile mici, variațiile acestor parametri atrag o cădere mare a durabilității ; la valorile mari, variațiile avansului și a adîncimii de tăiere, influențează în mică măsură asupra durabilității.

Relația dintre viteza de așchiere și durabilitatea sculei. Așa după cum se cunoaște din literatură, această legătură este dată sub forma :

$$vT^n = C_1 . \qquad (2)$$

Relația (2) poate reprezenta în mod corect legătura dintre viteză și durabilitate pentru tot domeniul de durabilități, cu condiția ca n și C_1 să depindă de materialul prelucrat, avans, adîncimea de tăiere și viteza de așchiere.

Menținem aceeași observație făcută în alte lucrări [4], și anume că intervalul de durabilitate care prezintă interes este mai restrîns și ca atare limitează vitezele de așchiere corespunzătoare. În aceste condiții exponentul n și constanta C_1 devin independente de viteză. Făcînd experiențe la mai multe avansuri și adîncimi de tăiere și reprezentînd rezultatele în coordonate logaritmice, ele se grupează în mod satisfăcător în jurul unor drepte. În figurile 11, 12, 13 și 14 sînt date rezultatele experiențelor făcute pe oțelurile OL 38 și 35MoCN20 cu cuțite din oțelurile rapid RA 1 și RPO, la mai multe regimuri. Curbele experimentale sînt trasate prin

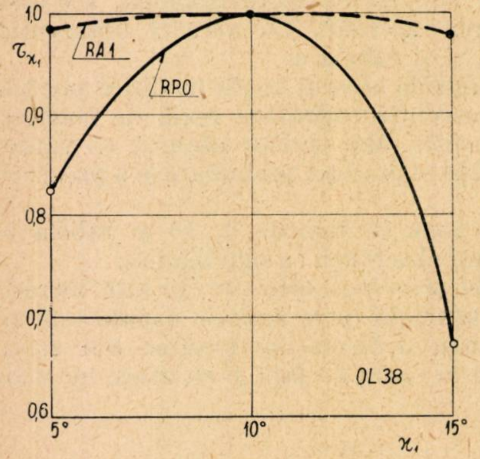


Fig. 9. — Variația coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$ în funcție de unghiul $\varkappa_1$ în cazul așchierii oțelului OL 38 cu cuțite RA 1 și RPO la viteza medie de 154 m/min și 139 m/min.

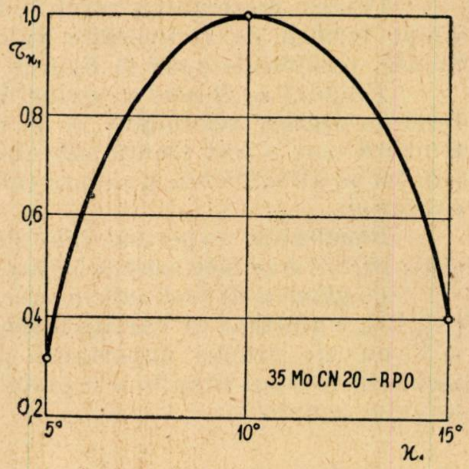


Fig. 10. — Variația coeficientului $\tau_{\varkappa_1}$ în funcție de unghiul $\varkappa_1$ în cazul așchierii oțelului 35MoCN20 cu cuțit RPO la viteza medie de 36 m/min.

Tabela 5

Material \ $\varkappa_1$		5°	10°	15°
OL 38	$\tau_{\varkappa_1}$	0,98	1	0,98
cuțit RA 1	$K_{\varkappa_1}$	0,99	1	0,99
OL 38	$\tau_{\varkappa_1}$	0,83	1	0,67
cuțit RPO	$K_{\varkappa_1}$	0,97	1	0,94
35MoCN20	$\tau_{\varkappa_1}$	0,32	1	0,40
cuțit RPO	$K_{\varkappa_1}$	0,83	1	0,87

minimele patrate și fiind niște drepte, demonstrează justețea ipotezei asupra faptului că n și C_1 sînt independenți față de viteză.

Tot în figurile 11, 12, 13 și 14 se mai constată că toate curbele experimentale sînt în bună măsură paralele între ele. Aceasta permite ca în cazul cuțitelor confecționate din oțeluri rapide, la fel ca și la cele confecționate din alte materiale [4], în domeniul durabilităților 50—120 min, care prezintă interes, să se considere cu o bună aproximație că exponentul n nu depinde de avans și adîncimea de tăiere. Urmărind diagramele, aceasta revine la a trasa curbele paralele între ele în coordonate logaritmice. Astfel se ajunge la ideea determinării exponentului n_{med}, calculat ca medie a valorilor obținute la diferite regimuri. Valorile n_{med} sînt date în tabela 6.

Tabela 6

Materialul prelucrat	n_{med}	
	Cuțit RA 1	Cuțit RPO
OL 38	0,234	0,157
35MoCN20	0,192	0,160

Este de reținut că pentru fiecare oțel în parte exponentul n capătă valori diferite.

Relațiile dintre avans, adîncimea de tăiere și viteză. Formule pentru viteza optimă. La fel ca și în alte lucrări [2], [4], reținem din literatura de specialitate formula

$$v_T = \frac{C}{t^x s^y} K, \tag{3}$$

unde s-a notat

v_T — viteza de așchiere pentru o durabilitate economică T a cuțitului, m/min;
t — adîncimea de tăiere, mm;
s — avansul sculei, mm/rot;
C — constantă funcție de materialul prelucrat;
x și y — exponenți funcție de materialul prelucrat;
K — coeficient global de corecție al vitezei care are următoarea formă:

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_T \cdot K_m \cdot K_\gamma \cdot K_\alpha \cdot K_{\alpha_1} \cdot K_\varkappa \cdot K_{\varkappa_1} \cdot K_\lambda, \tag{4}$$

unde s-au utilizat notațiile

K_γ, K_α, K_{α_1}, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, K_λ — coeficienți de corecție funcție de unghiurile γ, α, α_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$, λ;
K_1 — coeficient de corecție funcție de proprietățile mecanice ale materialului prelucrat;
K_2 — coeficient de corecție funcție de sistemul de răcire adoptat;

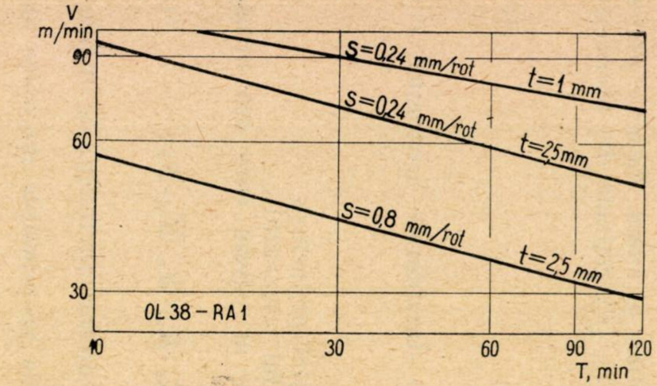


Fig. 11. — Variația durabilității în funcție de viteză în cazul așchierii la diferite regimuri a oțelului OL 38 cu cuțit RA 1.

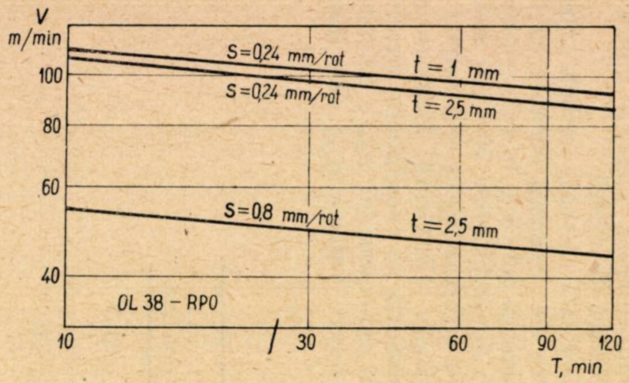


Fig. 12. — Variația durabilității în funcție de viteză în cazul așchierii la diferite regimuri a oțelului OL 38 cu cuțit RPO.

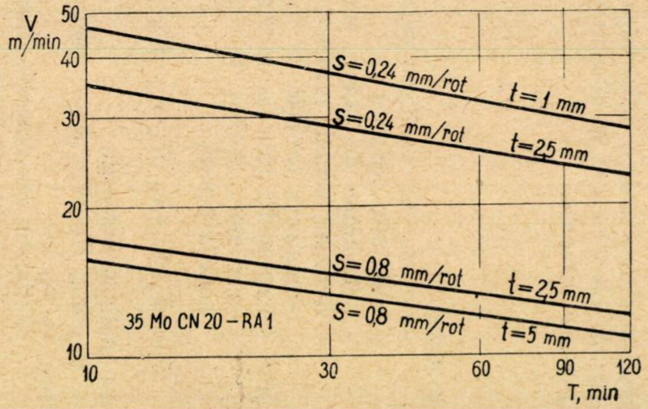


Fig. 13. — Variația durabilității în funcție de viteză în cazul așchierii la diferite regimuri a oțelului 35MoCN20 cu cuțit RA 1.

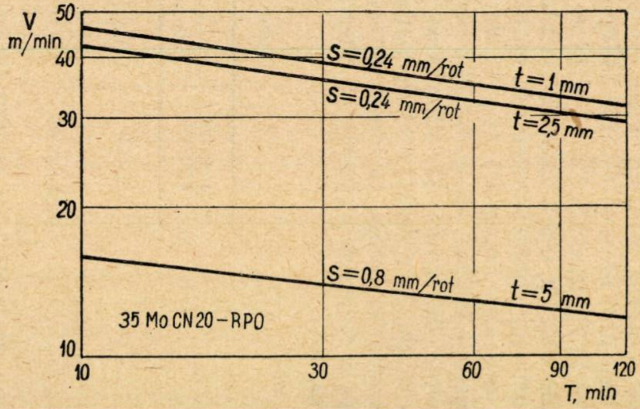


Fig. 14. — Variația durabilității în funcție de viteză în cazul așchierii la diferite regimuri a oțelului 35MoCN20 cu cuțit RPO.

K_3 — coeficient de corecţie funcţie de modul de ascuţire al cuţitului ;
K_4 — coeficient de corecţie funcţie de omogeneitatea stratului aşchiat ;
K_T — coeficient de corecţie funcţie de durabilitatea economică aleasă ;
K_m — coeficient de corecţie funcţie de materialul cuţitului.

Experienţele au fost executate îndeplinindu-se condiţia

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \leqslant 1{,}5. \tag{5}$$

Pentru determinarea constantei C şi a exponenţilor x şi y, s-a considerat pentru fiecare caz în parte coeficientul global de corecţie $K = 1$, ceea ce este posibil, dat fiind că este o mărime comparativă că toate experienţele s-au executat în condiţii similare. Astfel, cuţitele au fost ascuţite la valorile optime ale unghiurilor active, date în tabelele 1—5, încît $K_\gamma = K_\alpha = K_{\alpha_1} = K_\varkappa = K_{\varkappa_1} = K_\lambda = 1$. Ascuţirea s-a făcut printr-o degroşare cu pietre din electrocorindon cu liant ceramic duritate I*c*—I*b*, granulaţie 36—60, urmată de o finisare cu pietre din carbură de siliciu cu liant ceramic, duritate I*c* şi granulaţie 60. Vîrful cuţitului nu a fost racordat şi de asemenea nu s-a executat o faţetă pe muchia principală aşchietoare. În aceste condiţii s-a considerat $K_3 = 1$. Experienţele s-au făcut fără răcire, pentru care s-a luat $K_2 = 1$. Epruvetele au fost decojite şi lipsite de incluziuni, caz pentru care s-a considerat $K_4 = 1$. S-a adoptat durabilitatea economică $T = 60$ min, pentru care $K_T = 1$.

În aceste condiţii, pentru domeniul $s = 0{,}1 - 1$ mm/rot şi $t = 0{,}5 - 6$ mm, rezultatele sînt :

— oţelul OL 38 aşchiat cu cuţit RA 1

$$v_{60} = \frac{42{,}8}{t^{0{,}32}\, s^{0{,}44}}; \tag{6}$$

— oţelul OL 38 aşchiat cu cuţit RPO

$$v_{60} = \frac{50{,}9}{t^{0{,}30}\, s^{0{,}51}}; \tag{7}$$

— oţelul 35MoCN20 aşchiat cu cuţit RA 1

$$v_{60} = \frac{11{,}6}{t^{0{,}15}\, s^{0{,}71}}; \tag{8}$$

— oţel 35MoCN20 aşchiat cu cuţit RPO

$$v_{60} = \frac{10{,}5}{t^{0{,}08}\, s^{0{,}85}}. \tag{9}$$

Cu ajutorul formulelor (6), (7), (8) şi (9) se pot trasa nomograme de aşchiere, utile aplicaţiilor practice, care sînt date în figurile 15, 16, 17 şi 18.

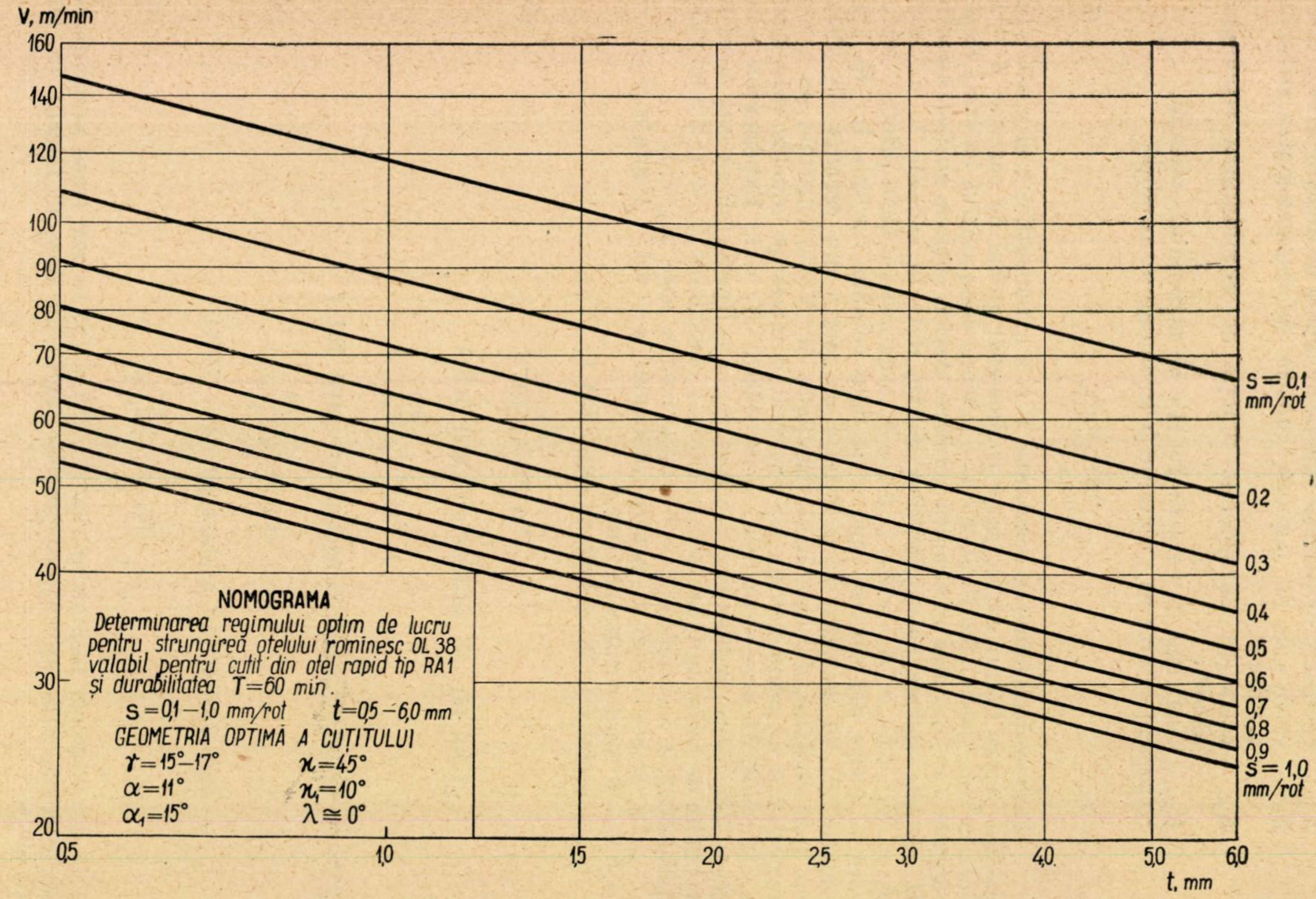


Fig. 15. — Nomogramă de așchiere pentru cazul strungirii oțelului OL 38 cu cuțit din oțelul rapid RA 1.

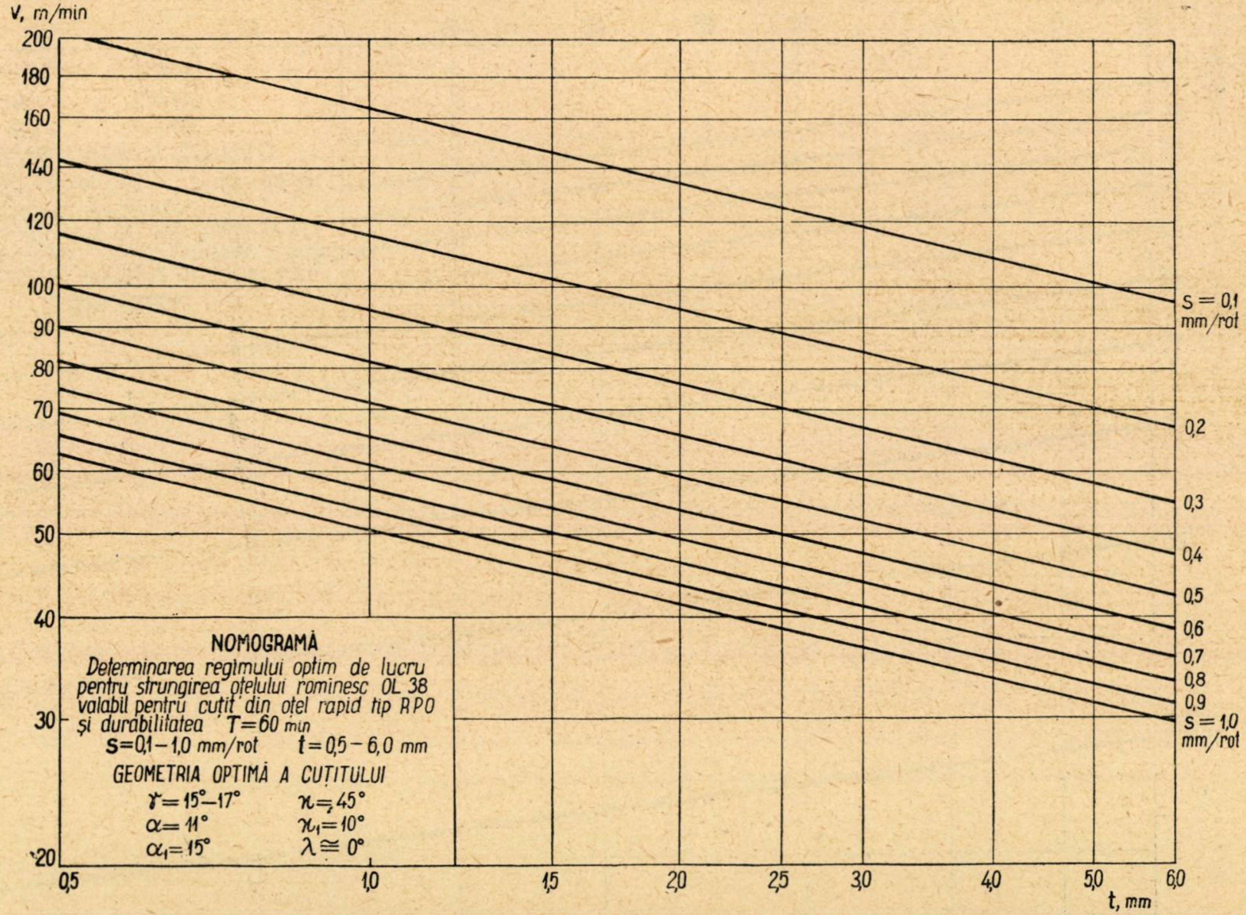
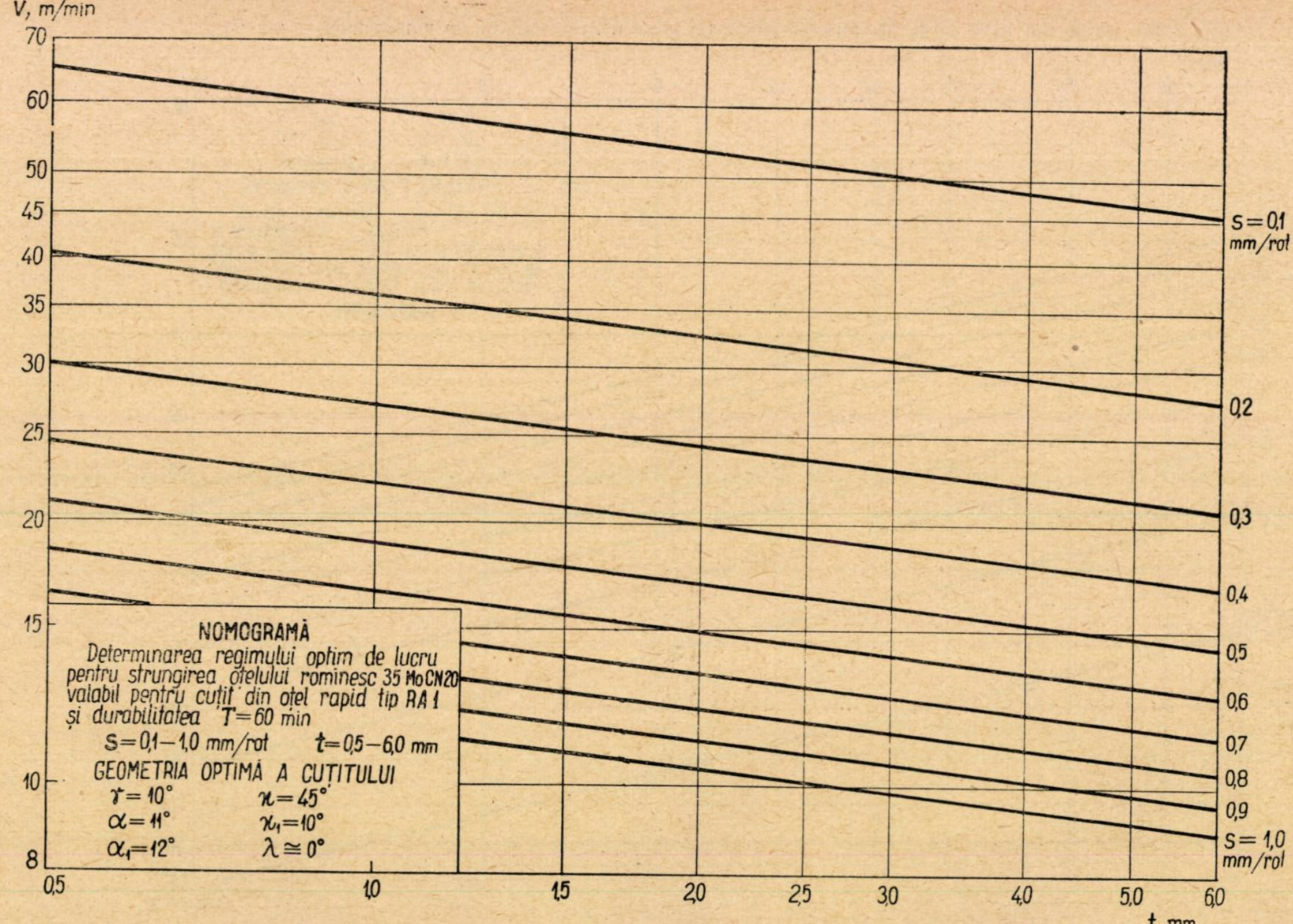


Fig. 16. — Nomogramă de așchiere pentru cazul strungirii oțelului OL 38 cu cuțit din oțelul rapid RPO.



NOMOGRAMĂ

Determinarea regimului optim de lucru pentru strungirea oțelului rominesc 35 MoCN20 valabil pentru cuțit din oțel rapid tip RA 1 și durabilitatea T=60 min

S=0,1–1,0 mm/rot   t=0,5–6,0 mm

GEOMETRIA OPTIMĂ A CUȚITULUI

$\gamma = 10°$ $\varkappa = 45°$

$\alpha = 11°$ $\varkappa_1 = 10°$

$\alpha_1 = 12°$ $\lambda \cong 0°$

Fig. 17. — Nomogramă de așchiere pentru cazul strungirii oțelului 35MoCN20 cu cuțit din oțelul rapid RA 1.

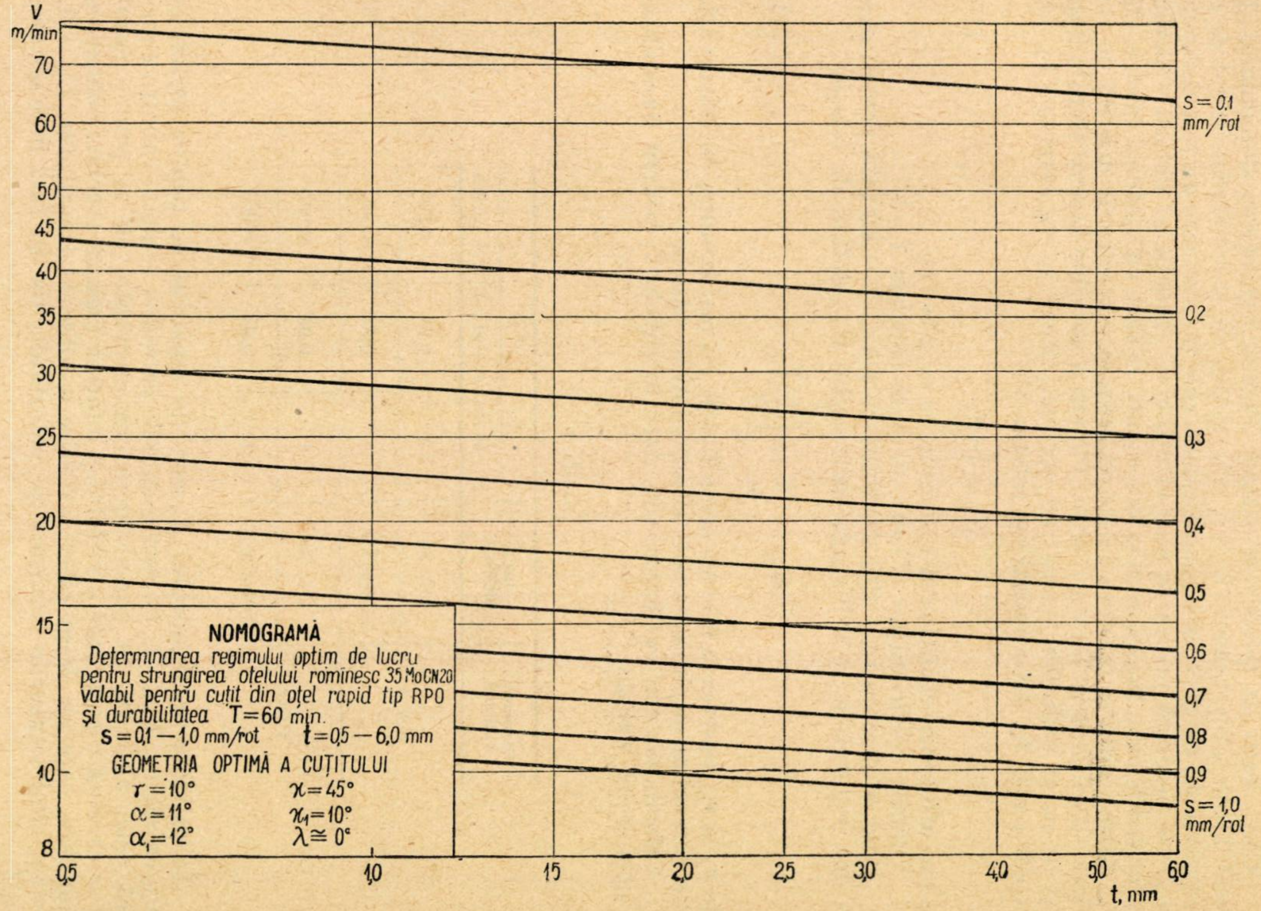


Fig. 18. — Nomogramă de aşchiere pentru cazul strungirii oțelului 35MoCN20 cu cuțit din oțelul rapid RPO.

Coeficienții de corecție ai vitezei. Pentru extinderea domeniului de aplicabilitate a formulelor (6), (7), (8) și (9), cît și a nomogramelor ce se construiesc cu ele și la alte condiții decît cele pentru care au fost determinate, este necesară utilizarea coeficienților de corecție ai vitezei. Calculul acestor coeficienți, în cele mai multe cazuri, se face cu ajutorul relației (2).

Atunci cînd se folosesc cuțite ascuțite la o geometrie diferită de cea optimă, durabilitatea lor va scădea. Pentru a menține aceeași durabilitate ca și în cazul utilizării geometriei optime, viteza se va corecta [1], [3] cu coeficienții K_i determinați cu relația

$$K_i = (\tau_i)^n, \tag{10}$$

unde se utilizează coeficienții τ_i definiți în relația (1).

Valorile coeficienților K_i sînt date în tabelele 1—5.

Cînd se urmărește o altă durabilitate decît $T = 60$ min pentru care s-au dat rezultatele, se utilizează coeficientul K_T, definit de relația

$$K_T = \frac{v_T}{v_{60}} = \left(\frac{60}{T}\right)^n, \tag{11}$$

unde v_T și v_{60} păstrează aceeași semnificație ca mai înainte, cu observația că ele corespund aceluiași avans și adîncimi de tăiere.

Valorile acestui coeficient sînt date în tabela 7, pentru durabilitățile economice uzuale.

Tabela 7

Materialul cuțitului	Oțelul prelucrat	K_T		
		T = 60 min	T = 90 min	T = 120 min
RA 1	OL 38	1	0,91	0,85
	35MoCN20	1	0,93	0,90
RPO	OL 38	1	0,94	0,90
	35MoCN20	1	0,94	0,90

În privința coeficientului K_2 este de remarcat că pentru așchierile făcute cu răcire, $K_2 > 1$. Pentru ascuțirile care dau sculei o calitate superioară celei obținute în cursul lucrărilor efectuate, cît și pentru cazul cînd se execută o racordare a vîrfului și o fațetă îngustă muchiei principale așchietoare, care au drept efect o mărire a robusteței cuțitului, $K_3 > 1$. În cazul cînd straturile ecruisate și incluziunile nu au fost îndepărtate, $K_4 < 1$.

Performanțele ce le prezentăm, care reprezintă valori medii, pot fi deci sensibil îmbunătățite prin :

— ridicarea calității la ascuțirea suprafețelor active a cuțitului,

— racordarea vîrfului cuțitului,

— executarea unei fațete pe muchia tăietoare principală,
— așchierea cu răcire.

Relațiile dintre parametrii regimului de așchiere și puterea utilă de așchiere. Efectuînd experiențele în paralel cu cele pentru determinarea regimului optim, s-a constatat că corelația dintre puterea utilă și parametrii regimului de așchiere se poate exprima [2], [4], sub forma

$$N = C_2\, t^{x_1} s^{y_1} v^{z}, \tag{12}$$

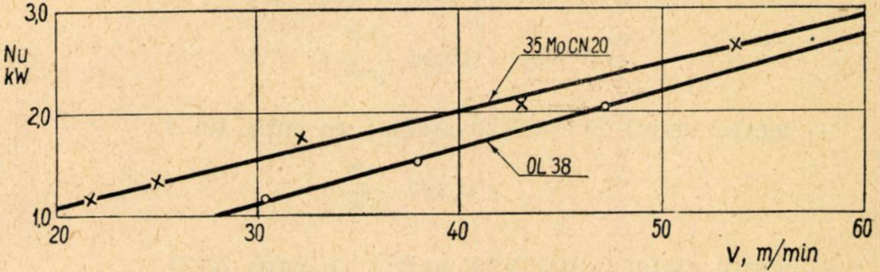


Fig. 19. — Variația puterii utile de așchiere în funcție de viteză în cazul strungirii oțelurilor OL 38 și 35MoCN20 cu s = 0,6 mm/rot și t = 2 mm.

unde s-a notat

N — puterea utilă de așchiere, kW;
C_2 — constantă funcție de materialul prelucrat și de toți ceilalți parametri cuprinși în coeficientul global de corecție K;
t — adîncimea de tăiere, mm;
— avansul sculei, mm/rot;
v — viteza de așchiere, m/min;
x_1, y_1, z — exponenți funcție de materialul prelucrat.

Ca și în alte lucrări [2], [4], prin măsurători directe, pentru cuțite cu o uzură medie, se obțin următoarele rezultate :

— pentru așchierea oțelului OL 38

$$N = 0{,}209\; t^{0.142} s^{1.78} v\,; \tag{13}$$

— pentru așchierea oțelului 35MoCN20

$$N = 0{,}0282\; t^{1.01} s^{0.68} v. \qquad (14$$

Măsurătorile s-au făcut utilizîndu-se metoda celor două wattmetre. Puterea utilă s-a considerat a fi diferența puterii consumate la mersul în sarcină și la mersul în gol, ceea ce impune admiterea ipotezei că randamentul mașinii rămîne același în cele două situații, ceea ce introduce un grad de aproximație.

În cursul măsurătorilor nu s-au putut sezisa diferențe apreciabile între puterile consumate cînd s-au făcut experiențe cu cuțite din cele două oțeluri rapide în condiții de prelucrare identice. Diferențe au apărut numai între cele două oțeluri prelucrate, așa după cum se poate vedea în figura 19.

Pentru puterea utilă consumată la un regim optim, care prezintă un interes deosebit, înlocuind expresiile vitezii v_{60} (6), (7), (8) şi (9) în formulele puterii (13) şi (14), se obţine

— pentru oţelul OL 38 aşchiat cu cuţit RA 1

$$N_{v_{60}} = 8{,}95 \frac{s^{1{,}34}}{t^{0{,}18}}; \tag{15}$$

— pentru oţelul OL 38 aşchiat cu cuţit RPO

$$N_{v_{60}} = 10{,}64 \frac{s^{1{,}27}}{t^{0{,}16}}; \tag{16}$$

— pentru oţelul 35MoCN20 aşchiat cu cuţit Ra 1

$$N_{v_{60}} = 0{,}327 \frac{t^{0{,}86}}{s^{0{,}03}}; \tag{17}$$

— pentru oţelul 35MoCN20 aşchiat cu cuţit RPO

$$N_{v_{60}} = 0{,}296 \frac{t^{0{,}93}}{s^{0{,}17}}. \tag{18}$$

4. COMPARAŢIE ÎNTRE OŢELURILE RAPIDE EXPERIMENTATE

După cum se cunoaşte din literatura de specialitate, fapt de altfel confirmat şi de experienţele noastre, tipurile de oţeluri rapide din care fac parte RA 1 şi RPO sînt recomandate pentru aceleaşi domenii ale parametrilor regimului de aşchiere. În aceste condiţii, se pot efectua comparaţii directe între rezultatele obţinute.

Cea mai interesantă comparaţie se poate face între vitezele optime de aşchiere. Pentru aceasta se utilizează coeficientul K_m de corecţie al vitezei în funcţie de materialul sculei. Dacă se admite drept element de comparaţie viteza optimă obţinută cu cuţite din oţel RA 1, atunci acest coeficient se defineşte astfel

$$K_m = \frac{v_{60\ \mathrm{RPO}}}{v_{60\ \mathrm{RA\ 1}}}. \tag{19}$$

Deoarece oţelurile RA 1 şi RPO sînt indicate pentru acelaşi domeniu, în lucrarea de faţă se intră în amănuntele acestei probleme. În alte lucrări [2], fiind analizate materiale de scule recomandate pentru domenii diferite ale parametrilor aşchierii, coeficientul K_m dădea indicaţii asupra rezistenţei la uzură la acelaşi regim de aşchiere a diferitelor materiale.

Din relaţia (19) se constată că coeficienţii K_m sînt funcţie de parametrii regimului de aşchiere, avansul şi adîncimea de tăiere. Astfel utilizînd formulele (6), (7), (8) şi (9), relaţia (19) capătă următoarele expresii pentru cele două oţeluri experimentate

— pentru oţelul OL 38

$$K_m = 1{,}19 \frac{t^{0{,}02}}{s^{0{,}07}}\,; \tag{20}$$

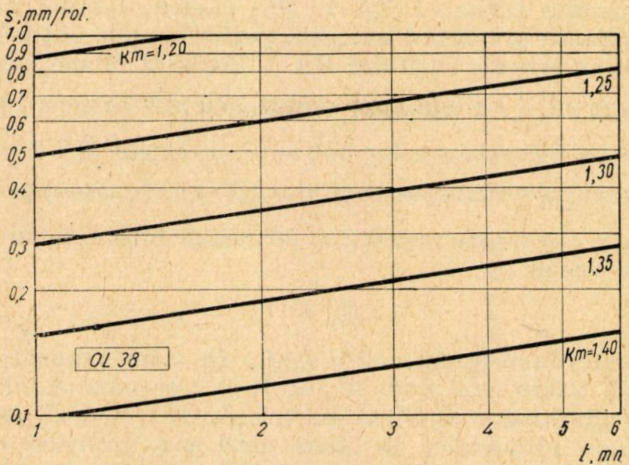


Fig. 20. — Comparaţie între vitezele de aşchiere în cazul strungirii oţelului OL 38 cu cuţite din oţelurile rapide RPΘ şi RA 1.

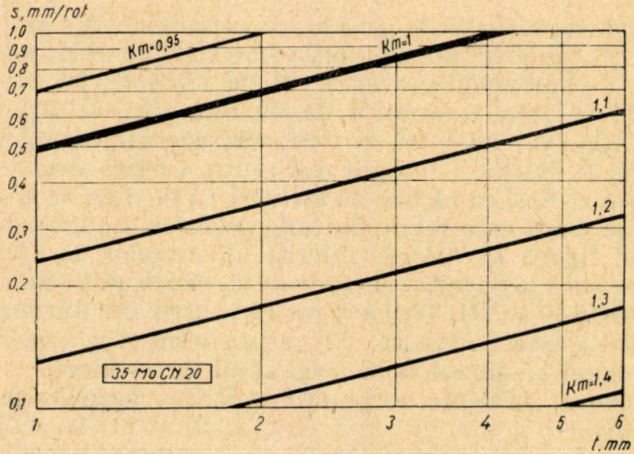


Fig. 21. — Comparaţie între vitezele de aşchiere în cazul strungirii oţelului 35MoCN20 cu cuţite din oţelurile rapide RPO şi RA 1.

— pentru oţelul 35MoCN20

$$K_m = 0{,}905\ \frac{t^{0{,}07}}{s^{0{,}14}}\,. \tag{21}$$

Relațiile (20) și (21) au fost reprezentate în figurile 20 și 21 în funcție de avans și adîncime de tăiere.

Din analiza rezultatelor comparative se reține ca observație generală pentru ambele oțeluri așchiate, că lucrînd cu un anumit avans, pe măsura măririi adîncimii de tăiere, performanțele cuțitului RPO depășesc performanțele cuțitului RA 1. Din contra, lucrînd la o adîncime de tăiere constantă și mărind avansul, performanțele cuțitului RPO scad în comparație cu cele ale cuțitului RA 1. Aceasta revine, deci la a afirma că cu cît raportul $\frac{s}{t}$ tinde spre unitate, cu atît performanțele cuțitului RPO tind să fie inferioare celor obținute cu cuțite RA 1. Cînd raportul $\frac{s}{t}$ scade, atunci performanțele cuțitului RPO le depășesc pe cele obținute cu cuțitul RA 1. În aceste condiții se formează două zone în cîmpul $s - t$, despărțite de curba

$$K_m = 1, \tag{22}$$

care corespunde unor performanțe egale. În zona avansurilor mari și a adîncimilor de tăiere mici unde $K_m < 1$, sînt recomandabile cuțitele din oțelul RA 1, așa după cum reiese din relația (19). În zona în care $K_m > 1$ care corespunde adîncimilor de tăiere mari și avansurilor medii și mici, sînt recomandabile cuțitele din oțelul RPO. Această situație se datorește desigur proprietăților celor două oțeluri rapide, dictate de compoziția lor chimică. Proporția diferită a elementelor de aliere W și Mo, are rolul primordial.

Urmărind reprezentările grafice ale relațiilor (20) și (21) date în figurile 20 și 21, se constată că curba obținută cu relația (22) intră în domeniul $s - t$ experimentat pentru oțelul 35MoCN20 atunci cînd se consideră durabilitatea economică de 60 min. În aceleași condiții ale regimului, relația (22) nu intră în domeniul experimentat, pentru oțelul OL 38. Aceasta se datorește desigur rezistenței diferite a celor două oțeluri prelucrate, ceea ce face ca forțele de așchiere să fie diferite la același regim de așchiere, așa după cum reiese din interpretarea rezultatelor prezentate de exemplu în figura 19.Valorile diferite ale forțelor de așchiere, fac ca solicitările mecanice și termice, cît și evoluția uzurii să fie deosebite pentru oțelurile 35MoCN20 și OL 38. De sigur că pentru alte durabilități diferite de 60 min, curba dată de relația (22), poate intra și pentru oțelul OL 38 în domeniul uzual al parametrilor regimului de așchiere.

De asemenea, influența rezistenții oțelurilor așchiate poate fi urmărită în relațiile (20) și (21) cît și în figurile 20 și 21, în ceea ce privește avansul. Astfel în cazul oțelului OL 38 cu o rezistență mai mică, pentru o aceeași variație a coeficientului K_m se constată o variație mai mare a avansului decît în cazul oțelului 35MoCN20 care are o rezistență mai mare, această apreciere fiind făcută pentru o adîncime de tăiere constantă.

Din aceasta se poate deduce că diferențierea în utilizarea oțelurilor rapide experimentate este mai evidentă în cazul prelucrărilor oțelurilor cu σ_r mic, unde oțelul rapid RPO este mai bun, iar în cazul oțelului aliat cu σ_r mare aceste diferențieri sînt mai restrînse.

5. CONCLUZII

Din lucrarea de faţă se constată că metodica studierii cuţitelor de strung care a fost aplicată în alte lucrări [1], [2], [3], [4], pentru cuţitele confecţionate din carburi metalice sau materiale mineralo-ceramice, poate fi utilizată cu succes şi în cazul cuţitelor confecţionate din oţeluri rapide. Ipotezele care au stat la baza acelor lucrări, s-au verificat şi în cazul acestei cercetări. Concluziile mai importante ce au rezultat din lucrările anterioare se verifică şi în lucrarea de faţă. Aceasta se datoreşte desigur faptului că fenomenele evoluează în mod analog, ceea ce a permis să li se dea aceleaşi explicaţii.

În mod analog cu cazurile studiate anterior, cuţitelor confecţionate din oţel rapid li se pot determina parametrii geometrici optimi, care imprimă uzurii evoluţia relativ cea mai lentă. Aceste valori optime sînt independente de natura oţelului rapid utilizat, fapt care a determinat de altfel ca pentru oţelul 35MoCN20 să nu mai fie prezentate decît rezultatele cu cuţitele RPO. Constatarea aceasta reprezintă încă o confirmare a ipotezei că parametrii geometrici optimi ai cuţitului sînt practic independenţi de natura materialului sculelor cînd ele au durităţi apropiate.

Lucrarea de faţă mai demonstrează că fenomenele aşchierii cu cuţite din oţeluri rapide se pot exprima cu aceleaşi legi, ce au fost formulate şi utilizate şi pentru alte materiale de cuţite, ca plăcuţele din carburi metalice şi cele mineralo-ceramice. Astfel, aceste legi capătă caracter de generalitate atît din punct de vedere al naturii cuţitelor, cît şi al oţelurilor prelucrate, dat fiind varietatea experienţelor efectuate.

Oţelurile rapide RA 1 şi RPO fiind recomandate pentru aceleaşi regimuri, se pot face comparaţii între performanţele lor. În urma rezultatelor se constată că în domeniul cel mai frecvent utilizat, adică la adîncimi mari, performanţele cuţitelor din oţelul RPO întrec pe cele ale cuţitelor din oţelul RA 1. Această situaţie este o urmare a faptului că două din principalele elemente în aşchiere, wolframul şi molibdenul, se găsesc în proporţii diferite în oţelurile rapide experimentate.

Primită la redacţie la 27 decembrie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЗАНИЯ МЕТАЛЛОВ ТОКАРНЫМ РЕЗЦОМ ИЗ БЫСТРОРЕЖУЩЕЙ СТАЛИ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе излагаются результаты исследований резания металлов токарными резцами из быстрорежущих сталей на основе вольфрама (RA1) и молибдена (RPO). Опыты проводились на нелегированной стали OL 38 и легированной стали 35 MoCN20.

Доказывается, что в случае применения резцов из быстрорежущих сталей можно установить оптимальные геометрические параметры, не зависящие от состава материала инструмента при условии сходства их механических свойств.

Устанавливается также, что законы, выражающие в формулах явление резания другими материалами, справедливы и в этом случае, что доказывает их общность.

В заключение проводится сравнение результатов, полученных при исследовании обоих быстрорежущих сталей. Устанавливается, что в одинаковых экспериментальных условиях быстрорежущая молибденовая сталь дает лучшие результаты нежели вольфрамовая.

Полученные результаты приведены в удобной для практического применения форме.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Зависимость коэффициента τ_γ от угла γ в случае резания стали OL 38 резцами RA1 и RPO со средней скоростью соответственно 126 м/мин и 125 м/мин.

Рис. 2. — Зависимость коэффициента τ_γ от угла γ в случае резания стали 35 MoCN 20 резцом RPO со средней скоростью 32 м/мин.

Рис. 3. — Зависимость коэффициента τ_α от угла α в случае резания стали OL 38 резцами RA1 и RPO со средней скоростью соответственно 148 м/мин и 145 м/мин.

Рис. 4. — Зависимость коэффициента τ_α от угла α в случае резания стали 35MoCN20 резцом RPO со средней скоростью 40 м/мин.

Рис. 5. — Зависимость коэффициента τ_{α_1} от угла α_1 в случае резания стали OL38 резцами RA1 и RPO со средней скоростью соответственно 157 м/мин и 159 м/мин.

Рис. 6. — Зависимость коэффициента τ_{α_1} от угла α_1 в случае резания стали 35MoCN20 резцом RPO со средней скоростью 40 м/мин.

Рис. 7. — Зависимость коэффициента $\tau_\varkappa$ от угла $\varkappa$ в случае резания стали OL38 резцами RA1 и RPO со средней скоростью соответственно 135 м/мин и 139 м/мин.

Рис. 8. — Зависимость коэффициента $\tau_\varkappa$ от угла $\varkappa$ в случае резания стали 35MoC 20 резцом RPO со средней скоростью 42 м/мин.

Рис. 9. — Зависимость коэффициента $\tau_{\varkappa_1}$ от угла $\varkappa_1$ в случае резания стали OL38 резцами RA1 и RPO со средней скоростью соответсвенно 154 м/мин и 139 м/мин.

Рис. 10. — Зависимость коэффициента $\tau_{\varkappa_1}$ от угла $\varkappa_1$ в случае резания стали 35MoCN 20 резцом RPO со средней скоростью 36 м/мин.

Рис. 11. — Зависимость износостойкости от скорости в случае резания стали OL 38 резцом RA1 при различных режимах.

Рис. 12. — Зависимость износостойкости от скорости в случае резания стали OL 38 резцом RPO при различных режимах.

Рис. 13. — Зависимость износостойкости от скорости в случае резания стали 35 MoCN 20 резцом RA1 при различных режимах.

Рис. 14. — Зависимость износостойкости от скорости в случае резания стали 35 MoCN 20 резцом RPO при различных режимах.

Рис. 15. — Номограмма резания на случай обточки стали OL 38 резцом из быстрорежущей стали RA1.

Рис. 16. — Номограмма резания на случай обточки стали OL 38 резцом из быстро режущей стали RPO.

Рис. 17. — Номограмма резания на случай обточки стали 35 MoCN 20 резцом из быстрорежущей стали RA1.

Рис. 18. —Номограмма резания на случай обточки стали 35 MoCN 20 резцом из быстрорежущей стали RPO.

Рис. 19. — Зависимость полезной мощности резания от скорости в случае обточки сталей OL38 и 35 MoCN 20 при s = 0,6 мм/об. и t = 2 мм.

Рис. 20. — Сопоставление скоростей резания в случае обточки стали OL38 резцом из быстрорежущей стали RA1.

Рис. 21. — Сопоставление скоростей резки в случае обточки стали 35 MoCN 20 резцами из быстрорежущей стали RPO.

ÉTUDE SUR LES PARAMÈTRES DE COUPE À L'AIDE D'OUTILS DE TOUR EN ACIER RAPIDE ROUMAIN

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent dans ce travail les résultats de leurs recherches sur la coupe au moyen d'outils en acier rapide au wolfram (RA 1) et au molybdène (RPO). Les expériences ont été faites sur un acier non allié OL 38 et sur un acier allié 35MoCN20.

On prouve que dans le cas de l'utilisation des outils de tour en aciers rapides on peut déterminer les paramètres géométriques optima, qui sont indépendants de la nature des matériaux dont est confectionné l'outil, pourvu qu'ils aient des propriétés mécaniques rapprochées.

On a constaté en outre que les lois exprimant en formules les phénomènes de coupe au moyen d'autres matériaux sont également valables dans le cas de l'acier rapide, ce qui démontre leur généralité.

Les auteurs font, enfin, la comparaison entre les performances des deux aciers étudiés. On constate que dans des conditions d'expérimentation identiques, l'acier rapide au molybdène est supérieur à l'acier au wolfram.

Les résultats obtenus sont présentés sous une forme accessible aux applications pratiques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Variation du coefficient τ_γ en fonction de l'angle γ, lors de la coupe de l'acier OL 38 à l'aide d'outils RA 1 et RPO, à une vitesse moyenne de 126 m/mn, respectivement 125 m/mn.

Fig. 2. — Variation du coefficient τ_γ en fonction de l'angle γ, lors de la coupe de l'acier 35MoCN20 à l'aide d'un outil RPO, à une vitesse moyenne de 32 m/mn.

Fig. 3. — Variation du coefficient τ_α en fonction de l'angle α, lors de la coupe de l'acier OL 38 à l'aide d'outils RA 1 et RPO, à une vitesse moyenne de 148 m/mn et, respectivement, 145 m/mn.

Fig. 4. — Variation du coefficient τ_α en fonction de l'angle α, lors de la coupe de l'acier 35MoCN20 à l'aide d'un outil RPO, à une vitesse moyenne de 40 m/mn.

Fig. 5. — Variation du coefficient τ_{α_1} en fonction de l'angle α_1, lors de la coupe de l'acier OL 38 à l'aide d'outils RA 1 et RPO, à la vitesse moyenne de 157 m/mn, et, respectivement, 159 m/mn.

Fig. 6. — Variation du coefficient τ_{α_1} en fonction de l'angle α_1, lors de la coupe de l'acier 35MoCN20 à l'aide d'un outil RPO, à la vitesse moyenne de 40 m/mn.

Fig. 7. — Variation du coefficient $\tau_{\varkappa}$ en fonction de l'angle $\varkappa$, lors de la coupe de l'acier OL 38 à l'aide d'outils RA 1 et RPO, à la vitesse moyenne de 135 m/mn et, respectivement, 139 m/mn.

Fig. 8. — Variation du coefficient $\tau_{\varkappa}$ en fonction de l'angle $\varkappa$, lors de la coupe de l'acier 35MoCN20 à l'aide d'un outil RPO, à la vitesse moyenne de 42 m/mn.

Fig. 9. — Variation du coefficient $\tau_{\varkappa_1}$ en fonction de l'angle $\varkappa_1$, lors de la coupe de l'acier OL 38 à l'aide d'outils RA 1 et RPO, à la vitesse moyenne de 154 m/mn et, respectivement, de 139 m/mn.

Fig. 10. — Variation du coefficient $\tau_{\varkappa_1}$ en fonction de l'angle $\varkappa_1$, lors de la coupe de l'acier 35MoCN20 à l'aide d'un outil RPO, à la vitesse moyenne de 36 m/mn.

Fig. 11. — Variation de la durabilité en fonction de la vitesse, lors de la coupe en divers régimes de l'acier OL 38, à l'aide d'un outil RA 1.

Fig. 12. — Variation de la durabilité en fonction de la vitesse, lors de la coupe en divers régimes de l'acier OL 38, à l'aide d'un outil RPO.

Fig. 13. — Variation de la durabilité en fonction de la vitesse, lors de la coupe en divers régimes de l'acier 35MoCN20 à l'aide de l'outil RA 1.

Fig. 14. — Variation de la durabilité en fonction de la vitesse, lors de la coupe en divers régimes de l'acier 35MoCN20, à l'aide d'un outil RPO.

Fig. 15. — Nomogramme de coupe, lors du tournage de l'acier OL 38 à l'aide d'un outil en acier rapide RA 1.

Fig. 16. — Nomogramme de coupe, lors du tournage de l'acier OL 38 à l'aide d'un outil en acier rapide RPO.

Fig. 17. — Nomogramme de coupe, lors du tournage de l'acier 35MoCN20, à l'aide d'un outil en acier rapide RA 1.

Fig. 18. — Nomogramme de coupe, lors du tournage de l'acier 35MoCN20, à l'aide d'un outil en acier rapide RPO.

Fig. 19. — Variation de la puissance utile de coupe en fonction de la vitesse, lors du tournage des aciers OL 38 et 35 MoCN 20 avec $s = 0{,}6$ mm/tour et $t = 2$ mm.

Fig. 20. — Comparaison entre les vitesses de coupe lors du tournage de l'acier OL 38 à l'aide d'outils en aciers rapides RPO et RA 1.

Fig. 21. — Comparaison entre les vitesses de coupe lors du tournage de l'acier 35MoCN20 à l'aide d'outils en aciers rapides RPO et RA 1.

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU, N. PASCU, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuţitului armat cu plăcuţă de carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2* (1957).
2. — *Despre regimul optim de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
3. M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, *Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuţitelor de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4* (1958).
4. — *Asupra regimurilor optime de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1* (1959).
5. А. М. РОЗЕНБЕРГ, А. Н. ЕРЕМИН, *Элементы теории процесса резания металлов.* Машгиз, Москва-Свердловск, 1956.
6. E. BLANPAIN, *Théorie et pratique des outils de coupe.* Ed. Eyrolles, Paris, 1955.
7. М. И. КЛУШИН, *Резание металлов.* Машгиз, Москва, 1953.

CERCETĂRI ASUPRA METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE A SUPRAFEȚELOR CONCAVE

DE

V. MARCU și P. FREUND

Aplicarea metalizării prin pulverizare prezintă caractere specifice, printre altele și după forma pieselor destinate a fi metalizate, formă de care depinde aderența straturilor metalizate.

Astfel, suprafețele de revoluție convexe au cea mai favorabilă formă, din acest punct de vedere, deoarece după răcire se obține un fretaj al stratului metalizat, asigurînd o bună aderență [1].

Suprafețele de revoluție concave și cele plane impun însă anumite limite ale grosimii stratului, pentru următoarele considerente :

— La suprafețele concave apariția unui joc între piesa de bază și stratul metalizat, în loc de a se obține aderență ;

— La suprafețele plane desprinderi sau crăpături ale stratului de metal pulverizat.

În cele ce urmează vom expune rezultatele unor cercetări întreprinse pentru studierea metalizării prin pulverizare a suprafețelor concave care s-au desfășurat în trei faze și anume :

— Analiza fenomenului fizic,

— Cercetările experimentale,

— Aplicațiile practice ale rezultatelor obținute.

ANALIZA FENOMENULUI FIZIC

Să considerăm o suprafață concavă reprezentată printr-un cilindru de oțel care urmează a fi metalizat în interior prin pulverizare (fig. 1) și să admitem notațiile de mai jos :

d_1 — diametrul interior al cilindrului la rece ;

D_1 — diametrul interior al cilindrului în momentul terminării metalizării ;

d_2 — diametrul exterior al manșonului format din metal pulverizat, după răcirea acestuia ;

D_2 — diametrul exterior al manșonului format din metal pulverizat în momentul terminării metalizării ;

t_1 — temperatura cilindrului și stratului metalizat după răcirea completă ;

T_1 — temperatura medie a peretelui cilindrului în momentul terminării metalizării ;

T_2 — temperatura medie a stratului metalizat în momentul terminării metalizării ;

α_1 — coeficientul de dilatare termică liniar al metalului cilindrului ;

α_2 — coeficientul de dilatare termică liniar al stratului metalizat.

În cursul pulverizării de oțel în interiorul cilindrului, se formează un strat metalizat în contact cu peretele interior al cilindrului atîta timp cît durează operația de pulverizare.

În consecință, putem admite egalitatea

$$D_1 = D_2. \tag{1}$$

Prin răcire, cilindrul și metalul pulverizat se contractă, survenind un fenomen invers dilatării, astfel încît putem scrie

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= D_1\,[1 - \alpha_1\,(T_1 - t_1)],\\ d_2 &= D_2\,[1 - \alpha_2\,(T_2 - t_1)]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Divizînd aceste relații membru cu membru obținem

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{1 - \alpha_1\,(T_1 - t_1)}{1 - \alpha_2\,(T_2 - t_1)}.$$

Ținînd seama de relația (1) putem scrie

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{1 - \alpha_1\,(T_1 - t_1)}{1 - \alpha_2\,(T_2 - t_1)}. \tag{3}$$

Pentru ca să existe aderență între cilindru și manșonul de oțel pulverizat, după terminarea metalizării și răcirea pieselor, trebuie să avem o strîngere între suprafața interioară a cilindrului și suprafața exterioară a manșonului.

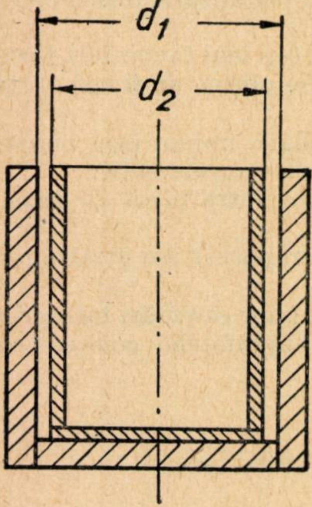


Fig. 1

Va trebui să avem $d_1 < d_2$ și deci ținînd seama de relația (3) apare condiția

$$1 - \alpha_1\,(T_1 - t_1) < 1 - \alpha_2\,(T_2 - t_1),$$

sau

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{T_2 - t_1}{T_1 - t_1}.$$

Ținînd seama de faptul că t_1 este neglijabil față de T_1 și T_2 ajungem la relația

$$\frac{T_2}{T_1} < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ sau } T_2 < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} T_1. \qquad (4)$$

Această relație arată că temperatura medie a stratului metalizat nu trebuie să depășească limita $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} T_1$ pentru ca să avem aderență a stratului metalizat la piesa de bază.

În concluzie:

Întrucît temperatura medie a stratului metalizat depinde de grosimea acestuia, există o anumită limită a grosimii pînă la care avem aderență între suprafața concavă și stratul metalizat.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE

Metalizările experimentale s-au efectuat în interiorul unei bucșe de oțel avînd

$$d_1 = 117{,}55 \text{ mm},$$
$$\alpha_1 = 11{,}5 \times 10^{-6}/°\text{C}.$$

În cursul metalizării interioare cu oțel pulverizat s-au făcut două serii de măsurători și anume:

a) Temperaturile bucșei și ale stratului metalizat pentru diferite grosimi ale acestuia care au permis a se trasa o curbă a variației temperaturilor în funcție de grosimea stratului (fig. 2).

b) Determinarea valorii $d_1 - d_2$ pentru diferite grosimi ale stratului metalizat, trasîndu-se curba din figura 3.

Din această ultimă diagramă se constată — pentru cazul experienței efectuate — că nu avem aderență a stratului interior de oțel pulverizat decît pentru grosimi ale acestui strat care nu depășesc 0,2 mm. Peste această grosime începe să apară un joc între piesa de bază și stratul metalizat, valoarea jocului crescînd cu grosimea stratului.

Acest fenomen ne permite să verificăm în ce măsură este valabilă condiția de obținere a aderenței date de relația (4) de mai sus.

Coeficientul de dilatare termică liniar al oțelului pulverizat are valoarea de

$$\alpha_2 = 10 \times 10^{-6}/°\text{C},$$

măsurată în cursul lucrărilor experimentale anterioare pentru determinarea calităților fizice și mecanice ale straturilor metalizate prin pulverizare.

Această valoare este aproape de același ordin de mărime ca și a fontei.

Coeficientul de dilatare termică liniar al oțelului bucșei este de

$$\alpha_1 = 11{,}5 \times 10^{-6}/°\text{C}.$$

Aplicînd condiția impusă de relația (4) va trebui să avem

$$T_2 < \frac{11.5}{10}\,T_1 \quad \text{sau} \quad T_2 < 1{,}15\ T_1. \qquad (5)$$

Examinînd curbele din figura 2 constatăm că relația (5) începe să fie verificată atunci cînd grosimea stratului ajunge la 0,2 mm. În consecință relația (4) este exactă, fiind verificată de experiență.

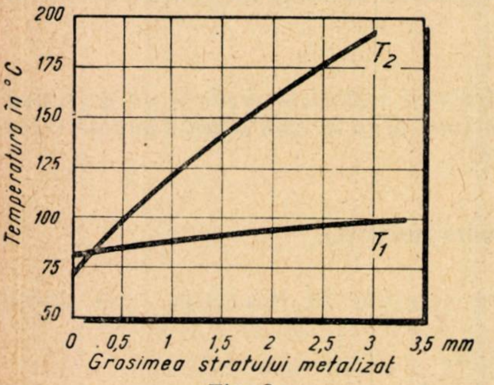


Fig. 2

Întrucît această relație ne arată că variind temperatura bucșei T_2, putem obține diferite valori ale jocului între bucșă și stratul metalizat, s-au făcut următoarele experiențe în această direcție :

a) Un minut metalizare, apoi un minut întrerupere și răcire cu aer comprimat. După zece operații de acest fel și răcirea completă a ansamblului piesă-strat metalizat s-a găsit un joc al manșonului de oțel pulverizat de 0,36 mm.

b) Metalizare interioară, timp de zece minute, pe bucșa încălzită exterior la o temperatură de 250 °C. După răcire s-a constatat, pentru o grosime a stratului metalizat de 0,7 mm, egală cu grosimea din experiența precedentă, un joc între bucșă și stratul metalizat de numai 0,18 mm.

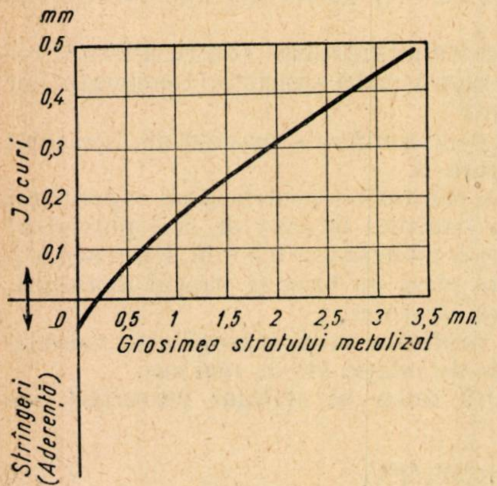


Fig. 3

Experiențele mai sus indicate au fost efectuate și cu aluminiu pulverizat, găsindu-se jocuri mai mari, deoarece coeficientul de dilatare termică al stratului de aluminiu este mai mare decît al bucșei și deci avem o contracție mai puternică a manșonului de material pulverizat, fapt indicat de altfel și de relația (4).

De asemenea, s-au executat experiențe pe bucșe de diametre diferite, făcîndu-se următoarele constatări :

— Aderența se ameliorează în metalizarea interioară cînd diametrul bucșei crește, deoarece căldura provocată de metalizare fiind mai ușor evacuată, valoarea temperaturii T_2 scade sub limita indicată de relația (4) pentru grosimi de strat care cresc cu diametrul bucșei.

— La diametre mici ale bucșei, aderența scade, însă apar uneori deformații din cauza supraîncălzirii stratului metalizat și a bucșei.

APLICAŢII PRACTICE

1. Determinarea coeficientului de dilatare termică

Coeficientul de dilatare termică a oţelului pulverizat a fost determinat — aşa cum s-a amintit mai sus — în lucrări anterioare. Constatîndu-se însă că metalizarea interioară poate produce un joc între piesa de bază şi stratul metalizat, cînd grosimea acestuia depăşeşte o anumită limită, ne-a apărut o nouă metodă pentru determinarea acelui coeficient.

În cursul unei experienţe cu bucşa avînd diametrul de 117,55 mm s-au notat următoarele rezultate :

$$T_2 = 195°\text{C},\ T_1 = 100°\text{C},\ t_1 = 20°\text{C},\ d_1 - d_2 = 0{,}1 \text{ mm}.$$

Din relaţiile (2) de mai sus deducem

$$d_1 - d_2 = D_1 - D_2 + D_2\alpha_2\,(T_2 - t_1) - D_1\alpha_1\,(T_1 - t_1).$$

Deoarece relaţia (1) ne arată că $D_1 = D_2$ putem scrie

$$\left.\begin{array}{ll} d_1 - d_2 = D_1\,[\alpha_2\,(T_2 - t_1) - \alpha_1\,(T_1 - t_1)], & \\ \text{însă} \qquad D_1 = d_1\,(1 + \alpha_1\,T_1). & \end{array}\right\} \tag{6}$$

Introducînd în ralaţiile (6) valorile numerice mai sus indicate obţinem

$$D_1 = 117{,}55\,(1 + 11{,}5\times10^{-6}\,T_1),$$

$$D_1 = 117{,}68 \text{ mm},$$

$$\alpha_2 = \frac{0{,}1}{117{,}68} + 11{,}5\times10^{-6}\,(100-20)\,\frac{1}{195-20},$$

$$\alpha_2 = 10{,}1\times10^{-6}/°\text{C}.$$

În cercetările precedente s-au găsit prin măsurări directe ale unei epruvete din oţel pulverizat

$$\alpha_2 = 10\times10^{-6}/°\text{C}.$$

2. Ambutisarea prin pulverizare

Dacă considerăm bucşa din figura 1, la care unul din capete este înfundat, şi executăm o metalizare interioară cu oţel, obţinem, de la o anumită grosime a stratului metalizat, un recipient cilindric cu structura acestui strat, pe care-l putem scoate din bucşă după răcirea acesteia.

În figura 4 se văd trei cilindri de acest fel, cu diametre diferite, obţinuţi prin pulverizare de oţel în interiorul unor bucşe înfundate avînd în interior aceste diametre.

La cilindrul din dreapta s-a pulverizat cu aluminiu peste oțel, aderența dintre cele două straturi fiind excelentă. Într-adevăr, s-a constatat experimental că un strat pulverizat are o rugozitate optimă pentru a primi peste el un alt strat din același metal sau dintr-un metal diferit.

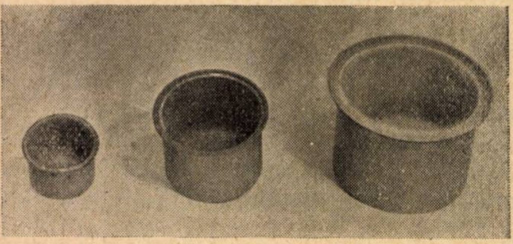


Fig. 4

Un astfel de creuzet din oțel pulverizat, avînd și un strat de aluminiu, a fost alitat și s-a comportat foarte bine la temperaturi înalte, putînd servi ca recipient în mici cuptoare de laborator. O altă utilizare a unor astfel de recipiente ar fi aceea de elemente filtrante, întrucît materialul din care sînt constituite este poros și deci permeabil la fluide. S-au realizat deja filtre metalo-ceramice și este probabil că și straturile obținute prin pulverizare de metale vor da satisfacție într-o astfel de utilizare.

3. Protecția interioară a tuburilor metalice și nemetalice

Tuburile de oțel sau fontă pot fi ușor protejate contra coroziunii prin pulverizare interioară de aluminiu sau zinc.

Acest procedeu se întrebuințează pe scară întinsă în străinătate, metalizîndu-se în interior cu aluminiu conductele uzinelor hidroelectrice sau conducte prin care trec fluide corozive. Astfel conductele unei instalații din regiunea Tanganyka au fost cu succes protejate prin metalizare contra acțiunii apei avînd în suspensie materii organice corozive, față de care nici un alt mijloc de protecție nu dăduse satisfacție [2].

În R. P. Polonă și în alte țări se metalizează cu aluminiu interiorul cisternelor auto și feroviare pentru transport de lapte sau diverse băuturi alimentare [3].

Se pot proteja în interior prin metale pulverizate și tuburi nemetalice. Astfel colectivul I.M.A. a metalizat în interior, într-o lucrare experimentală care a dat bune rezultate, un tub cu diametrul exterior de 230 mm și grosimea de 11 mm realizat în R.P.R. prin înfășurarea și lipirea unor foi din placaj de lemn.

Un astfel de tub poate înlocui cu succes, în unele utilizări, tuburile metalice, fiind mai ușor de elaborat și deci mai economic.

4. Matrițe din metale pulverizate

Confecționarea matrițelor pentru modele fuzibile întrebuințate în turnarea de precizie sau pentru modele destinate turnării sub presiune reprezintă o prelucrare delicată și costisitoare prin manopera de precizie pe care o impune. Procedeul prelucrării prin electroeroziune constituie un însemnat progres în acest domeniu, însă necesită procurarea unui utilaj destul de scump, pe care nu-l pot avea toate întreprinderile care au nevoie de a-şi confecţiona matriţe.

Metalizarea prin pulverizare permite însă a se realiza matriţe, pentru utilizările mai sus indicate, în condiţii foarte economice şi cu un înalt grad de precizie, prin procedeul indicat mai jos care a făcut obiectul unei propuneri de inovaţie:

S-a luat ca aplicaţie o freză trapezoidală pentru tăiat canale în coadă de rîndunică (fig. 5).

Pentru obţinerea modelelor fuzibile necesare turnării de precizie a unei astfel de freze ar trebui să se confecţioneze o matriţă de forma arătată în figura 6 reprodusă după o lucrare de specialitate [4].

Colectivul de metalizare I.M.A. a simplificat sensibil procedeul, introducînd într-o cutie metalică şi fixînd de fundul acesteia piesa din figura 5 după care cutia a fost instalată în universalul unui strung.

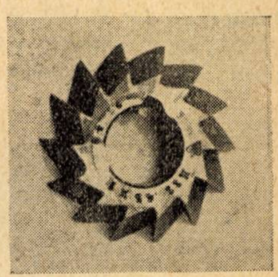


Fig. 5

S-a pus în funcţie instalaţia de metalizare prin pulverizare cu oţel, trimiţînd particule în spaţiul cuprins între peretele cutiei şi conturul piesei

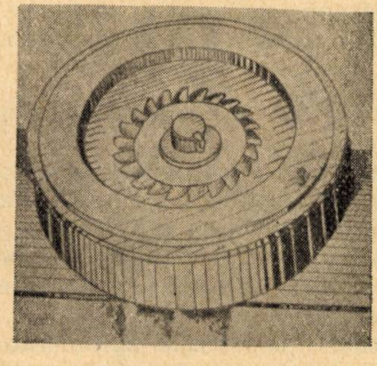


Fig. 6

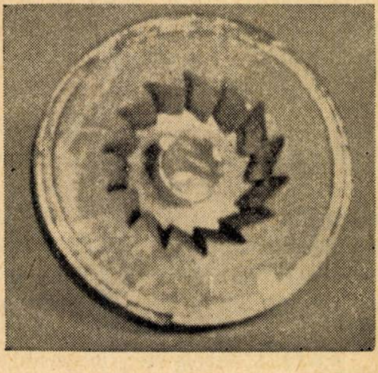


Fig. 7

şi realizîndu-se astfel o matriţă cu negativul acestei piese, după cum se vede în figura 7.

Procedeul s-a aplicat apoi şi pentru alte utilizări, realizîndu-se de exemplu matriţe pentru confecţionarea în serie de piese anatomice, didactice, din gips sau mase plastice.

5. Aparat pentru metalizarea interioară

Colectivul de metalizare I.M.A. a realizat un cap de metalizare interioară (fig. 8) care a fost apoi adaptat la aparatul de electrometalizare tip EM3 a.

Capul de pulverizare cuprinde un tub curbat (1) prin care aerul comprimat ajunge deasupra punctului de încrucişare a sîrmelor (3) care avansează prin locaşurile din ghidajele (2).

Acest aparat permite metalizarea interioară a unor tuburi avînd lungimea egală cu acea a ghidajelor aparatului, dacă tubul este deschis numai la un capăt şi cu aproape de două ori această lungime dacă tubul are ambele capete deschise. Diametrul tubului de metalizat trebuie evident să fie superior gabaritului frontal al capului de metalizare.

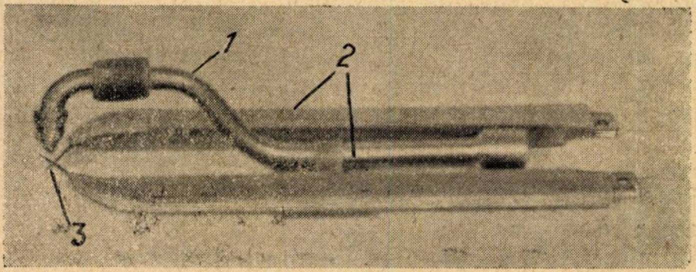


Fig. 8

Pentru tuburi avînd o mică lungime a generatricei, metalizarea interioară s-a efectuat cu rezultate satisfăcătoare, utilizînd aparatul cu cap de metalizare exterioară, aşezat într-o poziţie înclinată faţă de axul tubului.

★

În concluzie, metalizarea prin pulverizare a suprafeţelor concave permite atingerea următoarelor obiective :

a) Realizarea de straturi protectoare contra coroziunii sau uzurii, în care caz grosimea stratului nu trebuie să depăşească o anumită limită peste care aderenţa dintre stratul pulverizat şi piesa de bază dispare. Trebuie să atragem atenţia că această concluzie este valabilă pentru suprafeţele concave lise, deoarece în cazul cînd se creează o rugozitate intervin şi alte elemente în producerea aderenţei.

b) Obţinerea de recipiente din particule pulverizate aglomerate, în genul pieselor ambutisate, însă cu un utilaj foarte simplu adică instalaţia de metalizare prin pulverizare.

c) Realizarea de matriţe din metale pulverizate pentru diferite scopuri,ca : modele fuzibile pentru turnarea de precizie, turnarea sub presiune, piese din gips sau mase plastice etc.

Lucrările colectivului de metalizare I.M.A. aduc următoarele contribuţii în domeniul articolului de faţă :

— Stabilirea condiţiei pentru ca să se obţină aderenţa în cazul metalizării prin pulverizare a suprafeţelor concave lise.

— Punerea la îndemîna sectoarelor de producţie, aşa cum s-a arătat prin ultimele două indicaţii de mai sus, *a unei metode noi de prelucrare a metalelor* şi deschiderea de noi perspective în domeniul metalizării prin pulverizare.

Primită la redacţie la 19 decembrie 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТАЛЛИЗАЦИИ ВОГНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАСПЫЛЕНИЕМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первой части работы ,,Анализ физического явления'' на основании соотношений теплового расширения устанавливается, что добиться полного сцепления при внутренней металлизации возможно лишь в том случае, когда температура металлизированного слоя не превышает определенного предела.

Это влечет за собой существование максимальной толщины металлизированного слоя, до которой происходит сцепление между основной деталью и этим слоем.

Во второй части ,,Экспериментальные исследования'' излагаются результаты и приводятся диаграммы, полученные при определении температур втулки, внутренность которой была металлизирована, и металлизированного слоя, а также сцепление или зазор, соответствующий различным толщинам металлизированного слоя. При этом было установлено, что в подобных случаях существует сцепление металлизированного слоя лишь тогда, когда его толщина не превышает 0,2 мм.

В третьей части ,,Практические применения'' разбираются следующие вопросы:

— Определение коэффициента теплового расширения металлизированного слоя на основании проведенных экспериментов.

— Получение сосудов из распыленных металлов, новый способ, названный ,,штамповка распылением''.

— Получение матриц из распыленных металлов для изготовления плавких моделей для точной отливки или моделей для отливки под давлением; этот способ является предметом новаторского предложения со стороны коллектива металлизации при Институте прикладной механики.

RECHERCHES SUR LA MÉTALLISATION DES SURFACES CONCAVES PAR PROJECTION

RÉSUMÉ

Dans la première partie de cette étude les auteurs ont établi que les couches de métal obtenues par projection à l'intérieur d'une surface concave n'adhèrent à cette surface que si l'épaisseur de la couche ne dépasse pas une certaine limite.

La seconde partie présente les résultats des recherches expérimentales faites en projetant de l'acier à l'intérieur d'un manchon métallique. On a trouvé que l'adhérence disparaît lorsque l'épaisseur de la couche dépasse 0,2 mm.

La troisième partie expose les applications pratiques du problème étudié, à savoir :

— Un nouveau procédé de calcul du coefficient de dilatation thermique de la couche de métal obtenue par projection.

— Manchons ou récipients cylindriques en métal, obtenus par agglomération des particules projetées.

— Construction de certains types de matrices par projection de métal.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Marcu și colaboratori, *Studii asupra unor caracteristici ale straturilor obținute prin electrometalizare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2* (1956).
2. P. Freund și colaboratori, *Metalizarea prin pulverizare.* I.D.T., București, 1958.
3. S. S. Feldman, *Turnarea de precizie.* Ed. tehnică, 1953.
4. * * * *Die erste Internationale Metallspritzkonferenz.* Schweisstechnik VEB Verlag Technik, Berlin, 1957.

ÎNREGISTRARE MAGNETICĂ SIMULTANĂ A DOUĂ MĂRIMI MECANICE

DE

D. PAVELESCU și TH. PANTELIMON

În lucrările anterioare, pornindu-se de la un prim studiu al înregistrării pe suport magnetic (bandă) a mărimilor mecanice cu variații lente [12], s-a ajuns la realizarea unui sistem electronic care să permită înregistrarea și redarea pentru o bandă mai largă de frecvențe (0—100 Hz), cu un aparataj mai puțin ancombrant și mai stabil [13]. În ambele situații s-a studiat și aplicat modulația de amplitudine, frecvențele undei purtătoare folosite fiind cuprinse între 1 000 și 5 500 Hz.

În acest stadiu, pentru înregistrarea spre exemplu, a mișcării plane a unui mecanism, era necesar ca componentele mișcării, pe cele două axe (*ox*, *oy*), să fie înregistrate separat și sincron, sistemul presupunînd două canale electronice similare de înregistrare-redare, și de asemenea două aparate de înregistrare cu pistă magnetică, sau un singur aparat special construit.

Sistemul electronic și mecanic devine astfel ancombrant și greu de manipulat.

Pentru a se evita această situație, în lucrarea de față s-a pus problema realizării unui sistem electronic care să conducă la înregistrarea simultană, pe o singură pistă magnetică, în general, a două mărimi mecanice de frecvență joasă.

Și în acest caz soluția preconizată rezultă imediat din examinarea schemei bloc a instalației de înregistrare (fig. 1) și redare (fig. 2).

S-a folosit, de asemenea, modulația de amplitudine. Pentru înregistrare, semnalele X și Y modulează două purtătoare : 1 300 Hz și respectiv 6 000 Hz, la capul de înregistrare al magnetofonului acționînd numai o undă rezultată din amestecul celor două purtătoare modulate în amplitudine, de semnalele respective.

Pentru redarea de pe pista magnetică, separaţia celor două purtătoare modulate, se face înaintea etajelor demodulatoare, printr-un sistem de amplificatoare selective şi filtre calculate corespunzător valorilor şi armonicelor purtătoarelor respective.

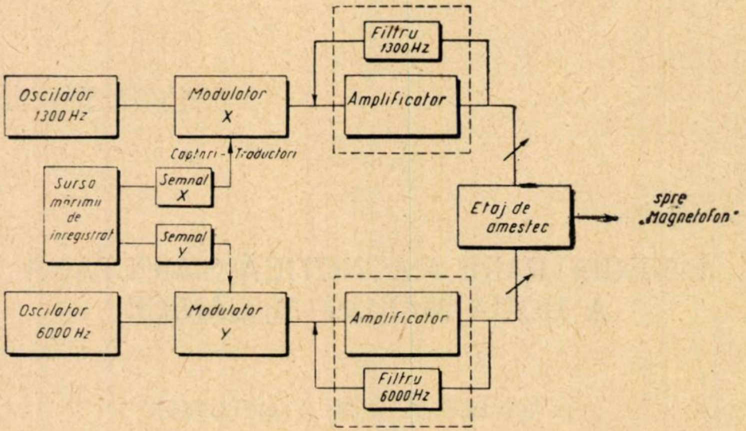

Oscilator
1300 Hz
Modulator
X
Filtru
1300 Hz
Amplificator
Captori - Traductori
Sursa
mărimii
de
înregistrat
Semnal
X
Semnal
Y
Etaj de
amestec
spre
„Magnetofon"
Oscilator
6000 Hz
Modulator
Y
Amplificator
Filtru
6000 Hz

Fig. 1. — Schema bloc a sistemului de înregistrare.

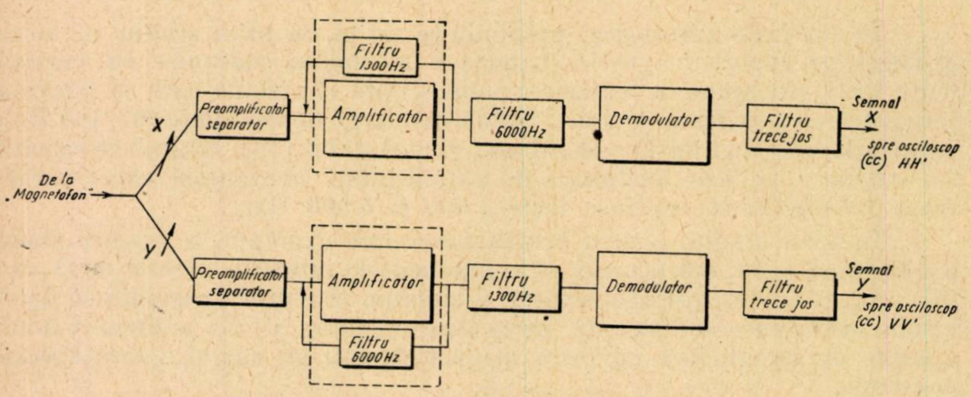

De la
„Magnetofon"
X
Y
Preamplificator
separator
Filtru
1300 Hz
Amplificator
Filtru
6000 Hz
Demodulator
Filtru
trece jos
Semnal
X
spre osciloscop
(cc) HH'
Preamplificator
separator
Amplificator
Filtru
6000 Hz
Filtru
1300 Hz
Demodulator
Filtru
trece jos
Semnal
Y
spre osciloscop
(cc) VV'

Fig. 2. — Schema bloc a sistemului de redare.

În cele ce urmează vom descrie în linii mari sistemul electronic folosit.

Echipamentul de înregistrare

Se vor prezenta caracteristicile principale ale etajelor electronice, arătate în figura 1, şi de asemenea, în schema de principiu din figura 3.

a. *Etajele oscilatoare*. Ca şi în lucrarea [13], etajele oscilatoare sînt de tipul *RC*, controlul de frecvenţă fiind realizat cu filtre dublu *T*. Cele

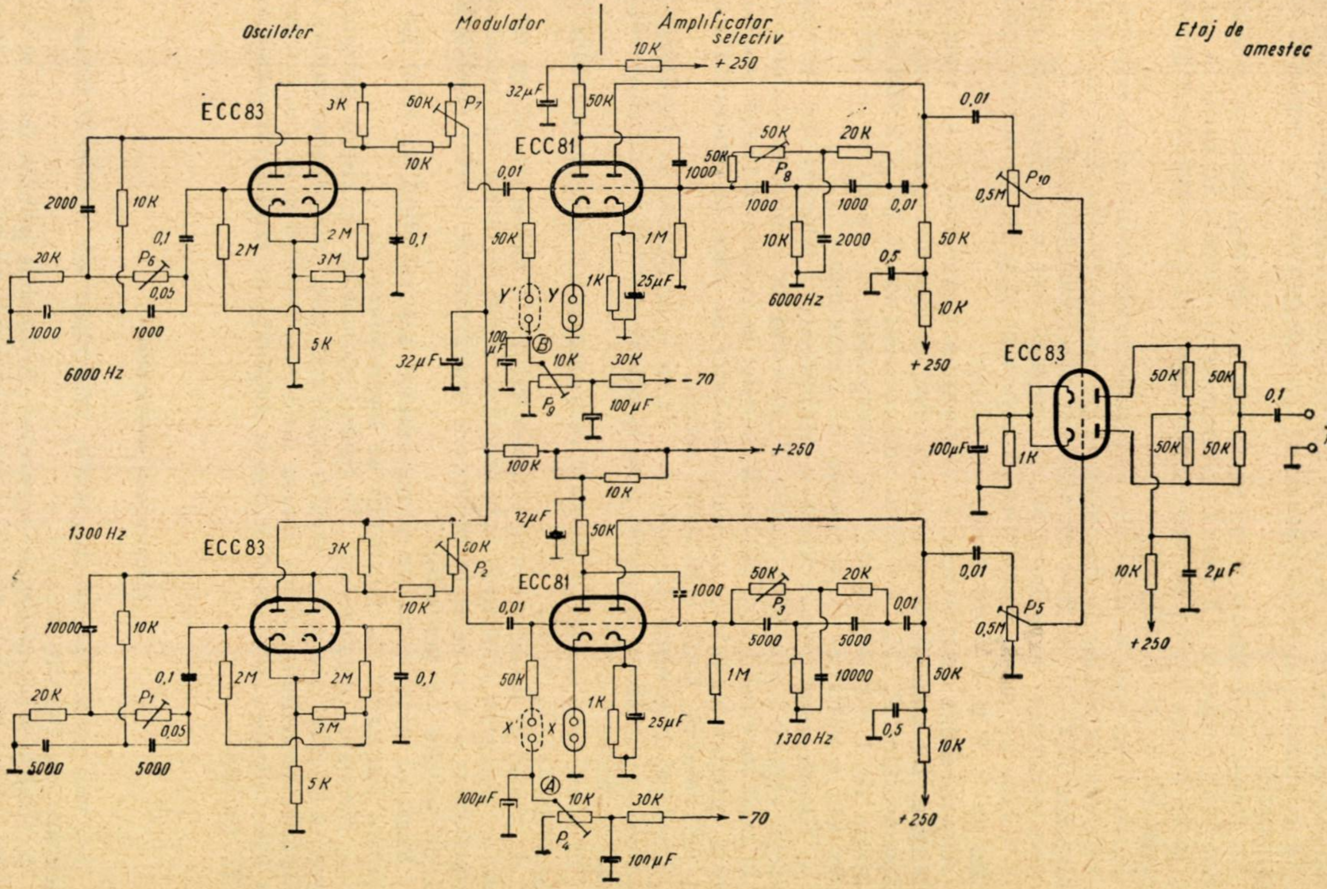

Oscilator
Modulator
Amplificator selectiv
Etaj de amestec
ECC83
ECC81
ECC83
ECC81
ECC83
6000 Hz
1300 Hz
6000 Hz
1300 Hz
P6
P7
P8
P9
P10
P1
P2
P3
P4
P5
Y'
Y
X'
X
B
A
+ 250
- 70
spre înregistr.

Fig. 3. — Schema de principiu a sistemului de înregistrare.

două frecvenţe purtătoare (1 300 şi 6 000 Hz) s-au prevăzut a fi ajustabile cu potenţiometrii P_1 şi P_6, iar amplitudinile semnalelor cu care se trece la modulator (deci amplitudinile „purtătoarelor") se reglează cu potenţiometrii P_2 şi P_7.

b. *Etajele modulatoare.* Şi în acest caz s-a păstrat sistemul realizat anterior [13], comanda (X sau Y) făcîndu-se pe catodă. În cazul în care se va lucra cu traductori de impedanţe mari, s-a prevăzut posibilitatea conectării în X' şi Y' (fig. 3).

În acest caz însă, va fi necesar ca sursele de alimentare să fie separate. Determinarea punctelor de funcţionare, pe caracteristicile dublelor triode modulatoare ECC 81, se face cu ajutorul potenţiometrilor P_3 şi P_8.

S-a constatat experimental, că reglajul cel mai favorabil este la — 5 V faţă de masă, (măsurată în punctele A şi B), semnalul avînd variaţia de la 0 la 1 V (cu minus la masă).

Amplitudinea purtătoarei se determină experimental la reglajele preliminare. La încercările ce s-au executat cu sistemul realizat, reglajul potenţiometrului P_2 (P_7), s-a făcut concomitent cu P_5 (P_{10}), astfel că, la o variaţie de 1 V a semnalului, să corespundă la ieşirea pe o sarcină de 200 kΩ o variaţie proporţională de aproximativ 1 V.

c. *Etajele amplificatori selectivi.* Amplificatorii selectivi sînt de tipul cu reacţie negativă prin filtre dublu T; au rolul de a elimina armonicele, care în mod inevitabil apar datorită lucrului în porţiunea curbă a caracteristicii tubului modulator. Aceste armonice ar duce la interacţiuni cu totul nefavorabile între cele două canale.

Reglajul frecvenţei filtrelor s-a făcut examinîndu-se osciloscopic alura fiecărei purtătoare în parte, pînă la aducerea lor la forme sinusoidale cît mai perfecte.

În acest scop se face o ajustare concomitentă a potenţiometrilor P_1 şi P_4, respectiv P_6 şi P_9.

d. *Etajul de amestec* (*mixerul*). S-a utilizat o dublă triodă, cu ieşire în punte, deoarece montajul experimental a dat în acest caz rezultate satisfăcătoare şi a condus la reducerea numărului de tuburi electronice (faţă de soluţia cu pentode).

Reglajul amplitudinilor purtătoarelor are totodată şi rolul de a compensa răspunsul de frecvenţă al *magnetofonului.*

e. *Sistemul „magnetofon"*. În cadrul sistemului electronic prezentat în această lucrare, nu a fost posibil utilizarea unui magnetofon curent ca în lucrările precedente, ci un aparat mult mai sensibil şi de performanţe mult mai ridicate („perfecton"), pus la dispoziţie de studiourile cinematografice romîne.

Echipamentul pentru redare

Se vor prezenta caracteristicile principale ale celulelor (etajelor) prezentate în figurile 2 şi 4.

a. *Etajele preamplificatori-separatori.* Semnalele primite de la *magnetofon* la redare, atacă în paralel două tuburi EF 86 cu rol de preampli-

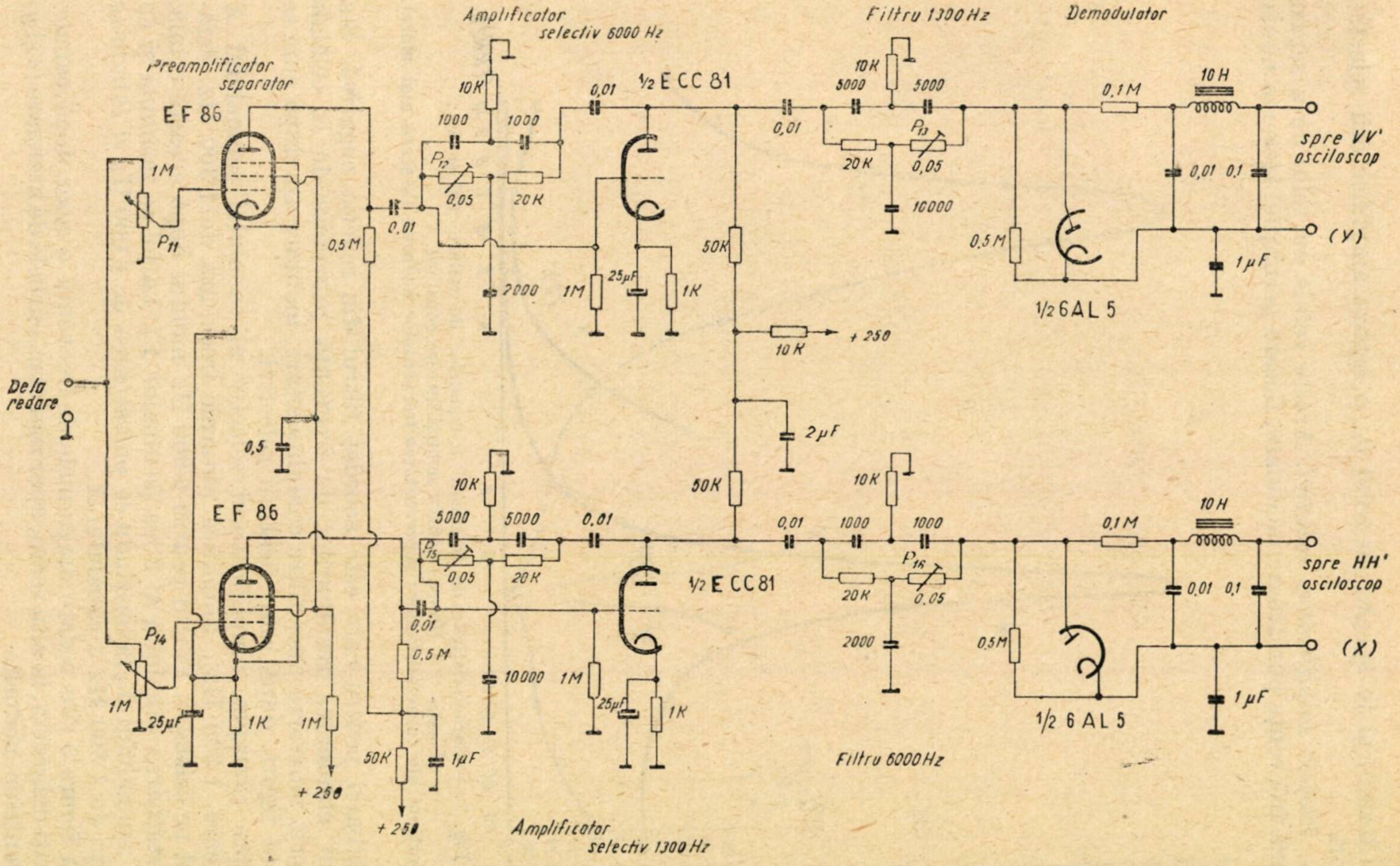

Preamplificator separator
EF 86
EF 86
Dela redare
Amplificator selectiv 6000 Hz
Amplificator selectiv 1300 Hz
1/2 E CC 81
1/2 E CC 81
Filtru 1300 Hz
Filtru 6000 Hz
Demodulator
1/2 6AL 5
1/2 6 AL 5
10 H
spre VV' osciloscop
(Y)
spre HH' osciloscop
(X)
P11
P12
P13
P14
P15
P16
+ 250
1 μF
2 μF
25 μF
0,5
0,01
0,05
0,1
0,1 M
0,5 M
1 M
10 K
20 K
50 K
1 K
1000
2000
5000
10000

Fig. 4. — Schema de principiu a sistemului de redare.

ficare (dozare) şi în special cu rolul de a separa amplificatorii selectivi următori.

b. *Etajele amplificatori selectivi.* Aceste celule au rolul de a separa cele două frecvenţe purtătoare modulate, fiecare permiţînd trecerea numai

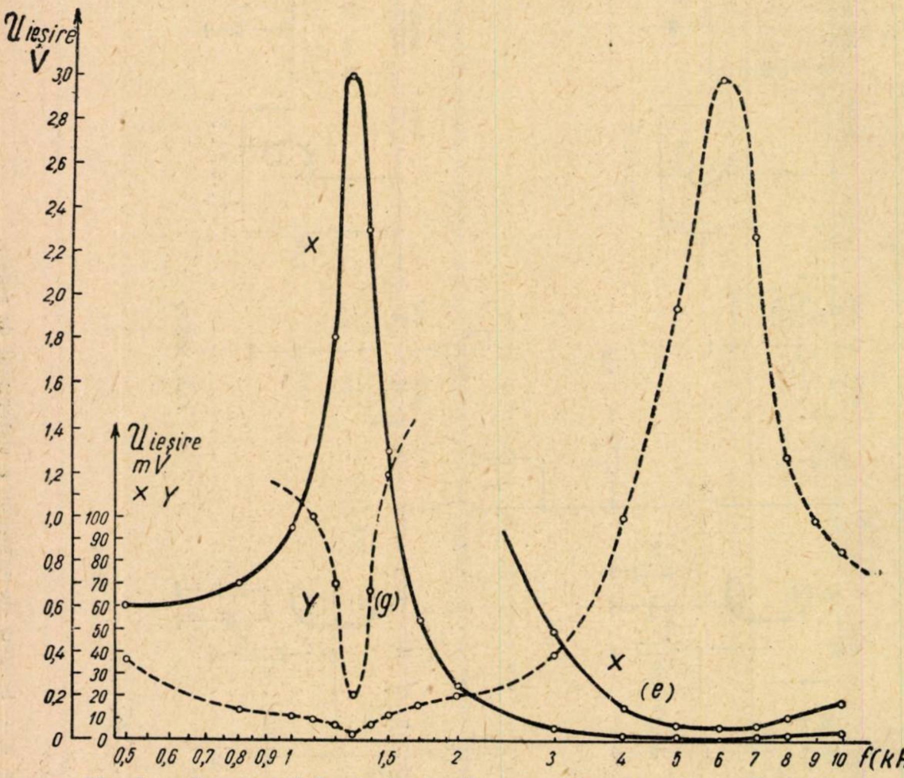


Fig. 5. — Caracteristicile de frecvenţă a canalelor de redare (X şi Y): $U_{\text{ieşire}} = f$ (frecv.) pentru semnal intrare constant.
e şi g: porţiuni ale caracteristicilor; reprezentarea frecvenţelor nedorite (la scară mai mare).

a purtătoarei pentru care este acordat filtrul din reacţia negativă. S-a prevăzut eliminarea reziduurilor de frecvenţă provenite de la celălalt canal, prin montarea unor filtre complimentare, montate aşa după cum se vede din figuri, după amplificatorii selectivi.

Spre exemplu, amplificatorul selectiv al canalului semnalului X (purtătoare 1 300 Hz), amplifică puternic frecvenţa de 1 300 Hz, defavorizînd pe celelalte. Filtrul pentru 6 000 Hz montat după această celulă, taie purtătoarea canalului al 2-lea (semnalul Y). La fel se întîmplă şi cu canalul semnalului Y, favorizîndu-se purtătoarea de 6 000 Hz şi tăindu-se frecvenţa de 1 300 Hz a canalului X.

În figura 5 sînt redate diagramele de frecvenţă a celor două canale. Pe aceeaşi diagramă, la altă scară, apar mai clar, curbele de atenuare (e şi g) a frecvenţelor nedorite.

c. Etajele demodulatoare. Aceste etaje sînt simple ca și în lucrările precedente, componentele continue rămînînd a se compensa prin negativarea amplificatorului de curent continuu din osciloscop.

d. Alimentarea. S-a folosit pentru ambele sisteme (înregistrare și redare) montate pe același șasiu, un montaj clasic de alimentare stabilizată ionic.

e. Osciloscopul. S-a folosit pentru control amplificatorul dublu de curent continuu cu tub catodic, descris în lucrarea anterioară [13] (fig. 6 *b*).

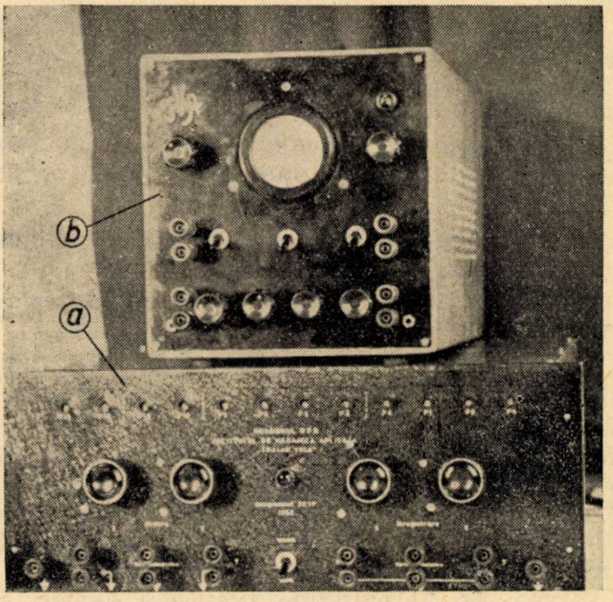


Fig. 6. — Sistemul electronic: *a*) Sistemul electronic pentru dublă înregistrare și redare (fig. 3 și 4); *b*) Dublu amplificator de curent continuu și osciloscop (lucrarea [13]).

Sistemul electronic complet al acestei lucrări (fig. 6*a*) are deci ca potențiometri normal accesibili, numai pe cei corespunzători amplitudinilor purtătoarelor modulate (P_5, P_{10}, P_{11}, P_{14}). Restul potențiometrilor au numai posibilitatea de ajustare la pregătirea lucrării.

Observații și concluzii

Sistemul electronic prezentat, a fost experimentat cu diferite semnale *X* și *Y* (parametri mecanici și electrici), aparținînd spectrului de frecvențe joase și infrajoase.

Prezentăm rezultatele înregistrării și studiului efectuat asupra a două mărimi (traduse electric) avînd frecvența de 1 Hz, produse cu ajutorul unui mecanism de modulare, care pentru abscisă (osciloscop), a furnizat un semnal *X* în dinte de fierăstrău, și pentru ordonată, un semnal *Y* în formă de impulsuri triunghiulare simetrice (W). Ambele semnale s-au obţinut sincrone, prin montarea pe acelaşi ax a traductorilor respectivi; tensiunea respectivă generată a fost cuprinsă între 0 ... 1 V (curent continuu).

În figura 7 sînt prezentate oscilogramele fenomenului studiat, ridicate în diferite puncte ale montajului.

Figura 7*a* prezintă fenomenul $Y = f(X)$, la intrarea echipamentului de înregistrare (fig. 3), fenomenul X fiind considerat bază de timp; (frecvenţa ambelor fenomene — sincrone — fiind 1 Hz).

Figura 7*b* reprezintă modularea purtătoarei de 1 300 Hz cu semnalul X, semnalul Y fiind nul.

Figura 7*c* reprezintă modularea purtătoarei de 6 000 Hz cu semnalul Y, semnalul X fiind nul.

Figura 7*d* reprezintă amestecul celor două purtătoare înainte de înregistrarea pe suportul magnetic, ambele semnale variind în limitele 0 — 1 V.

Figura 7*e* reprezintă redarea de pe banda magnetică a purtătoarei dublu modulată.

În cazurile prezentate în figura 7*b* — *e* s-a luat în abscisă baza de timp a osciloscopului tip Orion.

Figura 7*f* reprezintă fenomenul $Y = f(X)$, fotografiat pe ecranul osciloscopului, după redarea sa de pe banda magnetică.

Deformaţiile care se observă pe semnal (tremurături) provin în special din neuniformitatea benzii magnetice. S-a utilizat o bandă de producţie Kodak de 35 mm, care prin construcţie, admite neuniformităţi de maximum ± 1 db. La semnal constant, indicaţiile output-metrului au oscilat între ± 0,5 db, înregistrarea fiind făcută pe o bandă folosită; la capete, unde banda nu era folosită, variaţiile erau mai mici.

Aceste variaţii de amplitudine provoacă devieri simultane atît pentru semnalul X cît şi pentru Y, ceea ce se poate observa în porţiunea încercuită de pe figura 7 *f*.

Magnetofonul utilizat (de calitate superioară) a limitat influenţa celorlalţi factori producători de perturbaţii semnalaţi în lucrările anterioare: variaţia de tensiune la alimentare, variaţia de viteză şi de tensiune a suportului magnetic, variaţii poziţionale ale benzii faţă de capul magnetic etc. Aparatul folosit introduce un „plînset" de maximum 0,2%.

De asemenea, prin înregistrări şi redări repetate cu mai multe tipuri de suporţi magnetici, şi prin compararea imaginilor obţinute, s-a putut observa că factorul de calitate a benzii a avut influenţă preponderentă.

S-a constatat, de asemenea, că echipamentul prezentat se pretează favorabil numai la dubla înregistrare a parametrilor cu variaţii lente în banda 0 — 10 Hz, şi mai ales a variaţiilor infrajoase. Pentru simpla înregistrare, calităţile montajului sînt asemănătoare celor din lucrarea [13].

La frecvenţe mai mari s-au observat puternice comprimări ale diagramei redate, datorită constantelor de timp mari ale filtrelor de la ieşire (după demodulare); o a doua cauză o constituie caracteristicile de frecvenţă (prea ascuţite) (fig. 5) ale canalelor de redare.

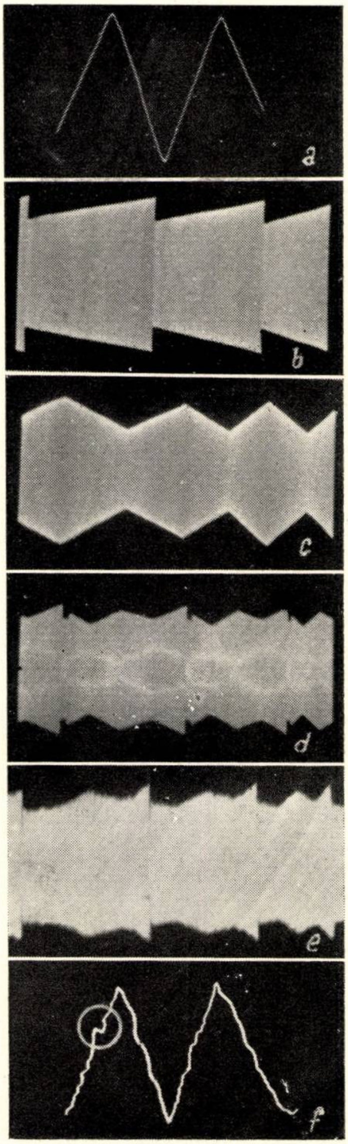


Fig. 7. — Imaginile de pe osciloscop ale fenomenului exemplificat, obținute în diferite puncte ale montajului.

Pentru lărgirea spectrului de frecvențe se indică folosirea unor amplificatori selectivi a căror caracteristice să aibă alură cît mai plată („dreptunghiulară''), obținută cu filtre corespunzătoare.

Trebuie procedat cu deosebită atenție la reglajul preliminar, pentru obținerea unei relații liniare între semnalul la intrare și variația tensiunii la ieșire (în limitele de variație a tensiunilor la intrare).

S-a constatat, de asemenea, că la reglaj este necesar să se obțină valori mai reduse pentru amplitudinile celor două purtătoare, valorile prea mari ale acestora conducînd la interacțiuni între canale. Spre exemplu valorile prea mari ale amplitudinii purtătoarei semnalului X, conduc la armonice și dau naștere unei suprapuneri peste frecvența purtătoare modulată Y. De asemenea, o purtătoare prea puternică Y dopează circuitele de la redare X, modificînd liniaritatea amplificatoarelor.

În concluzie, se constată următoarele :

a) Sistemul nu poate da satisfacție decît în cazul utilizării unui magnetofon cu calități superioare, pentru că variația de viteză și de tensiune a benzii, ghidajul neperfect, presiunea neuniformă pe corpul magnetic etc. se traduc în deformații considerabile a alurii curbei redate. Suportul magnetic trebuie să fie de calitate superioară.

b) Pentru un spectru mai larg de frecvențe, este indicată adaptarea în consecință a amplificatoarelor selective.

c) Banda maximă de frecvențe (0 — 10 Hz) ce se poate înregistra și reda simultan, cu sistemul electronic realizat, indică numai cazul fenomenelor mecanice a căror parametri variază în limita arătată. Este vorba de exemplu, de studiul mecanismelor plane, după cum s-a arătat în lucrarea [12], componentele pe cele două axe ale mișcării plane complexe pot fi înregistrate cu sistemul prezentat în lucrarea de față, după înregistrare și redare obținîndu-se traiectoria complexă inițială.

Se permite în afară de traiectorii, atît înregistrarea simultană a unei perechi de parametri mecanici, cît și înregistrarea unei singure mărimi mecanice și a bazei de timp respective.

Primită la redacție la 22 decembrie 1958.

ОДНОВРЕМЕННАЯ МАГНИТНАЯ ЗАПИСЬ ДВУХ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

На основании результатов, полученных в двух предыдущих работах, давших возможность упростить магнитную запись по одному каналу, излагается в продолжение, исследование системы одновременной записи двух механических величин с медленными изменениями; для получения наиболее простого решения и в этом случае применяется амплитудная модуляция.

Полученная система основана на применении двух несущих волн (1,3 кгц и 6 кгц) и каскадного смесителя, дающего возможность одновременной записи обоих рассматриваемых явлений, на одной магнитной дорожке и одной и той же записывающей головкой (два канала записи-воспроизведения и лишь один „магнитофон").

Кроме обычных каскадов в каждом канале, после модулятора включен и разделительно-фильтрирующий каскад, работающий как избирательный усилитель, настроенный на несущие и фильтр гармоник. При воспроизведении предусмотрено также и фильтрование сопряженной несущей.

Предлагаемая система дает возможность, после записи плоского движения, удобно проводить исследования по осциллографу (одновременно или впоследствии) как компонентов по осям x и y, так и полученного явления.

Система записи относится лишь к механическим величинам, изменяющимся в инфра-низкой полосе частот (0—10 гц); необходимо использование качественного магнитофона и максимально однородной магнитной ленты.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема-блок системы записи.

Рис. 2. — Схема-блок системы воспроизведения.

Рис. 3. — Принципиальая схема системы записи.

Рис. 4. — Принципиальная схема системы воспроизведения.

Рис. 5. — Характеристики частоты каналов воспроизведения (x и y) и выход $= f$ (частота) для постоянного входного сигнала; e и g — участки характеристик; изображение нежелательных частот (в большем масштабе).

Рис. 6. — Электронная система: *a*) Электронная система для двойной записи и воспроизведения (рис. 3 и 4); *b*) Двойной усилитель постоянного тока и осциллограф (работа [13]).

Рис. 7. — Изображения иллюстрируемого явления на осциллографе, полученные в различных точках установки.

SIMULTANEOUS RECORDING OF TWO MECHANICAL QUANTITIES

SUMMARY

Based upon the results obtained in two previous papers, which led to the possibility of simplifying tape recording when a single channel was used, the authors present a system for simultaneously recording two mechanical quantities with slow variations :

The system employs two carriers (1.3 Kc/s and 6 Kc/s) and a mixer which make possible the simultaneous recording of the two phenomena on a single magnetic race using the same recording head.

In addition to the standard elements, each channel after the modulation of the signal uses as a filter a selective amplifier tuned on the carrier frequency and also a low pass filter.

When recording a plane motion, the above system permits a convenient examination on the oscilloscope both of the components upon the *x* and *y* axes and of the resultant phenomena.

The recording system applies only to mechanical quantities varying in the very low frequency band (0—10 c/s) and requires a high performance magnetophone and a high quality magnetic tape.

EXPLANATION OF FIGURES

Fig. 1. — Block diagram of the recording system.

Fig. 2. — Block diagram of the reproducing system.

Fig. 3. — Scheme of the recording system.

Fig. 4. — Scheme of the reproducing system.

Fig. 5. — Frequency characteristics of the reproducing channels (x and y) : $U_{\text{output}} = f$ (frequency) for a constant input signal ; *e* and *g*, parts of the characteristics ; representation of the unwanted frequencies (at a larger scale).

Fig. 6. — Electronic system : *a*) Electronic system for double recording and reproduction (fig. 3 and 4). *b*) Double D.C. amplifier and oscilloscope (paper [13]).

Fig. 7. — Oscilloscope patterns of the exemplified phenomenon, obtained at various points of the circuit.

BIBLIOGRAFIE

1. Aseev B. P., *Bazele radiotehnicii*. Ed. energetică de stat, Bucureşti, 1952.
2. Begun S. J., *Magnetic tape improves geophysical recordings*. Electronics, ianuarie **28**, *1*, 152 (1955).
3. Cartianu Gh., *Bazele radiotehnicii*. Bucureşti, 1954 (curs litografiat).
4. Daniel E. D., *A flux-sensitive reproducing head for magnetic recording systems*. Proceedings of the Institution of Engineers. Part B. iulie, **102**, *4*, 442 (1955).
5. Donaldson P. E. K., *A magnetic tape recorder for electrophysiology*. Electronic Engineering, octombrie-decembrie, 543 (1955).
6. Dupouy G., *Enregistrements géophysiques sur bande magnétophone*. L'Onde Electrique, **XXXIV**, *331*, 765 (1954).
7. Heckenast C., Zsdanszki K., *Mágneses. Hangrögzites*. Muszaki konyvkiadó, Budapest, 1955.
8. Hoberman Max., *Magnetic recorder arrests transients*. Electronics, octombrie **27**, *12*, 144 (1954).
9. Libois L. J., *Faisceaux herziens et systèmes de modulation*. Edition Chiron, Paris, 1958.
10. Nicolau Edmond, *Măsuri în radiotehnică*. **II**. Ed. energetică de stat, Bucureşti, 1956.
11. Р. Г. Офенгенден, *Магнитная запись электрических импульсов*. Радиотехника *11* (1955).
12. Pavelescu D., *Asupra înregistrării pe bandă magnetică a unor mărimi mecanice cu variaţii „lente"*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
13. Pavelescu D., Pantelimon Th., *Canal „fix" pentru înregistrare-redare pe suport magnetic a fenomenelor cu variaţii lente*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1* (1958).
14. Richter H., *Neue Anwendungen der Magnetbandtechnik*. Elektrotechnik, *40*, 2 (1956).
15. Tănăsescu T., *Circuite electronice*. **I**. Ed. Inst. politehnic, Bucureşti, 1952.
16. Thomasson D. W., *Recording low frequencies on magnetic tape*. Wireless World, noiembrie, **60**, *11*, 548 (1954).
17. Vonsovski S. V., *Neue Geräte für die magnetische Schallspeicherung*. Electronische Rundschau, *7*, 201 (1957).

ENERGETICA LANSĂRII SATELIȚILOR. RANDAMENTUL MOTOARELOR-EJECTOARE

DE

N. VASILESCU KARPEN

1. Epocala realizare a științei și tehnicii sovietice, prin lansarea celor trei sateliți, a determinat pe autorul prezentei lucrări, să examineze această impresionantă realizare, din punctul de vedere energetic, mai ales în ce privește randamentul motoarelor ejectoare care propulsează rachetele-sateliți.

Rezultatele obținute de autor, *pe cale pur teoretică*, fiind dată însemnătatea lor practică, sînt probabil cunoscute, deși nepublicate.

2. Vom considera cazul concret al satelitului 2, lansat pe o orbită, presupusă circulară, situată la înălțimea $H = 1{,}5 \cdot 10^6$ m deasupra Pămîntului.

Observăm că înălțimea H, determină implicit și viteza V_1 pe orbita sa circulară. Într-adevăr, dacă notăm cu M' masa rachetei purtînd satelitul și M_p masa Pămîntului, cu R raza sa, și cu k constanta atracției universale, legea fundamentală a mecanicii dă relația

$$\frac{M' V_1^2}{R+H} = k \frac{M' M_p}{(R+H)^2},$$

de unde

$$V_1 = \sqrt{k \frac{M_p}{R+H}};$$

cu

$$M_p = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \qquad H = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ m},$$
$$R = 6{,}36 \cdot 10^6 \text{ m}; \qquad k = 6{,}67 \cdot 10^{-11},$$

obținem

$$V_1 = 7\,140 \text{ m/s}.$$

3. Se pare că racheta purtînd satelitul, a fost lansată vertical pînă la o anumită înălţime, apoi traiectoria s-a înclinat ca în figura 1, racordîndu-se printr-o curbă la orbită.

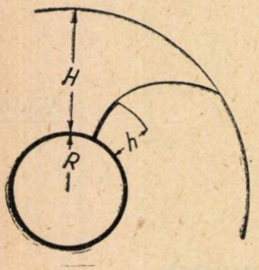


Fig. 1

Dar din punct de vedere energetic, al cheltuielii de combustibil, forma traiectoriei este aproape indiferentă.

Vom presupune aşadar, că racheta este lansată vertical şi propulsată pînă la ajungerea sa la înălţimea $h = 0{,}3 \cdot 10^6$ m, cu o viteză V_2 suficientă pentru a ajunge, prin propria sa inerţie, pe orbită cu viteza $V_1 = 7\,140$ m/s; viteza V_2 este dată de formula

$$V_2^2 = V_1^2 + 2gR^2 \left[\frac{1}{R + 0{,}3 \cdot 10^6} - \frac{1}{R + 1{,}5 \cdot 10^6} \right],$$

de unde

$$V_2 = 7\,900 \text{ m/s}.$$

4. Fie la momentul t: a m/s^2 acceleraţia; V m/s viteza; M masa variabilă a rachetei în gol, adică fără combinat; m masa *combinatului* adică combustibil + comburant; c puterea calorifică exprimată în jouli; ρ randamentul motorului, în sensul obişnuit al acestei noţiuni pentru motoarele termice, adică raportul între *energia produsă de motor* şi transmisă rachetei, şi între *energia calorifică consumată de motor.*

Vom folosi termenul de *energie* şi pentru căldură şi pentru lucru mecanic (travaliu), chiar atunci cînd este vorba de energie pe secundă (putere).

Să scriem egalitatea între puterea utilă dezvoltată de arderea combinatului, $-c\rho\dfrac{dm}{dt}$, pe de o parte, şi puterea mecanică necesară mişcării rachetei pe de altă parte.

Aceasta din urmă se compune din:

a) Puterea necesară creşterii energiei cinetice a rachetei

$$(M + m)\, a\, V;$$

b) Puterea necesară ridicării greutăţii rachetei $(M + m)\, g_t V$, g_t, fiind acceleraţia gravitaţiei la timpul t.

Rezistenţa la mişcare a aerului o presupunem neglijabilă; această rezistenţă nu are o valoare apreciabilă faţă de *a*) şi *b*), decît pe distanţa de cîţiva zeci de km de la suprafaţa Pămîntului cînd dealtfel viteza v este relativ mică.

Obţinem astfel relaţia

$$-\rho c \frac{dm}{dt} = (M + m)\,(a + g_t)\, V, \tag{1}$$

valabilă, oricare ar fi genul motorului acţionînd racheta.

Să examinăm diferiții termeni ai acestei relații.

5. *Combustibilul și comburantul. Combinatul* format din hidrogen lichid, ca combustibil, și oxigen lichid ca comburant, are o putere calorifică de $1{,}6 \cdot 10^7$ jouli/kg. Vom lua, practic, numai pentru a da o bază expunerii ce urmează

$$c = 8 \cdot 10^6 \text{ jouli/kg}.$$

Termenul $-\frac{dm}{dt}$, este numărul de kg de combinat consumat pe secundă.

6. *M masa rachetei în gol* (fără combinat). Cantitățile de combustibil necesar lansării sateliților, sînt considerabile, ele ar deveni prohibitive dacă racheta ar fi dintr-o singură bucată; vom arăta mai departe că lansarea unei asemenea rachete ca satelit, este chiar imposibilă.

De aceea, marele savant sovietic Tiolcovski, a imaginat racheta formată dintr-un număr de etaje, combinatul fiind convenabil distribuit între aceste etaje. Se pornește cu motorul etajului de jos; cînd în cursul lansării combinatul din acest etaj este consumat, etajul se desprinde de rachetă și intră în funcțiune motorul etajului următor și așa mai departe; ultimul etaj constituind chiar satelitul de masă M_1 (în cazul satelitului 2, $M_1 = 500$ kg).

Cu cît numărul etajelor este mai mare, cu atît — cel puțin teoretic — economia de combustibil este mai însemnată.

Dacă etajarea rachetei conduce la o mare economie de combustibil, calculul combustibilului necesar lansării devine laborios și imposibil de folosit o formulă cu caracter general. De aceea, am înlocuit, cum se face uneori în fizică, discontinuul prin continuu.

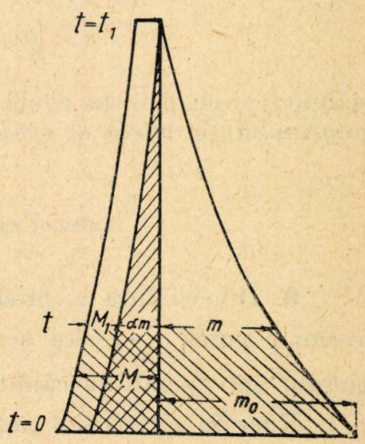


Fig. 2

Am presupus că racheta este unică, dar că pe măsură ce combinatul este consumat, se desprinde automat din masa M, în timpul dt, masa corespunzătoare combinatului ars în acest timp, astfel ca la momentul t masa M a rachetei în gol să fie (fig. 2)

$$M = M_1 + \alpha m,$$

m fiind masa combinatului, α un coeficient, iar αm masa *containerului*, cuprinzînd motorul și combinatul. La pornire $M = M_1 \div \alpha m_0$, m_0 fiind masa inițială a combinatului; iar la sfîrșitul propulsiunii, cînd tot combinatul este ars, $m = 0$, $M = M_1$.

Lucrurile se petrec ca și cum numărul etajelor ar fi infinit.

7. *Accelerația a.* Pentru comoditatea călătorilor din satelit, vom presupune satelitul supus — în timpul lansării — la o accelerație constantă ; reglajul focului pentru accelerație constantă, se poate face în modul cel mai simplu, printr-un dispozitiv inerțial ușor de imaginat.

În cazul accelerației constante, valoarea ei ca și a timpului t necesar pentru ca satelitul să ajungă la înălțimea h, cu viteza V_2, sînt determinate

$$a = \frac{V_2^2}{2h} = \frac{7\,900^2}{0{,}6 \cdot 10^6} = 104 \text{ m/s}^2 \; ; \quad t_1 = \frac{V_2}{a} = 76 \text{ s} .$$

Randamentul ρ al motoarelor-ejectoare

8. Efectul arderii combinatului în camera de combustie, este o agitație violentă a moleculelor gazului produs, agitație care constituie căldura și presiunea pe pereții camerei.

Presiunea împinge racheta cu forța

$$F = (M + m)\;(a + g_t),$$

și împinge cu o forță egală și de sens contrat cu F, moleculele gazului, imprimîndu-le *viteza de ejecție v*, în raport cu racheta.

Calculul aproximativ al vitezei de ejecție v

9. Din căldura c, produsă de arderea unui kilogram de combinat, *numai o parte*, $\frac{c}{n}$, este convertibilă în energie cinetică, restul rămîne pierdut sub formă de căldură.

Energia cinetică a gazelor de ejecție fiind $\frac{1}{2}\,v^2$, avem relația

$$\frac{1}{2}\,v^2 = \frac{c}{n} ,$$

de unde, pentru valoarea *aproximativă* a vitezei de ejecție

$$v = \sqrt{\frac{2c}{n}} . \tag{2}$$

Numărul n caracterizează calitatea motorului și a combinatului său. Este probabil că în motoarele sateliților, n n-a fost mai mare de *2*, adică cel puțin 50% din căldura de ardere a fost transformată în energia cinetică a moleculelor gazului ieșind din camera de combustie.

Admiţînd $n = 2$ şi $c = 8 \cdot 10^6$ jouli/kg, se obţine valoarea aproximativă

$$v = 2\,800 \text{ m/s}.$$

Demonstrarea expresiei randamentului definit la punctul 4

10. Prin arderea în camera de combustie, în timpul dt, a masei dm de combinat, viteza moleculelor combinatului scade de la V la $V - v$, adică cu v; iar viteza V a rachetei de masă $(M + m)$ creşte cu dV; vom avea deci potrivit conservării cantităţilor de mişcare

$$(M + m)\, dV - v dm = 0,$$

de unde

$$dV = \frac{v dm}{M + m}.$$

În timpul dt, energia rachetei a crescut cu

$$dW = \frac{1}{2} (M + m) [(V + dV)^2 - V^2] = (M + m)\, V dV,$$

şi înlocuind pe dV cu valoarea sa de mai sus

$$dW = Vv\, dm,$$

ajungem la acelaşi rezultat — arătînd totodată motivul pentru care randamentul ρ, definit la punctul 4, poate căpăta aparenţa paradoxală de a deveni, la viteze mari, superior unităţii, observînd că motorul produce şi comunică rachetei, nu numai energia cinetică, corespunzînd energiei calorifice a combinatului

$$dm \frac{c}{n} = \frac{1}{2} dm\, v^2,$$

dar şi pierderea energiei cinetice a combinatului

$$\frac{1}{2} dm\, (V^2 - (V - v)^2) = \left(Vv - \frac{1}{2} v^2\right) dm$$

în total deci, $dW = Vv\, dm$; randamentul, potrivit definiţiei sale fiind aşadar

$$\rho = \frac{\text{energia mec. produsă}}{\text{energia calor. consumată}} = \frac{dW}{c\, dm} = \frac{Vv}{c} = \frac{2}{n} \frac{V}{v}. \qquad (3)$$

11. *Randamentul motoarelor-ejectoare este, deci, proporțional cu viteza V a rachetei și, pentru viteze mai mari de $\frac{c}{v} = 2\,800$ m/s, randamentul întrece unitatea.*

Mulțumită acestei împrejurări, și a unei tehnici avansate, a fost posibilă lansarea celor trei sateliți folosind combustibili și comburanți existenți.

12. *Natural însă că, randamentul mediu al motorului nu poate întrece $1/n$, fără a contrazice principiul energiei.*

Energia cinetică, $1/2\ mV^2$*), acumulată de combinat, crește începînd de la zero cu $V = 0$, trece printr-un maximum, apoi scade ajungînd la zero pentru $m = 0$. Înainte de maximum, energia cîștigată de combinat depășește pe aceea cedată rachetei; după maximum, combinatul cedează treptat, rachetei, toată energia sa cinetică. Există deci compensație, între energia cinetică primită de combinat și aceea cedată rachetei.

În definitiv, energia mecanică totală dezvoltată de motor în timpul propulsiei rachetei, este procurată de căldura convertibilă Q/n a combinatului, astfel cum trebuie, randamentul mediu fiind $1/n$.

Determinarea masei combinatului în timpul lansării rachetei

13. Să introducem valoarea (3) a lui ρ, în relația (1); aceasta devine

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{(M + m)(a + g_t)}{v},$$

relație cunoscută, dar prin demonstrația ei, aici, apare *rolul esențial al randamentului* ρ.

Să înlocuim, în relația precedentă pe g_t cu media g_m, a accelerațiilor la sol și la înălțimea la care ajunge racheta la sfîrșitul propulsiunii, relația devine, separînd variabilele,

$$\frac{dm}{M + m} = -\frac{a + g_m}{v}\,dt, \tag{5}$$

înlocuind pe M cu valoarea sa, $M + \alpha m$, presupunînd, pentru simplificare, că în timpul lansării, coeficientul α păstrează o valoare medie și că viteza de ejecție v rămîne constantă, punînd

$$q = \frac{a + g_m}{v}$$

---

*) Se verifică ușor că maximul lui $\frac{1}{2}\,mV^2$, are loc pentru $t = 23$ s, și are valoarea de $2 \cdot 10^9$ jouli.

şi integrînd între m şi zero, respectiv, între t şi t_1, obţinem

$$m = \frac{M_1}{\alpha + 1}\left[e^{q(t_1 - t)(\alpha + 1)} - 1\right], \tag{6}$$

făcînd $t = 0$, obţinem masa combinatului la pornire

$$m_0 = \frac{M_1}{\alpha + 1}\left[e^{q t_1 (\alpha + 1)} - 1\right].$$

În cazul satelitului 2

$M_1 = 500$ kg ; $a = 104$ m/s^2 ; $g_m = 9{,}5$ m/s^2 ; $t_1 = 76$ s ; adoptînd $v = 2\,800$ m/s, şi valoarea medie $\alpha = 0{,}4$ obţinem

$$m_0^s = \frac{500}{1{,}4}\left[e^{\frac{104 + 9{,}5}{2\,800}\cdot 76 \cdot 1{,}4} - 1\right],$$

$$m_0^s = \frac{500}{1{,}4}\cdot 74 = \qquad 26\,400 \text{ kg},$$

Masa containerului, $0{,}4 \cdot 26\,400 = \underline{10\,600}$ kg

Masa totală a rachetei la pornire $= 37\,000$ kg

randamentul pentru $t = t_1$, $V = V_2 = 7\,900$ m/s, este $\rho = \frac{7\,900}{2\,800} = 2{,}82$.

Puterea medie a motoarelor propulsînd racheta este, cu un randament mediu de 0,5

$$P_m = \frac{26\,400 - 8 \cdot 10^{\sigma}}{76} \cdot 0{,}5 = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ kW}.$$

Determinarea masei de combinat ars pe secundă şi a puterii motoarelor

14. Derivînd relaţia (6), obţinem pentru masa de combinat ars pe secundă, la momentul t

$$-\frac{dm}{dt} = M_1\, q\, e^{q(t_1 - t)(\alpha + 1)},$$

iar pentru puterea motoarelor, la momentul t

$$P = -\rho c \frac{dm}{dt} = M_1 (a + g_m)\, at\; e^{q(t_1 - t)(\alpha + 1)}.$$

15. *Pentru a demonstra imposibilitatea* lansării unei rachete, formată dintr-o singură bucată, pe orbita şi cu viteza satelitului 2, ne vom servi de aceeaşi ecuaţie (5), care devine

$$\frac{dm'}{M_0 + m'} = -\frac{a + g_m}{v}\, dt = -q\, dt$$

unde m' este masa combinatului, iar $M_0 = M + \alpha m'_0$, m'_0 fiind masa combinatului la pornire. Obținem prin integrare

$$m'_0 = M_0\,[e^{qt_1} - 1] = (M_1 + \alpha m'_0)\,(e^{qt_1} - 1),$$

de unde

$$M_0 = \frac{M_1}{\dfrac{1}{e^{qt_1} - 1} - \alpha},$$

dar $e^{qt_1} = e^{4{,}31} = 75$,
deci

$$M_0 = \frac{M_1}{\dfrac{1}{74} - \alpha}.$$

Ar trebui deci, ca $\alpha < \dfrac{1}{74}$, ceea ce este o imposibilitate.

Racheta pentru lună

16. Combinatul necesar pentru ca o rachetă să ajungă la nivelul centrului Lunei, se poate calcula (fig. 3) în modul următor:

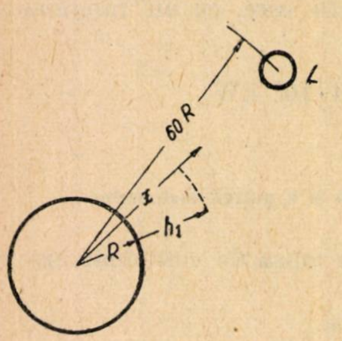


Fig. 3

Pentru ca masa M_1 a ultimului etaj al rachetei, să poată ajunge la înălțimea 60 R, plecînd de la înălțimea h_1 deasupra Pămîntului, prin propria sa inerție, trebuie lansată cu o viteză V_3, dată de relația

$$\frac{1}{2}\,M_1 V_3^2 = M_1 g R^2 \int_{R+h_1}^{60\,R} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= M_1 g R^2 \left[\frac{1}{R + h_1} - \frac{1}{60\,R}\right],$$

pentru $h_1 = 0{,}6 \cdot 10^6$ m; $60\,R$ fiind distanța la Lună, obținem

$$V_3^2 = 114.10^6, \quad \text{și} \quad V_3 = 10\ 700 \text{ m/s}.$$

Pentru a obține această viteză pe distanța h_1, accelerația este

$$a' = \frac{V_3^2}{2h_1} = \frac{114}{1{,}2} = 96 \text{ m/s}^2,$$

iar timpul necesar ajungerii la înălțimea h_1 este

$$t_1 = \frac{V_3}{a'} = 112 \text{ s}.$$

Luînd pentru racheta lunară $M_1 = 1\,500$ kg, adoptînd $\alpha = 0{,}2$, $v = 3\,000$ m/s, obţinem potrivit formulei (7)

$$m_0^l = \frac{1\,500}{1{,}2}\left[e^{\frac{96+9{,}6}{3\,000}\cdot 112\cdot 1{,}2} - 1\right] = 140\,000 \text{ kg},$$

Masa containerului, $0{,}2\cdot 140\,000 = \underline{28\,000}$ kg

Masa totală a rachetei la pornire 168 000 kg.

Dacă se măreşte viteza de lansare la 10 800 m/s, racheta ajunge la nivelul Lunei cu viteza de 1 730 m/s, care compunîndu-se cu viteza datorită atracţiei Lunei, este suficientă pentru ca racheta să devină un satelit al Lunei.

Durata traiectului Pămînt-Lună, T, se obţine integrînd relaţia

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{V_3^2 - 2g\,R^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+h_1}\right)}},$$

punînd

$$a = \frac{2gR^2}{V_3^2 - \frac{2gR^2}{R+h_1}}; \quad b = \sqrt{V_3^2 - \frac{2gR^2}{R+h_1}},$$

obţinem

$$T = \frac{1}{b}\left[\sqrt{x^2 + ax} - \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1}\right]_{R+h_1}^{60\,R},$$

deci, $T = 217\,000$ s $= 60$ ore.

Al treilea satelit

17. Presupunem satelitul lansat pe o orbită circulară, situată la înălţimea $H = 1{,}74\cdot 10^6$ m, cu viteza corespunzînd acestei înălţimi

$$V_0^2 = k\,\frac{M_p}{R+H} = 49{,}4\cdot 10^6,$$

de unde $V_0 = 7\,030$ m/s.

Dacă propulsia se face pînă la înălţimea $h = 0{,}5\cdot 10^6$ m, viteza rachetei, pentru a ajunge pe orbită, cu viteza V, trebuie să fie

$$V_3 = \sqrt{V_0^2 + 2gR^2\left[\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+H}\right]} = 7\,680 \text{ m/s}.$$

Accelerația, presupusă constantă, și durata propulsiei sînt

$$a = \frac{V_3^2}{2h} = 59\,\mathrm{m/s^2} \quad ; \quad t_1 = \frac{V_3}{a} = 130 \text{ s.}$$

Masa satelitului fiind 1 327 kg, obținem pentru masa combinatului la pornire, aplicînd formula (6), cu $\alpha = 0{,}4$

$$m_0 = \frac{1\,327}{1{,}4}\left[e^{\frac{68{,}5\cdot 130\cdot 1{,}4}{2\,800}} - 1\right] = 79\,000 \text{ kg},$$

Masa containerului 0,4·79 000 = 32 000 kg

Masa totală a rachetei la pornire = 111 000 kg.

Racheta cu număr restrîns de etaje

18. Valorile obținute, în paragrafele precedente, pentru masele de combinat, sînt valori minime, obținute în presupunerea, practic nerealizabilă, a unui număr infinit de etaje.

În cazul unui număr restrîns de etaje, masele calculate de combinat, sînt mult mai mari; ele cresc repede cu valoarea coeficienților α, reprezentînd pentru fiecare etaj, raportul între masa containerilor și masa inițială de combinat.

Formula cu care se poate calcula masa m inițială a unui etaj, funcționînd între momentele t_a și t_b, ale propulsiei, este

$$m_0 = (\mathfrak{M} + \alpha m_0)\left[e^{\frac{a + g_m}{v}(t_b - t_a)} - 1\right], \tag{8}$$

în care, $\mathfrak{M}$, este masa tuturor etajelor superioare etajului considerat.

Cazul satelitului 2

Presupunînd 3 etaje, funcționînd între momentele propulsiei $t_0 = 0$; $t_1 = 30$ s; $t_2 = 60$ s; $t_3 = 76$ s; admițînd $\alpha_1 = 0{,}2$; $\alpha_2 = 0{,}3$; $\alpha_3 = 0{,}6$; obținem, aplicînd formula (8), fiecărui etaj, și sumînd rezultatele :

Masa inițială a combinatului	31 000 kg,
Masa containerilor inclusiv motoarele	7 000 kg,
Masa rachetei la pornire	38 000 kg.

Cazul satelitului 3

19. Trei etaje, funcționînd între momentele $t_0 = 0$; $t_1 = 43$ s; $t_2 = 86$ s; $t_3 = 130$ s; admițînd $\alpha_1 = 0{,}15$; $\alpha_2 = 0{,}25$; $\alpha_3 = 0{,}35$; obținem procedînd ca mai sus

Masa inițială a combinatului	134 800 kg,
Masa containerilor și motoarelor	26 200 kg,
Masa rachetei la pornire	161 000 kg.

Necunoscînd masele reale ale motoarelor şi containerilor etajelor, cifrele de mai sus le considerăm maxime, iar pe cele obţinute în presupunerea numărului de etaje infinit, le considerăm minime, valorile reale trebuind să se găsească între aceste două limite.

REZUMAT

20. Am urmărit, în prezenta lucrare, a stabili esenţial următoarele:

a) Reuşita lansării unui satelit se datoreşte faptului — *care după cît ştim, n-a fost încă scos în evidenţă* — că motorul cu ejecţie, comunică rachetei purtînd satelitul, nu numai energia cinetică corespunzătoare arderii combinatului, dar şi energia cinetică pierdută de combinat prin ejecţia sa. Faptul se exprimă matematic, prin aceea că, raportul între *energia produsă de motor şi transmisă rachetei*, şi între *energia calorifică consumată de motor*, adică *randamentul*, în sensul obişnuit al acestei noţiuni pentru motoarele termice, *poate deveni superior unităţii pentru vitezele mari ale rachetei.* Această observaţie explică enorma superioritate a motoarelor cu ejecţie, faţă de alte motoare termice, şi folosirea lor exclusivă în navigaţia cosmică.

b) În ziare şi reviste ştiinţifice, s-a descris detaliat şi s-au dat fotografii ale satelitului însuşi. În ce priveşte însă, formaţia rachetei purtătoare, numărul etajelor, natura combinatului şi mai ales *cantitatea de combinat necesară lansării*, nu s-a publicat nimic.

Încercarea din lucrarea de faţă, de a calcula pe baze ştiinţifice acceptabile, ordinul de mărime al cantităţii de combinat necesară lansării, corespunde unei legitime curiozităţi ştiinţifice, chiar pentru specialişti în materie.

Traiectoria satelitului după lansare

21. Care este motivul pentru care satelitul sfîrşeşte prin a cădea pe pămînt? Desigur că motivul căderii este rezistenţa la mişcare a mediului (particule sau gaze cosmice); dar această rezistenţă ar trebui, în aparenţă cel puţin, să-i micşoreze viteza, şi deci potrivit formulei $v^2 = k\,\frac{M_p}{R}$, să-i mărească raza R, adică să îndepărteze satelitul de pămînt.

În realitate, după cum vom vedea, rezistenţa mediului are ca efect, nu o scădere, ci o sporire a vitezei, datorită atracţiei pămîntului.

Să considerăm într-adevăr (fig. 4) satelitul animat de viteza v pe o orbită de rază R la timpul t. În timpul dt, dacă atracţia Pămîntului nu ar exista, satelitul ar parcurge distanţa vdt, şi ar ajunge în M; dar sub acţiunea acceleraţiei gravitaţiei el parcurge spre centru distanţa, $\frac{1}{2}\frac{v^2}{R}(dt)^2$, ajungînd în M', exact pe cercul de rază R.

Dar din cauza rezistenţei mediului, satelitul în timpul dt ar ajunge în M_1, deplasîndu-se însă, în acelaşi timp spre centru cu aceeaşi cantitate, $\frac{1}{2}\frac{v^2}{R}(dt)^2$, ajunge în M'_1, punct prin care trece traiectoria satelitului, care își mărește astfel curbura, raza R' este mai mică ca R și potrivit formulei $v^2 = K \frac{M_b}{R}$, viteza v crește.

Așadar, satelitul descrie o spirală cu viteză crescîndă. Satelitul cade, sub influența gravitației de-a lungul spiralei, și ajunge la Pămînt dacă nu ar arde pe drum, cu o viteză, care poate fi mai mare ca aceea cu care ajunsese pe orbită.

Interspirele spiralei sînt cu atît mai mari, cu cît efectul mediului este mai mare, acest efect fiind aproximativ proporțional cu viteza, cu densitatea mediului și cu raportul $\frac{S}{m}$, între suprafața S oferită rezistenței mediului, și masa m a satelitului sau rachetei.

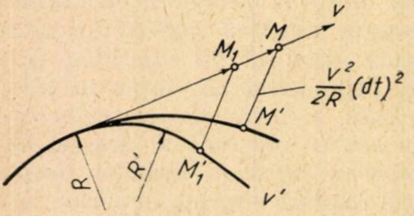


Fig. 4

Raportul $\frac{S}{m}$ determină și timpul ajungerii în atmosferă de densitate provocînd arderea satelitului sau rachetei. Raportul $\frac{S}{m}$ fiind mai mare pentru rachetă, aceasta a dispărut înaintea satelitului.

Este de observat că toate rezonamentele precedente, presupun că accelerația tangențială, datorită rezistenței mediului, proporțională cu $\frac{S}{m}$ este neglijabilă față de accelerația normală datorită gravitației. În cazul contrar, relația $v^2 = K \frac{M_p}{R}$ nu mai este exactă și nici rezonamentele precedente. Dacă s-ar arunca din satelit spre Pămînt o sferă de suprafață suficientă și de densitate destul de mică, $\left(\frac{S}{m} \text{ mare}\right)$ sfera ar ajunge nevătămată pe pămînt ca un parașutist, întocmai după cum aruncînd dintr-un turn înalt spre Pămînt, cu viteza v, o sferă de plumb $\left(\frac{S}{m} \text{ mic}\right)$, ea va ajunge la pămînt cu o viteză mai mare ca v; pe cînd o sferă ușoară $\left(\frac{S}{m} \text{ mare}\right)$ ar ajunge la pămînt cu o viteză mai mică decît v.

Dar și Luna este un satelit, care ar trebui să se miște pe o spirală cu interspire extrem de mici, din cauză că raportul $\frac{S}{m}$ este foarte mic; perioada de revoluție în jurul Pămîntului ar trebui să scadă, și luna să se apropie cu viteză crescîndă de pămînt.

Așa ar fi dacă Pămîntul ca și Luna, ar fi solide indeformabile, fără apă și atmosferă, cum vor fi într-un viitor îndepărtat.

În realitate, după cum se știe, mareele frînează viteza de rotație a Pămîntului și mărește în consecință perioada de revoluție a Lunei.

Mărirea perioadei *calculată*, pare superioară măririi perioadei *observată*; diferența ar reprezenta efectul datorit rezistenței mediului cosmic.

NOTĂ. FORŢA CENTRIFUGĂ

În ziarele şi revistele de popularizare din ţară şi străinătate, se explică faptul că satelitul nu cade pe pămînt, atribuindu-l egalizării forţei de atracţie a Pămîntului, prin forţa centrifugă ; sprijinind explicaţia printr-o figură unde se vede opoziţia între cele două forţe (vezi ,,Science et Vie'' noiembrie 1957) ; aceeaşi explicaţie se găseşte şi în cartea lui Oberth.

În realitate satelitul *nu* este supus forţei centrifuge, ci unei forţe centripete, datorită atracţiei Pămîntului, forţă care menţine satelitul pe orbită, împiedicîndu-l de a se mişca, prin propria-i inerţie în linie dreaptă (vezi fig. 4).

Forţa centrifugă — care este o forţă de reacţie — este aplicată Pămîntului care este atras de satelit cu o forţă egală şi de sens contrar, cu atracţia Pămîntului asupra satelitului.

Tot astfel, vagonul de cale ferată care se mişcă pe o curbă, *nu* este supus unei forţe centrifuge, ci unei forţe centripete exercitată de şină asupra vagonului, iar ca reacţie, vagonul exercită asupra şinei forţa centrifugă.

Tot prin forţa centrifugă se caută a se explica şi pierderea de greutate a satelitului şi obiectelor dintr-însul, cînd satelitul se mişcă pe orbită.

În realitate, pierderea de greutate este datorită căderii libere a satelitului sub influenţa gravitaţiei. *Greutatea* unui corp nu intervine decît atunci cînd *gravitaţiei*, i se opune, fie un reazem, cum este cazul obiectelor rezemate pe pămînt, fie o forţă ascendentă (echivalentă cu un reazem) cum este cazul acceleraţiei satelitului, în timpul propulsării sale.

Primită la redacţie la 13 noiembrie 1958.

ЭНЕРГЕТИКА ЗАПУСКА СПУТНИКОВ. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор доказывает выражение к.п.д. реактивных двигателей космических ракет:

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{nc}}\, V = \frac{2}{n} \frac{V}{v},$$

где V скорость ракеты, $c = 8{,}10^6$ джоуль/кг теплотворности смеси (топливо+окислитель); n — коэффициент качества двигателя; $v = \sqrt{\frac{2c}{n}}$ — скорость эжекции; при $n = 2$ получается:

$$\rho = \frac{V}{2800}$$

таким образом при $v > 2800$ м/с $\rho > 1$.

Дифференциальное уравнеие ракеты, запущенной по вертикали есть:

$$-\rho c \frac{dm}{dt} = (M + m)(a + g_m) V$$

где, *при времени* t, m — масса горючей смеси, a — предположительно постоянное ускорение; g_m — среднее ускорение силы тяжести; $M = M_1 + \alpha m$ — масса ракеты без горючей смеси, M_1 — масса спутника, $\alpha = 0{,}4$ —

коэффициент. (Это выражение M равносильно предположению бесконечного количества ступеней ракеты).

Путем интегрирования соотношения 1, получается масса горючей смеси при запуске ракеты:

$$m_0 = \frac{M_1}{\alpha + 1}\left[e^{\frac{(a+g_m)(\alpha+1)t_1}{2800}} - 1\right],$$

где t_1 — продолжительность сгорания топливной смеси.

Эта формула применима в случае первых двух спутников и ракеты, запущенной в направлении луны.

Применительно к случаю ракеты, составленной из ограниченного количества ступеней, приводится действительная для любой ступени, формула:

$$m_0 \doteq (\mathfrak{M} + \alpha m_0)\left[e^{\frac{(a+g_m)}{v}(t_b - t_a)} - 1\right],$$

где m_0 — масса горючей смеси при запуске ракеты;

$\mathfrak{M}$ — масса ступеней, находящихся выше рассматриваемой ступени;

$t_b - t_a$ — продолжительность работы ступени.

SOME ENERGY CONSIDERATIONS ON THE LAUNCHING OF ARTIFICIAL SATELLITES. EFFICIENCY OF ROCKET ENGINES

SUMMARY

The author demonstrates the efficiency formula for the jet engines which propel cosmic missiles :

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{nc}}\, V = \frac{2}{n}\,\frac{V}{v}$$

where V is the missile speed ; $c = 8.10^6$ joules/kg, the calorific power of the compound (fuel-oxygen) ; n =the engine quality factor ; $v = \sqrt{\frac{2c}{n}}$, the jet velocity ; for $n = 2$, one obtains

$$\rho = \frac{V}{2\,800}$$

wherefore, for $v > 2\,800$ m/s, $\rho > 1$.

The differential equation of a vertically hurled missile is :

$$-\rho c \frac{dm}{dt} = (M + m)(a + g_m)\, V \qquad (1)$$

where, at the time t, m is the mass of the compound ; a, the acceleration assumed to be constant ; g_m, the mean acceleration of free fall ; $M = M_1 + \alpha m$ is the mass of the missile without the compound, M_1 being the satellite mass and $\alpha = 0.4$, a coefficient. (This expression for M is equivalent to assuming an infinite number of stages for the missile).

By integration of expression (1), the mass of the compound at the start of the missile is obtained

$$m_0 = \frac{M_1}{\alpha + 1}\left[e^{\frac{(a + g_m)(\alpha + 1) t_1}{2\,800}} - 1\right],$$

t_1 being the duration of the missile propulsion.

The above formula is applied to the case of the two satellites as well as to a missile to the moon.

In the case of a missile comprising a limited number of stages, the following formula is given for any of the stages

$$m_0 (\mathfrak{M} + \alpha m_0)\left[e^{\frac{(a + g_m)}{v}(t_b - t_a)} - 1\right]$$

where m is the mass of the compound at the start ; $\mathfrak{M}$, the mass of the stages superior to the one considered ; $t_o - t_a$, the duration of operation of the stage.

NOTE

CONSIDERAȚII ASUPRA METODEI ANALITICE DE CERCETARE A MECANISMELOR PLANE PE BAZA VARIABILELOR COMPLEXE

DE

CHRISTIAN PELECUDI și RADU BOGDAN

În prezentul articol, vom căuta să expunem modul de calcul sistematizat cu variabile complexe în sinteza mecanismelor plane cu cuple inferioare. Metodele analitice cu folosirea variabilelor complexe au fost începute la sfîrșitul secolului al XIX-lea cu lucrările lui Darboux, ele fiind apoi prelucrate și dezvoltate în U.R.S.S. de S. A. Gherșgorn L. G. Loițianski, A. I. Lurie și Z. S. Bloch.

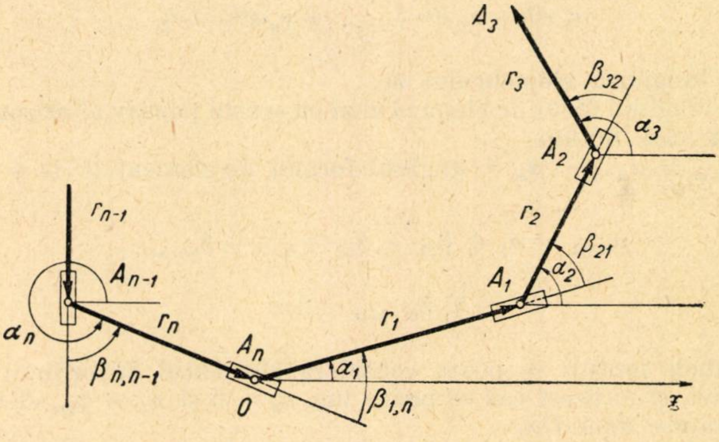

A_3
r_3
β_{32}
α_3
A_2
r_2
β_{21}
α_2
A_1
r_{n-1}
A_{n-1}
r_n
r_1
α_n
A_n
α_1
$\beta_{n,n-1}$
O
$\beta_{1,n}$
x

Fig. 1

Mecanismele plane cu cuple inferioare pot fi formate prin suprapunerea succesivă a unor lanțuri cinematice simple (fiecare element intrînd în cel mult două cuple cinematice). Cercetarea acestor lanţuri şi extinderea rezultatelor pentru diferite mecanisme şi lanţuri complexe, conduc la procedee destul de generale, care pot fi folosite pentru rezolvarea diferitelor probleme practice de sinteză. Vom utiliza numai lanţuri cinematice închise, ştiut fiind că un lanţ deschis poate fi întotdeauna înlocuit printr-un lanţ închis, considerînd distanţa între punctele sale extreme *A* şi *B* ca un element suplimentar oarecare cu lungime variabilă, legătura la celelalte elemente făcîndu-se prin cuple de translaţie şi de rotaţie. De asemenea, pentru a examina lanţurile cinematice simple cele mai generale, vom considera elementele legate prin cuple duble formate dintr-o cuplă de translaţie şi una de rotaţie (fig. 1).

1. STUDIUL DEPLASĂRILOR

Un lanţ cinematic simplu închis de felul arătat mai sus, formează un contur poligonal, cu laturile variabile cu timpul atît ca lungime cît şi ca poziţie. În acest sens este indicată întrebuinţarea variabilelor complexe, deoarece pentru conturul poligonal se poate scrie relaţia de închidere vectorială

$$\overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = 0 \qquad (1)$$

şi prin întrebuinţarea reprezentării complexe a vectorilor plani, se obţine

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0, \qquad (2)$$

sau

$$r_1 e^{i\alpha_1} + r_2 e^{i\alpha_2} + \ldots + r_n e^{i\alpha_n} = 0, \qquad (3)$$

unde

r_m = lungimea elementului m,

α_m = unghiul făcut de elementul m cu sensul pozitiv al orizontalei Ox.

Dacă mai notăm

$\beta_{m+1.m} = \alpha_{m+1} - \alpha_m$ = unghiul format de elementele $(m+1)$ şi (m),

avem

$$\alpha_{m+1} = \alpha_1 + \beta_{21} + \beta_{32} + \cdots + \beta_{m+1.m}, \qquad (4)$$

$$\sum_1^n \beta_{m+1.m} = 2\pi.$$

În unele lanţuri se poate considera elementul de ordinul n drept bază, imobil, şi în acest caz se poate lua $\alpha_n = 0$ şi $\alpha_1 = \beta_{1.n}$ elementul n fiind suprapus axei Ox.

Pentru o poziţie oarecare k a lanţului se va putea scrie asemănător

$$\sum_{m=1}^{n} z_{mk} = \sum_{m=1}^{n} r_{mk}\, e^{i\alpha_{mk}} = 0, \qquad (5)$$

unde $z_{mk} = r_{mk}\, e^{i\alpha_{mk}}$ este reprezentarea complexă a vectorului corespunzător elementului m în poziţia k. Pentru poziţia iniţială, caracterizată prin $k = 1$, convenim să lucrăm fără indice. Trecerea unui element din poziția inițială într-o altă poziție k corespunde înmulțirii cu vectorul complex

$$\mathfrak{z}_{mk} = \frac{z_{mk}}{z_m} = \rho_{mk}\, e^{i\varphi_{mk}}, \tag{6}$$

$$\rho_{mk} = \frac{r_{mk}}{r_m}, \qquad \varphi_{mk} = \alpha_{mk} - \alpha_m,$$

astfel că ecuația (5) devine

$$\sum_{m=1}^{n} z_{mk} = \sum_{m=1}^{n} z_m\, \mathfrak{z}_{mk} = 0. \tag{7}$$

Pentru studierea vitezelor și accelerațiilor de diferite ordine, vom deriva relația (3) în raport cu timpul. Astfel accelerația de ordinul $(p - 1)$ (sau viteza de ordinul p) se obține luînd derivata de ordinul p

$$\frac{d^p}{dt^p} \sum_{m=1}^{n} r_m\, e^{i\alpha_m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{d^p}{dt^p} (r_m\, e^{i\alpha_m}) = 0, \tag{8}$$

sau

$$\sum_{m=1}^{n} \left[\sum_{q=0}^{p} C_p^q \frac{d^{(p-q)}\, r_m}{dt^{(p-q)}} \cdot \frac{d^q \left(e^{i\alpha_m}\right)}{dt^q} \right] = \sum_{m=1}^{n} i\, z_m\, \eta_m^{(p)} = 0, \tag{9}$$

cu

$$\eta_m^{(p)} = - i \sum_{q=0}^{p} C_p^q \frac{1}{r_m} \cdot \frac{dr_m^{(p-q)}}{dt^{(p-q)}} \cdot \frac{1}{e^{i\alpha_m}} \cdot \frac{d^q \left(e^{i\alpha_m}\right)}{dt^q} \tag{10}$$

și relația prin care se obține derivata de ordinul q, în funcție de derivatele pînă la ordinul $(q - 1)$ în raport cu timpul ale funcției $e^{i\alpha_m}$

$$\frac{d^q \left(e^{i\alpha_m}\right)}{dt^q} = i \sum_{r=0}^{q-1} C_{q-1}^r \frac{d_{\alpha_m}^{(q-r)}}{dt^{(q-r)}} \cdot \frac{d^r \left(e^{i\alpha_m}\right)}{dt^r}. \tag{11}$$

Pentru o poziție oarecare k a lanțului, rotind vectorii cu $\pi/2$ în sens negativ, se poate scrie relația generală

$$\sum_{m=1}^{n} z_{mk}\, \eta_{mk}^{(p)} = \sum_{m=1}^{n} z_m\, \mathfrak{z}_{mk}\, \eta_{mk}^{(p)} = \sum_{m=1}^{n} z_m\, \lambda_{mk}^{(p)} = 0, \quad \lambda_{mk}^{(p)} = \mathfrak{z}_{mk}\, \eta_{mk}^{(p)} \quad \eta_{mk}^{(0)} = 1. \tag{12}$$

Această relație complexă (12) este echivalentă cu două ecuații reale

$$R\left(\sum z_m\, \lambda_{mk}^{(p)}\right) = 0, \quad I\left(\sum z_m\, \lambda_{mk}^{(p)}\right) = 0,$$

ceea ce este tot una cu atașarea și a relației conjugate complexe

$$\sum_{m=1}^{n} \bar{z}_m \cdot \bar{\lambda}_{mk}^{(p)} = 0. \tag{12'}$$

2. STUDIUL VITEZELOR

Pentru aceasta se ia derivata I, $p = 1$, şi se obţine pentru elementul de ordinul m

$$v_m = \frac{dz_n}{dt} = \frac{dr_m}{dt} \cdot e^{i\alpha_m} + i\frac{d\alpha_m}{dt} r_m e^{i\alpha_m} \tag{13}$$

unde

$\frac{dr_m}{dt} = u_m$ este modulul vitezei în mişcarea rectilinie relativă de deplasare a nodului m faţă de elementul m;

$\frac{d\alpha_m}{dt} = \omega_m$ este modulul vitezei unghiulare absolute a elementului m.

Rezultă

$v_{rm} = u_m e^{i\alpha_m}$ viteza relativă a nodului m faţă de elementul m;

$v_{tm} = i\,\omega_m z_m$ viteza de transport a nodului m corespunzătoare rotaţiei elementului m;

$v_m = v_{rm} + v_{tm}$ viteza nodului m, faţă de un sistem de axe în translaţie cu originea în nodul $(m-1)$ (fig. 2)

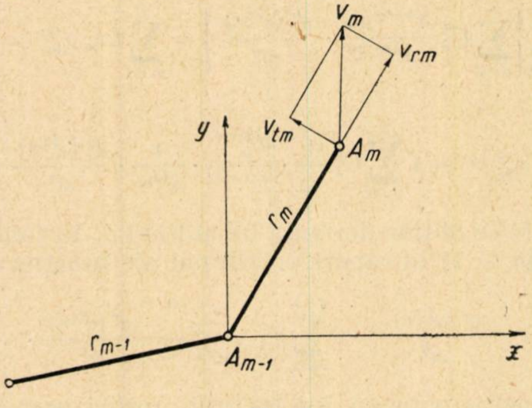


Fig. 2

$$v_m = u_m e^{i\alpha_m} + i\,\omega_m r_m e^{i\alpha_m} = i\,z_m \eta_m^{(1)}, \qquad \eta_m^{(1)} = \omega_m - \frac{iu_m}{r_m}. \tag{14}$$

Pentru o poziţie oarecare k a lanţului, considerînd vectorii viteză rotiţi cu $\pi/2$ în sens negativ, se obţine

$$\begin{gathered} -i\sum_{m=1}^{n} v_{mk} = \sum_{m=1}^{n} z_{mk}\,\eta_{mk}^{(1)} = \sum_{m=1}^{n} z_m\,\mathfrak{z}_{mk}\,\eta_{mk}^{(1)} = 0, \\ \eta_{mk}^{(1)} = \omega_{mk} - \frac{iu_{mk}}{r_m\,\rho_{mk}}, \end{gathered} \tag{15}$$

unde v_{mk} reprezintă viteza nodului m în poziţia k, faţă de un sistem de axe în translaţie cu originea în nodul $(m-1)$.

3. STUDIUL ACCELERAŢIILOR

În acelaşi fel, luînd derivata a II-a, $p = 2$, obţinem pentru elementul de ordinul m

$$a_m = \frac{dv_m}{dt} = \frac{d^2r_m}{dt^2} e^{i\alpha_m} + 2i \frac{d\alpha_m}{dt} \cdot \frac{dr_m}{dt} e^{i\alpha_m} + i \frac{d^2\alpha_m}{dt^2} r_m e^{i\alpha_m} - \left(\frac{d\alpha_m}{dt}\right)^2 r_m e^{i\alpha_m}, \quad (16)$$

unde

$\frac{d^2r_m}{dt^2} = w_m$ este modulul acceleraţiei în mişcarea rectilinie relativă a nodului m faţă de elementul m,

$\frac{d\alpha^2_m}{dt^2} = \varepsilon_m$ este modulul acceleraţiei unghiulare absolute în mişcarea de rotaţie a elementului m.

Rezultă, considerînd conform figurii 3, un sistem de axe mobil Ox_1y_1 legat de elementul m, cu originea în nodul $(m - 1)$, în mişcare de rototranslaţie şi un sistem de axe Oxy în mişcare de translaţie cu originea în acelaşi nod $(m - 1)$ următoarele :

$a_{rm} = w_m e^{i\alpha_m}$ acceleraţia relativă a nodului m în mişcarea sa rectilinie pe elementul m,

$a_{tr\tau m} = i \varepsilon_m z_m$ acceleraţia de transport tangenţială a nodului m din mişcarea de rotaţie a elementului m,

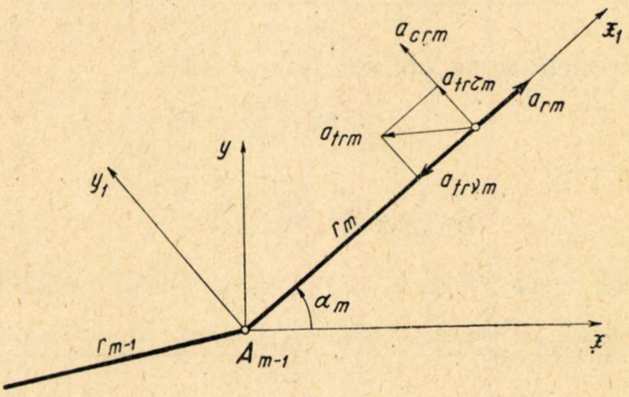


Fig. 3

$a_{tr\nu m} = - \omega_m^2 z^m$ acceleraţia de transport normală a nodului m din mişcarea de rotaţie a elementului m,

$ac_{r.m} = 2i\omega_m v_{rm}$ acceleraţia complementară Coriolis a nodului m,

$$a_m = iz_m \eta_m^{(2)} \qquad \eta_m^{(2)} = \varepsilon_m + i \omega_m^2 + \frac{2\omega_m u_m - iw_m}{r_m} \quad (17)$$

și de asemenea,

$$
\begin{gathered}
-i\sum_{m=1}^{n} a_{mk}=\sum_{m=1}^{n} z_{mk}\,\eta_{mk}^{(2)}=\sum_{m=1}^{n} z_m\,\mathfrak{z}_{mk}\,\eta_{mk}^{(2)}=0,\\
\eta_{mk}^{(2)}=\varepsilon_{mk}+i\,\omega_{mk}^{2}+\frac{2\omega_{mk}\,u_{mk}-i\,w_{mk}}{r_m\,\rho_{mk}},
\end{gathered}
\tag{18}
$$

unde a_{mk} este accelerația nodului m în poziția k, față de sistemul de axe Oxy în translație cu originea în nodul $(m-1)$.

4. STUDIUL ACCELERAȚIILOR DE ORDINUL II ȘI III

Pentru accelerația de ordinul II, luind în formulele (9) — (12) $p = 3$ și notînd

$$
\frac{d^3 r_m}{dt^3}=\dot{w}_m\quad \frac{d^3\alpha_m}{dt^3}=\dot{\varepsilon}_m,
\tag{19}
$$

se obține

$$
\begin{gathered}
\sum_{m=1}^{n} z_m\,\mathfrak{z}_{mk}\,\eta_{mk}^{(3)}=0,\\
\eta_{mk}^{(3)}=\dot{\varepsilon}_{mk}-\omega_{mk}^{3}+3i\,\omega_{mk}\,\varepsilon_{mk}+\\
+\frac{3\omega_{mk}\,w_{mk}+3\varepsilon_{mk}\,u_{mk}+3i\,u_{mk}\,\omega_{mk}^{2}-i\,\dot{w}_{mk}}{r_m\,\rho_{mk}},
\end{gathered}
\tag{20}
$$

iar pentru accelerația de ordinul III, $p = 4$

$$
\begin{gathered}
\frac{d^4 r_m}{dt^4}=\ddot{w}_m\quad \frac{d^4\alpha_m}{dt^4}=\ddot{\varepsilon}_m,\\
\sum_{m=1}^{n} z_m\,\mathfrak{z}_{mk}\,\eta_{mk}^{(4)}=0,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
\eta_{mk}^{(4)}=\ddot{\varepsilon}_{mk}-6\,\omega_{mk}^{2}\,\varepsilon_{mk}+i\left(4\,\omega_{mk}\,\dot{\varepsilon}_{mk}+3\,\varepsilon_{mk}^{2}-\omega_{mk}^{4}\right)+\\
+\frac{4\omega_{mk}\,\dot{w}_{mk}+4u_{mk}\,\dot{\varepsilon}_{mk}+6w_{mk}\,\varepsilon_{mk}-4u_{mk}\,\omega_{mk}^{3}+i\left(6w_{mk}\,\omega_{mk}^{2}+12\,u_{mk}\,\omega_{mk}\,\varepsilon_{mk}-\ddot{w}_{mk}\right)}{r_m\,\rho_{mk}}.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Menționăm ca o primă aplicare a ecuațiilor privind accelerațiile de ordinul II și III, sinteza mecanismelor după valorile extreme date anticipat ale vitezelor sau accelerațiilor.

★

Revenind la ecuațiile generale (12) și (12′)

$$
\sum_{m=1}^{n} z_m\,\lambda_{mk}^{(p)}=0,\qquad \sum_{m=1}^{n}\bar{z}_m\,\bar{\lambda}_{mk}^{(p)}=0,
$$

remarcăm că ele sînt liniare în raportul cu mărimile z_m $(\bar{z}_m)$, care determină lanțul considerat în poziția sa inițială. De asemenea, așa cum sînt constituite, ele sînt foarte indicate pentru rezolvarea unui anumit gen de probleme în sinteza mecanismelor și anume satisfacerea legilor de mișcare într-un anumit număr finit, eventual maxim, de puncte. În consecință, dacă prescrierea mărimilor care intră în componența coeficienților ecuațiilor (12) se face astfel

$$\lambda^{(0)}_{mk} = \mathfrak{z}_{mk}\,(\rho_{mk},\ \varphi_{mk}),$$

în s_0 poziții ale lanțului (inclusiv poziția inițială) ;

$$\lambda^{(1)}_{mk} = \mathfrak{z}_{mk}\,\eta^{(1)}_{mk}\,(\rho_{mk},\ \varphi_{mk},\ u_{mk},\ \omega_{mk}),$$

în s_1 poziții din cele s_0 poziții anterioare ;

$$\lambda^{(2)}_{mk} = \mathfrak{z}_{mk}\,\eta^{(2)}_{mk}\,(\rho_{mk},\ \varphi_{mk},\ u_{mk},\ \omega_{mk},\ w_{mk},\ \varepsilon_{mk}), \tag{23}$$

în s_2 poziții din cele s_1 poziții anterioare ;

. . . .

$$\lambda^{(p)}_{mk} = \mathfrak{z}_{mk}\,\eta^{(p)}_{mk}\,(\rho_{mk},\ \varphi_{mk},\ u_{mk},\ \omega_{mk},\ w_{mk},\ \varepsilon_{mk},\ \dot{w}_{mk},\ \dot{\varepsilon}_{mk},\ \ldots .\ w^{(p-2)}_{mk},\ \varepsilon^{(p-2)}_{mk})$$

în s_p poziții din cele $s_p - 1$ poziții anterioare cu $s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_p$, atunci pentru determinarea lanțului vor fi $s = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_p$ ecuații omogene liniare cu n necunoscute z_m. Matricea sistemului de ecuații, numită matricea lanțului, este

$$M = \left\|\begin{matrix} \lambda^{(0)}_{mk} \\ \lambda^{(1)}_{mk} \\ \ldots \\ \lambda^{(p)}_{mk} \end{matrix}\right\| \quad \begin{matrix} m = 1 \ldots n, \\ k_{(p)} = 1 \ldots s_p \,. \end{matrix} \tag{24}$$

Cazurile de compatibilitate sau nedeterminare, sînt cunoscute din teoria ecuațiilor respective.

Observații

a) Dăm mai jos cîteva cazuri particulare ale mărimilor reale din expresiile coeficienților $\lambda^{(p)}_{mk}$:

— pentru poziția inițială a lanțului

$$\begin{gathered} \rho_{m.1} = 1, \qquad \varphi_{m.1} = 0, \\ \lambda^{(0)}_{m.1} = \mathfrak{z}_{m.1} = 1, \quad m = 1 \ldots n\,; \end{gathered} \tag{25}$$

— pentru elemente legate numai prin cuple de rotație (fig. 4)

$$\rho_{mk} = 1 \qquad u_{mk} = 0 \qquad w_{mk} = \dot{w}_{mk} = \ddot{w}_{mk} = \ldots = 0\,; \tag{26}$$

— pentru elemente m legate de elementele $m+1$ cu cuple de translaţie (fig. 5)

$$\begin{gathered}\beta_{m+1,mk} = \alpha_{m+1,k} - \alpha_{m,k} = \text{const.},\\ \varphi_{m+1,k} = \varphi_{m,k},\quad \omega_{m+1,k} = \omega_{m,k},\quad \varepsilon_{m+1,k} = \varepsilon_{m,k},\\ \varepsilon^{(p-2)}_{m+1,k} = \varepsilon^{(p-2)}_{m,k}\,;\end{gathered} \tag{27}$$

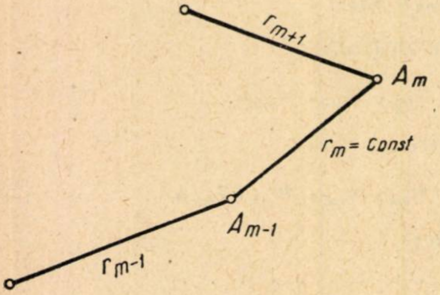


Fig. 4

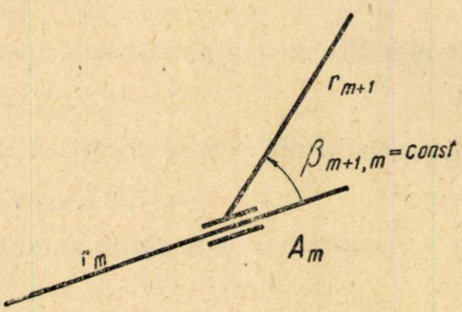


Fig. 5

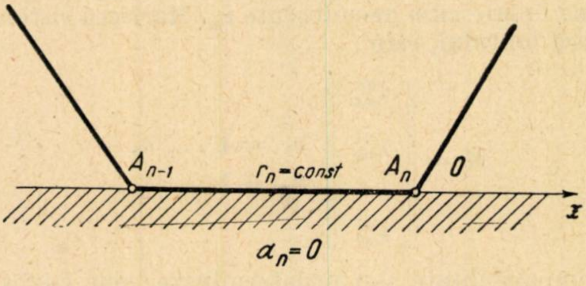


Fig. 6

— pentru elementul n fix, baza mecanismului, legat prin cuple de rotaţie şi suprapus axei Ox (fig. 6)

$$\begin{gathered}r_{nk} = \text{const.},\ \alpha_{n,k} = 0,\\ \rho_{n,k} = 1,\quad u_{nk} = 0,\quad w_{nk} = \dot{w}_{nk} = \ldots = 0,\\ \varphi_{nk} = 0,\ \omega_{nk} = 0,\ \varepsilon_{nk} = \dot{\varepsilon}_{nk} = \ldots = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

În cazul acesta, pentru uşurinţa calculului, se poate alege $r_n = 1$ şi deci $z_n = 1$.

b) Asupra gradului de libertate al lanţului cinematic simplu care formează un contur poligonal cu n laturi, avînd în cazul general $2\,n$ elemente şi $2\,n$ cuple se obţine $w = 2\,n$. Dacă legătura dintre două laturi ale lanţului se face numai printr-o singură cuplă inferioară (de translație sau de rotație) și dacă sînt l astfel de legături, atunci gradul de libertate este

$$w = 3\ (2n - l) - 2\ (2n - l) = 2n - l.$$

Pentru ca lanțul să fie determinat (un singur grad de mobilitate) trebuie ca $w = 4$ și deci

$$l = 2\ (n - 2).$$

Însă cum $l \leqslant n$ rezultă $n \leqslant 4$. Pe de altă parte $n \geqslant 3$, pentru ca lanțul să formeze un contur poligonal nedegenerat și deci

$$3 \leqslant n \leqslant 4.$$

c) Discuție asupra lanțurilor cinematice simple, determinate, avînd n laturi. Deoarece una din cele s ecuații omogene cu n necunoscute corespunde poziției inițiale a lanțului, pentru care se cunosc coeficienții $\lambda_{mk}^{(0)} = 1$, mai rămîn $s - 1$ ecuații cari conțin coeficienții λ_{mk} și astfel avem :

— Deoarece coeficienții λ_{mk} sînt complecși conținînd fiecare două mărimi reale (de exemplu ρ_{mk}, φ_{mk}, u_{mk}, w_{mk} etc.) numărul total al parametrilor cinematici ai ecuațiilor este

$$2n\ (s - 1).$$

— Pentru ca lanțul să fie determinat ($w_r = 1$), așa cum s-a observat mai sus, trebuie ca între parametrii cinematici să se impună $l = 2\ (n - 2)$ condiții, rezultînd numărul total al condițiilor impuse de structura mecanismului

$$2\ (n - 2)\ (s - 1).$$

— Numărul minim de valori ce se pot prescrie parametrilor, pentru a avea maximum de ecuații s, corespunde situației cînd se prescriu numai două din acestea relative la două elemente, pentru fiecare poziție, a lanțului, astfel că numărul condițiilor impuse pentru sinteza mecanismului este

$$2\ (s - 1).$$

— Pentru a rezulta o simplă inifinitate de soluții a sistemului liniar omogen, numărul condițiilor de compatibilitate (pentru parametrii reali) este $2\ (s - n + 1)$.

— Pentru o soluție unică, mecanismul trebuie poziționat în plan prin alegerea elementului de bază, adică prin alegerea unui parametru corespunzător elementului de bază n (din λ_{nk}) și deci numărul condițiilor $(s - 1)$.

În concluzie, cum numărul posibilităților trebuie să fie mai mare decît numărul condițiilor, rezultă

$$\delta \leqslant 2n - 3. \tag{29}$$

Particularizînd, obținem pentru sinteza mecanismului cu n laturi, numai după pozițiile a două elemente

$$\delta_0 \leqslant 2n - 3.$$

Dacă se prescriu și vitezele în s_1 poziții din s_0

$$s_0 + s_1 \leqslant 2n - 3,$$

$$s_0 \geqslant s_1,$$

rezultă numărul maxim al celor s_1 poziții

$$s_1 = s_0 \leqslant \frac{2n-3}{2}.$$

Continuînd în felul acesta avem

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} \leqslant 2n - 3,$$

$$s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_{p-1},$$

cu valoarea maximă a lui s_{p-1} dată de relația

$$s_{p-1} \leqslant \frac{2n-3}{p}.$$

d) În cazul mecanismelor formate cu lanțuri complexe, adică acelea care cuprind și elemente cu mai mult de două cuple, ecuațiile (12) și (12′) se vor repeta pentru toate contururile poligonale cuprinse în lanț care dau ecuații distincte. Dacă și elementele au o formă poligonală în sensul că schematic cuplele cinematice se găsesc în vîrfurile poligonului, ecuațiile respective se vor repeta și pentru ele, rezolvarea problemei însă devine foarte greoaie din cauza numărului mare de ecuații și necunoscute.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1958.

ПО ПОВОДУ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Авторы излагают систематизированный способ расчета синтеза плоских механизмов с низшими парами при помощи комплексных переменных. Этот расчет является особенно выгодным при решении задач, касающихся выполнения законов движения в максимально-конечном количестве точек. Даются коэффициенты линейных уравнений, к которым сводится система для задач перемещений, скоростей, ускорений, ускорений I и II порядка и разбираются, в заключение, возможности определения задачи.

ON THE ANALYTICAL METHOD FOR INVESTIGATING PLANE MECHANISMS ON THE BASIS OF COMPLEX VARIABLES

SUMMARY

The authors present the use of complex variable calculus in the synthesis of plane mechanisms with lower pairs. This calculus is especially convenient for solving problems which concern the satisfaction of the laws of motion at a maximum finite number of points. Coefficients are given, of the linear equations to which the system is reduced for the problems of displacements, velocities, accelerations, accelerations of the first and second order.

Finally, possibilities of determining the problem are discussed.

BIBLIOGRAFIE

1. И. И. Артоболевский, З. С. Блох, В. В. Добровольский, *Синтез механизмов*. Гостехиздат, Москва, 1944.
2. З. С. Блох, *Приближенный синтез механизмов*. Машгиз, Москва, 1958.
3. D. Mangeron, C. Drăgan, *Eine neue graphisch-analytische Behandlung des Problems der Verteilung von Beschleunigungen beliebiger Ordnung*. Bul. Inst. Polit. Iași, **III**, (1957).
4. D. Mangeron, A. Braier, *Reprezentarea cîmpurilor de accelerații prin numere complexe*. Gazeta matematică, București, 1955.

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

A DOUA CONFERINŢĂ UNIONALĂ ASUPRA PROBLEMELOR FUNDAMENTALE ALE TEORIEI MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR

Moscova, 24 — 28 martie 1958

DE

D. MANGERON şi R. BOGDAN

În cursul lunii martie 1958 a avut loc, la Moscova, a II-a conferinţă unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor, organizată de Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. — Institutul pentru studiul maşinilor.

Participările la astfel de manifestări prezintă un deosebit interes, prin aceea că înlesnesc stabilirea contactelor personale, uşurează schimbul de experienţă şi dezvoltarea metodelor de organizare a cercetării ştiinţifice. Totodată dau posibilitatea unei mai bune cunoaşteri a lucrărilor altor cercetători şi întăresc legăturile de prietenie şi schimb de informaţii ştiinţifice.

Participarea la această conferinţă a prilejuit o deosebită satisfacţie delegaţiei romîne, care a avut astfel posibilitatea să cunoască mai îndeaproape realizările oamenilor de ştiinţă sovietici şi ai celor din democraţii populare, în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor. Perfecta organizare şi atmosfera caldă şi de rodnică activitate a conferinţei la care a contribuit în special preşedintele comitetului de organizare, acad. I. I. Artobolevski şi secretarul comitetului cand. în ştiinţe tehnice, A. P. Bessonov, a impresionat în mod deosebit delegaţia noastră.

Studiile şi cercetările în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor în U.R.S.S., avînd la bază lucrările tradiţionale ale lui P. L. Cebîşev şi L. V. Assur au căpătat azi o deosebită dezvoltare.

Rezultatele acestor cercetări, concretizate într-o serie de tratate şi studii, oglindite în paginile revistelor de specialitate ca Trudî seminara po teorii maşinî i mehanizmov, Vestnik maşinostroenia etc., au constituit materiale documentare foarte utile în activitatea noastră de cercetare şi didactică.

A doua conferinţă unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor a confirmat, o dată mai mult, valoroasele realizări în diferitele domenii ale acestei discipline de bază, dînd în acelaşi timp o vedere de ansamblu asupra lucrărilor din alte ţări.

Delegaţia noastră a prezentat atît unele rezultate originale obţinute în cercetări, cît şi un raport asupra activităţii în acest domeniu, din R.P.R., creînd astfel posibilitatea unei mai bune cunoaşteri, în afara hotarelor ţării a lucrărilor cercetătorilor romîni.

Lucrările conferinţei, precedate de o şedinţă de deschidere s-au desfăşurat în cadrul următoarelor 5 secţii :

— *Analiza şi sinteza mecanismelor*, prezidată de prof. dr. N. I. Levitski.

— *Dinamica maşinilor*, sub preşedinţia prof. dr. A. E. Kobrinski.

— *Teoria preciziei în construcţia de maşini şi aparate*, prezidată de prof. dr. G. G. Baranov.

— *Teoria maşinilor cu acţiune automată*, sub preşedinţia prof. dr. S. I. Artobolevski.

— *Teoria transmisiei în maşini*, prezidată de prof. dr. V. A. Gavrilenko.

Conferinţa s-a bucurat de o largă participare, atît a specialiştilor din U.R.S.S., cît şi din democraţii populare. S-au prezentat 86 de referate, conferinţe, comunicări.

Comunicările unor oameni de ştiinţă sovietici bine cunoscuţi ca : Acad. I. I. Artobolevski, S. I. Artobolevski, G. G. Baranov, N. I. Levitski, V. V. Dobrovolski, S. N. Kojevnikov, S. A. Cerkudinov, G. S. Saumian, L. N. Reşetov, D. S. Tavhelidze, ne-au dat o dată mai mult, prilejul să luăm cunoştinţă de deosebit de interesantele realizări din ultimii patru ani ale ştiinţei şi tehnicii sovietice în acest domeniu.

Pe lîngă aceste comunicări, o serie întreagă de lucrări elaborate în diferite centre din U.R.S.S. dovedesc preocupările susţinute şi adînci, marea dezvoltare pe care această disciplină a căpătat-o. Dealtfel, ritmul de dezvoltare al ştiinţei sovietice este îndeajuns de exemplificat prin realizările excepţionale din ultimul timp, realizări la care contribuţia cercetărilor şi studiilor specialiştilor din domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor este foarte valoroasă. Lansarea la 4 octombrie 1957 a primului satelit artificial al pămîntului, urmată de celelalte mari cuceriri ale spaţiului cosmic sînt bine cunoscute, pentru a mai insista aici asupra lor.

De asemenea, am avut prilejul la această conferinţă să cunoaştem şi mai bine noile lucrări ale tradiţionalei şcoli germane, atît din comunicările audiate, cît şi din raportul prof. W. Lichtenheldt asupra stadiului teoriei mecanismelor şi maşinilor din R.D.G. Lucrările conferinţei vor face obiectul unor publicaţii speciale, dintre care primul volum ne-a sosit nu de mult.

Bilanţul celei de-a II-a conferinţe unionale în domeniul problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor, Moscova, 1958, apărut sub redacţia acad. I. I. Artobolevski şi A. P. Bessonov, este consacrat lucrărilor plenarei de deschidere a conferinţei, referatelor de sinteză ale preşedinţilor celor 5 secţii precum şi rezoluţiilor plenarei de închidere.

În prefaţă, acad. I. I. Artobolevski şi cand. în ştiinţe tehnice A. P. Bessonov, arată că la prima conferinţă ce a avut loc în 1954, s-au stabilit direcţiile principale în vederea dezvoltării teoriei mecanismelor şi maşinilor a căror importanţă este hotărîtoare în construcţia de maşini. În continuare, autorii reliefează ceea ce s-a îndeplinit în cei patru ani care au trecut de atunci, subliniind, în special, realizările în domeniul construcţiei maşinilor cu funcţionare automată, linii automate, uzini automate etc.

După ce precizează obiectivele conferinţei şi subliniază vasta participare a specialiştilor din diferite centre de studii şi cercetări din U.R.S.S. şi democraţii populare, autorii trec în revistă rapoartele prezentate.

Cuvîntul de deschidere a fost rostit de acad. I. P. Bardin, vice preşedinte al Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., care s-a referit la problemele de automatizare şi mecanizare a producţiei şi a reliefat că importanţa automatizării şi mecanizării în diferitele procese de producţie depinde nu numai de oamenii de ştiinţă şi constructori care prelucrează dispozitive automate, ci şi de tehnologi care stabilesc procesele respective.

Acad. A. A. Blagonravov, directorul Institutului pentru studiul maşinilor s-a ocupat în raportul său de teoria maşinilor în problemele de automatizare a proceselor industriale. După un scurt istoric al dezvoltării teoriei mecanismelor şi maşinilor ca suport ştiinţific al rezolvării problemelor complicate ale construcţiei de maşini, acad. Blagonravov subliniază că în prezent dezvoltarea automatizării proceselor industriale creează unele condiţii speciale pentru dezvoltarea teoriei maşinilor şi determină direcţiile principale ale acestei teorii. Se arată apoi importanţa utilizării în teoria modernă a maşinilor a unor capitole speciale ale matematicii, electronicii şi a unor mijloace efective ale dinamicii experimentale a maşinilor.

Acad. N. G. Bruievici, în raportul: *Tendinţele de bază în dezvoltarea construcţiei de maşini şi aparate* — examinează direcţiile principale de dezvoltare a ştiinţei preciziei în construcţia de maşini şi aparate şi menţionează realizările mai importante.

Se trec, în continuare, în revistă rapoartele cu caracter general ale participanţilor din alte ţări.

Primul referat din volumul de faţă este acel al acad. I. I. Artobolevski: *Stadiul actual al teoriei mecanismelor şi maşinilor* care precizează obiectivele conferinţei din martie 1958—discutarea rezultatelor concrete obţinute de oamenii de ştiinţă sovietici şi străini în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, în perioada dintre cele două conferinţe (1954—1958). După ce se arată succint marile realizări ale ştiinţei şi tehnicii sovietice, marile realizări ale construcţiei sovietice de maşini cu funcţionare automată, se prezintă o expunere generală a realizărilor obţinute în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, în anii care au trecut de la prima conferinţă şi pînă în ajunul celei de-a II-a conferinţe. Se dă astfel o imagine a dezvoltării continue a acestei discipline, ca urmare a unor probleme ridicate la prima conferinţă, ca de exemplu : analiza şi sinteza cinematică şi dinamica mecanismelor plane şi spaţiale cu cuple inferioare şi superioare ; dezvoltarea geometriei şi sintezei mecanismelor dinţate, teoria mecanismelor cu elemente flexibile, dispozitive pneumatice şi hidraulice în componenţa mecanismelor, dinamica maşinilor şi mecanismelor.

În continuare, autorul, după ce menţionează o serie de studii apărute în domeniile arătate mai sus, atît în U.R.S.S. cît şi în alte ţări, se opreşte asupra problemei referitoare la modul în care s-a reflectat dezvoltarea metodelor generale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor în formarea şi crearea unei discipline ştiinţifice noi anume *teoria maşinilor-automate*. Autorul trece apoi în revistă acele lucrări în care se arată în mod concludent legătura între teoria maşinilor cu funcţionare automată şi teoria generală a mecanismelor şi maşinilor.

Urmează o prezentare a cursurilor şi manualelor publicate în perioada dintre cele două conferinţe, pentru studenţii şi inginerii din acest domeniu.

După analizarea stadiului actual al teoriei mecanismelor şi maşinilor, reflectat în lucrările apărute din 1954 pînă în 1958, acad. I. I. Artobolevski subliniază următoarele rezultate :

— Creşterea cercetărilor în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor în U.R.S.S., atît în principalele centre ştiinţifice, cît şi în alte noi centre.

— Dezvoltarea deosebită a ştiinţei mecanismelor în Germania unde această disciplină a fost întotdeauna reprezentată de oameni de ştiinţă de vază.

— Crearea şi dezvoltarea rapidă a teoriei mecanismelor şi maşinilor în Republica Populară Romînă, Republica Populară Polonă, Republica Populară Bulgaria şi Republica Populară Ungară. Republica Populară Chineză şi Republica Democrată Coreeană pun bazele acestei ştiinţe formînd cadre şi creînd condiţiile necesare de dezvoltare.

— Atenţia care începe să se acorde în Statele Unite ale Americii, unde pînă la cel de-al II-lea război mondial teoria mecanismelor şi maşinilor aproape nici nu exista ca disciplină ştiinţifică.

Acad. Artobolevski reliefează în continuare faptul că, cercetările în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor au luat o deosebită dezvoltare ca şi formarea de cadre în acest domeniu, în toate părţile globului.

Acad. I. I. Artobolevski se referă de asemenea şi la unele aspecte a legăturii ce se conturează între teoria mecanismelor şi maşinilor şi cibernetică. În acest sens, menţionează lucrarea privind sistemul de comandă bioelectric, executată la Moscova de un colectiv sub conducerea lui A. E. Kobrinski, care prezintă interes atît pentru tehnicieni cît şi pentru fiziologi.

Iată dar, că azi se deschid noi perspective pentru studiile şi cercetările din domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor. Este vorba de unele probleme moderne şi de mare viitor, cum ar fi acele ale teoriei maşinilor automate, a liniilor automate, a programării cifrice.

După ce subliniază rezultatele pozitive obţinute în domeniile mai sus enumerate şi remarcă că există o serie de rezultate foarte importante, se ocupă de acele domenii cărora este necesar să li se acorde o atenţie specială cum sînt de exemplu :

— sinteza mecanismelor, ţinînd seama de caracteristicele dinamice ; problemele de cinetostatică a mecanismelor plane şi spaţiale, ţinînd seama de forma reală, efectivă a elementelor şi cuplelor cinematice ; studii de dinamica generală a mecanismelor spaţiale ; dispozitivele pneumatice şi hidraulice folosite la maşinile de lucru moderne ; studii de dinamica agregatelor de maşini în cazurile regimului tranzitoriu ; studierea cinematicii şi dinamicii mecanismelor cu elemente elastice şi jocuri mari în cuple.

Subliniază de asemenea, slaba dezvoltare a teoriei generale a maşinilor automate. Aceasta se datoreşte în mare parte faptului că nu se folosesc suficient metodele de sinteză şi analiză a mecanismelor. Folosirea acestor metode ar constitui factori importanţi în dezvoltarea teoriei maşinilor automate. Această slabă dezvoltare se datoreşte şi prelucrării insuficiente a proceselor de lucru pe baza cărora pot fi formulate cerinţele impuse unor construcţii raţionale, atît a mecanismelor separate cît şi a maşinilor automate în ansamblu.

Autorul arată apoi sarcinile ce se impun specialiştilor în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor pentru anii viitori, în lumina hotărîrilor Congresului al XX-lea al P.C.U.S. şi anume :

— asigurarea unei astfel de dezvoltări a acestei discipline care să permită o creştere cît mai mare a construcţiei de maşini, pe calea unei largi automatizări a proceselor de producţie.

Acad. I. I. Artobolevski încheie interesantul său referat, adresînd un apel tuturor oamenilor de ştiinţă din lume, din acest domeniu, pentru întărirea prieteniei şi colaborării şi exprimă speranţa că acestea vor constitui factorii cei mai importanţi pentru asigurarea unei dezvoltări rapide şi rodnice a teoriei mecanismelor şi maşinilor.

Lucrările cercetătorilor din domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, din ţara noastră, sînt menţionate apreciativ în referatul acad. I. I. Artobolevski.

Această apreciere, venită din partea unui om de ştiinţă de renume mondial, constituie pentru noi un imbold în plus pentru a ne conduce lucrările cu mai mult entuziasm, a le adînci mai mult ca să obţinem rezultate valoroase care să-şi poată găsi aplicarea în practică.

Referatul, pe lîngă faptul că aduce un bogat material de referinţă prin analizarea atît de competentă a interesantelor lucrări din domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, publicate în ultimii patru ani, are şi valoarea unui îndreptar, deschizîndu-ne noi căi pentru promovarea şi adîncirea studiilor, pentru realizarea într-un timp cît mai scurt a procesului de automatizare al fabricilor şi uzinelor din ţara noastră.

★

Referatele de sinteză a preşedinţilor celor cinci secţii, dau cifre cu privire la numărul şedinţelor ţinute în cadrul secţiei respective, a lucrărilor prezentate, evidenţiază contribuţiile aduse de comunicări, subliniază liniile de dezvoltare a cercetărilor.

Astfel, prof. N. I. Levitski în concluziile asupra lucrărilor Secţiei de analiza şi sinteza mecanismelor scoate în evidenţă noile aspecte ce se desprind din cele 16 rapoarte şi 7 comunicări expuse.

În analiza mecanismelor au fost propuse metode legate de aparatul matematic, care anterior era folosit foarte puţin. Calculul elicoidal a fost aplicat la analiza mecanismelor spaţiale cu cuple inferioare şi superioare.

Metoda matricelor care corespunde rezolvării multor probleme de analiză şi parţial de sinteza mecanismelor este aplicată cu succes în diferite lucrări.

De asemenea, se folosesc metode de rezolvare a problemelor de analiză a mecanismelor care permit să se scoată în evidenţă unele noi posibilităţi ale aplicării lor.

În acest sens, menţionează lucrările privind metode de analiză a mecanismelor cu ajutorul teoriei acceleraţiilor reduse ale prof. D. Mangeron.

Autorul evidenţiază faptul că, în multe din rapoartele prezentate, problemele de sinteză şi analiză a mecanismelor se împletesc. Astfel, în comunicarea prof. L. N. Reşetov se arată că la cercetarea teoriei structurii mecanismelor se pot obţine concluzii practice care se referă nu numai la analiza mecanismelor ci şi la sinteză.

Citează apoi lucrările din domeniul sintezei mecanismelor, oprindu-se asupra comunicării acad. I. I. Artobolevski care a propus cîteva metode de formare a mecanismelor teoretic exacte pentru reproducerea curbelor algebrice şi transcendente. Importanţa acestor metode constă în aceea că toate mecanismele de acest fel, prezentate anterior ca rezultate ale lucrărilor diferiţilor autori, sînt redate acum sub forma unei teorii unitare. Totodată, cu ajutorul acestor metode se pot obţine o serie de noi mecanisme pentru reproducerea unei clase vaste de funcţii.

Analizează succint celelalte probleme atacate ca de exemplu : prelucrarea sintezei aproximative a mecanismelor bazată pe utilizarea teoriei aproximării funcţiilor, subliniind faptul că metodele analitice şi geometrice încep să se împletească între ele strîns. În acest sens, menţionează raportul lui S. A. Cerkudinov, care a prezentat cunoscuta teorie geometrică a curbelor lui Burmester într-o formă analitică.

Raportorul se referă apoi la lucrarea prof. W. Lichtenheldt (R.D.G.) privind sinteza mecanismelor de ghidaj rectiliniu. Este de remarcat faptul că această lucrare se bazează pe utilizarea unor scheme cinematice directoare pentru proiectanţi, dînd criteriile cele mai adecvate. Prof. W. Lichtenheldt a rezolvat de asemenea şi unele probleme de sinteza mecanismelor cu 6 şi 8 elemente, folosind metodele geometrice.

Un alt exemplu de completare a metodelor geometrice cu metode analitice este prezentat chiar de raportul său (N. I. Levitski). Aici, metoda analitică completează metodele geometrice de proiectare a mecanismelor cu şase elemente. Cu ajutorul acestei metode, putîndu-se proiecta mecanismul de transmitere cu şase elemente după şapte parametri, obţinîndu-se un mecanism articulat cu opriri în care se execută nu numai oprirea de o durată dată ci se reproduce aproximativ o lege dată a mişcării pe porţiunea cursei active.

În continuare, subliniază rezolvarea originală dată în această problemă de ing. dr. I. Volmer (R.D.G.) în lucrarea prezentată. Ing. dr. I. Volmer aplică o metodă geometrică cu ajutorul căreia se poate proiecta un patrulater articulat după patru puncte ale curbei de bielă, două din aceste puncte fiind duble. Astfel, teoria punctelor duble ale curbei de bielă aproape nefolosită anterior, în sinteza mecanismelor, capătă aplicare în una din cele mai actuale probleme ale proiectării mecanismelor articulate.

Analizează apoi succint celelalte lucrări prezentate în domeniul analizei şi sintezei mecanismelor spaţiale, a sintezei mecanismelor cu came, problemă în care atenţia principală este îndreptată către alegerea legii de mişcare a elementului condus.

Evident, toate aceste lucrări prezintă fiecare un interes deosebit, aduc rezolvări noi. Spaţiul limitat ne obligă să nu putem trece aici în revistă fiecare comunicare menţionată în interesantul raport al prof. N. I. Levitski.

A. E. Kobrinski în raportul Secţiei de dinamica maşinilor subliniază problemele de bază în jurul cărora au fost grupate cele 10 comunicări şi 12 rapoarte prezentate şi anume :

— Cercetarea proceselor vibratorii în maşini ;

— Probleme de cinetostatică şi dinamica agregatelor de maşini concrete ;

— Dezvoltarea metodelor generale ale cercetărilor experimentale şi rezultatele acestor cercetări cu aplicare la diferite grupe de maşini.

Raportorul arată că, lucrările prezentate reflectă direcţiile moderne de dezvoltare a dinamicii maşinilor.

Urmează apoi o trecere în revistă succintă a lucrărilor prezentate în cadrul grupelor mai sus amintite.

S-au audiat lucrări privind cercetările din cadrul laboratorului de rezistenţă dinamică al Institutului pentru studiul maşinilor al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi anume : probleme legate de cercetările proprietăţilor de rezonanţă ale vibratorului centrifugal, regimurile de rezonanţă ale mişcării rotorului neechilibrat, procesele de rezonanţe la sisteme de maşini complexe, cercetarea particularităţilor proceselor vibratorii nestaţionare.

În alte rapoarte s-au prezentat cercetări privind fenomenul de autosincronizare a vibratorilor ; analiza vibraţiilor libere ale fundaţiei maşinei suspendate pe resorturi nelineare cu caracteristică elastică parabolică ; studiul vibraţiilor libere şi forţate ale sistemelor care lucrează în regim de vibraţii prin şocuri, precum şi studiul problemelor stabilităţii dinamice a acestor sisteme.

În raportul asupra lucrărilor laboratorului de dinamica maşinilor al Institutului pentru studiul maşinilor, se relatează cercetările care se fac cu aplicare la un sistem de vibrator, ţinînd seama de masele contragreutăţilor, ca şi cercetări cu aplicare la vibraţiile libere şi forţate ale sistemelor nelineare cu caracteristici elastice nesimetrice, formate din segmente de drepte.

S-au prezentat şi rapoarte privind cercetări asupra vibraţiilor maşinilor-unelte de aşchiat metale.

Alte rapoarte s-au ocupat de analiza vibraţiilor mecanismelor.

În seria rapoartelor privind problema de analiză cinetostatică şi dinamică a maşinilor de lucru şi motoarelor se subliniază : lucrări privind analiza forţelor mecanismelor solicitate cu un sistem spaţial de forţe, analiza dinamică a laminoarelor, ţinînd seama de elasticitatea arborilor etc.

Raportorul subliniază importanţa pentru practică a studierii problemelor de dinamica maşinilor. Aceste probleme cuprind diferite maşini, ca : maşini de tricotat, maşini poligrafice, maşini pentru extracţii miniere, motoare etc.

Raportorul se ocupă apoi de rapoartele privind metode de cercetare experimentală. În acest sens menţionează :

— metode experimentale moderne pentru determinarea parametrilor cinematici şi dinamici ai maşinilor ;

— captori pentru cercetarea traiectoriilor mecanismelor plane în sisteme de coordonate rectangulare şi polare.

Sînt amintite apoi o serie de alte lucrări, privind rezultatele înregistrării experimentale a caracteristicelor de amplitudine şi de fază ale sistemului mecanic elastic al strungului etc.

G. G. Baranov în *Concluziile asupra lucrărilor Secţiei de teoria preciziei în construcţia de maşini şi aparate*, face o scurtă analiză a fiecărei comunicări şi subliniază problemele de bază atacate în comunicările prezentate, după cum urmează :

— Mărirea preciziei diferitelor dispozitive cu ajutorul alegerii corecte a toleranţelor reglajelor şi metodelor de control ;

— Sinteza şi analiza dispozitivelor complexe care asigură o precizie dată ;

— Precizia dinamică a circuitelor mecanice şi electrice şi precizia funcţionării maşinilor electronice de calculat ;

— Erorile roţilor dinţate, ca sursă de vibraţii şi zgomot la reductorii de turbină ;

— Erori de fabricaţie la executarea lagărelor cu bile şi role, în liniile automate.

S. I. Artobolevski face o analiză cuprinzătoare a fiecărui raport prezentat în cadrul Secţiei de teoria maşinilor cu funcţionare automată.

Rapoartele prezentate au atacat probleme moderne şi importante ca : structura maşinilor automate tehnologice şi rolul ei în dezvoltarea teoriei generale a acestor maşini ; teoria productivităţii maşinilor de lucru şi agregatelor pentru automatizarea proceselor industriale, dinamica sistemelor de funcţionare cu comandă programată, încărcarea automată a maşinilor-unelte, probleme de productivitatea maşinilor, problema reglării automate a întinderii urzelii la maşina de ţesut etc.

Ultimul raport este acela al lui V. A. Gavrilenko, preşedintele Secţiei de teoria transmisiilor în maşini.

Fiecare raport de sinteză asupra lucrărilor prezentate în cadrul secţiilor respective constituie instrumente de informare şi documentare deosebit de utile şi traducerea şi larga discutare a acestor rapoarte ar da posibilităţi specialiştilor de la noi, din domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, să fie cît mai informaţi asupra stadiului actual şi a tendinţelor cercetărilor din diferitele capitole ale acestei discipline.

★

Volumul se încheie cu rezoluţia plenarei de închidere, care menţionează că în cei patru ani care s-au scurs între prima şi a doua conferinţă, s-au efectuat o serie de cercetări importante în principalele ramuri ale teoriei maşinilor şi mecanismelor pe linia directivelor primei conferinţe.

Cercetările efectuate sînt strîns legate de rezolvarea principalelor probleme ale construcţiei de maşini şi în special de problema automatizării.

Noile maşini, mecanismele şi dispozitivele cu funcţionare automată necesită o cît mai mare dezvoltare a teoriei maşinilor şi mecanismelor.

După ce se analizează rezultatele cele mai valoroase obţinute în problemele menţionate anterior, se trasează liniile de dezvoltare a studiilor şi cercetărilor viitoare, după cum urmează:

— Sistematizarea mecanismelor cu aplicare la problemele de sinteză a mecanismelor.

— Dezvoltarea metodelor de sinteza mecanismelor cu dispozitive hidraulice, pneumatice şi fotoelectronice.

— Dezvoltarea metodelor de sinteza mecanismelor plane cu cuple inferioare şi elaborarea unor îndreptare menite să uşureze aplicarea unor atare metode.

— Elaborarea metodelor de sinteza mecanismelor spaţiale.

— Dezvoltarea teoriei mecanismelor cu came şi a mecanismelor cu came şi pîrghii şi stabilirea schemelor raţionale de prelucrare a profilelor.

— Prelucrarea metodelor de cercetare dinamică a mecanismelor spaţiale.

— Dezvoltarea metodelor de sinteza mecanismelor plane cu cuple inferioare şi elaborarea datelor informative menite a uşura aplicarea unor astfel de metode.

— Elaborarea metodelor de studiu dinamic a mecanismelor spaţiale.

— Elaborarea metodelor de studiu dinamic al agregatelor de maşini şi sisteme electromecanice concepute ca sisteme unice cu unul sau mai multe grade de mobilitate.

— Elaborarea metodelor de studiu dinamic al mecanismelor cu elemente elastice şi jocuri mari în cuple cinematice.

— Dezvoltarea lucrărilor de studiu ale celor mai însemnate caracteristice dinamice a proceselor de lucru şi agregatelor de maşini.

— Prelucrarea bazelor ştiinţifice de sinteză a schemelor de maşini şi aparate menite să asigure o precizie dată.

— Dezvoltarea ulterioară a problemelor de precizie dinamică şi de calcul de precizie a ansamblelor de maşini şi aparate.

— Elaborarea problemelor de precizie în teoria de proiectare a automatelor şi a liniilor automate, precum şi în teoria proceselor de lucru. Studiul şi generalizarea experienţei de funcţionare a liniilor automate existente şi elaborarea problemelor de precizie a controlului automat în condiţiile întreprinderilor automatizate.

— Prelucrarea mai departe a problemelor de precizie dinamică a circuitelor electrice şi electronice din sistemele automate, în deosebi în cazul circuitelor cu impulsuri, semiconductori şi a circuitelor cu parametri distribuiţi.

— Dezvoltarea teoriei asupra studiului productivităţii maşinilor automate, ţinîndu-se seama de noi şi perfecţionate procese de lucru.

— Elaborarea cu ajutorul maşinilor matematice a teoriei de comandă automată a maşinilor şi agregatelor lor.

— Elaborarea teoriei noilor sisteme de automatizare cifrică din care fac parte în particular, sistemele autoreglabile şi de calcul prealabil.

— Dezvoltarea teoriei şi a metodelor de proiectarea mecanismelor şi a dispozitivelor moderne cu funcţionare automată prevăzute cu elemente rigide şi cu dispozitive pneumatice, hidraulice, electrice şi electronice.

— Continuarea adîncirii teoriei şi introducerii în practică a noilor forme de angrenaje din diferite domenii ale construcţiei de maşini.

— Continuarea elaborării teoriei şi perfecţionarea metodelor de fabricaţie a roţilor conice, hipoide şi melcate.

— Continuarea elaborării teoriei roţilor dinţate necirculare, precum şi a metodelor lor de executare.

În cele ce preced, am încercat să dăm o prezentare de ansamblu a problemelor dezbătute în cadrul conferinţei de teoria mecanismelor şi maşinilor de la Moscova. Comunicările prezentate, vor fi publicate într-un volum separat, în curs de apariţie, care va putea forma obiectul unei analize corespunzătoare mai amănunţite în paginile unui număr viitor al revistei noastre.

Din cele expuse, se pot desprinde clar realizările remarcabile obţinute în ultimii patru ani în acest domeniu, atît de important pentru inginerul constructor de maşini, precum şi liniile de dezvoltare viitoare ale studiilor şi cercetărilor respective.

Conferinţa de la Moscova, trebuie să constituie un imbold pentru specialiştii în teoria mecanismelor şi maşinilor din ţara noastră, pentru a-şi concentra eforturile imediate în vederea adîncirii domeniilor celor mai noi ale teoriei maşinilor şi mecanismelor, care prezintă o deosebită importanţă în rezolvarea problemelor de bază ale construcţiei de maşini moderne.

Primită la redacţie la 31 decembrie 1958.

FESTIVAL INTERNAŢIONAL AL FILMULUI ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC BUDAPESTA, 1959

„GÉPIPARI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET" — Budapest, organizează la Budapesta între 4—17 octombrie 1959 un *Festival internațional al filmului științific și tehnic* în domeniul Construcției de mașini.

Sînt invitați să participe la acest festival cercetătorii, colaboratorii institutelor, asociațiile şi societățile științifice din toate țările, ca și inginerii şi tehnicienii din cele mai importante întreprinderi producătoare de filme şi construcții de mașini.

Scopul festivalului este prezentarea filmelor tehnice şi documentare susceptibile să promoveze realizările cele mai moderne în domeniul construcției de mașini şi a organizării întreprinderilor tehnice.

Un juriu format din experți în construcții de mașini din diferite țări va decerna premiile.

Prin organizarea acestui festival *Societatea științifică ungară a industriei constructoare de mașini* își propune să promoveze şi să strîngă legăturile pașnice şi rodnice între națiuni pe tărîm tehnic şi economic.

RECENZII

О. Д. ОНИАШВИЛИ, *Некоторые динамические задачи теории оболочек* (Cîteva probleme dinamice ale teoriei plăcilor curbe subţiri). Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1957, 196 pag.

Lucrările de proporţia unei cărţi, privind domeniul atît de interesant şi de cercetat al plăcilor curbe subţiri sînt foarte puţine şi îmbracă, în general, aspectele mai simple statice.

Cu atît mai atrăgătoare apare o carte care tratează aspectul dinamic mai complex. În această direcţie, trebuie semnalată apariţia cărţii lui Oniaşvili, care reuşeşte să ne dea o idee asupra remarcabilelor rezultate obţinute de şcoala sovietică. Latura tehnică, bazată pe ecuaţiile generale simplificate, propuse pentru prima dată de V. Z. Vlasov, este în mod fericit îmbinată cu latura experimentală.

Cartea are 196 pagini şi cuprinde şapte capitole.

Primul capitol conţine expunerea succintă a teoriei tehnice cu momente a lui Vlasov (aspectul static liniar şi neliniar, cu particularizare pentru cilindru şi sferă).

Capitolul al doilea tratează despre vibraţiile plăcilor curbe subţiri. În primul paragraf, se începe cu cazul mai simplu al cilindrilor, particularizînd componentele sarcinii exterioare pentru forţele de inerţie. Utilizînd metoda separării variabilelor, se precizează complet soluţia prin serii trigonometrice. Paragraful al doilea tratează cazul suprafeţelor pleoştite, cînd curburile principale pot fi considerate constante.

Paragrafele 3—7 conţin exemple numerice, precizarea valorii frecvenţei proprii, vibraţiile cupolei sferice şi ale cilindrilor cu curbură obişnuită.

Capitolul al treilea se referă la aplicarea metodei variaţionale la rezolvarea problemelor la limită. În primul paragraf se expun bazele metodei statice, apoi în continuare (2—7) se dau formulele generale pentru cazul dinamic şi exemple numerice.

Capitolul al patrulea studiază stabilitatea dinamică a plăcilor curbe subţiri. Sînt analizate plăcile cilindrice şi cele cu dublă curbură pleoştite (§ 1, 2, 3). Ultimele două paragrafe (§ 4, 5) se referă la stabilitatea statică locală şi determinarea numerică a domeniilor de instabilitate dinamică.

Capitolul al cincilea abordează sumar problemele neliniare (aspectul static, al vibraţiilor, al stabilităţii şi plăcile curbe subţiri, respectiv în paragrafele 1—4).

Capitolul al şaselea este intitulat *Comportarea plăcilor curbe subţiri la sarcini dinamice orizontale*. El reprezintă o aplicare directă a teoriei la cazurile practice, sarcinile reprezentînd în fond sarcinile seismice. Plăcile subţiri pleoştite sînt tratate analitic prin metoda seriilor duble trigonometrice, a seriilor simple trigonometrice şi în sfîrşit a metodei variaţionale (§ 1—3).

Paragraful 4 schiţează luarea în considerare a neliniarităţii deformaţiilor. După exemplele numerice (§ 5) tratate detaliat, se examinează plăcile subţiri prismatice pentru acoperişuri şi comportarea buncărelor cilindrice cu pereţi subţiri la acţiunea forţelor orizontale (§ 6—7).

Ultimul capitol, al șaptelea, este intitulat *Încercările dinamice de plăci subțiri pleoștite pe construcții reale.* El cuprinde trei paragrafe și anume : § 1. *Metodica încercărilor* ; § 2. *Încercarea plăcilor subțiri* ; § 3. *Determinarea coeficientului de amortizare.*

La paragraful al doilea sînt de menționat încercările efectuate asupra unor plăci subțiri în shed, ondulate (I) ; apoi conoizi (II) ; cupola sferică pe contur octogonal (III) ; placa pleoștită tip „Darbazi" (IV) și în sfîrșit placa cilindrică de mare deschidere cu diafragme executată din beton armat cu piatră ponce (V).

O bogată bibliografie (71 lucrări citate) încheie cartea.

Cartea apare deosebit de interesantă pentru un număr larg de tehnicieni și cercetători, atît din domeniul teoretico-științific cît și de proiectare și experimentare.

M. Soare

R. S. SCORER, *Natural Aerodynamics* (Aerodinamica naturală). Pergamon Press, Londra, 1958, 312 pag.

În această lucrare autorul expune cu o deosebită claritate și competență problemele fundamentale ale aerodinamicii naturale îmbinate cu rezultatele cercetărilor recente efectuate în acest domeniu.

În primele capitole sînt expuse într-o formă sugestivă noțiunile de bază ale mecanicii fluidelor care sînt necesare ulterior la înțelegerea fenomenelor produse de mișcarea aerului în natură.

Astfel, în capitolul I se ocupă de legea lui Newton, ecuația lui Bernoulli, ecuația de continuitate, introducînd totodată noțiunile de gradient de presiune, confluență și convergență punct de stagnare etc., pentru ca în încheiere să fie dată ecuația energiei.

Mișcarea de rotație a pămîntului împreună cu consecințele sale asupra deplasării aerului, relația dintre presiune și vînt, mișcarea aerului în straturile înalte ale atmosferei, sînt tratate în capitolul II.

În capitolul III este prezentată problema mișcării rotaționale atît sub aspect teoretic, cît și sub aspectul implicațiilor pe care le are în fenomenele naturale.

Teoria cinetică a viscozității, condițiile la limită pentru fluidele vîscoase, influența numărului Reynolds asupra scurgerii unui fluid, bazele teoriei stratului limită, fac obiectul unui succint studiu întreprins în capitolele IV și V.

În capitolul VI, autorul se ocupă de studiul turbulenței și dîrelor de vîrtejuri și a consecințelor pe care acestea le au în desfășurarea unora dintre fenomenele naturale.

Următoarele capitole (VII, VIII, IX și X) sînt consacrate unor probleme de interes major pentru aerodinamica fenomenelor din natură cum sînt : problema convecției în atmosferă, problema jeturilor, influența vîntului asupra unui jet, propagarea undelor de aer, studiul propagării undelor produse prin explozie, problema mareelor, studiul transformării straturilor subțiri de nori etc.

Lămurirea unora dintre aceste probleme are o importanță practică deosebită pentru cunoașterea modului de viciere al atmosferei și a găsirii mijloacelor adecvate și operative pentru combaterea ei.

Cartea se încheie cu un capitol foarte interesant intitulat *Filozofia metodei* în care autorul face un studiu al metodelor de cercetare specifice matematicienilor, fizicienilor și geografilor.

Studiul problemelor enumerate mai sus este complex datorită felului variat și neașteptat chiar, în care aerul poate să se miște în natură.

De aceea autorul insistă asupra cauzelor care determină desfășurarea unui fenomen într-un mod sau altul, indicînd totodată calea ce duce spre o soluționare matematică a problemelor.

În felul acesta, cartea se adresează atît celor pe care îi interesează fenomenele naturale în sine (meteorologi, fizicieni, geografi, aviatori), cît și acelor pe care îi interesează aspectul matematic al problemelor respective.

Nu putem încheia această recenzie a valoroasei cărți a dr. R. S. Scorer fără a menționa modul deosebit în care a fost ilustrată și tipărită această carte.

Ș. Săndulescu

Е. С. БЕЗВЕСЕЛНИЙ, *Сборник задачи и заданий по теории механизмов и машин* (Culegere de probleme și teme de teoria mecanismelor și mașinilor). Издательство Харьковского Университета, Харьков, 1958, 361 pag.

Prin această lucrare autorul a urmărit, pe de-o parte, să pună la dispoziția studenților o culegere de aplicații și chestiuni de autocontrol, iar pe de alta, să ajute pe cei ce doresc să-și lărgească singuri cunoștințele în domeniul ingineresc. Ca atare, culegerea de față caută să cuprindă cît mai complet și variat problemele care se pun în teoria mecanismelor și mașinilor dînd o astfel de prezentare lucrărilor ca cel ce se folosește de ea să trebuiască să depună tot efortul pentru rezolvarea lor personală.

Primele două părți ale culegerii conțin aplicații de cinematică și dinamică a mecanismelor care pun accentul pe cîte o latură a disciplinei. Partea a treia îmbrățișează, mai complex, diferitele aspecte pe care le înfățișează studiul unui mecanism, dînd teme mai ample de elaborare grafo-analitică. Partea a patra constituie îndreptarul cărții conținînd probleme tipice rezolvate complet. După modelul acestora urmează să fie tratate aplicațiile enunțate în primele capitole, care nu sînt însoțite de răspunsuri sau explicații ale schemelor întrucît, după cum își arată și autorul intenția, cel ce studiază trebuie să capete exercițiul citirii schemelor și al rezolvării acestora. Existența răspunsurilor ar ajuta autocontrolul calculelor efectuate însă ar avea neajunsuri pe care le socotim mai mari față de acest avantaj. În primul rînd, dat fiind modul complex în care se cer soluțiile, aceste răspunsuri ar ocupa un spațiu apreciabil și nu s-ar putea rezuma la indicarea simplă a unui rezultat. Apoi acest lucru ar tenta pe cel ce studiază numai să urmărească o soluție dată de gata ceea ce constituie adesea un pericol în formarea experienței de lucru, pe care autorul l-a întrevăzut. În sfîrșit, latitudinea mare de combinare a diferitelor aplicații (pentru varietate) ar îngreuna mult redarea rezultatelor tuturor combinațiilor și în fond autocontrolul metodic se poate face prin compararea cu problemele tip rezolvate, partea de calcul cifric fiind un aspect secundar în această situație.

Lucrarea conține o anexă cu formulele uzuale ale teoriei mecanismelor, un chestionar teoretic și tabele ajutătoare.

Economisirea volumului apreciabil de pagini ocupat cu răspunsurile, alături de diversitatea aplicațiilor și de faptul că exemplele sînt culese din mai toate domeniile tehnicii constructoare de mașini, a permis extinderea considerabilă a numărului de exerciții (824 probleme și 283 teme, fără a socoti combinările posibile) într-un spațiu relativ strîns. Astfel socotim această lucrare una din cele mai cuprinzătoare culegeri de acest fel.

Modul de enunțare al problemelor și în special al datelor de calcul este foarte liber, în sensul că unele probleme conțin date suplimentare iar altele trebuie completate cu date alese liber, ceea ce este menționat de altfel la începutul fiecărui capitol. Acest lucru ar putea fi privit ca dezavantajos de către studenți, care ezită întrucîtva la depășirea într-un sens sau altul a strictului necesar pentru rezolvarea unei probleme. Totuși prin aceasta se face contactul cu situațiile reale în care, obișnuit, de la o mașină se pot extrage (măsura) diferite mărimi, rămînînd la latitudinea inginerilor alegerea celor necesare pentru studierea problemei și, de asemenea apare astfel posibilitatea unei variații mari, prin combinare, a enunțurilor.

Astfel, privită în ansamblu, culegerea este un bun manual didactic care depășește cadrul institutelor de învățămînt fiind util și inginerilor proiectanți, atît prin diversitatea domeniilor și a temelor cît și prin felul în care solicită gîndirea pentru formarea practicii de lucru.

Punînd accentul pe metodica de rezolvare, lipsa răspunsurilor nu este supărătoare și nu exclude posibilitatea de autocontrol, iar posibilitatea de combinare a enunțurilor extinde volumul culegerii făcînd-o foarte indicată ca sursă de subiecte pentru formarea temelor de proiect și examen (de către cadrele didactice).

Remarcăm de asemenea metodica clară de rezolvare a exemplelor tip și faptul că exemplele sînt culese din practica industrială curentă.

E. Bugaievski

V. BROÏDA, *Automatisme. Régulation automatique. Servomécanismes.* (Automatică. Regulatoare automate. Servomecanisme). Paris, Ed. Dunod, 1957, 308 pag.

Automatizarea a luat în ultimul timp o dezvoltare atît de mare încît a început să se simtă separarea specialiștilor acestei vaste probleme de tehnicieni chemați să o aplice în industrie. Lucrurile elementare pentru primii și anevoioase pentru secunzii, trebuie totuși prinse și explicate într-o lucrare. Această legătură dintre teorie și practică este realizată de V. Broïda în lucrarea sa, bogată în scheme tehnologice și funcționale, indicînd pentru numeroasele tehnici metode și teorii particulare ale automatizării, o bază comună solidă, precisă și relativ simplă.

În lucrare, nu se întrebuințează un aparat matematic complicat, ceea ce o pune la îndemîna inginerului ce cunoaște calculul integral. Mai mult, pentru înțelegerea calculului operațional a lui Heaviside s-a prevăzut un capitol scurt, în care se dau explicații simple asupra transformării Laplace-Carson, aplicate în capitolele următoare la numeroasele exemple de ecuații diferențiale ce descriu fenomenele petrecute în elementele unei linii de automatizare, reglare automată și servomecanisme.

După ce se face o introducere în automatizare, se scot în relief caracteristicile unei reglări automate :

— existența unei bucle de reglare închisă cu un sistem de reglare și un sistem reglat ;

— ireversibilitatea sensului de funcționare al semnalelor ce parcurg bucla ;

— inversiunea semnului semnalului la reîntoarcerea în punctul de plecare, după ce a parcurs bucla.

Explicînd diverse scheme tehnologice și funcționale, realizate practic în instalațiile industriale — electrice, electronice, pneumatice, hidraulice sau mecanice — arătînd proprietățile și performanțele lor, se oprește la scheme cu elemente liniare, cu acțiune progresivă, proporțională, integrală sau diferențială, care satisfac ecuații diferențiale lineare cu coeficienți constanți. Se tratează, astfel, buclele de reglare, care respectă principiul suprapunerii cauzelor și efectelor elementare și se introduce pentru calculele lor funcția scară — unitate — Heaviside și asociata sa funcția impuls-unitate Dirac, precum și integrala Duhamel-Carson. Lucrarea lasă netratate problemele neliniare ale automatizării, întrebuințarea metodelor statistice, precum și altele care nu sînt rezolvate complet în momentul actual.

Trecînd la analiza temporală și spectrală a reglării, se definește funcția de transfer, studiindu-se reprezentarea ei polară. Se cercetează legăturile în serie, paralel și opoziție ale elementelor şi apoi se face analiza amănunţită cu proprietăţile respective ale diferitelor elemente, sisteme reglate, regulatori automaţi, reacţiuni de corecţie şi în sfîrşit bucla de reglare, tratîndu-se un mare număr de exemple. Lucrarea se încheie cu criteriile de stabilitate foarte necesare în studiile de automatizare.

În felul acesta, lucrarea are meritul de a da o vedere de ansamblu şi o rezolvare corespunzătoare problemelor de automatizare, făcînd admisibil cititorilor un domeniu oarecum puţin cunoscut dar vast, mergînd de la maşina de calcul analoagă, la reglarea automată şi servomecanisme, ducînd în domeniul ciberneticii.

Chr. Pelecudi

CONSTANTIN WEBER, WILHELM GÜNTHER, *Torsionstheorie* (Teoria torsiunii). Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig, Akademie-Verlag Berlin, 1958, 306 pag.

Faţă de marele număr de rezultate care s-au obţinut şi de interesul sporit ce se manifestă actualmente în domeniul teoriei torsiunii, lipsa unor monografii începea să se resimtă. Făcînd abstracţie de o serie de tratate generale ca, *Unele probleme ale teoriei elasticităţii* de N I. Muşhelisvilli, *Încovoiere şi torsiune* de A. N. Dinnik şi altele, în care problemei torsiunii i se acordă un interes mai deosebit, nu a existat în ultimul timp nici o încercare de sintetizare a rezultatelor existente.

Volumul publicat de Constantin Weber şi Wilhelm Günther, cuprinde o serie de rezultate mai importante şi metodele principale de rezolvare a unor probleme de torsiune elastică statică a barelor cu secţiune constantă. Fără a avea un caracter exhaustiv, lucrarea se situează pe linia unei expuneri oarecum eclectice urmărind mai mult de a da o imagine clară asupra metodelor de tratare decît obţinerea rezultatelor finale sau a prelucrării lor. Astfel, după o scurtă prezentare a ecuaţiilor şi analogiilor problemei torsiunii se trece direct la indicarea unor soluţii exacte obţinute prin funcţii analitice date, serii de puteri, funcţii Green. Sînt indicate apoi metode utilizînd transformări conforme pe cercul unitate, pe planul cu tăieturi. Sînt tratate apoi profile cu găuri, mărginite de arce, cu adîncituri, colţuri interioare, rotunjiri, planul cu tăieturi aliniate cu colţuri rotunjite etc.

Sînt de asemenea atacate problemele de minim şi se reproduc anumite proprietăţi de minimare a tensiunilor, funcţie de tensiune şi momentului de torsiune.

La conţinutul lucrării se adaugă o sumară expunere a ecuaţiilor elasticităţii, teoriei potenţialilor şi transformării conforme.

Dificultăţile care se prezentau la redactarea unei prime lucrări de ansamblu au fost depăşite prin adoptarea unei expuneri simplificate, păstrînd individualitatea metodicii aplicate în lucrările originale pentru diferitele cazuri studiate. Va fi fără îndoială meritul unor monografii ulterioare de a produce o prezentare completă la nivelul cerut de probleme mai dificile.

Teoria torsiunii se situează în apropierea altor domenii ale fizicii matematice care cunosc o mare dezvoltare, procedeele de calcul ale acestora stimulînd sensibil progresul cercetărilor în teoria torsiunii. Pentru acest motiv o prezentare teoretică mai generală este deosebit de interesantă din punct de vedere al fizicii matematice. Independent de acest motiv cît şi din acel al interesului practic, sistematizarea acestui capitol al teoriei elasticităţii este utilă pentru însăşi teoria elasticităţii tridimensionale unde metodele de calcul cu un caracter mai sistematic şi riguros sînt încă insuficient studiate.

M. Mişicu

K. LEIST, J. WEBER, *Spannungsoptische Untersuchungen von rotierenden Scheiben mit exzentrischen Bohrungen* (Cercetări fotoelastice asupra şaibelor în rotaţie prevăzute cu goluri excentrice). Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e.V.- Westdeutscher Verlag - Köln, Opladen, 1958, 60 pag.

Calculul şaibelor de turbine, prevăzute cu goluri excentrice, ridică o serie de probleme ce nu se pot rezolva decît pe cale experimentală. Fotoelasticitatea s-a dovedit şi în acest caz de un ajutor preţios.

Apariţia concentrărilor de tensiuni în asemenea piese depinde de mărimea, numărul şi poziţia golurilor ; aşadar creşterea valorii tensiunilor depinde de combinarea acestor trei factori. Avînd în vedere numărul mare de posibilităţi de combinare, au fost alese trei categorii de şaibe de grosime constantă şi diametru 300 mm, fără goluri (în vederea comparaţiei cu calculul exact), cu două goluri aşezate simetric pe un diametru şi cu un număr variabil de goluri aşezate simetric pe un cerc concentric.

O contribuţie foarte importantă a autorilor constă în dezvoltarea unei metode de cercetare în domeniul dinamic : autorii au utilizat o metodă stroboscopică de fotografiere. Cu ajutorul unei iluminări de circa 20 microsecunde au putut fi obţinute, folosind un contact de sincronizare corespunzător, fotografii de izocromate cu o precizie de aproximativ 2 mm.

Eliminarea metodei îngheţării şi utilizarea metodei stroboscopice prezintă numeroase avantaje : experimentarea nu se mai face la temperatură ridicată într-un termostat, ci la temperatura camerei, problemele de similitudine putînd fi rezolvate mult mai bine în cazul experimentării la temperatura camerei, unde deformaţiile sînt mult mai mici, iar coeficienţii lui Poisson, pentru oţel şi masă plastică, sînt apropiaţi ca valori.

Materialul utilizat pentru modele a fost : *poliester* nesaturat V.P 1527 pentru izocromate şi *plexiglas* pentru izocline.

Programul de cercetări a cuprins pentru cele trei categorii de şaibe arătate mai sus următoarele măsurători :

— La prima categorie (fără goluri), au fost cercetate tensiunile pentru 5 000, 6 000 şi 7 000 rot/min.

— La a doua categorie (cu două goluri simetrice aşezate diametral) au fost cercetate cazurile cînd diametrul golurilor are 15, 20, 25 şi 30 mm pentru 6 000 rot/min.

— La a treia categorie au fost cercetate cazurile cînd numărul de goluri pe un cerc concentric creşte mult, de asemenea pentru cazul a 6 000 rot/min.

Cercetările făcute au condus la obţinerea de rezultate valorice utilizabile în proiectare ; s-a stabilit că pe conturul golului înspre interiorul discului, apar concentrări de tensiuni mai mici decît spre exterior ; de asemenea, că diametrul golului nu influenţează apreciabil concentrările de tensiuni. În ceea ce priveşte influenţa numărului de goluri, a rezultat că factorii de concentrare scad pe conturul golurilor în secţiunea de simetrie, şi cresc în zona dintre goluri, o dată cu numărul acestora.

Lucrarea reprezintă o valoroasă contribuţie ştiinţifică atît din punct de vedere teoretic, în domeniul calculului şaibelor de turbine prevăzute cu goluri excentrice, cît şi din punct de vedere experimental, în domeniul fotoelasticităţii dinamice.

M. Arcan

H. HART, E. KARSTENS, *Radioaktive Isotopen in der Dickenmessung* (Izotopii radioactivi în măsurarea grosimilor), VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 301 pag.

Lucrarea lui H. Hart și E. Karstens prezintă sub toate aspectele metoda măsurării cu izotopi radioactivi a grosimilor sau a greutăților pe unitatea de suprafață.

Sînt descrise la început procedeele întrebuințate pînă acum, scoțîndu-se în evidență avantajele și dezavantajele fiecăreia. Majoritatea instalațiilor nu au căpătat o răspîndire prea largă datorită condițiilor grele și pretențioase de exploatare și a costului prea ridicat.

Pentru o mai bună înțelegere a materialului expus, la început se face o scurtă introducere în fizica atomului. Sînt apoi lămurite amănunțit cauzele absorbției și împrăștierii radiațiilor, expunerea fiind însoțită de numeroase tabele și diagrame, ceea ce permite o apreciere cantitativă a fenomenelor. Cu titlu informativ se indică reactorul nuclear ca cel mai uzual procedeu de obținere al izotopilor radioactivi.

În continuare, sînt enumerați cei mai importanți izotopi care au utilizare în tehnica măsurării grosimilor. Clasificarea se face după radiația pe care o emit, arătîndu-se la fiecare modul de obținere, materia primă, timpul de înjumătățire și energia radiației.

Măsurarea radiațiilor formează obiectul unui capitol aparte. Sînt descrise cele trei aparate principale de măsură: contorul de scintilații, camera de ionizare și contorul Geiger-Müller. Se atrage atenția că măsurătorile nu pot fi absolute, indicîndu-se cauzele și posibilitățile de reducere a erorilor.

După această introducere, care este utilă tehnicienilor din ramurile industriale care vor utiliza instalațiile de măsură cu radioizotopi, urmează descrierea principiilor de funcționare a acestora.

Se poate face o clasificare după procedeul de utilizare al radiației sau după metoda de măsură propriu-zisă, adică măsurători prin absorbție și reflexie și respectiv măsurători absolute și comparative. În continuare sînt descrise o serie de aparate industriale de fabricație sovietică, germană, americană etc. Descrierea, însoțită de numeroase fotografii, permite o orientare justă asupra posibilităților de utilizare și a performanțelor fiecărei instalații. O deosebită atenție se acordă exemplelor de întrebuințare a acestor aparate în diferite ramuri industriale.

În industria hîrtiei, pe lîngă un control al calității, se poate realiza și controlul automat al grosimii prin modificarea admisiei terciului de celuloză pe sită sau a vitezei de circulație.

În industria materialelor plastice la obținerea foilor (și în industria cauciucului), aparatajul descris prezintă serioase avantaje depășind astfel categoric vechile procedee de măsură.

Un sector în care radioizotopii se impun pe zi ce trece mai mult este industria metalurgică prelucrătoare, respectiv obținerea de laminate.

În carte se arată că prin utilizarea diferiților izotopi (S; Cs; S + Y; Co) domeniul de măsură poate fi extins de la 50 la 2 000 000 g/m^2, în același timp eroarea poate scădea pînă la 1 %.

Metodele de măsură prin reflexie permit determinarea straturilor protectoare de pe metale (Zn pe Fe, Cs pe Al etc.).

Datorită timpului mare de înjumătățire a izotopilor folosiți (pînă la 20 ani) practic sursa nu trebuie înlocuită. Durata ei depășește în orice caz durata de funcționare a aparatajului electronic.

Pentru a avea o imagine completă a posibilităților acestor instalații, se atrage atenția asupra erorilor ce pot interveni: erori datorită variației compoziției obiectului de măsură sau a modificării poziției relative a sondei și a sursei de radiații. Locul unde sînt montate sonda și sursa trebuie ales cu grijă pentru a evita trepidațiile, praful și variațiile mari de temperatură.

În încheiere, se menționează efectele dăunătoare ale radiațiilor asupra sănătății, mijloacele de protecție, subliniindu-se că în condițiile normale de funcționare metodele radioactive de măsură a grosimii nu prezintă pericol.

Cartea interesează și prin bogatul ei material documentar, se adresează atît tehnicienilor specializați în utilizarea radioizotopilor cît și tehnicienilor din diferite sectoare industriale, permițîndu-le să cunoască și să aplice aceste metode.

I. Iliuc

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

— *Динамика и прочность машин.* № 192.
Труды Ленинградского Политехнического Института имени М. И. Калинина, Машгиз, Москва-Ленинград, 1958.

— *Сборник Трудов.* № 22.
Московский Инженерно-Строительный Институт имени В. В. Куйбышева, Москва, 1958.

Proceedings of the Third Symposium on Cosmical Gas Dynamics, Held at the Smithsonian Astrophysical Observatory. Editat de J. M. Burgers, University of Maryland, Cambridge, Massachusetts, iunie 1957.

L. J. LIBOIS, *Faisceaux hertziens et systèmes de modulation.* Editions Chiron, Paris, 1958.

N. BOURBAKI, *Eléments de mathématiques.* I. *Les structures fondamentales de l'analyse.* II. *Algèbre.* Ed. Hermann, Paris, 1958.

M. GIQUEAUX, *Ecoulement subsonique d'un fluide parfait.* C.A.S.M., Paris, 1955.

— *Atti dell'Associaziona Geotecnica Italiana.* Vol. I. III. *Convegno di Geotecnica.* Torino, 1957. Edizioni Istituto Propaganda Internazionale, Milano, 1957.

J. PROCHAZKA, *Presnost merania rychlosti a prietokov vody hydrometrickym kridlom.* Vyaskumny ustav vodohospodarssky, Bratislava, 1958.

NOTA REDACŢIEI

Cu referire la articolul N. Vasilescu Karpen, *Energetica lansării sateliţilor. Randamentul motoarelor-ejectoare*, publicată la p. 587, menţionăm :

În legătură cu consideraţiile asupra randamentului motoarelor-rachetă, cuprinse în lucrare, precum şi asupra concluziilor care derivă din acestea (relaţia (3) şi punctul 11), redacţia atrage atenţia cititorilor că autorul introduce o definiţie a randamentului diferită de aceea cunoscută în literatura de specialitate. Ca urmare, afirmaţiile şi rezultatele cuprinse în articol trebuie privite din acest punct de vedere.

În ceea ce priveşte datele numerice conţinute în nota de faţă privind indicii tehnici ai rachetelor port-satelit, trebuie remarcat că acestea au un caracter estimativ, întrucît necunoaşterea exactă a tuturor parametrilor iniţiali ai problemei nu a permis efectuarea unui calcul mai detaliat.

ERATĂ

Pagina	rîndul sau formula :	în loc de :	se va citi :
336	(2)	$(x = y + iz, \ldots$	$(x = y + i\mathfrak{z}, \ldots$
369	11	$\ldots \frac{U_{n-1}}{x_1^{n-1}}.$	$\ldots \frac{u_{n-1}}{x_1^{n-1}}.$
369 370	(9), (10), (11), (12)	U_0, U_1, U_2, U_3	u_0, u_1, u_2, u_3
370	13	$\ldots + 9\, c_{32}\, l^4 + \ldots$	$\ldots + 9\, C_{32}\, l^4 + \ldots$
372	8	$\left.\vphantom{\int}\right\} = l$	$\left.\vphantom{\int}\right\} =$
374	2 și (22), (23)	U_{n-1}	u_{n-1}
389	(39)	$T_n = \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \ldots$	$T_n = T_{no} + \sum_{m=1}^{\infty} \ldots$
495	10	... 29 noiembrie 1959.	... 29 noiembrie 1958.
604	7 de jos	$\ldots \alpha_n = 0 \ldots$	$\ldots \alpha_n = 360 \ldots$
606	(13)	$\ldots = \frac{dz_n}{dt} = \ldots$	$\ldots = \frac{dz_m}{dt} = \ldots$
609	16	$\ldots s_p - 1 \ldots$	$\ldots s_{p-1} \ldots$

c. 680 – Studii și cercetări de mecanică aplicată nr. 2/1959

VII

Cs

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

3
ANUL X
1959

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL X

1959

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil :

Academician E. CARAFOLI

Membri :

Academician N. PROFIRI ;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București ;
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;
M. ARCAN, şef de secție, Mecanica Construcțiilor, I.C.M.L., Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE PATRU ORI PE AN

Redacția : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul X, nr. 3 1959

SUMAR

* * * Cercetări de mecanică aplicată în anii regimului democrat-popular. . . 649

STUDII

AEROMECANICĂ

T. HACKER, Stabilitatea avionului cu un număr redus de grade de libertate 655
ŞT. ANDREI, Nomograme pentru calculul pierderilor interne în palele rotorului de elicopter antrenat pneumatic 663
M. IONESCU şi GH. DARIE, Asupra rezistenţei de undă şi momentului de ruliu ale aripilor cu borduri de atac supersonice 683
ST. N. SĂVULESCU, Comportarea unor soluţii ale stratului limită tridimensional în ipoteza profilelor tip de viteze şi temperaturi 695
ŞERBAN SĂNDULESCU, Caracteristicile aerodinamice ale aripilor triunghiulare în mişcare oscilatorie armonică în regim supersonic 711

HIDROMECANICĂ

S. HÎNCU, Pierderi de energie minime la amestecul a doi curenţi sub presiune 723

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

N. TIPEI şi AL. NICA, Cercetări asupra regimurilor de funcţionare a lagărelor I. Influenţa variaţiei viscozităţii 737
V. N. CONSTANTINESCU, Calculul lagărelor compuse din suprafeţe plane, lubrificate în regim turbulent 755

TEORIA MECANISMELOR

R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC şi GR. ANTONESCU, Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor 771
N. S. PÎRVULESCU, Influenţa lungimii balansierului asupra echilibrării unităţii de pompare 785

REZISTENŢA MATERIALELOR – ELASTICITATE – PLASTICITATE

MIHAIL HANGAN, O metodă de calcul, prin aproximaţii succesive, a structurilor multiplu nedeterminate, în domeniul plastic 795

M. MIHAILESCU şi Y. MIHAILESCU, Aplicarea metodei relaxării la calculul învelitorilor subţiri 819
CRISTIAN STĂNESCU şi VIOREL VISARION, Extinderea analogiei staticogeometrice pentru învelitorile elastice subţiri cu anizotropie de material 829
LIVIU LIBRESCU, În legătură cu teoria structurilor elastice subţiri, alcătuite din straturi ortotrope, simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafaţa mediană 837
VALERIU PETCU, Asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii de echilibru elastic cu matrice de tip Jacobi 855
V. MAGER, Asupra echilibrului elastic al învelitorilor subţiri de rotaţie, cu aplicaţie la catenoidul drept de rotaţie 867

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

ION LĂZĂRESCU şi ANTON BOGDÁN, Contribuţii în legătură cu geometria cuţitelor pentru prelucrarea roţilor dinţate conice cu dantura circulară . 887
A. KARDOS, Măsurarea asperităţilor şi a rotunjirii tăişului la sculele aşchietoare 917

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ şi E. DECIU, Instalaţie centralizatoare de sisteme de măsură pentru studiul maşinilor şi sculelor aşchietoare 923
D. RAŞEEV, Studiul unor cupluri optime cămaşă-piston la pompele de extracţie 927

RECENZII 947

CĂRŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 963

LUCRĂRI DIN DOMENIUL MECANICII APLICATE PUBLICATE ÎN „STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ" ÎN 10 ANI DE APARIŢIE 967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

— Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune*: *stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

— *Aerodinamică* (*mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori*).

— *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice*).

— *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).

— *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).

— *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).

— *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Журнал „*РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ*"

публикует:

— Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, осуществленных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механнка грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке, или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том X, № 3 1959

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

* * * Исследования по прикладной механике за годы народно-демократического режима 649

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

Т. ХАКЕР, Устойчивость самолета при уменьшенном числе степеней свободы 655
Ш. АНДРЕЙ, Номограммы для расчета внутренних потерь в лопастях несущего винта вертолета с пневматическим приводом 663
М. ИОНЕСКУ и Г. ДАРИЕ, О волновом сопротивлении и кренящем моменте крыльев с сверхзвуковыми передними кромками 683
Ш. СЭВУЛЕСКУ, Поведение решений трехмерного пограничного слоя при типовых профилях скоростей и температур 695
Ш. СЭНДУЛЕСКУ, Аэродинамические характеристики треугольных крыльев при гармоническом колебательном движении в сверхзвуковом режиме 711

ГИДРОМЕХАНИКА

С. ХЫНКУ, Минимальные потери энергии при смешении двух напорных потоков 723

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ и А. НИКА, Исследование рабочего режима подшипников. I. Влияние изменения вязкости 737
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Расчет подшипников, состоящих из плоских поверхностей при турбулентном режиме смазки 755

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Р. БОГДАН, Х. ПЕЛЕКУДИ, Л. КАЛМАЧУК и Г. АНТОНЕСКУ, О полюсном датчике для исследования механизмов 771
Н. ПЫРВУЛЕСКУ, Влияние длины ложной качалки на балансировку приводной качалки 785

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ-УПРУГОСТЬ-ПЛАСТИЧНОСТЬ

М. ХАНГАН, Метод расчета гиперстатических неопределимых конструкций в пластической области путем последовательных приближений 795

МИРЧА МИХЭЙЛЕСКУ и ИВОН МИХЭЙЛЕСКУ, Применение метода релаксации к расчету тонких оболочек 819
Х. СТЭНЕСКУ и В. ВИСАРИОН, Распространение статико-геометрической аналогии на тонкие упругие оболочки с анизотропией материала 829
Л. ЛИБРЕСКУ, К теории тонких упругих оболочек, составленных из ортотропных слоев, расположенных симметрично по толщине относительно срединной поверхности 837
В. ПЕТКУ, О решении систем уравнений упругого равновесия с матрицей типа Якоби 855
В. МАДЖЕР, Об упругом равновесии тонкостенных оболочек вращения применительно к прямому катеноиду вращения 867

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

И. ЛЭЗЭРЕСКУ и А. БОГДАН, Геометрия резцов для обработки конических шестерен с закругленными зубьями 887
А. КАРДОШ, Измерение зазубренности и скругления режущей кромки металлорежущего инструмента 917

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Установка для централизации измерительных систем при исследовании металлорежущих станков и инструментов 923
Д. РАШЕЕВ, Исследование оптимальных пар гильза-поршень нефтенасосов 927

РЕЦЕНЗИИ 947

КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ 963

РАБОТЫ В ОБЛАСТИ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ В ТЕЧЕНИЕ 10 ЛЕТ ИЗДАНИЯ ЖУРНАЛА „ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ“ . . 967

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome X, nº 3 1959

SOMMAIRE

Page

* * * La recherche dans le domaine de la Mécanique appliquée, sous le régime de démocratie populaire 649

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

T. HACKER, Aircraft stability with a reduced number of freedom degrees 655
ŞT. ANDREI, Nomographic charts for calculating internal losses in the blades of a pneumatically driven helicopter rotor 663
M. IONESCU et GH. DARIE, Sur la résistance d'onde et le moment de roulis des ailes à bords d'attaque supersoniques 683
ST. N. SĂVULESCU, Résultats fournis par certaines solutions de la couche-limite tridimensionnelle, dans l'hypothèse des profils-type de vitesse et de température 695
ŞERBAN SĂNDULESCU, Caractéristiques aérodynamiques des ailes triangulaires, en mouvement oscillatoire, harmonique, en régime supersonique . . 711

HYDRODYNAMIQUE

S. HÎNCU, Pertes minima d'énergie lors du mélange de deux courants sous pression 723

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

N. TIPEI et AL. NICA, Recherches sur les régimes de fonctionnement des paliers I. Influence de la variation de la viscosité 737
V. N. CONSTANTINESCU, Le calcul des paliers composés de surfaces planes, lubrifiés en régime turbulent 755

THÉORIE DES MÉCANISMES

R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC et GR. ANTONESCU, On the polar transducer for the investigation of mechanisms 771
N. S. PÎRVULESCU, Influence de la longueur du balancier sur l'équilibrage de l'unité de pompage 785

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — ÉLASTICITÉ — PLASTICITE

MIHAIL HANGAN, Une méthode de calcul des structures hyperstatiques dans le domaine élasto-plastique 795

MIRCEA MIHAILESCU and Y. MIHAILESCU, Application of the relaxation method to the calculation of thin shells 819
CRISTIAN STĂNESCU et VIOREL VISARION, Extension de l'analogie statico-géométrique aux coques élastiques minces, à anisotropie du matériel . . 829
LIVIU LIBRESCU, A propos de la théorie des structures élastiques minces, constituées de couches orthotropes, symétriquement disposées sur l'épaisseur par rapport à la surface médiane 837
VALERIU PETCU, Solution des systèmes d'équations d'équilibre élastique à matrices du type de Jacobi 855
V. MAGER, Sur l'équilibre élastique des voûtes minces de rotation, avec application au caténoïde droit de rotation 867

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

ION LĂZĂRESCU und ANTON BOGDÁN, Beiträge zur Geometrie der Werkzeuge zur Bearbeitung konischer Zahnräder mit kreisförmiger Zahnung . . 887
A. KARDOS, Mesure des aspérités et du rayon de la pointe des outils de tour 917

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

M. P. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Banc centralisé de systèmes de mesure pour l'étude des machines et outils de coupe 923
D. RAŞEEV, Etude de quelques couples optima chemise-piston dans les pompes d'extraction 927

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 947

LIVRES REÇUS DERNIÈREMENT À LA RÉDACTION 963

TRAVAUX DU DOMAINE DE LA MÉCANIQUE APPLIQUÉE PUBLIÉS DANS «STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ» PENDANT 10 ANNÉES D'APPARITION DE LA REVUE 967

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

Le périodique « STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »
(« ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE »)

publie:

— des études originales, *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique;*

— *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question;*

— *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose: l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée; la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

— *Aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs);*

— *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes);*

— *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus);*

— *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques);*

— *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction);*

— *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », *15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ ÎN ANII REGIMULUI DEMOCRAT-POPULAR

La 23 August 1944 forţele populare şi patriotice, organizate şi conduse de Partidul Comunist din Romînia, au înfăptuit răsturnarea dictaturii militaro-fasciste.

Victoria insurecţiei armate realizată acum 15 ani în condiţiile loviturilor zdrobitoare date armatelor fasciste de către armata sovietică eliberatoare a deschis poporului nostru calea spre democraţie şi socialism.

Din punct de vedere istoric, 15 ani reprezintă o perioadă scurtă, dar realizările obţinute în toate domeniile, în cursul acestui interval de un popor eliberat de exploatare, sînt atît de mari încît nu pot fi comparate cu cele obţinute în timpul regimului burghezo-moşieresc.

Regimul democrat-popular a creat posibilităţi necunoscute în trecut pentru dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii, factori determinanţi ai progresului industrial. Dezvoltarea studiilor şi cercetărilor ştiinţifice constituie o importantă problemă de stat.

Un eveniment de seamă în viaţa ştiinţifică a ţării l-a constituit reorganizarea în 1948 a Academiei Romîne pe noi baze şi înfiinţarea a numeroase institute de cercetări. Astfel de institute, inexistente în trecut, reprezintă una din multiplele realizări ale regimului democrat-popular. Activitatea de cercetare ştiinţifică a acestor institute a fost organizată de la început pe baze metodice şi planificate, pentru a sprijini puternic industria socialistă în plină dezvoltare, prin noi cuceriri ale ştiinţei.

Unul din institutele create în acest timp a fost Institutul de mecanică aplicată. Preocupările cercetătorilor institutului s-au axat de la început pe probleme menite să răspundă cerinţelor economiei naţionale şi să contribuie la dezvoltarea ştiinţei în general.

Datorită măsurilor luate de partid şi guvern, institutul a fost înzestrat cu laboratoare bine utilate şi cu cadre cu o înaltă pregătire.

În centrul atenţiei conducerii institutului a stat problema formării cadrelor, prin îndrumări date de cercetători de înaltă calificare ca şi prin organizarea diferitelor cursuri de ştiinţă şi tehnică. S-au format noi cadre atît în ţară cît şi în străinătate, în special în U.R.S.S., creindu-se adevărate şcoli de cercetare ştiinţifică în domeniul aerodinamicii, al lubrificaţiei maşinilor, al hidromecanicii.

Pe măsura dezvoltării cercetării şi a creşterii cadrelor, s-au organizat secţiile şi sectoarele de cercetări. Mai tîrziu preocupările institutului s-au conturat mai precis prin înfiinţarea unor noi sectoare de activitate sau prin trecerea unor sectoare în cadrul altor instituţii. În prezent, studiile şi cercetările se efectuează în cadrul următoarelor secţii : mecanică generală, maşini şi mecanisme, aeromecanică, hidromecanică. Pentru sprijinirea secţiilor de cercetări, prin elaborarea metodelor moderne de experimentare şi măsură, s-a înfiinţat în ultimii ani un sector de măsurători cu izotopi radioactivi şi mărimi electrice.

Documentarea — prima etapă în activitatea de cercetare — a fost asigurată încă din primii ani, prin crearea unei secţii de documentare, menită să asigure informarea ştiinţifică şi materialul documentar necesar colectivelor de cercetători. În acest scop, s-au stabilit o serie de forme de documentare organizate cu caracter permanent, care reprezintă instrumente preţioase de sprijin a activităţii de cercetare.

Literatura de specialitate şi experienţa ştiinţei şi tehnicii sovietice au constituit îndreptare valoroase pentru organizarea şi desfăşurarea cercetărilor.

Activitatea ştiinţifică a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'', care a atras şi cadre din învăţămîntul superior şi industrie, s-a dezvoltat treptat, obţinîndu-se o serie de realizări importante, grupate în jurul următoarelor obiective :

— asistenţa sectoarelor de producţie pentru rezolvarea problemelor mai importante ale economiei naţionale ;

— contribuţii preţioase la dezvoltarea ştiinţei în general în domeniile respective.

Aniversarea a 15 ani de la eliberarea patriei noastre coincide cu împlinirea a 10 ani de la înfiinţarea Institutului de mecanică aplicată. În zece ani de cercetare în domeniul mecanicii aplicate s-au obţinut unele realizări deosebite, cu caracter ştiinţific fundamental. Totodată s-au adus o serie de contribuţii în soluţionarea unor probleme cerute de industrie, ţinînd seamă de directivele partidului şi guvernului privind dezvoltarea continuă a economiei naţionale, prin elaborarea diferitelor protocoale, prin acordare de asistenţă tehnică nemijlocită, prin publicaţii etc.

Dintre realizările mai importante cu caracter ştiinţific fundamental, menţionăm studii în domeniul aerodinamicii vitezelor mari, care au condus la elaborarea de metode originale în tratarea unor probleme de actualitate. S-au rezolvat astfel mai multe probleme de mişcări supersonice privind caracteristicile aerodinamice ale unei clase speciale de aripi. Soluţiile generale date sînt clare, simple în formă, dar cuprinzătoare în conţinut.

— S-au mai efectuat studii în domeniul aerodinamicii suprafeţelor permeabile şi a hipersustentaţiei prin aripi suflate, elaborîndu-se unele scheme fizice originale, care conduc la soluţii simple, permiţînd abordarea unor probleme noi, mai puţin studiate pînă în prezent.

Rezultate teoretice noi au fost obţinute în studiul stabilităţii şi maniabilităţii avioanelor pentru o serie de situaţii de zbor puţin studiate. În domeniul scurgerilor fluidelor reale, cu suprafaţă liberă prin canale, conducte şi peste deversoare s-au adus unele contribuţii la teoria scurgerii fluidelor vîscoase.

S-au făcut cercetări în domeniul ungerii-frecării-uzurii, care au condus la stabilirea unor metode generale pentru determinarea mişcării în straturi de lubrefiant pentru studiul lagărelor supuse la forţe şi viteze variabile, a lagărelor cu aer şi a funcţionării acestora în regim turbulent. Alte studii întreprinse în cadrul institutului au condus la dezvoltarea unor metode de analogie hidrodinamică a laminării metalelor pentru determinarea presiunilor de laminare.

Prezintă interes atît din punct de vedere ştiinţific cît şi practic studiile în domeniul clasificării şi sintezei mecanismelor prin metode teoretice şi mecano-electronice, care vor putea duce la găsirea unei noi metode pentru studiul mecanismelor.

Rezolvarea unor probleme de elasticitate, plasticitate, rezistenţa materialelor, a constituit de asemenea o preocupare a Institutului de mecanică aplicată.

În domeniul măsurătorilor cu izotopi radioactivi s-au întreprins o serie de cercetări utile în mecanica fluidelor, în uzură etc.

O altă categorie de lucrări o formează acelea care au o eficacitate economică imediată, dintre care menţionăm construcţia de motoare. Astfel s-a cercetat şi pus la punct o metodă de *rodare chimică* a motoarelor, obţinîndu-se o reducere substanţială a timpului de rodaj, deci economii importante, în special în producţia şi exploatarea tractoarelor.

S-au mai efectuat cercetări cu privire la determinarea regimurilor optime de strunjire a oţelurilor romîneşti. Au fost elaborate norme tehnico-ştiinţifice de prelucrabilitate la strung a oţelurilor, norme ce sînt în curs de aplicare cu caracter experimental la diferite uzine. Prin aplicarea acestor norme, se realizează o creştere însemnată a productivităţii muncii. Tot în cadrul acestor preocupări se află şi aceea a prelucrabilităţii la strung a oţelurilor romîneşti cu plăcuţe mineralo-ceramice de fabricaţie romînească.

În vederea economisirii de metal, în special de metale deficitare, s-a pus la punct o metodă de metalizare prin pulverizare. Cercetările au fost aplicate la recondiţionarea arborilor cotiţi de la motoarele de tractor, a osiilor uzate ale vagoanelor de tramvai. Ca urmare a rezultatelor bune obţinute, metoda a început să fie extinsă şi în alte domenii, realizîndu-se instalaţii de metalizare pe baza proiectului Institutului de mecanică aplicată.

Alte cercetări au atacat problemele de elasticitate şi vibraţii, iar rezultatele înregistrate vor conduce la îmbunătăţirea calităţii unor fabricate.

În domeniul cercetărilor şi a lucrărilor experimentale de hidromecanică, necesare măririi potenţialului energetic al ţării, s-au efectuat studii în vederea aplicării lor la marile construcţii hidrotehnice. În felul acesta s-a contribuit în mod deosebit la realizarea pe baze ştiinţifice a unor lucrări de mare însemnătate economică.

Sectorul de tehnica măsurătorilor a efectuat numeroase verificări ale caracteristicilor de rezistență ale diferitelor prototipuri de mașini. În ce privește problemele de protecția muncii, s-au efectuat lucrări menite să îmbunătățească condițiile de muncă în mine, ateliere și uzine. S-au efectuat cercetări privind ventilația în mine, s-a realizat un tip de audio-protector pentru muncitorii din diferite întreprinderi unde se produc zgomote intense.

Dispunînd de condiții optime, cercetătorii din cadrul institutului au realizat cu ajutorul unor întreprinderi o serie de noi aparate și instalații în scopul desfășurării muncii de cercetare, cu ajutorul cărora au putut fi atacate, cu mai multă eficacitate, problemele din acest domeniu. Astfel a fost construită o suflerie subsonică cu o balanță modernă cu șase componente ; o suflerie supersonică pentru experimentarea în domeniul aerodinamicii vitezelor mari, prima instalație de acest fel proiectată și executată la noi. De asemenea, a mai fost realizat un tub de șoc, care servește la studierea multor probleme din domeniul aerodinamicii vitezelor mari.

De la înființarea sa și pînă acum, institutul a creat trei laboratoare pentru studiul pe machete hidrodinamice, un laborator de lubrificație, un laborator pentru studiul prelucrării metalelor, un laborator de teoria mecanismelor, un laborator pentru prelucrarea mediilor solide continue, un laborator pentru studiul recondiționării pieselor prin metalizare și un laborator de măsurători cu radioizotopi și mărimi electrice.

Toate aceste realizări deschid largi perspective pentru profilarea muncii de cercetare în conformitate cu cerințele științei și tehnicii în domeniul mecanicii aplicate, perspective ce își vor găsi concretizarea în schița program a planului de dezvoltare a economiei naționale pe anii 1960-1975.

Un mijloc deosebit de important pentru difuzarea rezultatelor cercetărilor îl constituie publicațiile periodice, tratatele și monografiile. În acest sens menționăm cele două publicații periodice ale institutului și anume : ,,Studii și cercetări de mecanică aplicată'' și ,,Revue de mécanique appliquée''.

An de an aceste publicații și-au ridicat nivelul științific, reușind să strîngă în jurul lor colaboratori numeroși și să se bucure de aprecieri elogioase din partea oamenilor de știință din țară și de peste hotare. Totodată s-a reușit să se stabilească numeroase legături cu instituții de specialitate din diferite țări, cu care se face schimb de lucrări documentare valoroase și utile.

În paginile revistei ,,Studii și cercetări de mecanică aplicată'', se publică studii originale de înalt nivel științific, note, referate tehnice, recenzii. Din conținutul lucrărilor publicate se desprinde îmbinarea tratării teoretice a problemelor la un înalt nivel, cu caracterul aplicativ. Tematica revistei este bine conturată și multilaterală, relevînd totodată o continuitate în preocupări. Problemele atacate răspund necesităților actuale și de perspectivă ale economiei naționale, aducînd o contribuție originală. Lucrările cu caracter experimental sînt, de asemenea, tratate la un nivel ridicat.

Revista ,,Studii și cercetări de mecanică aplicată'' urmărește stimularea activității științifice și promovarea lucrărilor mai valoroase în domeniul mecanicii aplicate în țară.

În ,,Revue de mécanique appliquée'' se publică lucrări teoretice şi experimentale în limbile rusă, franceză, engleză, germană, apărute în ,,Studii şi cercetări'', sau în alte publicaţii periodice de specialitate.

Activitatea institutului se reflectă nu numai în publicaţiile periodice ci şi în monografiile şi tratatele apărute sub îngrijirea Editurii Academiei R.P.R. Au apărut astfel cărţi în domeniul vibraţiilor, rezistenţei materialelor, construcţiilor, mecanicii fluidelor, propagării căldurii, aerodinamicii, lubrificaţiei, mecanicii pămînturilor.

Unele cărţi au răspuns, în primii ani, nevoilor stringente ale industriei şi învăţămîntului, altele reprezintă lucrări cu caracter ştiinţific fundamental.

O parte dintre acestea au fost distinse cu premiul de stat sau premiile Academiei R.P.R. Ele reprezintă tratate de bază în literatura ştiinţifică, bucurîndu-se de aprecieri deosebite din partea oamenilor de ştiinţă din ţară şi dinafara hotarelor ţării.

Publicaţiile menţionate au umplut un gol evident, punînd la îndemîna specialiştilor atît rezultatele originale ale unei activităţi intense de cercetare, cît şi materiale de referinţe, bogate şi variate, de o reală utilitate. Aceste publicaţii reprezintă contribuţii însemnate la constituirea unei literaturi ştiinţifice, puţin cunoscută în trecut, necesară atît specialiştilor din industria noastră, cît şi formării noilor cadre.

Activitatea de zece ani a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'', pusă în slujba dezvoltării economiei naţionale şi a dezvoltării unei ştiinţe romîneşti, a cîştigat preţuirea cercurilor ştiinţifice din ţară şi străinătate.

În procesul transformărilor revoluţionare din ţara noastră, în lupta pentru construirea socialismului, partidul şi guvernul acordă o înaltă preţuire ştiinţei, îndrumînd-o activ pe tărîmul legării de practică.

Aşa cum rezultă şi din expunerea tovarăşului Gh. Gheorghiu-Dej la Plenara C.C. al Partidului Muncitoresc Romîn din 13—14 iulie 1959, — principala rezervă pentru creşterea necontenită a productivităţii muncii fiind introducerea în producţie a celor mai noi cuceriri ale ştiinţei şi tehnicii — ne revin sarcini concrete şi importante, sarcini care în condiţiile existente pot fi îndeplinite cu mult entuziasm.

Realizările obţinute pînă acum, posibilităţile de dezvoltare pe care le avem, sarcinile trasate de partid şi guvern, constituie pentru oamenii de ştiinţă, pentru toţi lucrătorii din acest domeniu, un imbold puternic pentru a continua cu şi mai mult avînt studiile şi cercetările întreprinse în scopul dezvoltării economiei naţionale şi a construirii socialismului în ţara noastră.

AEROMECANICĂ

STABILITATEA AVIONULUI CU UN NUMĂR REDUS DE GRADE DE LIBERTATE

DE

T. HACKER

Cercetarea stabilității în condiții de zbor cît mai apropiate de cele reale, precum și posibilitatea simplificării problemei matematice conduc la considerarea zborului *stabilizat*. Într-adevăr, în practică, avionul nu zboară cu comenzile fixe, nici libere, ci cu comenzile acționate tot timpul fie de pilot — prin mișcări în mare parte reflexe — fie de stabilizorul automat. Rezultatul acestei intervenții a pilotului sau a instalației automate constă în anihilarea deviațiilor unora dintre parametrii cinematici ai zborului. Acțiunea de stabilizare comandată nu se poate extinde asupra tuturor parametrilor cinematici, din cauza naturii și vitezei de variație a deviațiilor respective. Se știe astfel că, dacă deviația are o variație oscilatorie, cu o frecvență care depășește o anumită limită *) ea practic nu poate fi contracarată de pilot sau stabilizor, din cauza întîrzierii survenite atît la efectuarea comenzii, cît și la răspunsul avionului la comandă. În raport cu parametrii cinematici ale căror deviații au o variație care împiedică stabilizarea, avionul trebuie să fie stabil dinamic în mod obligator.

În ceea ce privește simplificarea problemei matematice, ea va rezulta din expunerea metodei propuse. Este de remarcat doar faptul că, considerarea ansamblului avion-pilot sau avion-stabilizor automat ca sistem dinamic unic nu conduce în mod necesar la simplificarea problemei matematice, ci poate duce dimpotrivă, prin înglobarea ecuației de funcționare a instalației automate în sistemul ecuațiilor de mișcare, la o mărire a numărului de grade de libertate și deci la o complicare a calculelor.

O primă încercare de a considera intervenția comenzilor pentru anihilarea unor elemente ale perturbației, în vederea simplificării calculelor (prin reducerea numărului de grade de libertate), a fost făcută, se pare, de S. Neumark [2]. Metoda lui S. Neumark, denumită de autor *teoria stabilității constrînse*, avînd un interes teoretic și practic incontestabil, se bazează totuși pe unele ipoteze care duc la o restrîngere a generalității metodei în ceea ce privește aplicațiile practice. Aceste ipoteze sînt următoarele : 1) pilotul reușește să mențină deviația unuia dintre parametrii cinematici, sau o combinație liniară oarecare a deviațiilor, tot timpul anulată sau constantă ; 2) pentru realizarea acestui rezultat el operează cîte o singură comandă ; 3) acțiunea comenzii modifică o singură ecuație a sistemului de ecuații ale mișcării perturbate.

---

*) O limită practică a frecvenței este dată, de exemplu, în lucrarea [1], p. 4, evaluată la $^1/_2$ cicli pe secundă, peste care o cît de ușoară instabilitate devine incontrolabilă.

În cele ce urmează, se prezintă un procedeu de tratare a problemei stabilității avionului, ținîndu-se seama de acțiunea stabilizatoare a pilotului sau instalației automate, bazat pe ipoteze deduse, pe cît posibil, din considerente fizice.

La elaborarea schemei și metodelor matematice folosite, autorul a colaborat cu colectivul de Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale de la Institutul de matematică al Academiei R.P.R.

* * *

Se vor nota prin x_s deviațiile acelor parametri ai mișcării care scapă controlului (și față de care, deci, avionul trebuie să prezinte stabilitate inerentă în mișcarea parțial controlată), iar prin ξ_s deviațiile care se pretează acțiunii stabilizatoare a pilotului sau a stabilizorului automat. Fie l numărul variabilelor necontrolate iar m al celor controlate prin comenzi.

Sistemul de ecuații ale mișcării perturbate, în cazul cînd comenzile execută strict doar mișcările prescrise de programul de zbor (zborul neperturbat) sau sînt fixe (cînd mișcarea de bază este uniformă), se va scrie punîndu-se în evidență părțile liniare ale membrului al doilea. În urma acțiunii stabilizatoare a comenzilor vor apare în părțile drepte, în general, ale tuturor ecuațiilor niște termeni suplimentari. Sistemul va fi atunci de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{j=1}^{l} a_{sj}(t)x_j + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{sk}(t)\xi_k + X_s(t\,; x_1,\dots,x_l,\xi_1,\dots,\xi_m) + \\ &\quad + P_s(t\,; x_1,\dots,x_l,\xi_1,\dots,\xi_m), \qquad (1) \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{l} a'_{ij}(t)\,x_j + \sum_{k=1}^{m} \alpha'_{ik}(t)\xi_k + \Xi_i(t\,; x_1,\dots,x_l,\xi_1,\dots,\xi_m) + \\ &\quad + \Pi_i(t\,; x_1,\dots,x_l,\xi_1,\dots,\xi_m), \\ &s = 1,\dots,l, \qquad i = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

Funcțiile P_s și Π_i reprezintă forțele și momentele ce apar suplimentar datorită acțiunii comenzilor operate pentru stabilizare, adică pentru menținerea variabilelor ξ_i în limite admisibile. Depinzînd de o serie întreagă de argumente întîmplătoare, aceste funcții sînt considerate ca necunoscute.

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
657	4	... toate variabilele sînt nule ...	... toate variabilele ξ_i sînt nule ...
666	9	$\dots \sum_1^n Q_{Q_3}^{-Q_m} \dots$	$\dots \sum^n Q_3^{-Q_m} \dots$
676	19	3.1. 5. 1. 3.	5
738	(5)	$B_{m,n} = B_{m,n}$	$B_{m,-n} = B_{m_1n}$
739	(6)	$\dots 0{,}000161\, A_{11},$	$\dots -0{,}000161\, A_{11},$
739	(7)	$\dots 0{,}00437\, A_{21},$	$\dots -0{,}00437\, A_{21},$
778	25, 32, 35, 36	0ξ	$0\mathfrak{z}$
940	15	$H_{\mathrm{RC}} = 60$	$H_{\mathrm{RC}} > 60$
942	14	$PL = 5{,}7$	$\frac{P}{L} = 5{,}7$

C. 2921 — Studii şi cercetări de mecanică aplicată nr. 3/1959.

Asupra lor se fac doar anumite presupuneri, compatibile cu natura lor fizică. Astfel, în afară de satisfacerea unor proprietăți obișnuite de regularitate matematică, se va presupune că se anulează pentru orice valori ale variabilelor x_i și t, dacă toate variabilele sînt nule. Deviațiile ξ_i variind suficient de lent pentru a fi susceptibile controlului, această ipoteză este pe deplin acceptabilă.

În continuare se vor considera numai primele l ecuații ale sistemului (1). Se vede ușor că ele pot fi puse sub forma

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{l} a_{sj}(t)\, x_j + \overline{X}_s(t\,;x_1,\ldots,x_l) + R_s(t\,;x_1,\ldots,x_l,\xi_1,\ldots,\xi_m),$$

$$s = 1,\ldots,l, \tag{2}$$

unde

$$\overline{X}_s(t\,;x_1,\ldots,x_l) = X_s(t\,;x_1,\ldots,x_l,0,\ldots,0),$$

$$R_s = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \left\{ \alpha_{sk} + \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k}(X_s + P_s) \right] \right\},$$

derivatele parțiale din ultima formulă fiind luate pentru anumite valori intermediare ale argumentelor respective.

Se va denumi

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{l} a_{sj}(t)\, x_j + \overline{X}_s(t\,;x_1,\ldots,x_l), \tag{3}$$

$$s = 1,\ldots,l,$$

sistem auxiliar.

Conform teoremei lui I. G. Malkin [3], stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului auxiliar atrage după sine stabilitatea soluției banale a sistemului (2). Prin urmare criteriile de stabilitate asimptotică uniformă ale mișcării de bază virtuale descrisă de soluția particulară $x_1 = \ldots = x_l = 0$ a sistemului auxiliar sînt în același timp criterii de stabilitate pentru mișcarea parțial controlată reală a avionului. În felul acesta, problema găsirii unor criterii de stabilitate se rezolvă cu ajutorul unui sistem al cărui ordin este cu m unități mai mic, decît al sistemului care descrie mișcarea perturbată reală, m fiind numărul parametrilor cinematici stabilizați prin comenzi.

În practică, în cazurile obișnuite, sistemul auxiliar poate înlocui cu o bună aproximație sistemul de ecuații complet al mișcării perturbate, nu numai sub raportul găsirii unor criterii de stabilitate, ci și sub acela al descrierii mișcării perturbate reale (al evaluării caracteristicelor cantitative ale acestei mișcări). O asemenea substituire a unei probleme prin alta este familiară în teoria stabilității avionului, care operează aproape exclusiv numai cu ecuații de primă aproximație (liniarizate).

Valabilitatea înlocuirii sistemului complet (1) prin cel auxiliar poate fi verificată de la caz la caz prin metode cunoscute în teoria stabilității după Liapunov, sau prin alte metode. Ele nu vor fi prezentate în acest articol, făcîndu-se presupunerea că pilotul (sau stabilizorul automat) reuşeşte să menţină variabilele ξ_i suficient de mici *).

★

Pe baza celor arătate, se vor studia cîteva cazuri particulare de stabilitate în zbor parţial controlat (stabilizat prin comenzi). Ele, evident, nu vor epuiza posibilităţile de aplicare ale metodei prezentate.

Pentru simplificarea expunerii, mişcarea de bază va fi presupusă peste tot permanentă şi se va utiliza sistemul liniarizat (care în cazul mişcării de bază permanente, după cum rezultă din teoremele de primă aproximaţie ale lui A. M. Liapunov [4], poate suplini riguros, sub raportul stabilităţii, sistemul neliniar).

Stabilitatea longitudinală se va considera în două cazuri : cînd se contracarează prin comenzi deviaţiile unghiului de tangaj şi ale vitezei de zbor şi cînd acţiunea stabilizatoare se exercită doar asupra atitudinii în planul longitudinal (unghiului de tangaj).

În primul caz, sistemul auxiliar se reduce la sistemul bine cunoscut de ordinul 2, al oscilaţiilor de perioadă scurtă, stabilite pe baza ipotezelor lui B. Melvill Jones [5].

Cînd stabilizarea prin comenzi afectează doar atitudinea longitudinală a avionului, sistemul auxiliar liniarizat de ordinul 3, este de forma

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\overline{V}}{dt} &= a_{11}\Delta\overline{V} + a_{12}\Delta\alpha, \\ \frac{d\Delta\alpha}{dt} &= a_{21}\Delta\overline{V} + a_{22}\Delta\alpha + \overline{q}, \\ \frac{d\overline{q}}{dt} &= a_{31}\Delta\overline{V} + a_{32}\Delta\alpha + a_{33}\overline{q}, \end{aligned} \tag{4}$$

unde a_{ij} sînt coeficienţi constanţi depinzînd de regimul de zbor neperturbat **).

Pentru ca soluţia banală a sistemului (4) să fie uniform asimptotic stabilă, este necesară şi suficientă îndeplinirea condiţiei clasice de stabilitate, legată de semnul părţii reale a rădăcinilor ecuaţiei caracteristice.

Ecuaţia caracteristică a sistemului (4) are în toate cazurile practice o pereche de rădăcini complex conjugate mari în valoare absolută, foarte apropiate de rădăcinile mari ale ecuaţiei caracteristice a sistemului liniarizat al mişcării perturbate longitudinale în zbor necontrolat sau de acelea ale ecuaţiei caracteristice a sistemului de ordinul 2 al oscilaţiilor de scurtă perioadă.

Cea de-a treia rădăcină a ecuaţiei caracteristice a sistemului auxiliar (4) este în general mică în valoare absolută şi deci poate fi luată într-o

---

*) Continuînd analogia de mai sus, în teoria clasică a stabilităţii avionului, condiţiile de aplicabilitate a metodei micilor deviaţii (referitoare de data aceasta la perturbaţiile iniţiale) se consideră şi ele *a priori* îndeplinite.

**) Pentru expresiile lor vezi [6], p. 273.

primă aproximație egală cu valoarea rezultată din ecuația caracteristică liniarizată în raport cu argumentul ei, adică

$$\lambda_3 \cong \frac{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31})}{a_{22}a_{33} - a_{32} + a_{11}(a_{22} + a_{33}) - a_{12}a_{21}} \cdot$$

Mai departe, deoarece numitorul este pozitiv în toate cazurile practice, un prim criteriu aproximativ de stabilitate a mişcării cu unghiul de tangaj controlat este dat de inegalitatea

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}) < 0$$

care, în cele mai multe cazuri este echivalentă cu următoarea :

$$-a_{11} = 2c_x + M\frac{\partial c_x}{\partial M} + c_{TV}\cos\alpha > 0. \tag{5}$$

Această condiție, se vede uşor, este satisfăcută în general atîta timp cît coeficientul de rezistență la înaintare este practic independent sau creşte cu numărul Mach. Este de remarcat că în aceleaşi condiții mişcarea de bază a avionului necontrolat poate fi instabilă, termenul liber al ecuației caracteristice a sistemului liniarizat al mişcării longitudinale putînd fi negativ.

Ca exemplu de aplicare a metodei expuse pentru stabilitatea laterală, se va considera un singur caz, cel mai important, al controlului deviației înclinării laterale a avionului în jurul axului longitudinal (unghiul de ruliu). În variația deviației acestui unghi în mişcarea perturbată predominînd modurile aperiodice, intervenția pilotului sau stabilizorului automat este întotdeauna posibilă.

Ecuațiile mişcării perturbate laterale pot fi scrise sub forma *).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} &= b_{11}\bar{p} + b_{12}\bar{r} + b_{13}\beta, \\ \frac{d\bar{r}}{dt} &= b_{21}\bar{p} + b_{22}\bar{r} + b_{23}\beta, \\ \frac{d\beta}{dt} &= b_{31}\bar{p} + b_{32}\bar{r} + b_{33}\beta + b_{34}\Phi, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= b_{41}\bar{p} + b_{42}\bar{r}. \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru cazul în care unghiul de înclinare laterală este controlat de pilot sau stabilizor, ecuația caracteristică a sistemului auxiliar

$$D(\lambda) = 0, \tag{7}$$

---

*) Pentru expresiile coeficienților b_{ij} vezi [7], p. 456.

poate fi uşor comparat cu aceea a sistemului (6). Într-adevăr, aceasta din urmă poate fi pusă sub forma

$$-\lambda D(\lambda) + b_{34} L(\lambda) = 0, \tag{8}$$

unde $L(\lambda)$ reprezintă un binom de gradul întîi în λ.

Coeficienţii puterilor mari ale celor două ecuaţii fiind identici, rădăcina mare în valoare absolută a ecuaţiei (8) se va repeta aproape neschimbată în cazul ecuaţiei (7). În schimb, rădăcina mică în valoare a ecuaţiei (8) care ia în anumite cazuri valori pozitive, ducînd la instabilitate, nu mai reapare în cazul ecuaţiei caracteristice a sistemului auxiliar şi în consecinţă mişcarea va fi, în toate cazurile de interes practic, stabilă.

NOTAŢII

$\Delta\overline{V} = \dfrac{\Delta V}{V}$	deviaţia vitezei de zbor sub formă adimensională,
$\Delta\alpha$	deviaţia unghiului de incidenţă,
$\Delta\theta$	deviaţia unghiului de tangaj,
$\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$	vitezele unghiulare ale avionului în jurul celor trei axe legate de avion, sub forma adimensională,
β	unghiul de derapaj,
Φ	unghiul de înclinare laterală,
M	numărul Mach,
c_x	coeficientul de rezistenţă la înaintare,
$c_{TV} = -\dfrac{\dfrac{\partial T}{\partial V}}{\rho V S}$	forma adimensională a derivatei $\dfrac{\partial T}{\partial V}$ (T = tracţiunea, V = viteza de zbor, S = aria suprafeţei portante, ρ = densitatea aerului),
$t = \dfrac{2m}{\rho S V}\tau$	coeficientul adimensional al timpului (m = masa avionului, V = viteză de zbor constantă, τ = timpul).

Primită la redacţie la 17 aprilie 1959.

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОЛЕТА ПРИ УМЕНЬШЕННОМ ЧИСЛЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Как известно, на летной практике самолет находится все время под стабилизирующим действием летчика или автоматической установки (автостабилизатора или автопилота). Исходя из такого положения в работе рассматривается устойчивость по отношению только к тем кине-

матическим параметрам, которые не подвергаются стабилизирующему действию со стороны летчика или автоматического стабилизатора („устойчивость частично управляемого полета”). В уравнениях возмущенного движения действие органов управления является как постоянно действующие возмущения. При такой постановке вопроса число степеней свободы уменьшается на число контролируемых переменных, что приводит к значительному упрощению математической задачи и выкладок (Стабилизация не означает приведение к нулю возмущений, а только их ограничение по модулю). В работе даны приложения предлагаемого метода к некоторым частным случаям, представляющим практический интерес.

AIRCRAFT STABILITY WITH A REDUCED NUMBER OF FREEDOM DEGREES

SUMMARY

Since, practically, an aircraft is continuously under the pilot's stabilizing intervention or of the automatic device, the present paper discusses the aircraft stability under these circumstances (partially controlled flight). As dynamic variables, only those are considered which are not under the control of the pilot or of the automatic stabilizer, the gearing of controls for stabilizing the other kinematic parameters being represented in equations as continuously acting disturbing forces. Thus, the number of degrees of freedom is reduced by the number of controlled variables, the mathematical problem and the calculations being considerably simplified. It is to be noticed that the stabilization does not involve the maintaining of deviations all the time equal to zero, but only their bounding in absolute value. The method is applied to several particular cases of practical interest.

BIBLIOGRAFIE

1. W. J. DUNCAN, *Principles of Control and Stability of Aicraft.* Cambridge University Press, 1952.
2. S. NEUMARK, *Problems of Longitudinal Stability below Minimum Drag Speed, and Theory of Stability under Constraint.* A.R.C., R. et M. *2983.*
3. И. Г. МАЛКИН, *К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.* Прикл. Мат. и Мех. **XVIII**, *2* (1954).
4. А. М. ЛЯПУНОВ, *Общая задача об устойчивости движения.* Гостехиздат, Москва, 1950.
5. B. M. JONES, *Aerodynamic Theory.* Ed. Durand, 5, Secț. N (Dynamics of the Airplane), J. Springer, Berlin, 1935.
6. T. HACKER, *Contribuții la studiul stabilității longitudinale a avionului în evoluțiile cele mai defavorabile.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, VI, 3—4 (1955).
7. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолета.* Оборонгиз, Москва, 1957.

NOMOGRAME PENTRU CALCULUL PIERDERILOR INTERNE ÎN PALELE ROTORULUI DE ELICOPTER ANTRENAT PNEUMATIC

DE

ŞT. ANDREI

1. NOTAŢII

P_{ad} — puterea adiabatică a gazului $\left(\frac{\text{k cal}}{\text{s}}\right)\left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)$,

P_e — puterea exercitată $\left(\frac{\text{k cal}}{\text{s}}\right)\left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)$,

H_{ad} — cantitatea de căldură primită sau cedată raportată la 1 kg combustibil $\left(\frac{\text{k cal}}{\text{kg}}\right)$,

p — presiunea fluidului din circuit $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$,

p_0 — presiunea mediului ambiant în condiţii sol standard $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$,

$\delta = \frac{p_0}{p}$ — raport de detentă,

γ — greutatea specifică a fluidului $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$,

ρ — masa specifică a fluidului $\left(\frac{\text{kgs}^2}{\text{m}^4}\right)$,

T — temperatura fluidului din circuit (°K),

Δp — pierdere de presiune $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$,

ΔT — pierdere de temperatură (°K),

V — viteza fluidului $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$,

V_d — viteza teoretică de detentă (la presiunea ambiantă) $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$,
W — căldură transmisă $\left(\frac{\mathrm{k\ cal}}{\mathrm{h}}\right)$,
K — coeficient de trecere a căldurii $\left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2h^\circ}}\right)$,
α — coeficient de tranziţie a căldurii $\left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2h^\circ}}\right)$,
S_e — suprafaţa de transmisie a căldurii (m^2),
λ — conductibilitate termică $\left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{mh^\circ}}\right)$,
P_e — numărul lui Péclet,
c_p — căldura specifică la presiune constantă $\left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kgs}}\right)$,
$K = \frac{c_p}{c_v}$ — exponentul adiabatei,
Q — debitul gravimetric al fluidului din circuit $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right)$,
U — debitul volumetric al fluidului din circuit $\left(\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}\right)$,
u — debitul volumetric specific $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$,
U — viteza periferică $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$,
q — consum specific de combustibil $\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right)$,
$\mathcal{R}e$ — numărul lui Reynolds,
R — constanta gazului $\left(\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{kgs}}\right)$,
R — raza rotorului (m),
$A = \frac{1}{427}$ — echivalentul caloric al lucrului mecanic $\left(\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kgm}}\right)$,
ξ — coeficient adimensional de cădere de presiune (de frecare),
r — rază (m),
l — lungime (m),
z — numărul palelor rotorului (2 la 5),
s — secţiuni (m^2),
Ø — diametrul hidraulic (m),
Γ — perimetrul muiat (m),
a, b — axele unei secţiuni eliptice (m),
α — unghi (°),
$\mathcal{P}_{gg}$ — pierderile generatorului de gaze $\left(\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}\right)$,
$\mathcal{P}_i$ — pierderile interne în rotor $\left(\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}\right)$,
η — viscozitatea fluidului $\left(\frac{\mathrm{kgs}}{\mathrm{m^2}}\right)$,

ν — viscozitatea cinematică $\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)$,

η_{ad} — randamentul adiabatic al generatorului de gaze,

η_i — randamentul intern al rotorului,

G — greutatea de calcul a elicopterului (kg),

S_d — suprafața discului rotorului (m²),

S_p — suprafața palei rotorului (m²),

D_d — diametrul discului rotorului (m),

$\bar{G} = \frac{G}{S_d}$ — încărcarea pe disc (12—24) $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$,

$\sigma = \frac{S_p}{S_d}$ — soliditatea (0,03—0,1),

C_p — coarda palei (m),

S_p — grosimea maximă a profilului palei (m),

$\bar{g}_p = \frac{g_p}{C_p}$ — grosimea maximă relativă (0,12—0,24).

2. Parametrii de variație, de bază, ai caracteristicilor antrenării pneumatice a rotoarelor de elicopter sînt :

— parametrii caracteristici ai generatorului de gaze,

— parametrii caracteristici ai rotorului (geometrici și cinematici)

2.1. Primii sînt definiți de [1]

— parametri caracteristici absoluți și specifici ai gazului din avalul generatorului de gaze (secțiunea 3—3) pentru un regim dat de funcționare al generatorului,

— variația acestor parametri cu regimul de funcționare al generatorului de gaze.

2.1.1. Ei sînt evident determinați de tipul și modul de organizare al generatorului de gaze, putîndu-se totuși defini în ultimă instanță următorii parametri caracteristici :

2.1.1.1. Pentru flux unic (aer curat) sau amestec de gaze

$$P_{ad_{a3}} = \frac{Q_{a3}}{2g} V_d^2 \left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right),$$

în care

$$V_d^2 = 2g\,\frac{c_{pa3}}{A}\,T_{a3}\left(1 - \left(\frac{p_0}{p_{a3}}\right)^{\frac{K-1}{K}}\right) + V_{a3}^2 \left(\frac{m}{s}\right)^2$$

În funcție de parametri frînați ai gazului, expresia lui P_{ad_3} devine

$$P_{ad_{a3}} = Q_{a3}\left(R\,\frac{K}{K-1}\right)_{a3} \cdot T_{a3}^{\star}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_{a3}^{\star}}\right)^{\frac{K-1}{K}}\right]\left[\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right]$$

în care

$$\left[R\frac{K}{K-1}\right]_{a3} = \frac{c_{p_{a3}}}{A} \text{ cu } A = \frac{1}{427}$$

sau ca valoare specifică raportat la Q_a

$$\left(\frac{P_{ad}}{Q}\right)_{a3} = \overline{P}^{Q}_{ad_{a3}} = \left(R\frac{K}{K-1}\right)_{a3} \cdot T^{\star}_{a_3}\left(1 - \delta_{a_3}^{\star\frac{K-1}{K}}\right) [\mathrm{m}]$$

cu

$$\delta^{\star}_{a_3} = \frac{p_0}{p^{\star}_{a_3}} = \frac{1}{\overline{p}^{\star}_{a_3}}$$

2.1.1.2. Pentru fluxuri multiple (n fluxuri independente în care de obicei $n = 2$, un flux compresor de debit Q_{c_3} şi un flux motor de debit Q_{m3})

$$P_{ad_3} = \sum_{1}^{n} \overline{Q}_3\left(R\frac{K}{K-1}\right)_3 T^{\star}_3\left(1 - \delta_3^{\star\frac{K-1}{K}}\right)\left[\frac{kgm}{s}\right]$$

sau ca valoare specifică raportat la Q_m

$$\frac{P_{ad3}}{Q_m} = \overline{P}^{Q_m}_{ad_3} = \sum_{1}^{n} \overline{Q}^{Q_m}_{Q_3}\left(R\frac{K}{K-1}\right)_3 T^{\star}_3\left(1 - \delta_3^{\star\frac{K-1}{K}}\right) [\mathrm{m}]$$

Notă. Valorile lui P_{ad} $\left(\text{respectiv } \overline{P}^{Q_m}_{ad_c}\right)$ se pot citi pe nomograme de tipul celei redate într-o lucrare anterioară [1].

2.1.2. Variaţia lui $\overline{P}^{Q}_{ad}$ $\left(\text{respectiv } \overline{P}^{Q_m}_{ad_m}\right)$ cu $\delta^{\star}$ la diferite valori compatibile ale lui $T^{\star}$ şi c_p este arătată în diagrama din figura 1.

S-a notat

$$p^{\star}_{a_3} = p_{a_3}\left(\frac{T^{\star}}{T}\right)_{a_3}^{\frac{K}{K-1}}; \quad T^{\star}_{a_3} = T_{a_3} + \frac{V^2_{a_3}}{2g\frac{c_{p_{a3}}}{A}}.$$

2.1.3. Rezultă că o aceeaşi valoare a lui P_{ad} (respectiv $\overline{P}_{ad}$) se poate obţine cu diferite valori ale parametrilor care îl definesc, respectiv Q, T, c_p, p, V sau s (V fiind legat de s prin relaţia $Vs = \frac{Q}{\gamma}$), care sînt parametrii caracteristici ai gazului utilizat la antrenarea rotorului elicopterului. Interdependenţa dintre aceştia este definită de organizarea (schema) generală a generatorului de gaze şi de regimul său de funcţionare în zbor, care defineşte, de altfel, şi pe η_{ad} $\left(\eta_{ad} = \frac{P_{ad}}{P_c} = \frac{P_{ad}}{P_{ad} + \mathcal{P}_{gg}}\right)$ şi deci şi pierderile generatorului de gaze $\left(\mathcal{P}_{gg} = \frac{P_{ad}(1 - \eta_{ad})}{\eta_{ad}}\right)$.
Ea este exprimată în curbele caracteristice de performanţe ale generatorului de gaze *), **).

---

*) Şt. Andrei, *Studiu critic al generatoarelor de gaze motocompresoare* (în curs de publicare).

**) Institutul de mecanică aplicată (colectiv), *Teoria elicopterului* (monografie).

2.1.4. În consecință, pentru o putere adiabatică dată (cerută), a generatorului de gaze și o schemă generală de organizare și regim, definite, ale acestuia, se pot stabili valorile corespunzătoare ale parametrilor absoluți și specifici interdependenți ai gazului la intrarea sa în tuburile de conducere din palele rotorului elicopterului (respectiv parametri Q, $T^\star$, $p^\star$, c_p) sau

$$\overline{Q}^q = \frac{Q}{q}\,;\ \overline{T}^\star = \frac{T^\star}{T_0}\,;\ \bar{p}^\star = \frac{p^\star}{p_0}$$

2.2. Presupunînd cunoscuți (dați) acești parametri, valorile lor la ieșire sînt condiționate de parametrii caracteristici ai rotorului, respectiv :

— parametrii geometrici (dimensionali și de formă) ai conductei (-elor) de gaze din pale,

— parametrii cinematici.

2.2.1. Parametrii geometrici sînt definiți de :

— secțiunea conductei (-elor), care determină viteza de scurgere a gazelor ; secțiunea de referință pentru pierderile hidraulice este considerată de obicei intrarea în pală (3′ — 3′ p).

$$V_{p3'} = \frac{Q_p}{\gamma_{p3'} Z \cdot \varepsilon s_p} = \frac{U_{p3'}}{Z \varepsilon s_p} = u_{p3'} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

în care

$$Q_p = k \cdot Q_a \left[\frac{kg}{s}\right],$$

k fiind coeficientul de neetanșeitate și de prelevări de gaze (pierderile prin neetanșeitatea garniturii rotative, asupra debitului de gaze care trec din colectorul central în pale, nu depășesc de obicei 1%).

— diametrul hidraulic al unei conducte în secțiunea de referință

$$\text{Ø}\, p_{h3'} = \frac{4 s_{p3'}}{\Gamma_{p3'}} = \frac{\text{4 ori secțiunea utilă a conductei}}{\text{perimetrul muiat}}\,;$$

— lungimea conductei : l_p (m) între secțiunile 3′—3′ (intrarea în pală) și 4—4 (intrarea în ajutaj) ;

— razele relative de curbură ale conductei

$$\bar{r}_i = \frac{r_i}{\Phi p_h}\,;$$

— legea de variație a secțiunilor conductei de-a lungul palei (de obicei secțiune constantă, sau dacă este ușor variabilă se consideră secțiune medie)

$s_p = K s_{p3'}$, în care $K = f\,(l_p)$ după o lege oarecare dată sau aleasă. De obicei $K = 1$ sau $K =$ const.

2.2.2. Aceste elemente sînt, la rîndul lor, determinate de caracteristicile geometrice ale rotorului elicopterului cît și de schema de organizare aleasă a conductelor din palele rotorului.

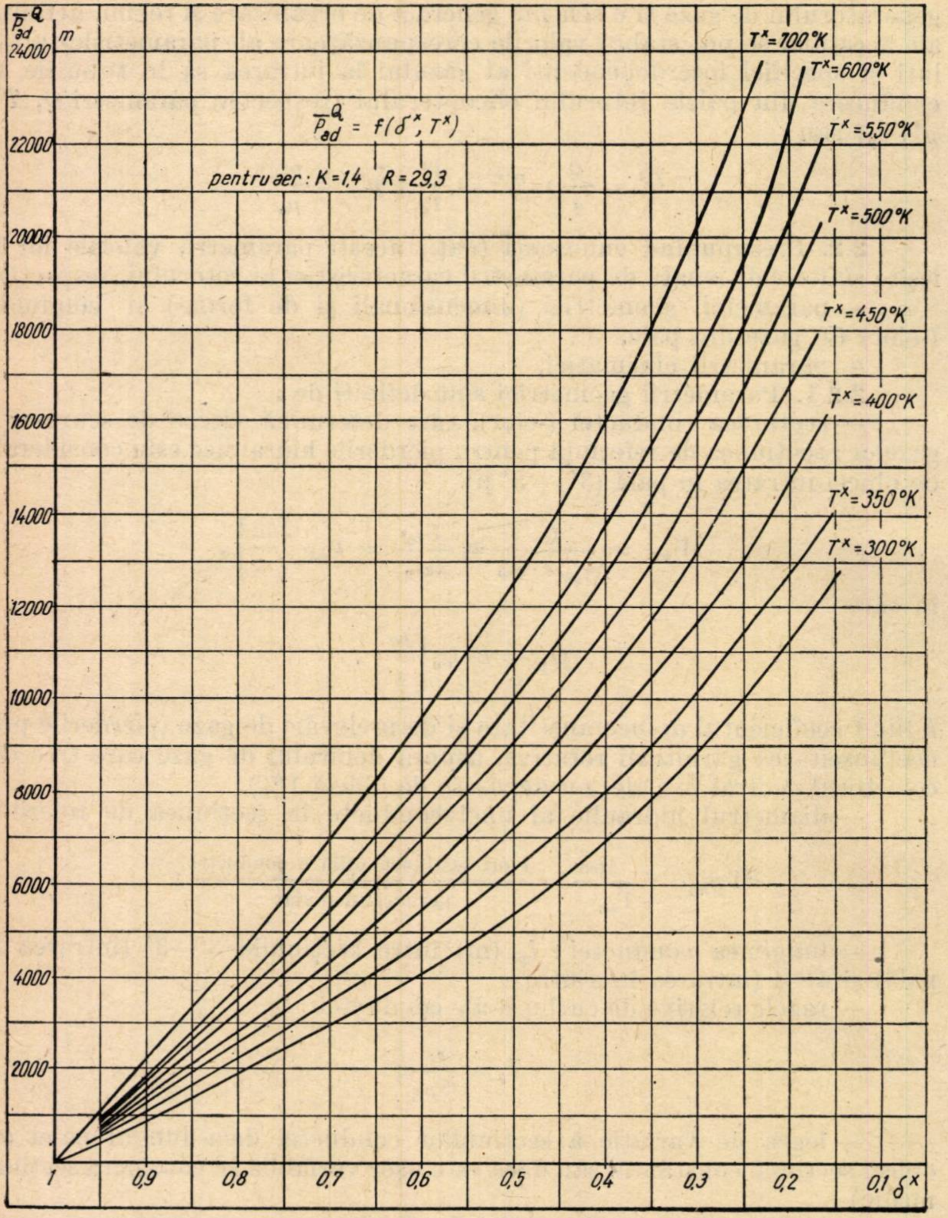

$\overline{P}_{ad}^{Q}$ m
24000
22000
20000
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
$\overline{P}_{ad}^{Q} = f(\delta^x, T^x)$
pentru aer: K = 1,4 R = 29,3
$T^x = 700°K$
$T^x = 600°K$
$T^x = 550°K$
$T^x = 500°K$
$T^x = 450°K$
$T^x = 400°K$
$T^x = 350°K$
$T^x = 300°K$
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1 δ^x

Fig. 1

Din acest din urmă punct de vedere, cazurile practice ce se pot ivi sînt următoarele (vezi tabela 1) :

2.2.2.1. P. I. *n* conducte circulare (tuburi) de diametru egal $\varnothing_{pI}$ (dacă în realitate ele nu sînt de aceeași secțiune, în caz că diferențele nu sînt mari, se poate alege o conductă de referință de secțiune medie, dacă ele au secțiuni foarte diferite, trebuie raționat pe fiecare conductă în parte).

În acest caz nu poate fi vorba decît despre flux unic (aer cald sau amestec de aer cu gaze arse).

2.2.2.2. P. II. Conducta unică circulară (tub) de diametru $\varnothing_{pII}$.

În acest caz pot exista două variante

P II *f. u.*, flux unic (aer cald sau amestec);

P II *f. m.*, flux multiplu, în care caz, concentric cu tubul de diametru $\varnothing\, p$ II traversat de fluxul compresor, mai există (de obicei o singură conductă concentrică), conducte pentru conducerea fluxurilor secundare (gaze evacuare, etc.), de diametru $\varnothing\, E$.

2.2.2.3. P. III. Idem, însă profilată (de obicei elipsă sau asimilabil cu o elipsă de dimensiuni *a*, *b*).

2.2.3. Cunoscînd parametri de bază de calcul ai elicopterului și rotorului său, între care există următoarele relații :

$$S_d = \frac{\pi D_d^2}{4} = \frac{G}{\bar{G}},$$

$$D_d = \sqrt{\frac{4S_d}{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{G}{\bar{G}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{ZS_p}{\sigma}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{G}{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{\bar{G}}},$$

$$S_p = S_d\cdot\frac{\sigma}{Z} = \frac{\pi D_d^2}{4}\cdot\frac{\sigma}{Z} = \frac{G}{\bar{G}}\cdot\frac{\sigma}{Z} = \frac{G}{Z}\cdot\frac{\sigma}{\bar{G}},$$

$$C_p = \frac{2S_p}{D_d} = \frac{\sqrt{\pi G}}{Z}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{\bar{G}}} = \frac{\sigma}{Z}\cdot\sqrt{\pi\frac{G}{\bar{G}}},$$

$$g_p = \bar{g}_p\cdot C_p = \frac{\bar{g}_p}{Z}\cdot\sqrt{\pi G}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{\bar{G}}} = \frac{\bar{g}_p\sigma}{Z}\cdot\sqrt{\pi\frac{G}{\bar{G}}},$$

se pot stabili relațiile între aceștia și parametrii geometrici ai conductelor, rezultatele fiind arătate în tabela 1.

3. Acești parametri definesc pierderile interne ale rotorului ($\mathcal{P}_{ir}$), adică în ultimă instanță puterea gazului ce se regăsește la extremitatea palei în amonte de ajutajul de ejecție sau randamentul intern al rotorului

$$\eta_{is} = \frac{P_{es}}{P_{ad}} = \frac{P_{es}}{(P_e + \mathcal{P}_{ir})_s},$$

deci

$$\mathcal{P}_{ir_s} = \frac{P_{es}\,(1 - \eta_{is})}{\eta_{is}},$$

în ipoteza că rotorul ar fi nemișcat.

Valoarea relativă a acestor pierderi, cît și variația lor cu parametrii geometrici, este arătată în cele ce urmează.

3.1. Pierderi de presiune în pală.

3.1.1. Pierderi prin îngustare la trecerea din colector în conductele din pală

$$\Delta p\hat{\imath}_{p3} = \xi_{p3} \cdot \rho_{p3} \cdot \frac{V_{p3}^2}{2}$$

în care

$$\xi_{p3} \cong 0{,}02\,; \quad \rho_{p3} = \rho_{a3}\,; \quad V_{p3} = u_{p3}\,.$$

Aceste pierderi sînt cu totul neglijabile față de restul pierderilor, chiar cu utilizarea generatoarelor de foarte joasă presiune și debit mare, deoarece V_{p3} (respectiv u_{p3}) nu trebuie să depășească o anumită valoare de ex. 100 $\left(\frac{m}{s}\right)$, fără ca restul pierderilor să devină prohibitive.

3.1.2. Pierderi în cotul de intrare în pale [2]

$$\Delta p_{\mathrm{cot}_{p3}} = \xi_{\mathrm{cot}} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right)_{p3},$$

în care

$$\xi_{\mathrm{cot}} = \bar{\alpha} \cdot \xi_{r_i} \text{ cu } \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{90}\,; \quad \bar{\bar{\xi}}_{ri} = 1 - k\bar{r}^{0,1},$$

unde

$$k \sim 0{,}75\,; \quad \bar{r}_i = \frac{r_i}{R} = \frac{2r_i}{\varnothing_p}\,.$$

3.1.2.1. Valorile lui ξ_{cot} în funcție de $\bar{\alpha}$ și $\bar{r}_i$ sînt arătate în diagrama 1 din figura 2.

3.1.2.2. Valorile lui $\rho \frac{V^2}{2}$ în funcție de ρ și V, sînt arătate în diagrama *2* din figura 2.

3.1.2.3. Valorile lui Δp_{cot} în funcție de ξ_{cot} și $\left(\rho \frac{V^2}{2}\right)$ sînt arătate în diagrama *3* din figura 2.

3.1.2.4. Parametrii gazului în secțiunea p $(3' - 3')$ se deduc din cei din secțiunea 3—3 în baza relațiilor cunoscute :

$$T^{\star}_{3'} = T^{\star}_{3}\,; \; T_{3'} = T^{\star}_{3'} - \frac{A\,V_3^2}{2g\,c_{p_{\mathrm{gaz}}}}\,; \; p_{3'} = p_3 - (\Delta p_i + \Delta p_{\mathrm{cot}})_{3'}$$

$$p^{\star}_{3'} = p_{3'} \left(\frac{T^{\star}_{3'}}{T_{3'}} \right)^{\frac{K}{K-1}}; \; v_{3'} = \frac{1}{\gamma_{3'}} = \frac{1}{g\,\rho_{3'}} = R_3 \left(\frac{T}{p} \right)_{3'},$$

rezultînd diferențe practic neglijabile, pe de o parte, între valorile parametrilor în cele două secțiuni și, pe de altă parte, între parametrii statici și ai gazului frînat.

3.1.4. Pierderi prin frecare pe conductă [2]

$$\Delta p_{c\,\mathrm{fr}} = \xi p_{p\,\mathrm{fr}} \cdot \rho_{p3'} \cdot \frac{V_{p3'}^2}{2}$$

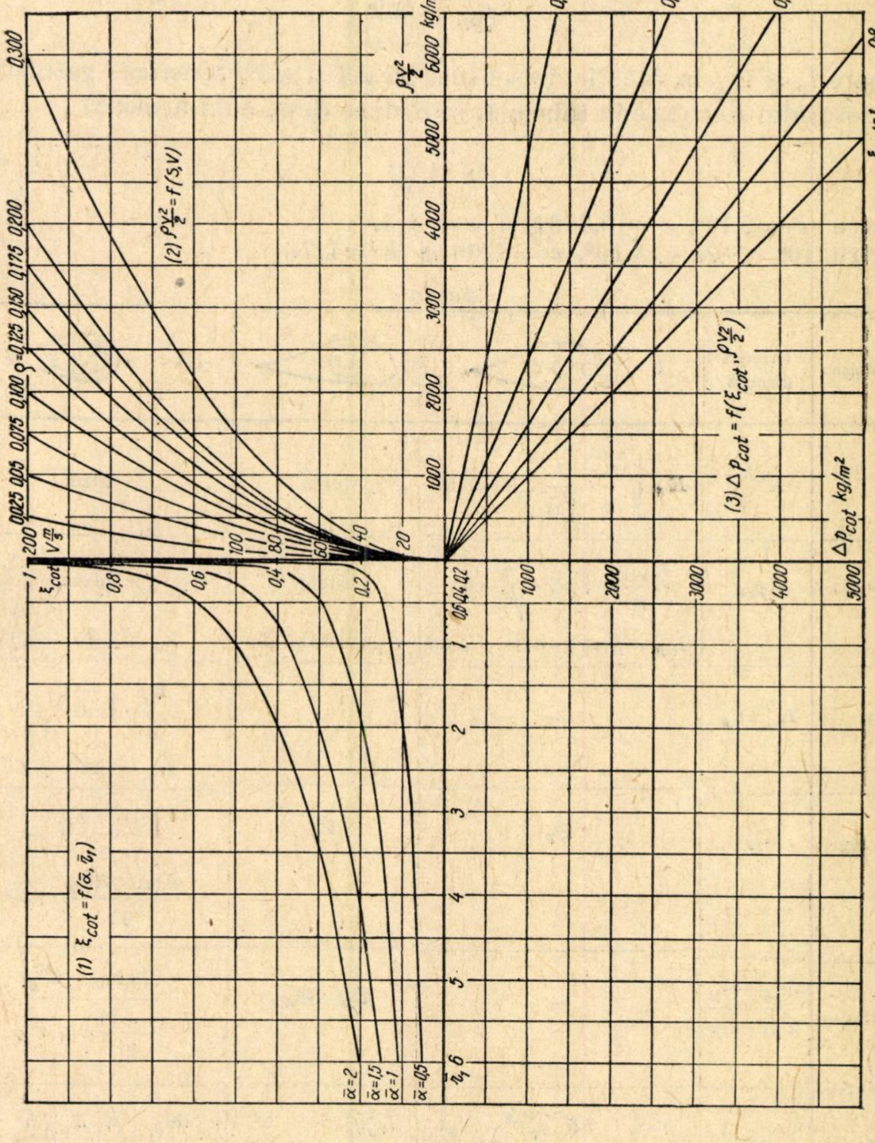

(1) $\xi_{cot} = f(\bar{\alpha}, \bar{\tau}_1)$
(2) $\rho \frac{V^2}{2} = f(\rho, V)$
(3) $\Delta p_{cot} = f(\xi_{cot}, \rho \frac{V^2}{2})$
ρ = 0,025 0,05 0,075 0,100 0,125 0,150 0,175 0,200 0,300
V m/s
200
100
80
60
40
20
$\rho \frac{V^2}{2}$ kg/m²
1000 2000 3000 4000 5000 6000
ξ_{cot}
1 0,8 0,6 0,4 0,2
ξ_{cot} = 1
0,8 0,6 0,4 0,2
Δp_{cot} kg/m²
1000 2000 3000 4000 5000
$\bar{\tau}_1$
0,5 0,4 0,2 1 2 3 4 5 6
ᾱ = 2
ᾱ = 1,5
ᾱ = 1
ᾱ = 0,5

Fig. 2

3.1.4.1. Valorile lui $\rho \frac{V^2}{2}$ în funcţie de ρ şi V sînt arătate în diagrama anterioară *2* din figura 2.

3.1.4.2. Coeficientul de frecare

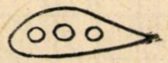
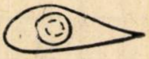
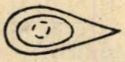
$$\xi p_{\text{fr}} = \frac{\lambda_p \, l_p}{\varnothing_{ph}}$$

în care l_p şi $\varnothing_{p_h}$ în funcţie de schema aleasă şi caracteristicile geometrice ale rotorului sînt date în tabela 1, se deduce după cum urmează

$$\lambda_p = \frac{c}{\mathcal{R}_e^x}$$ în care

pentru $\mathcal{R}e \leqslant 10^5$, $c = 0{,}3164$ şi $x = 1/4$,
pentru $10^5 < \mathcal{R}e < 3.10^6$, $c = 0{,}09$ şi $x = 1/7$.

Tabela 1

Mărimea	Expresia generală	I 	II 	III 
l_p	$K' \frac{Dd}{2}$	$\mathbf{K} \cdot \sqrt{\frac{G}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{\overline{G}}}}$; $K' \sim 0{,}97$	Idem	Idem
$\varnothing_p (b_p \text{III})$	$K_p g_p$	$\frac{K_p \overline{g}_p}{Z} \cdot \sqrt{\pi G} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\overline{\overline{G}}}}$ cu $K_p = f(n) \cong 0{,}30 - 0{,}60$	Idem $K_p \cong 0{,}85 - 0{,}95$	Idem $K_p \cong 0{,}85 - 0{,}95$
$a_p \text{III}$	$K_p' \cdot C_p$	—	—	$\frac{K_p'}{Z} \cdot \sqrt{\pi G} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\overline{G}}}$ $K_p' = 0{,}40 - 0{,}60$
$\varnothing_{p_{hf} \cdot \text{unic}}$	$\varnothing_p$	$\varnothing_p$	$\varnothing_p$	$\frac{\pi (a+b)_p}{2} =$ $= \frac{\pi (K + K\overline{g})_p}{2z} \cdot \sqrt{\pi G} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\overline{\overline{G}}}}$
$\varnothing_{p_{hf} \cdot \text{motor}}$	$\frac{\varnothing_{ph}^2 - \varnothing_E^2}{\varnothing_{ph} + \varnothing_E}$	—	$\varnothing_p - \varnothing_E$	$\frac{(a\,b)_p - \varnothing_E^2}{\frac{(a+b)}{2} p + \varnothing_E}$
$\Sigma s_{pf \cdot u}$	nsp	$n \frac{\pi \varnothing_p^2}{4} = \frac{n K_p^2 \overline{g}_p^2 \pi^2}{4_z^2} \cdot G \frac{\sigma^2}{\overline{G}}$	$\frac{K_p^2 \overline{g}_p^2 \pi^2}{4_z^2} \cdot G \frac{\sigma^2}{\overline{\overline{G}}}$	$\frac{\pi (ab)_p}{4} = \frac{K_p' K_p \overline{g}_p \pi^2}{4_z^2} \cdot G \frac{\sigma^2}{\overline{\overline{G}}}$
$\Sigma s_{pf \cdot m}$	$s_p - s_E$	—	$\frac{\pi}{4} \left(\varnothing_p^2 - \varnothing_E^2 \right)$	$\frac{\pi}{4} \left[(ab)_p - \varnothing_E^2 \right]$

Ultimul fiind cazul curent în diagrama *1* din figura 3 s-a trasat λ_p în funcție de $\mathcal{R}e$ pentru acest caz

$$\mathcal{R}e = \frac{V_{p3'} \cdot \varnothing_{ph} \cdot \rho_{p3'}}{\eta_{p3'}}.$$

$\nu = \frac{\eta_{p3'}}{\rho_{p3'}}$ (viscozitatea cinematică) este exprimat în funcție de T_{a3} în diagrama *2* din figura 3.

În nomograma *2* din figura 3 se arată și valorile lui

$$\frac{\mathcal{R}e}{\varnothing_{ph}} \text{ în funcție de } V_{p3}, \text{ și} \left(\frac{\eta}{\rho}\right)_{p3}.$$

În nomograma *3* din figura 3, $\xi p_{\mathrm{fr}}/l_p$ în funcție de λ_p și $\varnothing_{ph}$.

În diagrama *4* din figura 3, $\Delta p_{c\,\mathrm{fr}}$ în funcție de ξp_{fr} și $\left(\rho \frac{V^2}{2}\right)_{p3'}$

3.1.5. Depresiunea prin încălzire sau recompresia prin răcire (primul caz valabil la *P* II f. m. sau *P* III f. m.)

$$\Delta p_{\hat{\imath}(r)} = \pm\, \xi_{\hat{\imath}(r)} \left(\frac{\rho}{2} \cdot V^2\right)_{p3},$$

(semnul + valabil pentru încălzire — pentru răcire), în care

$$\xi_{\hat{\imath}(r)} = \pm \frac{\Delta T_{\hat{\imath}(r)}}{T_{p3}} \left(1{,}7 + \frac{\xi_{r\,\mathrm{fr}}}{2}\right).$$

3.1.5.1. Valoarea lui $\Delta T_{\hat{\imath}}$ în cazul încălzirii aerului din conductă prin gazele fierbinți de evacuare circulînd în echicurent prin conducta interioară în cazurile lui *P* II f. m. și *P* III f. m., se deduce după cum urmează :

3.1.5.1.1. Metodă simplificată :

căldura transmisă de la gaze la aer

$$W_e = K \cdot S_e\,(T_e - T_p)_{3'} \quad \left[\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{h}}\right],$$

în care

$$S_e = \pi\, d_e l_p \ [\mathrm{m}^2],$$

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_e} + \frac{1}{\alpha_p}} \left[\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{m^2h^0}}\right],$$

cu

$$\alpha_e = \frac{g\rho_{e3'}}{2} \cdot c_{pe3'} \cdot c_{fe} \cdot V_{e3'} \left[\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{m^2h^0}}\right]$$

$$\alpha_p = \frac{g\,\rho_{p3'}}{2} \cdot c_{pp3'} \cdot cf_p \cdot V_{p3'} \left[\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{m^2h^0}}\right]$$

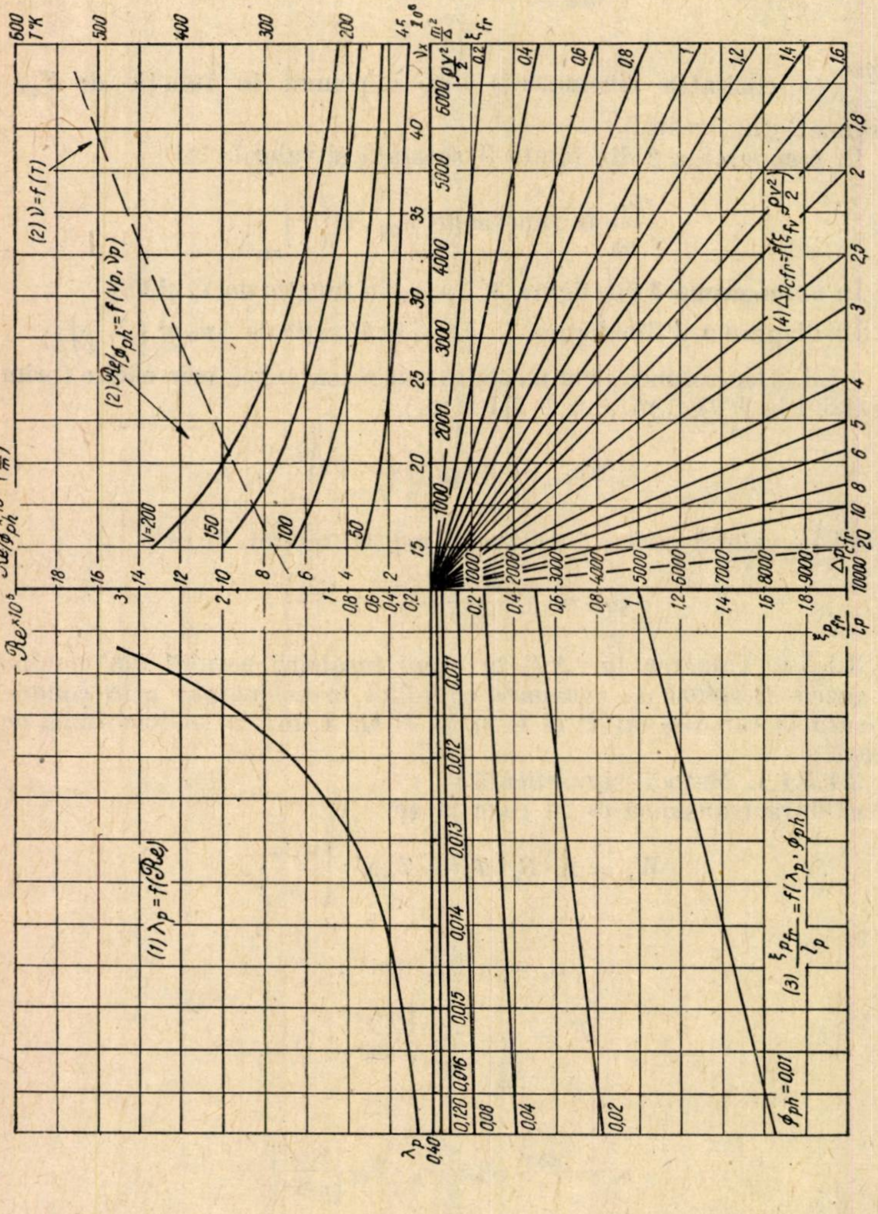

(1) $\lambda_p = f(\mathcal{R}e)$
(2) $\nu = f(T)$
(2) $\mathcal{R}e/\phi_{ph} = f(V_p, \nu_p)$
(3) $\frac{\xi_{p_{fr}}}{l_p} = f(\lambda_p, \phi_{ph})$
(4) $\Delta p_{cfr} = f(\xi_{fr}, \frac{\rho v^2}{2})$
$\mathcal{R}e \times 10^5$
$\mathcal{R}e/\phi_{ph}^{\lambda} \cdot 10^6 \, (\frac{1}{m})$
T °K
$\nu_x \cdot 10^6$ $\frac{m^2}{s}$
$\frac{\rho v^2}{2}$
ξ_{fr}
λ_p
$\frac{\xi_{p_{fr}}}{l_p}$
Δp_{cfr}
$\phi_{ph} = 0{,}01$
V=200
150
100
50
600
500
400
300
200
45
40
35
30
25
20
15
18
16
14
12
10
8
6
4
2
3
1
0,8
0,6
0,4
0,2
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
0,011
0,012
0,013
0,014
0,015
0,016
0,120
0,08
0,04
0,02
0,40
1,2
1,4
1,6
1,8
2,5
5
20

Fig. 3

Avînd în vedere că [4]

$$c_{pc3'} = c_{pgaz} = c_{vgaz} + \frac{R_{gaz}}{427},$$

$$c_{pp3'} \cong 0{,}24\,; \quad c_{fp} \sim c_{fc} \sim 0{,}003,$$

aceste relații devin

$$\alpha_e = 0{,}01475\ \rho_{e3'} \cdot c_{pgaz} \cdot V_{e3'},$$

$$\alpha_p = 0{,}00353\ \rho_{p3'} \cdot V_{p3'}.$$

Rezultă încălzirea aerului din pală (creşterea de temperatură)

$$\Delta T_{pi} = \frac{ZW_e}{865.Q_p}\ [°\mathrm{K}].$$

3.1.5.1.2. Metoda mai exactă

$$W_e = K \cdot S_e\,(T_{em} - T_{pm}) \left[\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{h}}\right],$$

$$T_{e''} = T_{e4'} = T_{e3'} - \frac{1}{1+\beta}(1-\varepsilon)\,(T_e - T_p)_{3'},$$

$$T_{p''} = T_{p4'} = T_{p3'} + \frac{\beta}{1+\beta}(1-\varepsilon)\,(T_e - T_p)_{3'},\ \text{în care}$$

$$\beta = \frac{Q_m \cdot c_{pgaz}}{Q_p \cdot c_{p3'}} = \frac{c_{pgaz}}{\frac{Q_p}{Q_m} \cdot 0{,}24},$$

$$\varepsilon = e^{-KS_e}\quad (e = \text{baza log naturali} = 2{,}718),$$

unde

$$K = k\,\frac{1}{3600}\left(\frac{1}{Q_m \cdot c_{pgaz}} + \frac{1}{Q_p \cdot c_{pp3}}\right) = \frac{k\,Q_m}{3\,600}\left(\frac{1}{c_{pgaz}} + \frac{1}{0{,}24\,\frac{Q_p}{Q_m}}\right)$$

cu

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_e} + \frac{1}{\alpha_p}},$$

$$\alpha = 0{,}040\ P_e^{0{,}75} \cdot \frac{\lambda_e}{\alpha_e}\left[\frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{m^2h^0}}\right].$$

Se verifică dacă $l_p > L' = 0{,}015\ P_e\,d_e$ [m], în care

$$P_e = \frac{3\,600 \cdot \mathrm{V} \cdot d_e}{a},$$

$$a = \frac{10\,000\ a_1}{p},$$

în care
a_1 — difuzibilitatea termică la 1 kg/cm², este dată în diagrama din figura 4 în funcţie de

$$v = \frac{(3T_e + T_p)_{3'}}{4} \text{ pentru gaze evacuare,}$$

$$\vartheta = \frac{(3\,T_p + T_e)_{3'}}{4} \text{ pentru aerul din conductă.}$$

$$\lambda_e = 30\,\frac{\text{Kcal}}{\text{mh}^0} \text{ (de altfel termenul } \delta_e/\lambda_e \text{ este neglijabil).}$$

În diagrama din figura 5 se dă α în funcţie de P_e, d_e.
În diagrama din figura 4 se dă ε în funcţie de $K\ S_e$.

$\Delta T_{er} = T_{e4'} - T_{e3'} = -\frac{1}{1+\beta}(1 - \varepsilon)\ (T_e - T_p)_{3'}$ este neglijabil în practică.

$\Delta T_{pi} = T_{p4'} - T_{p3'} = \frac{\beta}{1 + \beta}\ (1 - \varepsilon)\ (T_e - T_p)_{3'}$ este destul de mic în practică.

3.1.5.2. Răcirea aerului din conducte prin ventilaţia palei

$$W_p = kS_p\,(T_{pm} - T_0),$$

în care

$$T_{pm} \sim T_{p3'}\,;\ S_p = \Gamma_p \cdot l_p$$

Γ_p fiind perimetrul tuturor conductelor dintr-o pală.

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{pm}} + \frac{1}{\alpha_0}}$$

în care α_{pm} se ia din diagrama anterioară 3.1.5.1.3., iar $\alpha_0 \sim 0{,}0264$,
$T_0 = 288$°K (sau cum se convine),

$$\Delta T_{pr} = \frac{W_p}{865 \cdot Q_p}\ [°\text{K}].$$

Valoarea sa fiind de ordinul gradelor se poate neglija în practică.

3.1.5.3. În diagrama anterioară 4 din figura 3 se poate citi variaţia lui

$$\Delta_{pi(r)} \text{ cu } \xi_{i(r)} \text{ şi } \left(\frac{\rho}{2}\,V^2\right)_p.$$

Notă. În ipoteza prelevărilor de gaze pe parcurs pentru diverse scopuri, calculul de mai sus trebuie făcut pe tronsoanele respective.

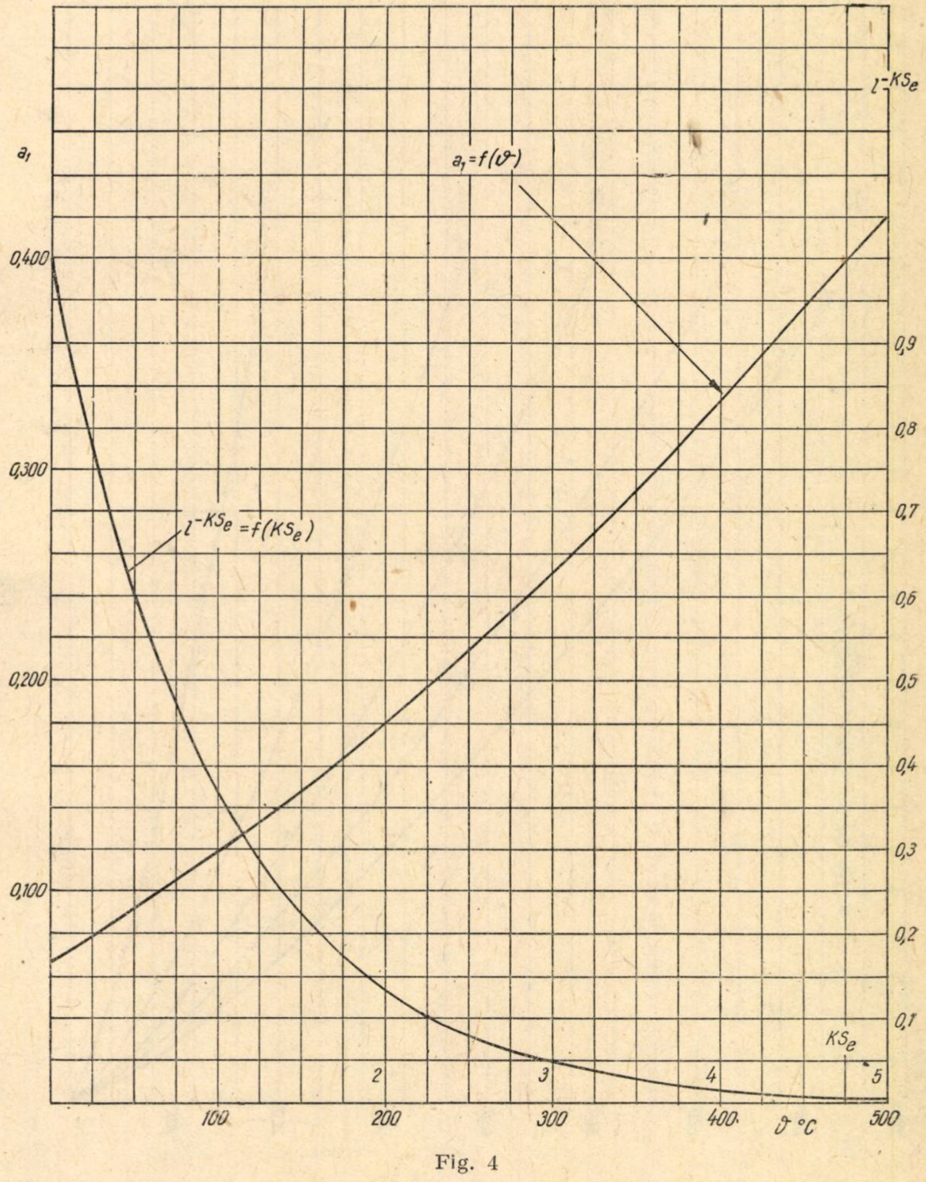

a_1
0,400
0,300
0,200
0,100
l^{-KS_e}
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$a_1 = f(\vartheta)$
$l^{-KS_e} = f(KS_e)$
KS_e
2
3
4
5
100
200
300
400
ϑ °C
500

Fig. 4

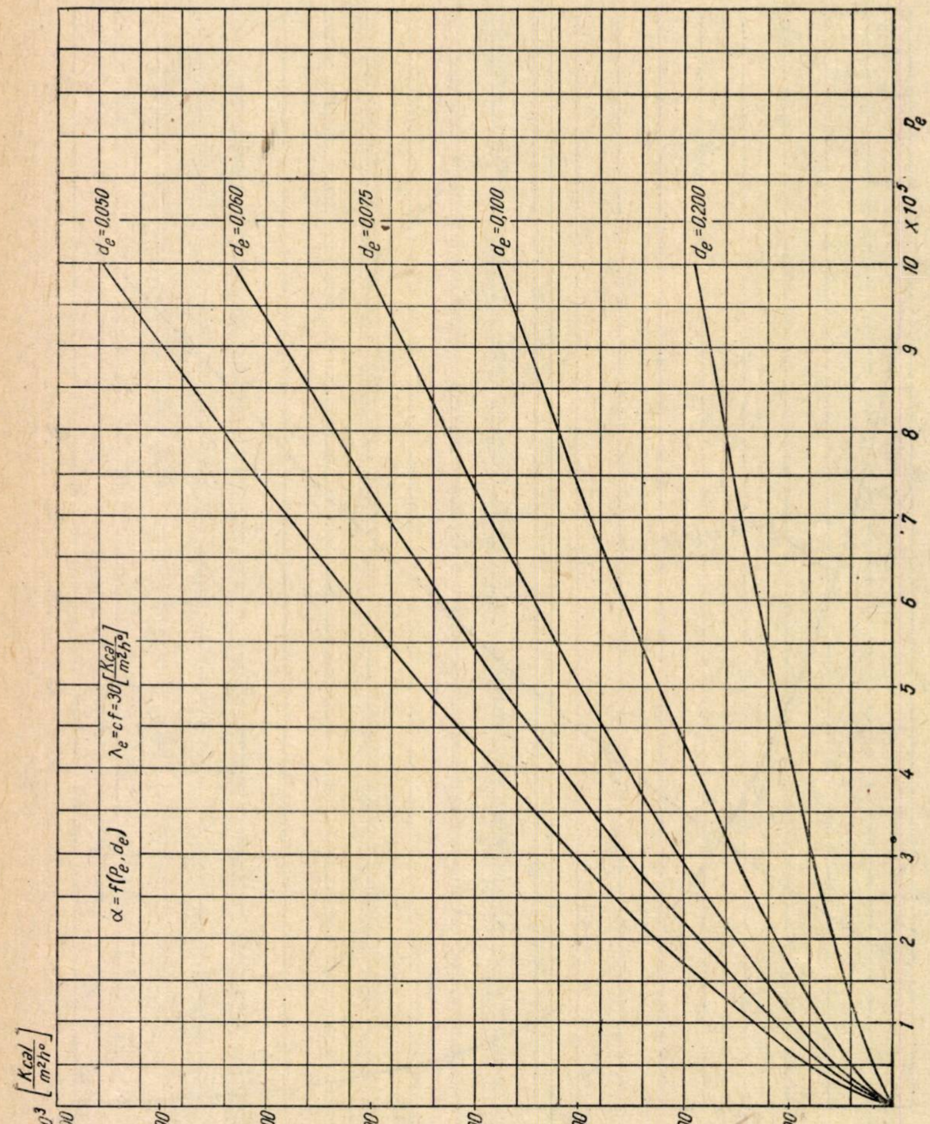

α × 10³ [Kcal/m²h°]
800
700
600
500
400
300
200
100
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10 × 10⁵
Pe
α = f(Pe, de)
λe = c f = 30 [Kcal/m²h°]
de = 0,050
de = 0,060
de = 0,075
de = 0,100
de = 0,200

Fig. 5

3.2. Parametri cinematici sînt definiți de viteza de rotație a rotorului, ω (neglijînd efectul mișcărilor în diferite planuri ale palelor), respectiv viteza periferică $U_r = \omega \cdot r$, care se găsește în raportul K față de viteza periferică a palei ($U_r = kU$) k avînd de obicei valori cuprinse între 0,97—0,99.

Acest parametru influențează fundamental performanțele rotorului, prin efectul pe care îl are asupra pierderii de energie cinetică în jet, cît și prin pierderile de recomprimare a gazului în palele rotorului.

Această din urmă pierdere însă nu reprezintă o pierdere totală, parte din energia pierdută fiind regăsită în entalpia crescută a gazelor, la capătul palelor, datorită recomprimării în rotor.

3.2.1. Valoarea ideală a acestei recomprimări în rotor prin efectul forțelor centrifugale se deduce după cum urmează

$$p^{\star}_{4'_{id}} = p^{\star}_{3'} \left[\frac{H_{ad_{\max_{\text{rotor}}}}}{\frac{c_p}{A} \cdot T^{\star}_{3'}} + 1 \right]^{\frac{k}{k-1}},$$

în care

$$H_{ad_{\max_{\text{rotor}}}} = \frac{U_r^2}{g} = \frac{(k \cdot U)^2}{g}$$

$$p^{\star}_{4'} = p^{\star}_{4'_{id}} - \sum_{3'}^{4'} \Delta p,$$

$$\Delta T_{\text{rec}} = T^{\star}_{4'_{\text{rec}}} - T^{\star}_{3'} = \frac{H_{ad_{\max_{\text{rotor}}}}}{\frac{c_p}{A}},$$

$$T^{\star}_{4'_{\text{rec}}} = T^{\star}_{3'} + \Delta T^{\star}_{r},$$

$$T^{\star}_{4'} = T^{\star}_{4'_{\text{rec}}} - \sum_{3'}^{4'} \Delta T.$$

3.2.1.1. În nomograma 4.2.4 *b* [1] se poate citi variația lui $\frac{p^{\star}_{4'_{id}}}{p^{\star}_{3'}}$ cu H_{ad}, $T_{3'}$ la $\frac{c_p}{A}$ și K constante pentru aer.

3.2.1.2. În diagrama 4.2.4 *a* [1] se dă variația lui ΔT_{rec} cu H_{ad} la $\frac{c_p}{A}$ = const. pentru aer.

3.2.1.3. $\sum_{3'}^{4'} \Delta p = \Delta p_{\text{cfr}} - \Delta p_r + \Delta p_i$

3.2.1.4. $\sum_{3'}^{4'} \Delta T = - \Delta T_i + \Delta T_r$.

3.3. Caracteristicile fluidului în secțiunea 4′ — 4′ se deduc din relațiile cunoscute arătate la 3.1.3.

3.4. Pentru a afla caracteristicile fluidului în secțiunea 4—4 (înaintea ajutajului) mai trebuie calculate pierderile de presiune în cotul final, după cum a fost indicat la 3.1.2 luînd însă parametri în secțiunea 4′ — 4′ în loc de 3—3.

3.5. Cu valorile cunoscute ai acestor parametri, se poate calcula cu nomogramele 5.2.1. şi 5.2.2. din (1), puterea adiabatică a gazului la intrarea în ajutaj şi din compararea cu puterea adiabatică a gazului furnizat de generator a stabili randamentul intern al antrenării pneumatice a rotorului.

Primită la redacție la 24 noiembrie 1958.

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ВНУТРЕННИХ ПОТЕРЬ В ЛОПАСТЯХ НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА С ПНЕВМАТИЧЕСКИМ ПРИВОДОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе указывается метод расчета внутреннего к.п.д., соответственно внутренних потерь в лопастях несущего винта вертолета с пневматическим приводом при помощи номограмм. Исчисления производятся в зависимости от геометрических параметров несущего винта вертолета, а также в соответствии с возможными практическими схемами установки трубопроводов в лопастях винта.

Приводятся номограммы для потерь давления в лопастях от сужения, трения, нагрева (вторичного сжатия путем охлаждения), в коленах, а также для вторичного сжатия в несущем винте, вследствие эффекта вращения.

NOMOGRAPHIC CHARTS FOR CALCULATING INTERNAL LOSSES IN THE BLADES OF A PNEUMATICALLY DRIVEN HELICOPTER ROTOR

SUMMARY

A method is given for calculating with nomographic charts the internal pressure losses in the blades of a pneumatically driven helicopter rotor. Calculation is performed function of the geometric parameters of the helicopter rotor and of the schemes practically occurring in the distribution of ducts in the blades.

Nomographic charts are given for pressure losses due to straitening, duet turns, friction and heat as well as for recompression in the rotor owing to the rotational effect.

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. ANDREI, *Nomograme pentru calculul generatoarelor de gaze motocompresoare utilizate la antrenarea pneumatică a rotoaretor de elicopter*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4* (1957).
2. V. I. POLIKOVSKI, *Instalaţii de forţă pentru avioane*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.

ASUPRA REZISTENȚEI DE UNDĂ ȘI MOMENTULUI DE RULIU ALE ARIPILOR CU BORDURI DE ATAC SUPERSONICE

DE

M. IONESCU și GH. DARIE

I. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Într-o lucrare anterioară [1] s-a stabilit soluția generală a problemei scurgerii omogene de ordin superior, în jurul aripilor triunghiulare.

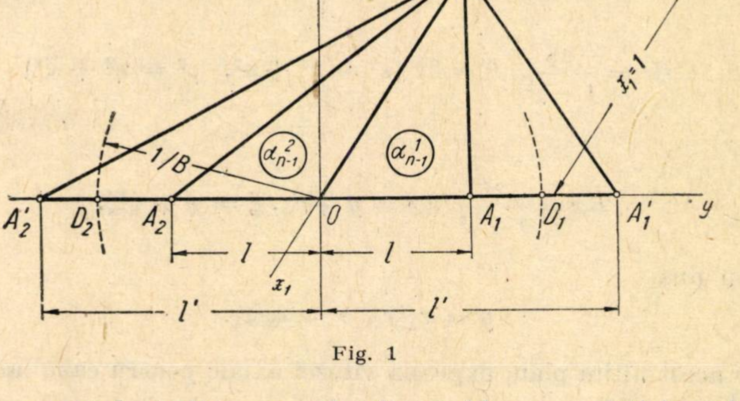


Fig. 1

În prezentul studiu vom aborda problema variației *antisimetrice forțate* a incidenței aripilor cu borduri de atac supersonice, și vom determina coeficienții de rezistență și de moment ai acestor aripi.

Să raportăm scurgerea în jurul aripii la un sistem de axe $Ox_1\ x_2\ x_3$, viteza axială U_∞ fiind dirijată după axa Ox_1 (fig. 1).

Vom utiliza aici un artificiu preconizat într-o lucrare anterioară [2], și anume vom presupune, pentru moment, că aripa are bordul de atac OA_2 și OA_1 subsonice și că este prelungită pe porțiunile A_2A_2' și A_1A_1' cu două plăci de incidență nulă. Vom calcula coeficienții pentru o astfel de aripă și apoi vom face în expresiile obținute $l = l' > 1/B$, $1/B$ fiind raza cercului Mach în planul $x_1 = 1$.

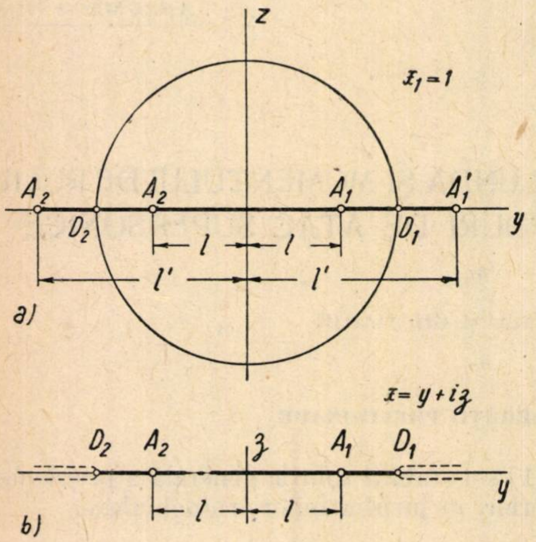


Fig. 2

Prin ipoteză, incidența α a aripii este definită de polinoamele

$$\alpha^1_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q,$$

pentru $x_2 > 0$, $\alpha^1 = 0, x_2 > l$, (1)

$$\alpha^2_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q,$$

pentru $x_2 < 0$, $\alpha^2 = 0$, $x_2 < -l$, (1′)

unde

$$\begin{gathered} \alpha^2_{n-2p,\,2p-1} = \alpha^1_{n-2p,\,2p-1} = 0, \\ \alpha^2_{n-2p-1,\,2p} = -\,\alpha^1_{n-2p-1,\,2p}. \end{gathered} \tag{2}$$

Expresia vitezei axiale de perturbație u_{n-1} o vom da în planul $x = y + i\mathfrak{z}$, obținut din planul fizic $x_1 = 1$ (fig. 2) prin intermediul transformărilor

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \theta = \theta, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2) \tag{3}$$

și

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2} \quad (x = y + i\mathfrak{z}, \; \xi = \eta + i\zeta), \tag{4}$$

unde am pus

$$y = x_2/x_1, \; z = x_3/x_1.$$

În acest ultim plan, expresia vitezei axiale pentru cazul aripii alese, este [1]

$$u_{n-1} = \frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} C_{n-1,\,2q+1}\, x^{2q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n-1,\,2q}\, x^{2q} \operatorname{argch} Bl \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{n-1},\, 2_{q+1} \times$$

$$\times\, x^{2q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2\,x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n-1,\,2q+1}\, x^{2q+1} \sqrt{1-B^2x^2} \Bigg\}, \qquad (5)$$

unde $E\,(t)$ reprezintă cel mai mare întreg ce nu depăşeşte pe t.

Pentru determinarea coeficienţilor A_{ij}, C_{ij} şi D_{ij} vom folosi, pe de o parte relaţiile de compatibilitate [1], [2], [3] şi pe de altă parte o serie de condiţii suplimentare [1]

$$\mathcal{R}e\, (-1)^{n-q}\, i \int_{C_l} x^{n-q-2} \sqrt{1-B^2x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx = \frac{(n-1)!\, \alpha_{n-q-1,\,q}}{C^q_{n-1}}\, U_\infty, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{d^p\, U_{n-1}}{dx^p}\right)_{x\,=\,1/B} = 0,\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \qquad (7)$$

unde C_l este un semicerc cu rază foarte mică descris în jurul punctului $x = l$, iar U_{n-1} este funcţia analitică a cărei parte reală pe aripă este $\frac{u_{n-1}}{x_1^{n-1}}$.

Relaţiile (6) impun incidenţei α să ia pe aripă valorile date de (1), iar condiţiile (7) asigură continuitatea acestei incidenţe pe conul Mach.

Vom mai reţine că pentru determinarea celor n coeficienţi A_{ij} şi C_{ij}, vom folosi relaţiile (6) în care pentru U_{n-1} putem lua o expresie redusă şi anume

$$U_{n-1} = -\frac{1}{2} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1,\,q}\, x^q \ln\,(x-l), \qquad (8)$$

toţi ceilalţi termeni fiind funcţii analitice în jurul punctului $x = l$ în care va trebui să calculăm semirezidiul ce va da valoarea integralei.

Cu aceste date putem trece la calculul vitezei axiale de perturbaţie u_{n-1}, ce va defini coeficientul de presiune C_p,

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty}. \qquad (9)$$

II. VITEZA AXIALĂ DE PERTURBAŢIE

1. Mişcare conică propriu-zisă ($n = 1$)

Făcînd $n = 1$ în expresiile (1) şi (5) avem

$$\alpha' = \alpha'_{00} = \alpha_0$$

$$U_0 = C_{00} \operatorname{argch} Bl \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}. \qquad (10)$$

Considerînd pentru U_0 expresia redusă

$$U_{0\,red} = -\frac{1}{2} C_{00} \ln (x - l) \tag{11}$$

şi calculînd semirezidiul integrandului din expresia (6) în jurul lui $x = l$, obţinem imediat

$$-\frac{\pi\sqrt{1 - B^2l^2}}{l} \frac{C_{00}}{2} = \alpha_0 U_\infty, \tag{12}$$

de unde

$$C_{00} = -\frac{2\alpha_0 U_\infty l}{\pi\sqrt{1 - B^2 l^2}}. \tag{13}$$

2. Mişcare conică de ordinul doi ($n = 2$)

În acest caz avem

$$\alpha' = \alpha_{10} x_1,$$

$$U_1 = C_{11} x \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + C_{10} \operatorname{argch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + A_{11}\, x \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}}. \tag{14}$$

Ca şi în cazul precedent, constantele A_{ij} şi C_{ij} se deduc din relaţiile (6) pentru $q = 0$ şi $q = 1$, calculînd semirezidiurile respective şi considerînd pentru U expresia redusă

$$U_{1\,red} = -\frac{1}{2} [C_{10} + C_{11} x] \ln (x - l). \tag{15}$$

Obţinem astfel

$$\begin{aligned} C_{10} &= +\frac{2(2 - B^2 l^2)}{\pi (\sqrt{1 - B^2 l^2})^3} \alpha_{10} U_\infty, \\ C_{11} &= -\frac{2}{\pi (\sqrt{1 - B^2 l^2})^3} \alpha_{10} U_\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru calculul lui A_{11} vom pune condiţia (7) şi vom deduce uşor

$$A_{11} \sqrt{1 - B^2 l^2} + C_{11} + C_{10} B^2 l^2 = 0, \tag{17}$$

de unde

$$A_{11} = \frac{2\alpha_{10} U_\infty}{\pi}. \tag{18}$$

3. Mișcări conice de ordin 3 și 4 ($n = 3$) și ($n = 4$)

Folosind schema de calcul preconizată în paragraful precedent, și aplicată mai sus pentru $n = 1$ și $n = 2$, obținem

— pentru $n = 3$

$$\alpha = (\alpha_{20} + \alpha_{02} y^2)\, x_1^2$$

$$U_2 = C_{21}\, x \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + (C_{20} + C_{22} x^2) \operatorname{argch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} +$$

$$+ A_{21}\, x \operatorname{argch} \frac{1}{Bx} + D_{21}\, x \sqrt{1 - B^2 x^2}, \tag{19}$$

unde

$$C_{20} = \frac{U_\infty l}{\pi (1 - B^2 l^2)^{5/2}} \{(6 - 5\, B^2 l^2 + 2\, B^4 l^4)\, \alpha_{20} + (2 + B^2 l^2 - B^4 l^4)\, \alpha_{02}\},$$

$$C_{21} = \frac{-2\, U_\infty l}{\pi [1 - B^2 l^2]^{5/2}} \{(2 + B^2 l^2)\, \alpha_{20} + (3\, B^2 l^2 - B^4 l^4)\, \alpha_{02}\},$$

$$C_{22} = \frac{U_\infty B^2 l}{\pi [1 - B^2 l^2]^{5/2}} \{3\, \alpha_{20} + (1 + B^2 l^2)\, \alpha_{02}\}, \tag{20}$$

$$A_{21} = \frac{-1}{[1 - B^2 l^2]^{3/2}} \{B^2 l^2 (1 - 2\, B^2 l^2)\, C_{30} - (3 - 2\, B^2 l^2)\, C_{31} - l\, (5 - 4\, B^2 l^2)\, C_{32}\},$$

$$D_{21} = \frac{-1}{[1 - B^2 l^2]^{3/2}} \{B^4 l^3\, C_{30} + (2 - B^2 l^2)\, C_{31} + l\, (3 - 2\, B^2 l^2)\, C_{32}\};$$

— pentru $n = 4$

$$\alpha = (\alpha_{30} + \alpha_{12}\, y^2)\, x_1^3$$

$$U_3 = (C_{31}\, x + C_{33}\, x^3) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} + (C_{30} + C_{32} x^2) \operatorname{argch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} +$$

$$+ (A_{31}\, x + A_{33}\, x^3) \operatorname{argch} \frac{1}{Bx} + D_{31}\, x \sqrt{1 - B^2 x^2}, \tag{21}$$

unde

$$C_{30} = \frac{U_\infty l}{6\pi (1 - B^2 l^2)^{7/2}} \{(24 - 24\, B^2 l^2 + 21\, B^4 l^4 - 6\, B^6 l^6)\, \alpha_{30} + (8 - 4\, B^2 l^2 +$$

$$+ 35\, B^4 l^4 - 18\, B^6 l^6)\, \alpha_{12}\},$$

$$C_{31} = \frac{-U_\infty}{2\pi (1 - B^2 l^2)^{7/2}} \{(6 + 9\, B^2 l^2)\, \alpha_{30} + (17\, B^2 l^2 + 2\, B^4 l^4 - 4\, B^6 l^6)\, \alpha_{12}\},$$

$$C_{32} = \frac{-U_\infty B^2 l}{2\pi (1 - B^2 l^2)^{7/2}} \{(12 + 3 B^2 l^2)\, \alpha_{30} + (2 + 13 B^2 l^2 - 2 B^4 l^4)\, \alpha_{12}\},$$

$$C_{33} = \frac{-U_\infty}{6\pi l^2 (1 - B^2 l^2)^{7/2}} \{(3 B^2 l^2 + 12 B^4 l^4)\, \alpha_{30} + (2 - 7 B^2 l^2 + 20 B^4 l^4)\, \alpha_{12}\},$$

$$\begin{aligned}
A_{31} = &- \frac{24 B^2 + 64 B^4 l^2 - 62 B^6 l^4 + 20 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{30} B^4 l - \\
&- \frac{8 B^2 - 8 B^4 l^2 + 6 B^6 l^4 - 3 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{31} B^2 - \\
&- \frac{4 B^4 l^2 - 8 B^6 l^4 + 6 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{32} B^2 l + \\
&+ \frac{4 B^6 l^4 - B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{33}, \\
A_{33} = &- \frac{6 B^4 - 5 B^6 l^2 + B^8 l^4}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{30} B^4 l - \\
&- \frac{3 B^6 l^2 + 11 B^8 l^4}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{31} B^2 - \\
&- \frac{3 B^8 l^4 - B^{10} l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{32} B^2 l - \\
&- \frac{4 B^4 - 20 B^6 l^2 + 27 B^8 l^4 - 9 B^{10} l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{33}, \qquad (22) \\
D_{31} = & \frac{26 B^2 - 53 B^4 l^2 + 45 B^6 l^4 - 14 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{30} B^4 l + \\
&+ \frac{13 B^4 l^2 - 17 B^6 l^4 + 8 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{31} B^2 + \\
&+ \frac{4 B^2 - 22 B^4 l^2 + 27 B^6 l^4 - 13 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{32} B^2 l - \\
&- \frac{2 B^4 l^2 - B^6 l^4 - 5 B^8 l^6}{2 B^4 (1 - B^2 l^2)^2 (2 - 7 B^2 l^2 + 4 B^4 l^4)}\, C_{33}.
\end{aligned}$$

Vom putea aplica acum observaţia făcută la pagina 684 şi anume vom pune în toate expresiile de mai sus $\sqrt{1 - B^2 l^2} = i \sqrt{B^2 l^2 - 1}$ şi argch $x = i$ arccos x, obţinînd astfel soluţia pentru bordurile de atac supersonice.

III. REZISTENȚA DE UNDĂ ȘI MOMENTUL DE RULIU

Putem trece acum la calculul coeficienților de rezistență și de moment. Pentru aceasta vom folosi formulele

$$C_x^{(n)} = -\frac{4}{nl\,U_\infty}\int_0^l u_{n-1}\,\frac{\alpha_{n-1}^1}{x_1^{n-1}}\,dx,\ (\alpha_{n-1}^1 = -\alpha_{n-1}^2), \tag{23}$$

$$C_m^{(n)} = \frac{4}{(n+2)\,l^2\,U_\infty}\int_0^l u_{n-1}\,xdx. \tag{24}$$

Introducînd mai sus expresiile lui u date de (5), obținem succesiv

— pentru $n = 1$

$$C_x^{(1)} = -\frac{4}{lU_\infty}\int_0^l u_0\,\alpha_0\,dx = -\frac{4}{lU_\infty}\,C_{00}\,\alpha_0\,J_0, \tag{25}$$

$$C_m^{(1)} = \frac{4}{3l^2U_\infty}\int_0^l u_0\,x\,dx = \frac{4}{3l^2U_\infty}\,C_{00}\,J_1\,; \tag{26}$$

— pentru $n = 2$

$$C_x^{(2)} = -\frac{2}{lU_\infty}\int_0^l u_1\,\alpha_{10}\,dx = -\frac{1}{U_\infty}\{C_{10}\,J_0 + C_{11}\,I_1 + A_{11}\,K_1\}\,\alpha_{10}, \tag{27}$$

$$C_m^{(2)} = \frac{1}{l^2U_\infty}\int_0^l u_1\,x\,dx = \frac{1}{l^2U_\infty}\{\,C_{10}\,J_1 + C_{11}\,I_2 + A_{11}\,K_2\}\,; \tag{28}$$

— pentru $n = 3$

$$C_x^{(3)} = -\frac{4}{3lU_\infty}\int_0^l u_2\,(\alpha_{20} + \alpha_{02}\,x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{3lU_\infty}\{\,(C_{20}\,J_0 + C_{21}\,I_1 + C_{22}\,J_2 + A_{21}\,K_1 + D_{21}\,L_1)\,\alpha_{20} +$$

$$+ (C_{20}\,J_2 + C_{21}\,I_3 + C_{22}\,J_4 + A_{21}\,K_3 + D_{21}\,L_3)\,\alpha_{02}\}, \tag{29}$$

$$C_m^{(3)} = \frac{4}{5l^2U_\infty}\int_0^l u_2\cdot x\,dx =$$

$$= \frac{4}{5l^2U_\infty}\{\,(C_{20}\,J_1 + C_{21}\,I_2 + C_{22}\,J_3) + A_{21}\,K_2 + D_{21}\,L_2\}\,; \tag{30}$$

pentru $n = 4$,

$$C_x^{(4)} = -\frac{4}{4lU_\infty}\int_0^l u\,(\alpha_{30} + \alpha_{12}\,x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{lU_\infty}\{\,(C_{31}\,I_1 + C_{33}\,I_3 + C_{30}\,J_0 + C_{32}\,J_3 + A_{31}\,K_1 +$$

$$+ A_{33}\,K_3 + D_{31}\,L_1)\,\alpha_{30} + (C_{31}\,I_3 + C_{33}\,I_5 + C_{30}\,J_2 +$$

$$+ C_{32}\,J_4 + A_{31}\,K_3 + A_{33}\,K_5 + D_{33}\,L_3)\,\alpha_{12}\}, \tag{31}$$

$$C_m^{(4)} = \frac{2}{3l^2 U_\infty} \int_0^l u_{\,3} x \, dx =$$

$$= \frac{2}{3l^2 U_\infty} \{ C_{30} J_1 + C_{31} I_2 + C_{32} J_3 + C_{33} I_4 + A_{31} K_2 + \tag{32}$$

$$+ A_{33} K_4 + D_{31} L_2 \}.$$

Mai sus s-au folosit notațiile

$$I_1 = \int_0^l x \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx = \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{2 B^2} [1 - \sqrt{1 - B^2 l^2}] + \frac{l^3}{2} \operatorname{argch} \frac{1}{Bl},$$

$$I_2 = \int_0^l x^2 \operatorname{argh} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx = \frac{(1 + 2B^2 l^2) \sqrt{1 - B^2 l^2}}{6 B^3} \arcsin Bl - \frac{l (1 - B^2 l^2)}{6 B^2} +$$

$$+ \frac{l^3}{3} \operatorname{argch} \frac{1 + B^2 l^2}{2 Bl},$$

$$I_3 = \int_0^l x^3 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{12 B^4} \{ 2 + 3 B^2 l^2 - \sqrt{1 - B^2 l^2} (2 + 4 B^2 l^2) \} + \frac{l^5}{4} \operatorname{argch} \frac{1}{Bl},$$

$$I_4 = \int_0^l x^4 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{40 B^5} \{ (3 + 4 B^2 l^2 + 8 B^4 l^4) \arcsin Bl - (3Bl + B^3 l^3) \sqrt{1 - B^2 l^2} \} +$$

$$+ \frac{l^5}{5} \operatorname{argch} \frac{1 + B^2 l^2}{2 Bl},$$

$$I_5 = \int_0^l x^5 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx = \frac{l^7}{6} \operatorname{argch} \frac{1}{Bl} +$$

$$+ \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{90 B^6} \{ 8 + 10 B^2 l^2 + 15 B^4 l^4 - \sqrt{1 - B^2 l^2} (8 + 4 B^2 l^2 + 23 B^4 l^4) \},$$

$$J_0 = \int_0^l \operatorname{argch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx = l \left[\operatorname{argch} \frac{1}{Bl} - \operatorname{argch} \frac{1 + B^2 l^2}{2Bl} \right],$$

$$J_1 = \int_0^l x \operatorname{arghch} Bl \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2 (l^2 - x^2)}} \, dx = \frac{l \sqrt{1 - B^2 l^2}}{2 B} \arcsin Bl,$$

$$J_2=\int_0^l x^2 \operatorname{argch} Bl\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}\,dx=\frac{2l}{3}I_1-\frac{l^3}{3}\operatorname{argch}\frac{1+B^2l^2}{2\,Bl},$$

$$J_3=\int_0^l x^3 \operatorname{argch} Bl\cdot\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}\,dx=\frac{3l}{4}I_2-\frac{l^4}{4}\operatorname{argch}\frac{1+B^2l^2}{2\,Bl},$$

$$J_4=\frac{4l}{5}I_3-\frac{l^5}{5}\operatorname{argch}\frac{1+B^2l^2}{2\,Bl},$$

$$K_1=\int_0^l x \operatorname{argch}\frac{1}{Bx}\,dx=\frac{1}{2B^2}\left\{B^2l^2\operatorname{argch}\frac{1}{Bl}+1-\sqrt{1-B^2l^2}\right\},$$

$$K_2=\int_0^l x^2 \operatorname{argch}\frac{1}{Bx}\,dx=\frac{1}{6B^3}\left\{2B^3l^3\operatorname{argch}\frac{1}{Bl}+\arcsin Bl-Bl\sqrt{1-B^2l^2}\right\},$$

$$K_3=\int_0^l x^3 \operatorname{argch}\frac{1}{Bx}\,dx=\frac{1}{12\,B^4}\left\{B^4l^4\operatorname{argch}\frac{1}{Bl}+2-(2+B^2l^2)\sqrt{1-B^2l^2}\right\},$$

$$K_4=\int_0^l x^4 \operatorname{argch}\frac{1}{Bx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{40\,B^5}\left\{B^5l^5\operatorname{argch}\frac{1}{Bl}+\arcsin Bl-(3Bl+2B^3l^3)\sqrt{1-B^2l^2}\right\},$$

$$K_5=\int_0^l x^5 \operatorname{argch}\frac{1}{Bx}\,dx=\frac{1}{90\,B^6}\left\{15\,B^6l^6\operatorname{argch}\frac{1}{Bl}+\right.$$

$$\left.+8-(8+4\,B^2l^2+3B^4l^4)\sqrt{1-B^2l^2}\right\},$$

$$L_1=\int_0^l x\sqrt{1-B^2x^2}\,dx=\frac{1}{3B^2}\{1-(1-B^2l^2)\sqrt{1-B^2l^2}\},$$

$$L_2=\int_0^l x^2\sqrt{1-B^2x^2}\,dx=\frac{1}{8B^3}\{\arcsin\ Bl-(Bl-2B^3l^3)\sqrt{1-B^2l^2}\},$$

$$L_3=\int_0^l x^3\sqrt{1-B^2x^2}\,dx=\frac{1}{15\,B^4}\{2-(2+B^2l^2-3B^4l^4)\sqrt{1-B^2l^2}\}.$$

IV. GENERALIZARE

Vom da acum expresia generală a coeficienților de rezistență și de moment, în funcție de coeficienții din expresia vitezei axiale de perturbație, pentru cazul unei mișcări omogene de ordin n.

Calculele sînt simple și nu le vom reproduce mărginindu-ne să dăm direct rezultatele.

Avem astfel

$$C_x^{(n)} = -\frac{4}{nl\,U_\infty}\int_0^l u_{n-1}\,\frac{\alpha_{n-1}^1}{x_1^{n-1}}\,dx =$$

$$= -\frac{4}{nl\,U_\infty}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n-1,2q+1}\,\alpha_{n-1-2j,2j}\,I_{2(q+j)+1} + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n-1,2q}\,\alpha_{n-1-2j,2j}\,J_{2(q+j)} +$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{n-1,2q+1}\,\alpha_{n-1-2j,2j}\,K_{2(q+j)+1} +$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} D_{n-1,2q+1}\,\alpha_{n-1-2j,2j}\,L_{2(q+j)+1}\right\},$$

$$C_m^{(n)} = \frac{4}{(n+2)\,l^2\,U_\infty}\int_0^l U_{n-1}\,x\,dx =$$

$$= \frac{4}{(n+2)\,l^2\,U_\infty}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} C_{n-1,2q+1}\,I_{2q+2} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n-1,2q}\,J_{2q+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{n-1,2q+1}\,K_{2q+2} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-3}{2}\right)} D_{n-1,2q+1}\,L_{2q+2}\right\},$$

unde

$$N_0 = \frac{\arcsin Bl}{B}; \qquad N_1 = \frac{1}{B^2}\left[1 - \sqrt{1 - B^2 l^2}\,\right],$$

$$N_m = \frac{m-1}{m\,B^2}\,N_{m-2} - \frac{l^{m-1}}{m\,B^2}\sqrt{1 - B^2 l^2}, \quad (m = 2, 3, \ldots, n),$$

$$I_{2p-1} = \frac{l^{2p+1}}{2p}\,\mathrm{argch}\,\frac{1}{Bl} + \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{2p}\sum_{j=1}^{p} l^{2p-2j}\,N_{2j-1}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$I_{2p} = \frac{l^{2p+1}}{2p+1}\,\mathrm{argch}\,\frac{1 + B^2 l^2}{2\,Bl} + \frac{\sqrt{1 - B^2 l^2}}{2p+1}\sum_{j=0}^{p} l^{2p-2j}\,N_{2j}, \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$J_m = \frac{ml}{m+1}\,I_{m-1} - \frac{l^{m+1}}{m+1}\,\mathrm{argch}\,\frac{1 + B^2 l^2}{2\,Bl}, \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$J_0 = l\left(\mathrm{argch}\,\frac{1}{Bl} - \mathrm{argch}\,\frac{1 + B^2 l^2}{2\,Bl}\right),$$

$$K_m = \frac{l^{m+1}}{m+1} \operatorname{argch} \frac{1}{Bl} + \frac{1}{m+1} N_m , \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$L_m = \frac{1}{m+2} N_m + \frac{l^{m+1}}{m+2} \sqrt{1 - B^2 l^2}, \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Primită la redacție la 22 decembrie 1958.

О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ И КРЕНЯЩЕМ МОМЕНТЕ КРЫЛЬЕВ С СВЕРХЗВУКОВЫМИ ПЕРЕДНИМИ КРОМКАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе производится расчет осевой скорости возмущения вокруг треугольных крыльев, в случае однородного обтекания порядка $n = 1,2,3,4$, и затем определяются коэффициенты сопротивления и момента для этих случаев.

Далее приводится общее выражение этих коэффициентов для случая $n = n$.

SUR LA RÉSISTANCE D'ONDE ET LE MOMENT DE ROULIS DES AILES À BORDS D'ATTAQUE SUPERSONIQUES

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent d'abord, dans ce travail, le calcul de la vitesse axiale de perturbation autour des ailes triangulaires, dans le cas d'un écoulement homogène d'ordre $n = 1, 2, 3, 4$; ils déterminent ensuite les coefficients de résistance et de moment, de ces cas.

Ils donnent en outre une expression générale de ces coefficients dans le cas où $n = n$.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, M. Ionescu, *Scurgeri conice de ordin superior în jurul aripilor triunghiulare subțiri sau de grosime simetrică. O teorie generală unitară.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
2. — *Trainée d'ailes triangulaires doublement conique à pente variable, en écoulement supersonique.* Revue de Mécanique Appliquée, Ed. Acad. R.P.R., **I**, *1* (1956).
3. G. N. Lance, *The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream.* The Aeronautical Quarterly, **I**, *5* (1954).

COMPORTAREA UNOR SOLUȚII ALE STRATULUI LIMITĂ TRIDIMENSIONAL ÎN IPOTEZA PROFILELOR TIP DE VITEZE ȘI TEMPERATURI

DE

ȘT. N. SĂVULESCU

1. Pentru integrarea ecuațiilor stratului limită tridimensional — scrise conform aproximațiilor lui Prandtl — se utilizează *principiul de independență* [1] sau *principiul de prevalență* [2] — în virtutea cărora mișcarea în stratul limită se descompune într-o mișcare principală, cu efecte de prim ordin, și o mișcare secundară cu efecte de ordinul al 2-lea. Cazurile particulare tratate în acest mod sînt de genul cilindrului infinit înclinat pe curent sau al liniei elicoidale în girație uniformă.

Recent a fost dezvoltată o metodă mai generală [3], legată de alegerea unor coordonate geodezice pe suprafața de formare a stratului limită, cu ajutorul căreia s-a tratat scurgerea pe suprafața unui elipsoid înclinat pe curent. Calculele — după aprecierea autorului metodei — sînt extrem de laborioase și nu cuprind deocamdată decît cazul incompresibil.

2. În lucrarea de față ne propunem să indicăm un mod de evaluare rapidă a caracteristicilor stratului limită tridimensional pentru corpuri a căror scurgere exterioară prezintă aspectul unei rețele de linii de curent aproximativ drepte paralele.

Ideea esențială a acestei lucrări este că, în loc de a face anumite simplificări în ecuațiile stratului limită, pornim direct de la considerații asupra profilului de viteză corespunzător normalei dintr-un punct al suprafeței de formare a stratului limită.

Să considerăm în figura 1 un punct O al suprafeței corpului și normala Oy. Linia de curent exterioară PS a scurgerii nevîscoase—determină prin tangenta sa viteza $\vec{V}_e$ și cele două direcții perpendiculare Ox, Oz

ale triedrului fix, *Oxyz*, astfel că $\vec{V}_e = \vec{u}_e + \vec{w}_e$, indicele *e* însemnînd exterior. Alegerea acestor direcții este astfel făcută, încît profilele de viteză corespunzătoare planurilor lor (xOP, respectiv zOP), adică $\frac{u}{u_e} = u_a\left(\frac{y}{\delta}\right)$ și $\frac{w}{w_e} = w_a\left(\frac{y}{\delta}\right)$, prin transformarea

$$\eta = \frac{\int_0^y \rho u dy}{\int_0^\delta \rho u dy} = \frac{\psi}{\psi_\delta},$$

$$\eta_1 = \frac{\int_0^y \rho w dy}{\int_0^{\delta_1} \rho w dy} = \frac{\psi_1}{\psi_{\delta_1}} \qquad (1)$$

nu diferă esențial de profilele tip [4]

$$u_a \simeq \eta^n, \quad w_a \simeq \eta_1^{n_1}.$$

Să observăm în primul rînd că o alegere imediată este aceea în care $\vec{V}_e$ este bisectoarea direcțiilor Ox, Oz, adică $u_e = w_e$. În acest sens să considerăm în figura 2, două profile de viteză în planele determinate de $u_e = w_e$ ale unei scurgeri cu strat limită secundar (normal pe planul determinat de $\vec{V}_e$) de ordinul celui primar (în planul lui $\vec{V}_e$). Se remarcă imediat că transformarea (1) a apropiat sensibil profilele inițiale, ce nu mai prezintă deosebiri esențiale, astfel că $u_a(\eta) > 0$ pentru orice $\eta > 0$. În integrările care le facem de la $\eta = 0$ la $\eta = 1$ alura celor două profile poate da erori, dar nu alterează esențial rezultatele globale, care ne interesează aici. Este clar că viteza $\vec{V}_e$ poate admite și alte descompuneri, de exemplu rețeaua p = constant și curba ortogonală corespunzătoare, cu condiția însă ca triedrul fix $Oxyz$ să rămînă în cadrul ipotezei profilelor tip.

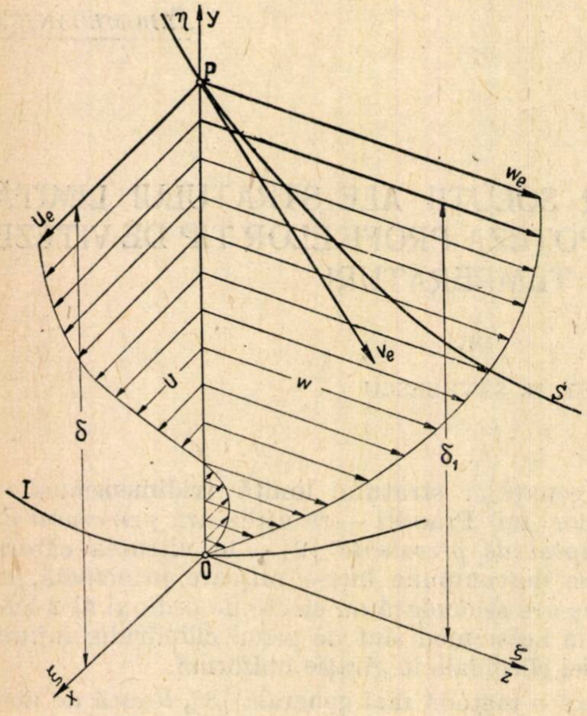


Fig. 1. — Profile de viteză în două plane perpendiculare, intersectate prin normala *Oy* la suprafața corpului.

PS — linie de curent a scurgerii exterioare; *OI* — linie de curent limită, pe suprafața corpului.

Dacă însă ne interesează linia de curent limită *OI*, dată de

$$\frac{dx}{dz} = \lim_{y \to 0} \frac{u}{w}, \qquad (2)$$

această poate diferi esenţial de linia de curent exterioară, chiar pentru variaţii mici ale profilului de viteză în apropierea peretelui. Dacă punem

$$u = \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} y + ay^2 + \ldots \text{ şi } w = \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} \cdot y + by^2 + \cdots,$$

$$\text{iar } \tau_w = \mu_w \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}, \ \tau_{1w} = \mu_{1w} \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0},$$

atunci găsim

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\tau_w}{\tau_{1w}} \cdot \frac{\mu_{1w}}{\mu_w} \tag{2'}$$

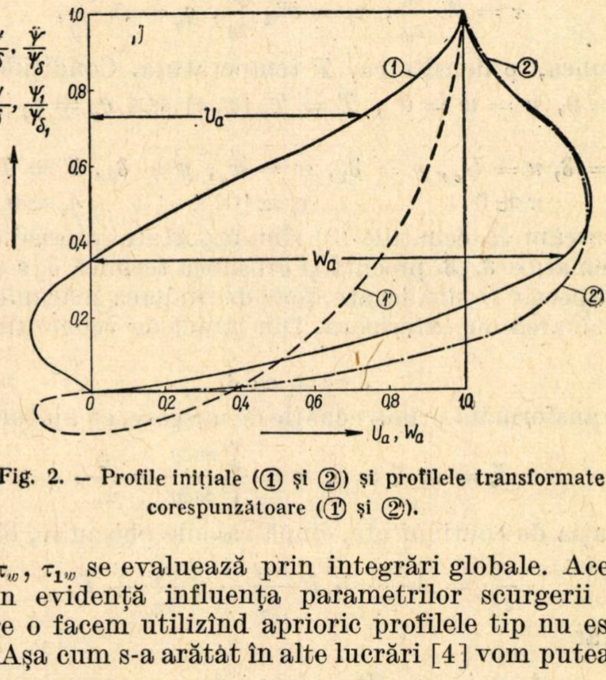


Fig. 2. – Profile iniţiale (① şi ②) şi profilele transformate corespunzătoare (①' şi ②').

şi cantităţile τ_w, τ_{1w} se evaluează prin integrări globale. Aceste integrări globale pun în evidenţă influenţa parametrilor scurgerii exterioare şi eroarea pe care o facem utilizînd aprioric profilele tip nu este în nici un caz calitativă. Aşa cum s-a arătat în alte lucrări [4] vom putea extinde ipoteza profilului tip şi pentru funcţia adimensională a energiei $E_a = \frac{E - E_w}{E_e - E_w}$, unde $E = C_p T + \frac{u^2 + w^2}{2}$, indicele w însemnînd valoarea la perete. Cu ajutorul transformării

$$\eta_2 = \frac{\int_0^y \rho_a E_a \, dy}{\int_0^{\delta_2} \rho_a E_a \, dy}, \tag{3}$$

vom putea utiliza aproximaţia $E_a \simeq \eta_2^{\eta_2}$.

3. Ecuaţiile stratului limită — tridimensional — permanent în ipoteza lui Prandtl se scriu

$$\begin{gathered}\rho\frac{du}{d\tau}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y},\\ \rho\frac{dw}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_1}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial y}=0,\\ \rho\frac{dE}{dt}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau u+\tau_1 w+q_y\right)\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0\end{gathered}\tag{4}$$

unde

$$\tau=\mathfrak{M}\frac{\partial u}{\partial y},\ \tau_1=\mathfrak{M}_1\frac{\partial w}{\partial y},\ q_y=\Lambda\frac{\partial T}{\partial y},$$

p fiind presiunea, ρ densitatea, T temperatura. Condiţiile la limită sînt

$$\begin{gathered}y=0,\ u=w=0\ ,\ T=T_w(x,z)\ \text{sau}\ q_y=q_y(x,z),\\ y=\delta,\ u=U_e,\ y=\delta_1,\ w=w_e,\ y=\delta_2,\ T=T_e.\\ \tau\approx 0\qquad\qquad \tau_1\approx 0\qquad\qquad q_y\approx 0\end{gathered}\tag{5}$$

Să remarcăm că ecuaţiile (3) sînt raportate la triedul fix $Oxyz$, iar grosimile cinematice δ, δ_1 precum şi grosimea termică δ_2 a stratului limită în punctul respectiv O sînt legate doar de tinderea mărimilor corespunzătoare către valoarea lor exterioară. Din punct de vedere fizic însă trebuie să avem

$$\delta\simeq\delta_1\simeq\delta_2.$$

4. Să transformăm prima ecuaţie de mişcare, cu ajutorul variabilelor.

$$\xi=x,\ \zeta=z,\ \eta=\frac{\int_0^y\rho u dy}{\int_0^\delta\rho u dy}=\frac{\psi}{\psi_\delta}.\tag{6}$$

Utilizînd ecuaţia de continuitate, după calcule obişnuite, obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial\tau}{\partial\eta}=A\frac{\partial u_a}{\partial\xi}+B\frac{\partial u_a}{\partial\zeta}+C\frac{\partial u_a}{\partial\eta}+D,\tag{7}$$

unde s-a notat

$$\begin{gathered}A=\psi_\delta,u_e,\ B=\psi_\delta w_e\frac{w_a}{u_a},\\ C=-u_e\left[\frac{\partial\psi_\delta}{\partial\xi}\eta+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\psi_\delta\frac{w_e}{u_e}\int_0^\eta\frac{w_a}{u_a}d\eta\right)\right],\\ D=\psi_\delta\left[u_a\frac{\partial u_e}{\partial\xi}+\frac{w_e}{u_e}w_a\frac{\partial u_e}{\partial\zeta}+\frac{1}{\rho_e u_e}\frac{\partial p}{\partial\xi}\frac{1}{\rho_a u_a}\right],\\ \tau=\frac{\mathfrak{M}_e\rho_e u_e^2}{2\psi_\delta}\mathfrak{M}_a\rho_a\frac{\partial}{\partial\eta}(u_a^2)=A_\tau\mathfrak{M}_a\rho_a\frac{\partial}{\partial\eta}(u_a^2).\end{gathered}$$

În mod analog să ne ocupăm de a doua ecuație de mișcare, transformînd-o cu ajutorul variabilelor

$$\xi = x, \quad \zeta = z, \quad \eta_1 = \frac{\int_0^y \rho w \, dy}{\int_0^{\delta_1} \rho w \, dy} = \frac{\psi_1}{\psi_{\delta_1}}. \tag{8}$$

În cele din urmă, găsim noua formă a ecuației

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \eta_1} = A_1 \frac{\partial w_a}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial w_a}{\partial \zeta} + C_1 \frac{\partial w_a}{\partial \eta_1} + D_1, \tag{9}$$

în care am pus

$$A_1 = \psi_{\delta_1} u_e \frac{u_a}{w_a}, \quad B_1 = \psi_{\delta_1} w_e,$$

$$C_1 = -w_e \left[\frac{\partial \psi_{\delta_1}}{\partial \zeta} \eta_1 + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi_{\delta_1} \frac{u_e}{w_e} \int_0^{\eta_1} \frac{u_a}{w_a} d\eta_1 \right) \right],$$

$$D_1 = \psi_{\delta_1} \left[\frac{u_e}{w_e} u_a \frac{\partial w_e}{\partial \xi} + w_a \frac{\partial w_e}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho_e w_e} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{1}{\rho_a w_a} \right],$$

$$\tau_1 = \frac{\mathcal{M}_{1_e} \rho_e w_e^2}{2 \psi_{\delta_1}} \mathcal{M}_{1_a} \rho_a \frac{\partial}{\partial \eta_1} (w_a^2) = A_{\tau_1} \mathcal{M}_{1_a} \rho_a \frac{\partial}{\partial \eta_1} (w_a^2).$$

De asemenea, ecuația energiei se transformă prin intermediul variabilelor

$$\xi = x, \quad \zeta = z, \quad \eta_2 = \frac{\int_0^y \rho_a E_a \, dy}{\int_0^{\delta_2} \rho_a E_a \, dy} = \frac{\psi_2}{\psi_{\delta_2}},$$

în următoarea formă

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} (\tau u + \tau_1 w + q_y) = A_2 \frac{\partial E_a}{\partial \xi} + B_2 \frac{\partial E_a}{\partial \zeta} + C_2 \frac{\partial E_a}{\partial \eta_2} + D_2, \tag{10}$$

unde

$$A_2 = \rho_e u_e \Delta \psi_{\delta_2} \frac{u_a}{E_a}, \quad B_2 = \rho_e w_e \Delta \psi_{\delta_2} \frac{w_a}{E_a},$$

$$C_2 = -\Delta \left[\frac{\partial \xi}{\partial \xi} \left(\psi_{\delta_2} \rho_e u_e \int_0^{\eta_2} \frac{u_a}{E_a} d\eta_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\psi_{\delta_2} \rho_e w_e \int_0^{\eta_2} \frac{w_a}{E_a} d\eta_2 \right) \right],$$

$$D_2 = \psi_{\delta_2} \left[\rho_e u_e u_a \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} + \rho_e w_e w_a \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta} + \rho_e u_\epsilon \frac{u_a}{E_a} \frac{\partial E_w}{\partial \xi} + \rho_e w_e \frac{w_a}{E_a} \frac{\partial E_w}{\partial \zeta} \right],$$

$$\tau u + \tau_1 w + q_v = \frac{\mathcal{M}_e}{\psi_{\delta_2}} \mathcal{M}_a \rho_a E_a \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \frac{w^2}{2} + \frac{\Lambda}{C_p \mathcal{M}} i \right) =$$

$$= \frac{\mathcal{M}_e \Delta}{\psi_{\delta_2} P_r} \mathcal{M}_a \rho_a E_a \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left[E_a + (P_r - 1) \frac{u^2}{2\Delta} \left(P_r \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} - 1 \right) \frac{w^2}{2\Delta} \right],$$

$$A_q = \frac{\mathcal{M}_e \Delta}{\psi_{\delta_2} P_r}, \quad P_r = \frac{C_p \mathcal{M}}{\Lambda}, \quad \Delta = E_e - E_w.$$

Condițiile la limită pentru aceste ecuații devin :

$$\eta = 0,\ u_a = w_a = 0,\ E_a = 0 \ \text{sau} \ q_{v_w} = q_{v_w}(\xi, \zeta), \tag{11}$$

$$\begin{matrix} \eta = 1, & u_a = 1, & \eta_1 = 1, W_a = 1, & \eta_2 = 1, & E_a = 1. \\ & \tau \approx 0 & \tau_1 \approx 0 & & q_v \approx 0 \end{matrix}$$

5. Pentru integrare, în primă aproximație, vom pune

$$\frac{\partial u_a}{\partial \xi} = \frac{\partial u_a}{\partial \zeta} = \frac{\partial w_a}{\partial \xi} = \frac{\partial w_a}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_a}{\partial \xi} = \frac{\partial E_a}{\partial \zeta} = 0.$$

Vom obține deci cantitățile care ne interesează

$$\begin{aligned} \tau_w &= \int_1^0 C\, du_a + \int_1^0 D\, d\eta, \\ \tau_{1w} &= \int_1^0 C_1\, dw_a + \int_1^0 D_1\, d\eta_1, \\ q_{v_w} &= \int_1^0 C_2\, dE_a + \int_1^0 D_2\, d\eta_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru determinarea parametrilor $\psi_\delta, \psi_{\delta_1}, \psi_{\delta_2}$ care intervin în expresiile de mai sus, obținem ecuațiile respective prin integrarea dublă între $\eta = 0$ și $\eta = 1$ a ecuațiilor transformate. Găsim în cele din urmă

$$\begin{aligned} A_\tau K &= A_\tau \int_0^1 \mathcal{M}_a \rho_a\, d(u_a^2) = -\int_0^1 C\eta\, du_a - \int_0^1 D\eta\, d\eta, \\ A_{\tau_1} K_1 &= A_{\tau_1} \int_0^1 \mathcal{M}_{1a} \rho_a\, d(w_a^2) = -\int_0^1 C_1 \eta_1 dw_a - \int_0^1 D_1 \eta_1\, d\eta_1, \\ A_q K_2 &= A_q \int_0^1 \mathcal{M}_a \rho_a E_a\, d\left[E_a + (P_r - 1)\frac{u^2}{2\Delta} + \left(P_r \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} - 1\right)\frac{w^2}{2\Delta}\right] = \\ &= -\int_0^1 C_2 \eta_2\, dE_a - \int_0^1 D_2 \eta_2\, d\eta_2, \end{aligned} \tag{13}$$

unde s-a utilizat observația că putem scrie

$$\int_0^1 \left\{\int_1^\eta C\, du_a\right\} d\eta = \left\{\eta \int_1^\eta C\, d\, u_a\right\}_0^1 - \int_0^1 \eta\, C\, d\, u_a = -\int_0^1 C\eta\, du_a$$

și analoagele. Condițiile la limită se pot pune admițînd că ψ_δ, ψ_{δ_1}, ψ_{δ_2} se anulează în punctul de origină al liniei de curent corespunzătoare local ecuațiilor (13).

Se remarcă faptul că mărimile care ne interesează se deduc prin integrări globale, așa că apar justificate aproximațiile ce le vom face în virtutea ipotezei profilelor tip, punînd

$$\lambda_a = \frac{u_a}{w_a} \simeq 1, \qquad \lambda_b = \frac{u_a}{E_a} \simeq 1, \qquad \lambda_c = \frac{w_a}{E_a} \simeq 1.$$

Vom scrie deci

$$\int_0^1 C d u_a = -u_e \frac{\partial \psi_\delta}{\partial \xi} \int_0^1 \eta \, d u_a - u_e \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\psi_\delta \frac{w_e}{u_e} \int_0^\eta \frac{w_a}{u_a} d\eta\right) d u_a \simeq C^\star \int_0^1 \eta \, d u_a,$$

unde

$$C^\star = -u_e\left[\frac{\partial \psi_\delta}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\psi_\delta \frac{w_e}{u_e}\right)\right] = -\frac{d\psi_\delta}{dt} - u_e \psi_\delta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right),$$

şi încă

$$\int_0^1 D d\eta = \psi_\delta \int_0^1 \left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{w_e}{u_e} \frac{w_a}{u_a} \frac{\partial u_e}{\partial \zeta}\right) u_a \, d\eta + \frac{\psi_\delta}{\rho_e u_e} \frac{\partial p}{\partial \xi} \int_0^1 \frac{d\eta}{\rho_a u_a} \simeq D^\star \int_0^1 \left[u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right] d\eta,$$

unde

$$D^\star = \psi_\delta \left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{w_e}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \zeta}\right) = -\frac{\psi_\delta}{\rho_e u_e} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\psi_\delta}{u_e} \frac{d u_e}{dt}.$$

In mod asemănător putem pune

$$\int_0^1 C \, \eta \, d u_a \approx C^\star \int_0^1 \eta^2 d u_a, \quad \int_0^1 D \eta \, d\eta \simeq D^\star \int_0^1 \left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right) \eta \, d\eta$$

şi analoagele pentru $C_1^\star$, $D_1^\star$. Pentru ecuaţia energiei se obţin relaţiile

$$\int_0^1 C_2 \, d E_a \simeq C_2^\star \int_0^1 \eta_2 \, d E_a, \quad \int_0^1 D_2 \, d\eta_2 \simeq D_2^\star \int_0^1 (E_a - 1) \, d\eta_2,$$

unde

$$C_2^\star = -\Delta\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_{\delta_2} \rho_e u_e) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\psi_{\delta_2} \rho_e w_e)\right]$$

$$D_2^\star = \psi_{\delta_2}\left(\rho_e u_e \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} + \rho_e w_e \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta}\right) = \psi_{\delta_2} \rho_e \frac{d\Delta}{dt}.$$

6. Utilizînd expresiile de mai sus, formulele frecării şi transferului devin

$$\begin{aligned}
\tau_w &= \frac{\int_0^1 \eta \, d u_a}{\int_0^1 \eta^2 \, d u_a} A_\tau K + D^\star \left\{ \frac{\int_0^1 \eta \, d u_a}{\int_0^1 \eta^2 \, d u_a} \int_0^1 \left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right) \eta \, d\eta - \int_0^1 \left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right) d\eta \right\}, \\
\tau_{1w} &= \frac{\int_0^1 \eta_1 \, d w_a}{\int_0^1 \eta_1^2 \, d w_a} A_{\tau_1} K_1 + D_1^\star \left\{ \frac{\int_0^1 \eta_1 \, d w_a}{\int_0^1 \eta_1^2 \, d w_a} \int_0^1 \left(w_a - \frac{1}{\rho_a w_a}\right) \eta_1 \, d\eta_1 - \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^1 \left(w_a - \frac{1}{\rho_a w_a}\right) d\eta_1 \right\}, \qquad (14) \\
q_{v_w} &= \frac{\int_0^1 \eta_2 \, d E_a}{\int_0^1 \eta_2^2 \, d E_a} A_q K_2 + D_2^\star \left\{ \frac{\int_0^1 \eta_2 \, d E_a}{\int_0^1 \eta_2^2 \, d E_a} \int_0^1 (E_a - 1) \, \eta_2 \, d\eta_2 - \int_0^1 (E_a - 1) \, d\eta_2 \right\}.
\end{aligned}$$

În privința mărimilor ψ_δ, ψ_{δ_1}, ψ_{δ_2}, ecuațiile (13) se pot scrie explicit sub forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\psi_\delta^2) + 2\left\{u_e \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right) - \frac{\int_0^1\left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_n}\right)\eta\, d\eta}{\int_0^1 \eta^2\, du_a}\,\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dt}\right\}\psi_\delta^2 - \frac{\mathfrak{M}_e \rho_e u_e^2}{\int_0^1 \eta^2\, du_a} K = 0,\\
&\frac{d}{dt}(\psi_{\delta_1}^2) + 2\left\{w_e \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_e}{w_e}\right) - \frac{\int_0^1\left(w_a - \frac{1}{\rho_a w_a}\right)\eta_1\, d\eta_1}{\int_0^1 \eta_1^2\, d w_a}\,\frac{1}{w_e}\frac{dw_e}{dt}\right\}\psi_{\delta_1}^2 - \frac{\mathfrak{M}_{1e}\rho_e w_e^2}{\int_0^1 \eta_1^2\, dw_a} K_1 = 0, \qquad (15)\\
&\frac{d}{dt}(\psi_{\delta_2}^2) + 2\left\{\frac{1}{\rho_e}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho_e u_e) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(\rho_e w_e)\right] - \frac{\int_0^1 (E_a - 1)\eta_2\, d\eta_2}{\int_0^1 \eta_2^2\, dE_a}\,\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt}\right\}\psi_{\delta_2}^2 -\\
&\qquad - \frac{2\,\mathfrak{M}_e}{\rho_e P_r \int_0^1 \eta_2^2\, dE_a} K_2 = 0,
\end{aligned}$$

în care am admis că $E_e = C_p\, T_e + \frac{u_e^2 + w_e^2}{2}$ = const. peste întregul corp.

Să remarcăm în primul rînd că ecuațiile (15) permit o integrare în lungul liniei de curent exterioare, corespunzătoare punctului unde voim să aflăm caracteristicile stratului limită. Vom scrie că $\frac{d}{dt} = V_e \frac{d}{ds}$, unde $\vec{V}_e = \vec{u}_e + \vec{w}_e$, iar arcul s este luat în lungul liniei de curent. Admițînd că $\psi_{\delta_{(1,2)}} = 0$, acolo unde începe linia de curent pe corp și că ψ_δ nu intră în expresia lui K, soluția primei ecuații (15) este de tipul

$$\psi_\delta^2 = a^\star \cdot \frac{\int_0^s e^{2\int\left[\frac{u_e}{v_e}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right) - b^\star \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{ds}\right]ds} \cdot \mathfrak{M}_e \rho_e u_e \frac{u_e}{v_e} K\, ds}{e^{2\int\left[\frac{u_e}{v_e}\frac{\partial}{\delta\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right) - b^\star\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{ds}\right]ds}}, \qquad (16)$$

unde

$$\frac{1}{a^\star} = \int_0^1 \eta^2\, du_a, \qquad b^\star = \frac{\int_0^1\left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right)\eta\, d\eta}{\int_0^1 \eta^2\, du_a}.$$

În mod analog obținem și soluțiile corespunzătoare celorlalte două ecuații (15).

În al doilea rînd se observă că integralele care intervin atît în formulele (14), cît și în ecuațiile (15), se evaluează rapid, punînd

$$u_a \approx \eta^n, \qquad w_a \simeq \eta_1^{n_1}, \qquad E_a \simeq \eta_2^{n_2}, \qquad (17)$$

unde n, n_1, n_2 sînt constante, pozitive, subunitare.

În al treilea rînd notăm că, admițînd valabilitatea ecuațiilor (7), (8) și (9) ca ecuații mediate ale scurgerii turbulente, vom putea obține informații asupra comportării caracteristicilor stratului limită turbulent printr-o potrivită alegere a parametrilor n, n_1, n_2 și printr-o expresie adecvată dată mărimilor K, K_1, K_2.

7. Să stabilim acum formula generală a liniilor de curent limită. Conform relaţiei (2), utilizînd expresiile (14) pentru τ_w şi τ_{1w}, găsim

$$\lim_{\nu\to 0} \frac{u}{w} = \left|\frac{d\xi}{d\zeta}\right|_{\text{local}} = \frac{u_e}{w_e}\,\frac{\mathfrak{M}_e}{\mathfrak{M}_{1_e}}\,\frac{u_e}{w_e}\,\frac{\psi_{\delta_1}}{\psi_\delta}\,N^\star\cdot\frac{1+N_1^\star\,\dfrac{\psi_\delta^2}{\mathfrak{M}_e\,\rho_e\,u_e^2}\cdot\dfrac{1}{\rho_e\,u_e}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial\xi}}{1+N_2^\star\,\dfrac{\psi_{\delta_1}^2}{\mathfrak{M}_{1_e}\,\rho_e\,w_e^2}\cdot\dfrac{1}{\rho_e\,w_e}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial\zeta}}, \tag{18}$$

unde am pus

$$N^\star = \frac{\int_0^1 \eta\,du_a}{\int_0^1 \eta_1\,dw_a}\cdot\frac{\int_0^1 \eta_1^2\,dw_a}{\int_0^1 \eta^2\,du_a}\cdot\frac{\int_0^1 \mathfrak{M}_a\,\rho_a d\,(u_a^2)}{\int_0^1 \mathfrak{M}_{1a}\,\rho_a d\,(w_a^2)},$$

$$N_1^\star = -\frac{2}{\int_0^1 \mathfrak{M}_a\,\rho_a\,d\,(u_a^2)}\left[\int_0^1\left(u_a-\frac{1}{\rho_a\,u_a}\right)\eta\,d\eta-\frac{\int_0^1\eta^2\,du_a}{\int_0^1\eta\,du_a}\int_0^1\left(u_a-\frac{1}{\rho_a\,u_a}\right)d\eta\right]$$

$$N_2^\star = -\frac{2}{\int_0^1 \mathfrak{M}_{1a}\,\rho_a\,d\,(w_a^2)}\left[\int_0^1\left(w_a-\frac{1}{\rho_a w_a}\right)\eta_1\,d\eta_1-\frac{\int_0^1\eta_1^2\,dw_a}{\int_0^1\eta_1\,dw_a}\int_0^1\left(w_a-\frac{1}{\rho_a\,w_a}\right)d\eta_1\right],$$

iar ψ_δ^2, $\psi_{\delta_1}^2$ sînt deduşi din formule analoage expresiei (16).

Este interesant de remarcat că formula (18) de mai sus pune în evidenţă influenţa determinantă a gradienţilor de presiune locali $\frac{\partial p}{\partial\xi}$, $\frac{\partial p}{\partial\zeta}$. Există scurgeri exterioare ale căror linii de curent formează pe o bună parte a lor aproximativ o reţea de drepte paralele, aşa că triedul fix obţinut luînd drept bisectoare a axelor $O_{\xi\zeta}$ direcţia generală a vitezei. U_∞ permite rămînerea în cadrul ipotezei profilelor tip. Atunci formula (18) indică limpede rolul gradienţilor locali de presiune în abaterea liniilor de curent limită faţă de liniile de curent ale scurgerii exterioare.

În sfîrşit să mai observăm că o rapidă evaluare aproximativă a expresiei (18) se obţine punînd

$$\frac{\mathfrak{M}_e}{\mathfrak{M}_{1_e}}\,\frac{u_e}{w_e}\,\frac{\psi_{\delta_1}}{\psi_\delta}\,N^\star \simeq 1.$$

Dacă situaţia scurgerii exterioare ne permite să admitem $\frac{\partial p}{\partial\zeta} = 0$ rămîne

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{u}{w} = \left|\frac{d\xi}{d\zeta}\right|_{\text{local}} \simeq \frac{u_e}{w_e}\left(1+N_1^\star\,\frac{\psi_\delta^2}{\mathfrak{M}_e\,\rho_e\,u_e^2}\,\frac{1}{\rho_e\,u_e}\,\frac{\partial p}{\partial\xi}\right), \tag{19}$$

care constituie o aproximare în limite destul de largi — calitativă a formulei (18).

8. Vom considera două aplicaţii ale formulelor stabilite, una de verificare — cilindrul infinit înclinat pe curent — cealaltă de extindere — aripa delta subţire simetrică ca soluţie a unei mişcări conice ; în ambele mişcări liniile de curent ale scurgerii exterioare se pot aproxima printr-o reţea de drepte paralele. În ambele cazuri vom admite ca soluţie a ecuaţiei (10) a energiei valoarea

$E_a \equiv 1$, pentru $\Delta = 0$, astfel că putem scrie

$$\frac{1}{\rho_a} = 1 + \frac{V_e^2}{2i_e}\left[1 - u_a^2\,\frac{1 + \dfrac{w_e^2}{u_e^2}\left(\dfrac{w_a}{u_a}\right)^2}{1 + \dfrac{w_e^2}{u_e^2}}\right], \int_0^1\left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right)d\eta \simeq$$

$$\simeq\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2}M_e^2\right)\int_0^1\left(u_a - \frac{1}{u_a}\right)d\eta$$

unde $\dfrac{V_e^2}{2i_e} = \dfrac{\varkappa - 1}{2}M_e^2$, $\varkappa = \dfrac{C_p}{C_v}$. Cu ajutorul relației de mai sus și al aproximației (17) expresia (16) devine

$$\psi_\delta^2 = \frac{2 + n}{n}\cdot\frac{\displaystyle\int_0^s e^{2\int\frac{u_e}{v_e}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right)ds}\cdot\left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}}\cdot\ \mathfrak{M}_e\,\rho_e\,u_e\cdot\frac{u_e}{v_e}\,K ds}{e^{2\int\frac{u_e}{v_e}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right)ds}\cdot\left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}}}\cdot \qquad (20)$$

a) Să considerăm în figura 3 un cilindru circular infinit înclinat cu 45° față de curentul neperturbat U_∞ și ale cărui linii de curent exterioare — în cazul stratului limită laminar incompresibil — sînt reprezentate de curbele paralele 1. Față de direcția generală a vitezei U_∞ sistemul de axe $P\xi\zeta$, unde $\dfrac{\partial p}{\partial\zeta} = 0$ se apropie pe o bună parte de sistemul de axe local $P\xi_1\zeta_1$ unde $\vec{V}_e$ este bisectoare, în afară de bordul de atac unde însă influența raportului $\dfrac{U_e}{W_e}$ este preponderentă, grosimea stra-

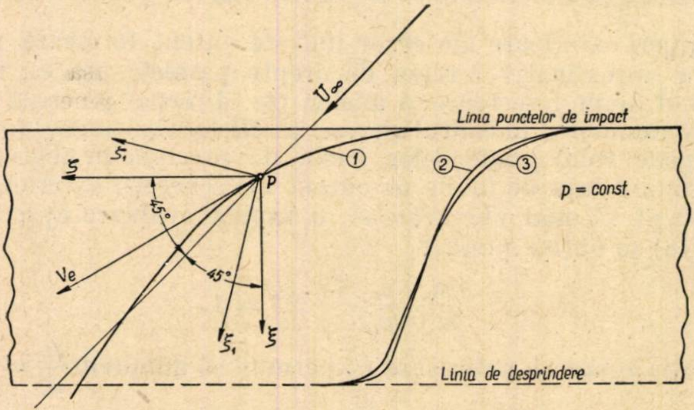


Fig. 3. — Linii de curent limită pe un cilindru infinit, înclinat la 45° față de curentul neperturbat incompresibil.
① linia de curent a scurgerii exterioare ; ② linia de curent limită calculată cu metoda prezentă ; ③ linia de curent limită calculată în lucrarea [5].

tului limită fiind foarte mică. Putem rămîne astfel în cadrul ipotezei profilelor tip cu sistemul de axe $P\xi\zeta$, care devine riguros un sistem general, al întregului corp, datorită faptului că $p =$ const. sînt linii drepte. Apar evidente simplificările

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right) = 0, \quad \frac{u_e}{v_e}ds = d\xi, \quad K = 1, \; M_e = 0.$$

Cu $\frac{u_e}{U_\infty} = 7{,}151\left(\frac{\xi}{L}\right) - 4{,}5 \times 10^{-2}\left(\frac{\xi}{L}\right)^3 - 3{,}3 \times 10^{-5}\left(\frac{\xi}{L}\right)^5$, $w_e = 0{,}707\ U_\infty$, $n = \frac{1}{3}$ se găseşte prin aplicarea formulei aproximative (19), linia de curent limită 2. Se remarcă faptul că diferenţele faţă de calculul mai exact al lucrării [5] (curba 3) nu sînt în nici un caz calitative. Menţionăm că un calcul efectuat cu ajutorul formulei (18) dă rezultate şi mai apropiate de curba 3.

b) Să considerăm în figura 4 aripa delta subţire, cu viteza curentului neperturbat U_∞ şi incidenţa α, cu ambele borduri subsonice, raportată la axele din figura 4.
Ca soluţie a unei mişcări conice se găseşte

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi_0}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi_0 - \mathrm{tg}^2\varphi}}, \quad \frac{v}{U_\infty} = -\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi_0 - \mathrm{tg}^2\varphi}}, \quad p \simeq p_\infty - \rho_\infty U_\infty u.$$

Reţeaua liniilor de curent 1 permite alegerea sistemului de axe fix $P\xi\zeta$, avînd viteza $U_\infty + u$ drept bisectoare. Rezultă

$$\frac{u_e}{U_\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{u - v}{U_\infty}\right), \quad \frac{w_e}{U_\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{u + v}{U_\infty}\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial\xi} = \rho_\infty U_\infty \frac{u}{r}\,\frac{\sin(\varphi + 45^\circ)\cdot\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi\cdot(\mathrm{tg}^2\varphi_0 - \mathrm{tg}^2\varphi)}; \quad \frac{\partial p}{\partial\zeta} = -\rho_\infty U_\infty \frac{u}{r}\,\frac{\cos(\varphi + 45^\circ)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi\cdot(\mathrm{tg}^2\varphi_0 - \mathrm{tg}^2\varphi)}.$$

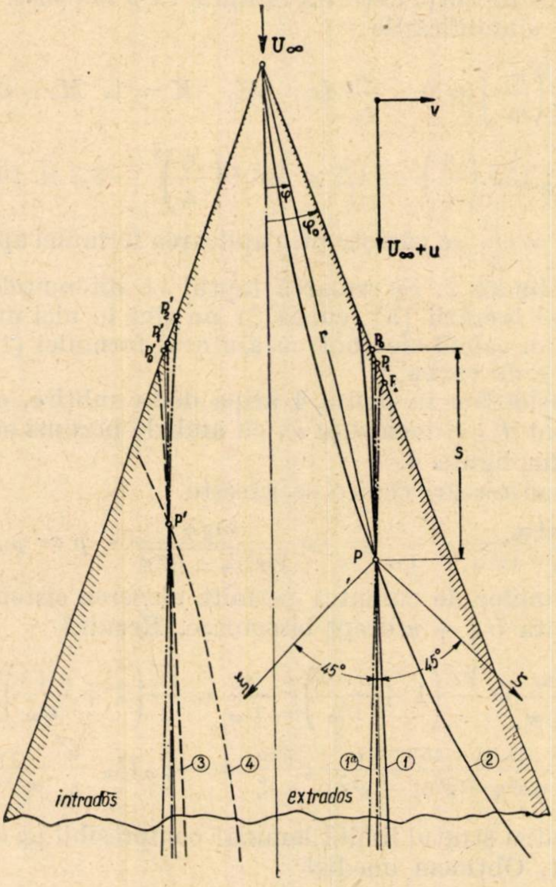
Admitem că pentru stratul limită laminar compresibil $\mu\rho = \mu_\infty\rho_\infty =$ const. de unde $K = 1$. Obţinem imediat

$$N_1^\star = -\frac{E_e}{i_e}\cdot\frac{4n}{(1 - n)(4 - n^2)}, \quad N_2^\star = -\frac{E_e}{i_e}\cdot\frac{4n_1}{(1 - n_1)(4 - n_1^2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{w_e}{u_e}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1 + \dfrac{u + v}{U_\infty}}{1 + \dfrac{u - v}{U_\infty}}\right) \approx 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_e}{w_e}\right) \approx 0,$$

$$\psi_\delta^2 \simeq \frac{2 + n}{n}\mu_e\rho_e\frac{\displaystyle\int_0^s u_e^{1 + \frac{4}{2-n}}\cdot\frac{u_e}{v_e}\,ds}{u_e^{\frac{4}{2-n}}} \simeq \frac{2 + n}{n}\mu_e\rho_e\frac{1}{2}U_\infty s,$$

$$\psi_{\delta_1}^2 \simeq \frac{2 + n_1}{n_1}\mu_e\rho_e\frac{1}{2}U_\infty s, \quad \frac{\mu_e}{\mu_{1e}}\cdot\frac{u_e\psi_{\delta_1}}{w_e\psi_\delta}\cdot N^\star \approx 1,$$



U_∞
v
$U_\infty + u$
φ
φ_0
r
P_2'
P_1'
P_0'
P_2
P_1
P_0
s
P'
P
45°
45°
η
ξ
③
④
①'
①
②
intrados
extrados

Fig. 4. — Linii de curent limită pe o aripă delta, izolate termic, la diverse incidenţe α şi numere Mach ale curentului M_e neperturbat

—①— linie de curent limită pe extrados, $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$
—②— ,, ,, ,, ,, ,, ,, $\alpha = 0{,}1$ $M_e = 2{,}74$
----③---- ,, ,, ,, ,, ,, intrados $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$
----④---- ,, ,, ,, ,, ,, ,, $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$

P_0 începutul liniei de curent exterioare ideale, paralelă cu U_∞, pe extrados; P_1 începutul liniei de curent exterioare a soluţiei mişcării conice, pe extrados, pentru $\alpha = 0{,}02$, $M_2 = 1{,}58$; P_2 începutul liniei de curent exterioare a soluţiei mişcării conice, pe extrados, pentru $\alpha = 0{,}1$, $M_2 = 2{,}74$; P_0', P_1', P_2' analoagele pentru intrados.

Regiunea haşurată de la bordurile de atac nu este corect exprimată de această metodă de calcul.

unde am admis că linia de curent — ca drum de integrare — este perfect dreaptă, iar în punctul P_0 avem $\psi_\delta = \psi_{\delta_1} = 0$. Obţinem în cele din urmă

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{u_e}{w_e} \cdot \frac{1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{(1-n)(2-n)} \cdot \dfrac{E_e}{i_e} \cdot \dfrac{u}{u_e} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0} \cdot \dfrac{1+\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{tg}\varphi}}{1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{(1-n_1)(2-n_1)} \cdot \dfrac{E_e}{i_e} \cdot \dfrac{u}{w_e} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0} \cdot \dfrac{1-\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{tg}\varphi}} \cdot \tag{21}$$

utilizînd o reprezentare polară, în care linia de curent limită este dată de relaţia

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi + \dfrac{d\xi}{d\zeta}(1 - \operatorname{tg}\varphi)}{1 - \operatorname{tg}\varphi - \dfrac{d\xi}{d\zeta}(1 + \operatorname{tg}\varphi)},$$

s-au calculat liniile de curent limită pentru extrados (curbele 1 şi 2) şi de asemenea pentru intrados (curbele 3 şi 4), introducînd datele următoare

$$\varphi_0 = 20^\circ,\ \alpha = 0{,}02,\ M_e = 1{,}58,\ \alpha = 0{,}1,\ M_e = 2{,}74,\ n = n_1 = \frac{1}{3} \cdot$$

Se poate remarca imediat că incidenţele mici nu modifică alura acestor curbe faţă de cele corespunzătoare curentului exterior. Deosebirea se face simţită pentru numere Mach mari şi incidenţe mari. Trebuie observat, de asemenea, că simplificările pe care le-am efectuat afectează mai profund regiunea bordului de atac şi a vîrfurilor, unde pot exista diferenţe faţă de calcul, însă în restul aripii mersul general al liniilor parietale este cel dedus din formula (18).

Această formulă se poate extinde fără dificultate şi aripilor nesimetrice cu borduri de atac subsonice.

9. În concluzie, utilizarea ipotezei profilelor tip de viteze şi temperaturi permite anumite simplificări în tratarea ecuaţiilor stratului limită tridimensional obţinîndu-se rezultate explicite în privinţa anumitor caracteristici globale.

Sînt posibile extinderi care să îmbrăţişeze atît scurgerea nepermanentă, cît şi aceea pentru care liniile de curent ale scurgerii exterioare au deviaţii mari de la o reţea aproximativă de drepte paralele.

De asemenea, formulele care pun în evidenţă influenţa preponderentă a gradienţilor de presiune locali arată că alura calitativă a liniilor parietale (limită) se păstrează chiar şi în cazul stratului limită turbulent, unde parametrul n este mai mic, iar $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\psi_\delta, u_a, \rho_e, u_e)$.

În ecuaţiile fundamentale s-a făcut aproximarea din cazul bidimensional $\Delta \simeq \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, dar se poate introduce expresia completă a laplaceanului, derivatele $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2}{dz^2}$ calculîndu-se cu ajutorul noilor variabile ξ, ζ, η.

Aceste derivate introduc termeni suplimentari care se pot evalua cu ajutorul profilelor tip.

Primită la redacție la 20 ianuarie 1959.

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ТИПОВЫХ ПРОФИЛЯХ СКОРОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе предполагается, что профили скоростей в трехмерном пограничном слое, рассматриваемые по двум направлениям, биссектрисы которых являются скоростью обтекания, становятся типовыми профилями путем преобразования $\frac{\psi}{\psi_\delta}$. Эта гипотеза позволяет упростить исчисления интегрирования уравнений пограничного слоя тел, обтекание которых имеет приближенно вид решетки из прямых линий. Таким образом получены предельные линии тока $\left|\frac{d\xi}{d\zeta}\right| = \lim \left|\frac{U}{W}\right|_{y=0}$ для несжимаего пограничного слоя круглого цилиндра, составляющего угол в 45° с невозмущенным потоком, хорошо согласующиеся с известными уже результатами. Этот метод распространяется и на случай сжимаемого ламинарного пограничного слоя на термоизолированном Δ-образном треугольном крыле, с решением обтекания конического движения. Полученные результаты представляют интерес с качественной точки зрения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Профили скоростей в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, пересеченных нормалью *Oy* к поверхности тела. *PS* — линия тока внешнего течения; *OI* — предельная линия тока на поверхности тела.

Рис. 2. — Исходные профили ① и ② и соответствующие им преобразованные профили ①′ и ②′.

Рис. 3. — Предельная линия тока на бесконечном цилиндре, наклоненном под углом в 45° относительно несжимаемого невозмущенного потока. ①—линия тока внешнего течения; ②—предельная линия тока, вычисленная при помощи предлагаемого метода. ③ — предельная линия тока, вычисленная в [5].

Рис. 4. — Предельные линии тока на Δ-образном термоизолированном крыле при различных углах атаки α и числах Маха M_e невозмущенного потока.

— ① — предельная линия тока на верхней поверхности крыла $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$;

— ② — предельная линия тока на верхней поверхности крыла $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$;

---- ③ ---- предельная линия тока на нижней поверхности крыла $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$;

---- ④ ---- предельная линия тока на нижней поверхности крыла $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$;

P_0 — Начало идеальной внешней линии тока, параллельной U_∞ на верхней поверхности крыла.

P_1 — начало внешней линии тока для конического движения на верхней поверхности крыла, при $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$; P_2 — начало внешней линии тока для конического движения на верхней поверхности крыла при $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$; P_0', P_1', P_2' — соответственно на нижней поверхности крыла. Заштрихованная часть у передних кромок выявляется неправильно при предлагаемом методе расчета.

RÉSULTATS FOURNIS PAR CERTAINES SOLUTIONS DE LA COUCHE-LIMITE TRIDIMENSIONNELLE, DANS L'HYPOTHÈSE DES PROFILS-TYPE DE VITESSE ET DE TEMPÉRATURE

RÉSUMÉ

L'auteur admet, dans le présent travail, que les profils de vitesse dans la couche limite tridimensionnelle, considérés suivant deux directions dont la bissectrice est la vitesse d'écoulement extérieur, deviennent des profils-type par la transformation $\frac{\psi}{\psi_\delta}$. Cette hypothèse permet de simplifier les calculs d'intégration des équations de la couche limite pour des corps dont l'écoulement extérieur offre l'aspect approximatif d'un réseau de lignes droites. Ont été obtenues de la sorte les lignes de courant limite $\left|\frac{d\xi}{d\zeta}\right| = \lim \left|\frac{U}{W}\right|_{y=0}$ pour la couche limite laminaire, incompressible, d'un cylindre circulaire incliné de 45° par rapport au courant non perturbé — en bon accord avec les résultats connus. La méthode a été étendue au cas d'une couche limite, laminaire, compressible sur une aile delta, thermiquement isolée, en admettant la solution de l'écoulement extérieur d'un mouvement conique. Les résultats obtenus présentent un intérêt du point de vue qualitatif.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Profils de vitesse dans deux plans perpendiculaires, intersectés par la normale Oy à la surface du corps. PS = Ligne de courant de l'écoulement extérieur ; OI = ligne de courant limite à la surface du corps.

Fig. 2. — Profils initiaux ① et ② et profils transformés correspondants ①' et ②'.

Fig. 3. — Lignes de courant limite sur un cylindre infini, incliné de 45° par rapport au courant non perturbé incompressible. ① = Ligne de courant de l'écoulement extérieur ; ② = ligne de courant limite calculée par la méthode proposée ; ③ = ligne de courant limite calculée dans le travail [5].

Fig. 4. — Lignes de courant limite sur une aile delta, thermiquement isolées, pour diverses incidences α et divers nombres Mach, M_e du courant perturbé.

— ① — = Ligne de courant limite sur l'extrados, $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$;
— ② — = ligne de courant limite sur l'extrados, $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$;
--- ③ --- = ligne de courant limite sur l'intrados, $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$;
--- ④ --- = ligne de courant limite sur l'intrados, $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$;

P_0 = commencement de la ligne de courant extérieure, idéale, parallèle à U_∞, sur l'extrados ; P_1 = commencement de la ligne de courant extérieure, de la solution du mouvement conique, sur l'extrados, pour $\alpha = 0{,}02$, $M_e = 1{,}58$; P_2 = commencement de la ligne de courant extérieure, de la solution du mouvement conique, sur l'extrados, pour $\alpha = 0{,}1$, $M_e = 2{,}74$; P_0', P_1', P_2' = les mêmes que ci-dessus, sur l'intrados.

La région hachurée, des bords d'attaque, n'est pas correctement exprimée par cette méthode de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. Струминский, *Скольжение в сжимаемом вязком газе.* ДАН СССР, **54** (1946).
2. Л. Г. Лойцянский, *Аэродинамика пограничного слоя.* Москва, 1941.
3. В. В. Струминский, *Уравнения трехмерного пограничного слоя в сжимаемом газе для произвольной поверхоости.* ДАН СССР, **114**, *2* (1957).
4. Şt. Săvulescu, *Sur une détermination des caractéristiques de la couche limite par l'utilisation de certains profils type de vitesses et de températures.* R.M.A., **II**, *1* (1957).
5. N. Rott, I. F. Crabtree, *Simplified Laminar Boundary Layers Calculations Bodies of Revolution and for Yawed Wings.* J.A.S., *8* (1952).

AEROMECANICĂ

CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPILOR TRIUNGHIULARE ÎN MIŞCARE OSCILATORIE ARMONICA ÎN REGIM SUPERSONIC

DE

ŞERBAN SĂNDULESCU

1. NOTAŢII

$Ox_1x_2x_3$ — sistem de coordonate carteziene cu originea în vîrful aripii,

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului,

M_∞ — numărul Mach,

$\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ — potenţialul mişcării nepermanente,

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — *potenţialul redus*,

$\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ — viteza verticală redusă,

$\Phi_1(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul mişcării omogene de ordinul unu,

$\Phi_2(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul mişcării omogene de ordinul doi,

$x = y + i\mathfrak{z}$ — plan auxiliar obţinut din planul lui Busemann, $\xi = \eta + i\zeta$ prin transformarea conformă $Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$,

u_0, v_0 — *vitezele reduse* ale mişcării omogene de ordinul unu,

u_1, v_1 — *vitezele reduse* ale mişcării omogene de ordinul doi,

ω — pulsaţia mişcării,

$\lambda = \frac{\omega h}{U_\infty}$ — *pulsaţia redusă*,

$k = -\frac{\lambda}{h}\frac{1+B^2}{B^2}$ — coeficient adimensional,

h — coarda aripii,

C_p — coeficientul de presiune,

S_c — forţa de succiune,

M_{n_1} — numărul Mach al componentei perpendiculare a vitezei pe bordul de atac,

χ_1 — unghiul făcut de bordul de atac OA_1 cu axa Ox_2,

l_1 — abscisa urmei bordului de atac OA_1 în planul $x = y + i\mathfrak{z}$,

l_2 — abscisa urmei bordului de atac OA_2 în planul $x = y + i\mathfrak{z}$,

S — suprafaţa aripii,

$C_z = -\frac{2}{S}\int_S C_p\, d\sigma$ — coeficientul de portanţă,

$C_x = \Theta_2 C_z + \frac{R_s}{\frac{\rho}{2} S U_\infty^2}$ — coeficientul de rezistenţă la înaintare,

R_s — componenta axială a forţei de succiune,

$C_l = -\frac{2}{S(l_1 + l_2)}\int_S C_p x_2\, d\sigma$ — coeficientul de moment de ruliu,

$C_n = -\Theta_2 C_l + \frac{M_S}{\frac{\rho}{2} S(l_1 + l_2) U_\infty^2}$ — coeficientul de moment de giraţie,

M_S — momentul de giraţie dat de forţa de succiune,

$C_m = -\frac{2}{S}\int_S C_p\left(\frac{2}{3} - x_1\right) d\sigma$ — coeficientul de moment de tangaj.

2. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Vom considera o aripă triunghiulară care are o mişcare oscilatorie în jurul unei axe OG (fig. 1) şi este aşezată într-un curent supersonic U_∞.

În această situaţie, scurgerea în jurul aripii este nepermanentă, iar potenţialul vitezelor satisface ecuaţia

$$-B^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\, U_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 dt}\right). \qquad (1)$$

Să presupunem că mişcarea aripii este o mişcare oscilatorie armonică simplă $\Omega = \Omega_0\, e^{i\omega t}$ în raport cu axa OG.

În acest caz potenţialul vitezelor [1] poate fi pus sub forma

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = U_\infty\, e^{i(\omega t + kx_1)}\, \Phi(x_1, x_2, x_3), \qquad (2)$$

iar ecuaţia precedentă devine

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\frac{\lambda^2}{h^2}\,\frac{1+B^2}{B^2}\,\Phi\approx 0, \tag{3}$$

membrul drept al acesteia putînd fi neglijat dacă pulsaţia mişcării este mică.

Descompunînd mişcarea oscilatorie în mişcările componente faţă de axele de coordonate Ox_1, x_2

$$\Theta_1 = E_1 e^{i\omega t},\ (E_1 = \Omega_0 \cos\gamma), \tag{4}$$

$$\Theta_2 = E_2 e^{i\omega t},\ (E_2 = \Omega_0 \sin\gamma), \tag{4'}$$

rezultă pentru cota punctului $M(x_1, x_2)$ următoarea expresie :

$$Z = \Theta_1 x_2 - \Theta_2 x_1 = \\ = e^{i\omega t}(E_1 x_2 - E_2 x_1). \tag{5}$$

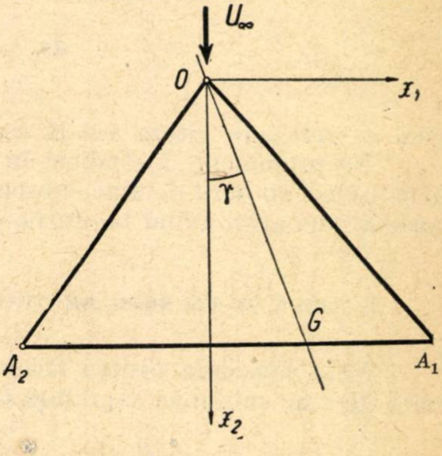


Fig. 1

Utilizînd mai departe rezultatele din lucrarea noastră anterioară [2], se găseşte pentru viteza verticală redusă relaţia

$$\beta = -E_2 + i\frac{\lambda}{h}\left[E_1 x_2 - E_2 x_1\frac{1+2B^2}{B^2}\right], \tag{6}$$

în baza căreia se poate scrie pentru potenţialul redus

$$\Phi \approx \Phi_1 + i\,\frac{\lambda}{h}\,\Phi_2, \tag{7}$$

problema fiind adusă astfel la studiul a două mişcări omogene de ordinul unu şi doi.

Coeficientul de presiune C_p este definit, în cazul mişcării oscilatorii de frecvenţă mică, de următoarea formulă :

$$C_p \approx -2e^{i\omega t}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} - i\,\frac{\lambda}{h}\left(\frac{1}{B^2}\,\Phi_1 - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1+B^2}{B^2}\,x_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)\right], \tag{8}$$

de unde se vede necesitatea determinării vitezelor axiale reduse ale mişcărilor omogene de ordinul unu şi doi şi potenţialul mişcării de ordinul unu.

Pentru a stabili expresiile vitezelor axiale reduse u_0 şi u_0 există diverse metode. Noi vom utiliza o metodă expusă în lucrările anterioare [3], [4] care reduce problema mişcărilor supersonice permanente la o problemă de hidrodinamică plană şi poate fi deci aplicată cu multă uşurinţă după cum se va vedea în continuare.

La calculul potenţialului Φ_1 vom apela la formula lui Euler pentru $n = 1$,

$$\Phi_1 = x_1 (u_0 + y\, v_0), \tag{9}$$

v_0 putînd fi uşor determinat din relaţia de compatibilitate

$$dv_0 = -\frac{du_0}{y}, \tag{10}$$

cînd se cunoaşte viteza axială redusă u_0.

Ne propunem să studiem în continuare mişcarea oscilatorie a unei aripi avînd un bord de atac subsonic şi altul supersonic şi mişcarea oscilatorie a unei aripi avînd bordurile de atac supersonice.

3. ARIPĂ CU UN BORD DE ATAC SUBSONIC ŞI CELĂLALT SUPERSONIC

Vom considera pentru început, o aripă triunghiulară OA_1A_2 cu un bord de atac subsonic, suprafaţa OA_1A_2' avînd o mişcare oscilatorie armonică în jurul axei OG (fig. 2).

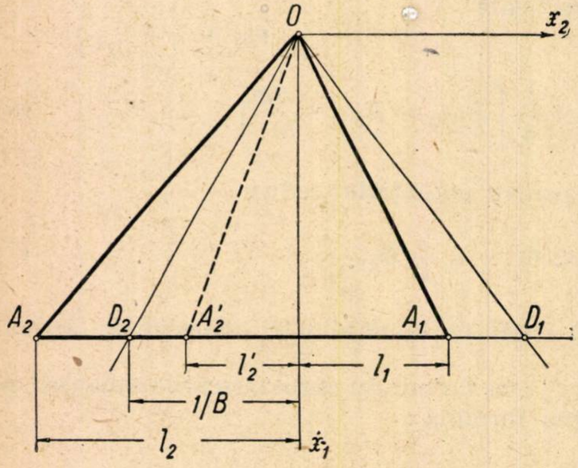


Fig. 2

În acest caz, tăietura OA_2' o asimilăm cu o muchie subsonică care face ca viteza verticală redusă β să aibă valoarea zero la stînga ei şi valoarea dată de formula (6) pe dreapta ei. De asemenea, considerăm că prin tăietura OA_2' nu există scurgere între extradosul şi intradosul aripii.

În această situaţie, expresia vitezei axiale de perturbaţie se obţine, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [3], prin însumarea contribuţiei bordului de atac subsonic şi muchiei ceea ce în planul $x = y + i\mathfrak{z}$ ne conduce la următoarele expresii :

$$\begin{aligned} u_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathcal{R}e\, \frac{2E_2}{\pi B} \frac{Bl_2'}{\sqrt{1-B^2 l_2'^2}} \Bigg[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1+l_2')(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2')}} + \\ + \frac{1-Bl_2'}{1+Bl_1} \frac{l_1}{l_2'} \sqrt{\frac{(l_1+l_2')(1+Bx)}{(1-Bl_2')(l_1-x)}} \Bigg], \end{aligned} \tag{11}$$

pentru mişcarea omogenă de ordinul unu şi respectiv

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = x_1 \mathcal{R}e \left[(A_0 + A_1 x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2')(1 + Bx)}{(1 + Bl_1')(x + l_2')}} + \right. \tag{12}$$

$$\left. + (C_0 + C_1 x) \sqrt{\frac{1 + Bx}{B(l_1 - x)}} \right],$$

pentru mişcarea omogenă de ordinul doi.

Constantele A_0, A_1, C_0 şi C_1 care apar în ultima formulă sînt definite de relaţiile

$$A_0 = \frac{2 l_2'}{\pi (1 - B^2 l_2'^2)^{3/2}} \left[l_2' E_1 + (2 - B^2 l_2'^2) \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2, \right], \tag{13}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi (1 - B^2 l_2'^2)^{3/2}} \left[B^2 l_2'^2 \cdot l_2' E_1 + \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2 \right], \tag{13'}$$

$$C_0 = - \frac{2 l_1}{3\pi (1 + Bl_1)^2 (1 - B^2 l_2'^2)} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2')}{1 + Bl_2'}} \left(C_{01} E_1 + \frac{1 + 2B^2}{B^2} C_{02} E_2 \right), \tag{13''}$$

$$C_1 = - \frac{2}{3\pi (1 + Bl_1)^2 (1 - B^2 l_2'^2)} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2')}{1 + Bl_2'}} \left(C_{11} E_1 + \frac{1 + 2B^2}{B^2} C_{12} E_2 \right), \tag{13'''}$$

în care am utilizat notaţiile

$$C_{01} = 2l_1 - l_2' + 4 Bl_2'^2 + Bl_1 l_2', \tag{14}$$

$$C_{02} = 3B^3 l_1 l_2'^2 + 5 B^2 l_2'^2 + 2 B^2 l_1 l_2' - 2Bl_1 + 4Bl_2' - 6, \tag{14'}$$

$$C_{11} = 2 Bl_1^2 + B^2 l_1^2 l_2' - 3 B^3 l_1^2 l_2'^2 - 2 B^2 l_1 l_2'^2 - Bl_1 l_2' - 3 Bl_2'^2, \tag{14''}$$

$$C_{12} = 3 + B^2 l_1^2 - B^3 l_1^2 l_2' - 2B^2 l_1 l_2' - B^3 l_1 l_2'^2 - 3Bl_2' - 3B^2 l_2'^2. \tag{14'''}$$

Pentru determinarea potenţialului mişcării omogene de ordinul unu Φ_1 urmînd calea indicată la punctul 2 se ajunge la relaţia

$$\Phi_1 = \mathcal{R}e \frac{2E_2}{\pi B} \frac{Bl_2'}{\sqrt{1 - B^2 l_2'^2}} x_1 \left[\left(1 + \frac{x}{l_2'} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2')(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)(x + l_2')}} + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) \frac{l_1}{l_2'} \frac{1 - Bl_2'}{1 + Bl_1} \sqrt{\frac{(l_1 + l_2')(1 + Bx)}{(1 - Bl_2')(l_1 - x)}} \right].$$

care este valabilă deoarece am pus $\mathcal{R}e$ înaintea ei, atît în cazul cînd muchia este subsonică cît şi atunci cînd este supersonică.

În cazul aripii cu un bord de atac subsonic este necesar să se ia în consideraţie şi forţa de succiune S_c normală pe bordul de atac şi a cărei componentă axială R_s micşorează rezistenţa la înaintare a aripii şi contribuie totodată la momentul de giraţie. În lucrarea noastră anterioară [2] am indicat modul de calcul al forţei de succiune, care este dată de expresia

$$S_c = \frac{\pi \rho \sqrt{1 - M_{n1}^2}}{\sin \chi_1} \int_0^{x_1} A_c^2 \, dx_1, \tag{16}$$

unde A_c este definit de relația

$$A_c = \frac{(u)_{x \to l_1}}{\cos \chi_1} \sqrt{r}\,. \tag{17}$$

În cazul aripii cu un bord de atac subsonic, viteza axială de perturbație în vecinătatea bordului de atac [2] are următoarea expresie :

$$(u)_{x \to l_1} \approx U_\infty e^{i\omega t} \left\{ \frac{2E_2}{\pi B} \frac{Bl_1}{\sqrt{1 + Bl_1}} \sqrt{\frac{l_1 + l_2'}{1 + Bl_2'}} \sqrt{x_1 \sin \chi_1} + \right.$$

$$\left. + i \frac{\lambda}{h}\left[(C_0 + C_1 l_1) \sqrt{\frac{1 + Bl_1}{B}} - \frac{2E_2}{\pi B^3} \frac{(1 + B^2)Bl_1}{\sqrt{1 + Bl_1}} \sqrt{\frac{l_1 + l_2'}{1 + Bl_2'}} \sqrt{\sin \chi_1}\, {x_1}^{3/2} \right\}\right] \frac{1}{\sqrt{r}}, \tag{18}$$

care introdusă în formula (16) prin intermediul relației (17) permite calcularea forței de succiune.

Vom considera acum că muchia OA_2' devine supersonică și coincide cu bordul de atac OA_2 $(l_2 = l_2')$.

Relațiile deduse pentru u_0, u_1, Φ_1 și viteza de perturbație $(u)_{x \to l_1}$ sînt valabile și în această situație.

Făcînd calculele și utilizînd notațiile indicate la punctul 1 sîntem conduși la următoarele expresii pentru coeficienții aerodinamici :

$$C_z = \frac{4}{B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left[\Theta_2 - \frac{\lambda}{3B^2\omega} \left(K_1 \frac{d\Theta_1}{dt} + K_2 \frac{d\Theta_2}{dt} \right) \right], \tag{19}$$

$$C_x = \frac{4}{B} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left[\Theta_2^2 - \frac{\lambda}{6B^2\omega} \left(2K_1 \Theta_2 \frac{d\Theta_1}{dt} + K_2 \frac{d\Theta_2^2}{dt} \right) \right] -$$

$$- \frac{16Bl_1}{\pi B(1 + Bl_2)} \sqrt{\frac{1 - Bl_1}{1 + Bl_1}} \left\{ \frac{1}{2} \Theta_2^2 - \frac{2\lambda}{9\omega} \frac{1}{(1 + Bl_1)(1 - B^2 l_2^2)} \left[(C_{01} + C_{11}) \frac{d\Theta_1}{dt} + \right.\right. \tag{20}$$

$$\left.\left. + \frac{1 + 2B^2}{B^2} (C_{02} + C_{12}) \frac{d\Theta_2}{dt} \right] \Theta_2 - \frac{\lambda}{3\omega} \frac{1 + B^2}{B^2} \frac{d\Theta_2^2}{dt} \right\},$$

$$C_l = -\frac{2}{3B^2(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left[K_3 \Theta_2 + \frac{\lambda}{4B^2\omega} \left(K_4 \frac{d\Theta_1}{dt} - K_5 \frac{d\Theta_2}{dt} \right) \right], \tag{21}$$

$$C_n = \frac{2}{3B^2(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left[K_3 \Theta_2^2 + \frac{\lambda}{8B^2\omega} \left(2K_4 \Theta_2 \frac{d\Theta_1}{dt} - K_5 \frac{d\Theta^2}{dt} \right) \right] +$$

$$+ \frac{2(1 + l_1^2)}{\pi(1 + Bl_2)} \sqrt{\frac{1 - Bl_1}{1 + Bl_1}} \left\{ \frac{8}{3} \Theta_2^2 + \frac{2(1 + B^2)}{B^2} \frac{\lambda}{\omega} \frac{d\Theta_2^2}{dt} - \right. \tag{22}$$

$$\left. - \frac{2\lambda}{\omega} \frac{1}{(1 + Bl_1)(1 - B^2 l_2^2)} \left[(C_{01} + C_{11}) \Theta_2 \frac{d\Theta_1}{dt} + \frac{1 + 2B^2}{2B^2} (C_{02} + C_{12}) \frac{d\Theta_2^2}{dt} \right] \right\},$$

$$C_m = \frac{\lambda}{9B^3\omega} \sqrt{\frac{B(l_1 + l_2)}{1 + Bl_2}} \left(K_1 \frac{d\Theta_1}{dt} + K_2 \frac{d\Theta_2}{dt} \right). \tag{23}$$

Constantele K_1, K_2, K_3, K_4 şi K_5 care apar în aceste expresii ale coeficienţilor aerodinamici, sînt definite de formulele

$$\left.\begin{aligned} K_1 = &- \frac{1}{6(1 - B^2 l_2^2)(l_1 + l_2)} \Big\{ 12\, B^2 l_2^2 - 3\,(1 + 2\, Bl_2 - Bl_1)\, B^3 l_2^3 - \\ &- \frac{B}{1 + Bl_1} [4\, Bl_1\, C_{01} + (3\, Bl_1 - 1)\, C_{11}] \Big\}, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} K_2 = 3 + 2\, B^2 &- \frac{1 + 2B^2}{6(1 - B^2 l_2^2) B(l_1 + l_2)} \Big\{ 12\, Bl_2\,(2 - B^2 l_2^2) - \\ &- 3\,(1 + 2\, Bl_2 - Bl_1) - \frac{1}{1 + Bl_1} [4\, Bl_1\, C_{01} + (3\, Bl_1 - 1)\, C_{11}] \Big\}, \end{aligned}\right. \tag{24'}$$

$$K_3 = 1 - 3\, Bl_1 + 2\, Bl_2 \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} K_4 = &- \frac{1}{2(1 - B^2 l_2^2)(l_1 + l_2)} \Big\{ B^3 l_2^3\,(3\, B^2 l_1^2 + 8\, B^2 l_2^2 - 4\, B^2 l_1 l_2 + \\ &+ 4\, Bl_2 - 2\, Bl_1 + 3) + 6\,(Bl_1 - 2\, Bl_2 - 1)\, B^2 l_2^2 - \\ &- \frac{B}{1 + Bl_1} [Bl_1\,(6\, Bl_1 - 2)\, C_{01} + (1 - 2\, Bl_1 + 5\, B^2 l_1^2) C_{11}] \Big\}, \end{aligned}\right. \tag{25'}$$

$$\left.\begin{aligned} K_5 = (4 + 3\, B^2)\, K_3 &+ \frac{1 + 2B^2}{2(1 - B^2 l_2^2) B(l_1 + l_2)} \Big\{ (3B^2 l_1^2 + 8B^2 l_2^2 - 4B^2 l_1 l_2 + \\ &+ 4\, Bl_2 - 2Bl_1 + 3) + 6Bl_2\,(2 - B^2 l_2^2)(Bl_1 - 2Bl_2 - 1) - \\ &- \frac{1}{1 + Bl_1} [Bl_1(6Bl_2 - 1)C_{02} + (1 - 2Bl_1 + 5B^2 l_1^2)\, C_{12}] \Big\}. \end{aligned}\right. \tag{25''}$$

4. ARIPĂ TRIUNGHIULARĂ CU BORDURI DE ATAC SUPERSONICE

Vom considera o aripă OA_1A_2 avînd bordurile OA_1 şi OA_2 supersonice. şi două tăieturi OA_1' şi OA_2' astfel încît suprafaţa $OA_1'A_2'$ să aibă o mişcarc oscilatorie armonică în jurul axei OG (fig. 3), viteza verticală redusă pe suprafaţa $OA_1'A_2'$ fiind dată de relaţia (6) ca şi în aplicaţia precedentă.

Vom presupune, de asemenea, că prin cele două tăieturi, OA_1' şi OA_2', nu există scurgere între extrados şi intrados, deci le vom putea asimila cu două muchii care fac trecerea

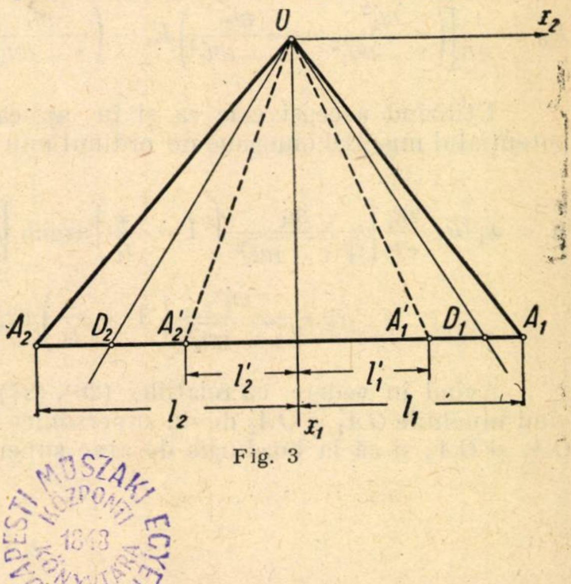


Fig. 3

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

de la viteza verticală redusă β la zero (cazul muchiei OA_1') respectiv zero la β (cazul muchiei OA_2').

Însumînd contribuţiile celor două muchii, aşa cum s-a arătat în lucrările anterioare [3], [4], se găsesc pentru vitezele axiale reduse ale celor două mişcări omogene de ordinul unu şi doi, expresiile

$$u_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathcal{R}e\, \frac{2E_2}{\pi B}\left[\frac{Bl_1'}{\sqrt{1 - B^2 l_1'^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1')(1 - Bx)}{2B(l_1' - x)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{Bl_2'}{\sqrt{1 - B^2 l_2'^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2')(1 + Bx)}{2B(l_2' + x)}}\right], \tag{26}$$

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} = x_1\, \mathcal{R}e\left[(A_0 + A_1 x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1')(1 - Bx)}{2B(l_1' - x)}} + \right.$$
$$\left. + (C_0 + C_1 x) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2')(1 + Bx)}{2B(l_2' + x)}} + D_0\sqrt{1 - B^2 x^2}\right], \tag{27}$$

unde constantele A_0, A_1, C_0, C_1 şi D_0 sînt definite de relaţiile

$$A_0 = -\frac{2l_1'}{\pi(1 - B^2 l_1'^2)^{3/2}}\left[l_1' E_1 - (2 - B^2 l_1'^2)\frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2\right], \tag{28}$$

$$A_1' = \frac{2}{\pi(1 - B^2 l_1'^2)^{3/2}}\left[B^2 l_1'^2 \cdot l_1' E_1 - \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2\right], \tag{28$'$}$$

$$C_0 = \frac{2 l_2'}{\pi(1 - B^2 l_2'^2)^{3/2}}\left[l_2' E_1 + (2 - B^2 l_2'^2)\frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2\right], \tag{28$''$}$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi(1 - B^2 l_2'^2)^{3/2}}\left[B^2 l_2'^2 \cdot l_2' E_1 + \frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2\right], \tag{28$'''$}$$

$$D_0 = \frac{1}{\pi B}\left[\left(\frac{Bl_1'^2}{1 - B^2 l_1'^2} - \frac{Bl_2'}{1 - B^2 l_2'^2}\right)E_1 - \left(\frac{Bl_1'}{1 - B^2 l_1'^2} + \frac{Bl_2'}{1 - B^2 l_2'^2}\right)\frac{1 + 2B^2}{B^2} E_2\right]. \tag{28^{IV}}$$

Utilizînd aceeaşi cale ca şi în aplicaţia precedentă găsim pentru potenţialul mişcării omogene de ordinul unu Φ_1 expresia,

$$\Phi_1 = x_1\, \mathcal{R}e\, \frac{2E_2}{\pi B}\left[\frac{Bl_1'}{\sqrt{1 - B^2 l_1'^2}}\left(1 - \frac{x}{l_1'}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1')(1 - Bx)}{2B(l_1' - x)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{Bl_2'}{\sqrt{1 - B^2 l_2'^2}}\left(1 + \frac{x}{l_2'}\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2')(1 + Bx)}{2B(l_2' + x)}}\right]. \tag{29}$$

Avînd în vedere că relaţiile (26), (27) şi (29) sînt valabile şi în cazul cînd muchiile OA_1' şi OA_2' devin supersonice şi coincid cu bordurile de atac OA_1 şi OA_2 şi că la bordurile de atac supersonice nu există forţe de succiune sîntem conduşi după efectuarea calculelor corespunzătoare (punctul 1) la următoarele formule pentru coeficienţii aerodinamici:

$$C_z = \frac{4}{B}\left\{ \Theta_2 + \frac{\lambda}{3B^2\omega}\left[(B^2 l_2 - B^2 l_1)\frac{d\,\Theta_1}{dt} + (2B^2 - 1)\frac{d\,\Theta_2}{dt}\right]\right\}, \tag{30}$$

$$C_x = \frac{4}{B}\left\{ \Theta_2^2 + \frac{\lambda}{3B^2\omega}\left[(B^2 l_2 - B^2 l_1)\Theta_2\frac{d\,\Theta_1}{dt} + \left(B^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{d\,\Theta_2^2}{dt}\right]\right\}, \tag{31}$$

$$C_l = \frac{4}{3B}\,\frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}\left\{\Theta_2 - \frac{\lambda}{4B^2\omega}\left[\frac{2(B^3 l_1^2 - B^3 l_1 l_2 + B^3 l_2^2)}{B(l_1 - l_2)}\,\frac{d\,\Theta_1}{dt} + (1 - 3B^2)\frac{d\,\Theta_2}{dt}\right]\right\}, \tag{32}$$

$$C_n = -\frac{4}{3B}\,\frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}\left\{\Theta_2^2 - \frac{\lambda}{4B^2\omega}\left[\frac{2(B^3 l_1^2 - B^3 l_1 l_2 + B^3 l_2^2)}{B(l_1 - l_2)}\,\Theta_2\,\frac{d\Theta_1}{dt} + \frac{1 - 3B^2}{2}\,\frac{d\,\Theta_2^2}{dt}\right]\right\}, \tag{33}$$

$$C_m = \frac{\lambda}{9B^3\omega}\left[(B^2 l_2 - B^2 l_1)\frac{d\,\Theta_1}{dt} + (2B^2 - 1)\frac{d\,\Theta_2}{dt}\right]. \tag{34}$$

Dacă aripa este simetrică, făcînd în relaţiile de mai sus $l_1 = l_2$, se obţin coeficienţii aerodinamici corespunzători acestei situaţii.

Spre exemplu, pentru coeficientul de portanţă se găseşte relaţia

$$C_z = \frac{4\,\Theta_2}{B} - \frac{4\,\lambda}{3B^3\omega}(1 - 2B^2)\frac{d\,\Theta_2}{dt}. \tag{35}$$

Vom remarca că această expresie este diferită de cea care se obţine pentru aripa de anvergură infinită (avînd o mişcare oscilatorie în jurul bordului de atac)

$$C'_z = \frac{4\,\Theta_2}{B} - \frac{2\lambda}{B^3\omega}(1 - B^2)\frac{d\,\Theta_2}{dt}, \tag{36}$$

aşa cum se întîmplă în cazul mişcărilor permanente cînd coeficientul de portanţă al aripii triunghiulare cu borduri de atac supersonice este identic cu cel găsit pentru aripa de anvergură infinită, care are aceeaşi incidenţă.

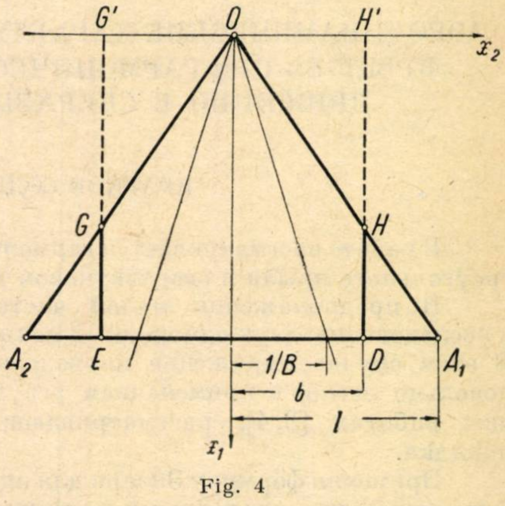


Fig. 4

Pentru a justifica această deosebire vom considera o aripă triunghiulară OA_1A_2 cu bordurile de atac supersonice, simetrică în raport cu axa Ox_1, avînd o mişcare oscilatorie armonică în jurul axei Ox_2.

În acest caz, viteza verticală redusă se obţine din formula (6) în care se face $E_1 = 0$.

Vitezele axiale reduse u_0 şi u_1 şi potenţialul redus sînt definite tot de formulele (26), (27) şi (29) în care se face de asemenea $E_1 = 0$.

Expresia coeficientului de portanţă referitor la suprafaţa $OHDEG$ $(1/B < b < l)$ rezultă după calcule laborioase

$$\begin{aligned} Bb\left(2-\frac{b}{l}\right)C_z = {} & \frac{4\,\Theta_2}{B}\frac{Bl}{\sqrt{B^2l^2-1}}\left[Bb\left(2-\frac{b}{l}\right)+\sqrt{B^2l^2-1}-Bl\right]- \\ & -\frac{4\lambda}{B^3\omega}\frac{d\,\Theta_2}{dt}\left\{\frac{2}{3}\frac{Bl}{\sqrt{B^2l^2-1}}\left[\frac{3}{2}Bb\left(1-\frac{1}{3}\frac{b^2}{l^2}\right)+\sqrt{B^2l^2-1}-\right.\right. \\ & \left.-Bl\right]\left(1-B^2+\frac{1+2B^2}{B^2l^2-1}\right)+\frac{Bl}{3\sqrt{B^2l^2-1}}\left[Bl-\sqrt{B^2l^2-1}+\right. \qquad (37) \\ & \left.\left.+B\frac{b^2}{l}\left(2\frac{b}{l}-3\right)\right]\left(1+\frac{1+2B^2}{B^2l^2-1}\right)-\frac{1+2B^2}{B^2}\frac{Bl}{B^2l^2-1}\right\}. \end{aligned}$$

Făcînd în această formulă $b = l$ se obţine coeficientul de portanţă al aripii triunghiulare (35).

Dacă $l \to \infty$ punctele H şi G tind către H' şi G' iar coeficientul de portanţă obţinut este cel al aripii de anvergură infinită (36).

Primită la redacţie la 30 martie 1959

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ В СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе рассматривается гармоническое колебательное движение треугольного крыла в сверхзвуковом режиме.

В предположении малой частоты колебания задача сводится к исследованию двух однородных движений первого и второго порядков. В этом случае выражение приведенных осевых скоростей выводится довольно легко, с применением результатов, полученных в предыдущих работах [3, 4], рассматривающих конические течения высшего порядка.

Применяя формулу Эйлера для однородных функций и соотношения совместимости, определяется потенциал конического движения. В случае дозвуковой передней кромки крыла учитывается и подсосная сила.

Далее рассматривается гармоническое колебательное движение треугольного крыла, имеющего либо одну дозвуковую и другую сверхзвуковую передние кромки, либо обе сверхзвуковые передние кромки.

Для этих случаев вычислены выражения аэродинамических коэффициентов подъемной силы, лобового сопротивления, кренящего момента, вращательного момента и момента тангажа.

В случае треугольного крыла с передними сверхзвуковыми кромками определяется также и выражение коэффициента подъемной силы отрезка крыла и указывается затем, как можно из этой формулы вывести либо коэффициент подъемной силы треугольного крыла, либо коэффициент подъемной силы крыла бесконечного размаха.

CARACTÉRISTIQUES AÉRODYNAMIQUES DES AILES TRIANGULAIRES, EN MOUVEMENT OSCILLATOIRE, HARMONIQUE, EN RÉGIME SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

On étudie dans ce travail le mouvement oscillatoire, harmonique, en régime supersonique, d'une aile triangulaire.

Dans l'hypothèse que la fréquence du mouvement est petite, le problème est ramené à l'étude de deux mouvements homogènes d'ordre un et deux. Dans cette situation, les expressions des vitesses axiales réduites sont déduites facilement, en appliquant les résultats obtenus dans les travaux antérieurs[3, 4], qui traitent des écoulements coniques d'ordre supérieur.

A l'aide de la formule d'Euler pour les fonctions homogènes et des relations de compatibilité, le potentiel du mouvement conique est ensuite déterminé. Pour le cas du bord d'attaque subsonique, on tient également compte de la force de succion.

L'étude s'attache ensuite au mouvement oscillatoire harmonique d'une aile triangulaire ayant soit un bord d'attaque subsonique et l'autre supersonique, soit les deux bords d'attaque supersoniques.

Pour ces cas, on a calculé les expressions des coefficients aérodynamiques de portance, traînée de portance, moment de roulis, moment de giration et moment de tangage.

Pour une aile triangulaire à bords d'attaque supersoniques on a déterminé, en outre, l'expression du coefficient de portance, pour un tronçon d'aile.

Pour finir, on indique la manière d'obtenir, à partir de cette formule, soit le coeficient de portance de l'aile triangulaire, soit le coefficient de portance de l'aile d'envergure infinie.

BIBLIOGRAFIE

1. JOHN W. MILES, *On Harmonic Motion on Supersonic Speeds.* Journ. Aeron. Sci., **16**, 378 (1949).
2. E. CARAFOLI, S. SANDULESCU, *Oscillations harmoniques des ailerons de forme générale en régime supersonique.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, *6* (1958).
3. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Academiei R.P.R., **II**, *9—10*, 629 (1952).
4. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *1* (1957).

PIERDERI DE ENERGIE MINIME LA AMESTECUL A DOI CURENȚI SUB PRESIUNE

DE

S. HÎNCU *)

Pierderile de energie la amestecul a doi curenți sub presiune în condiții geometrice date pot fi calculate pornind de la ecuațiile integrale ale mișcării fluidelor : ecuația energiei, ecuația cantității de mișcare și ecuația conservării masei.

Aplicarea acestor ecuații este însoțită de admiterea unor ipoteze simplificatoare cu privire la repartiția presiunilor pe suprafața de control aleasă.

În cazul a doi curenți secanți sau paraleli concentrici în conducte sub presiune, formulele teoretice ce se obțin dau valori pentru pierderile de energie la amestec apropiate de valorile obținute experimental [1], [2], [3].

Studiul pierderilor de energie la amestecul a doi curenți sub presiune a constituit o preocupare de seamă în special pentru acei cercetători care s-au ocupat cu calculul funcționării injectoarelor și a ramificațiilor de conducte (Kamenev, Taliev, Zeiner, Bergeron ș.a.).

Problema importantă care se pune la funcționarea injectoarelor și a ramificațiilor de conducte este determinarea acelor condiții care conduc la pierderi de energie la amestecul curenților, minime.

Încercări de a rezolva această problemă se întîlnesc la mai toți cercetătorii citați. Considerăm însă că felul cum a fost rezolvată această problemă, pornind de la o expresie determinată a pierderilor de energie la amestecul a doi curenți sub presiune, nu corespunde schemei reale de mișcare a fluidelor.

Ne ocupăm de cele două scheme de mișcare a fluidelor :

a) curenți secanți,

b) curenți paraleli.

---

*) Institutul de studii și cercetări hidrotehnice, București.

a. Curenţi secanţi

Notăm cu ρ — masa specifică, ω — aria secţiunii, v — viteza şi p — presiunea caracteristică fluidului în tronsonul respectiv.

Admiţînd ca şi Kamenev, Zeiner ş.a. suprafaţa de control suprafaţa definită în tronsonul 3 de pereţii conductei şi de secţiunile *ab* şi *cd* (*cd* se găseşte la o distanţă suficient de mare faţă de *ab*) şi neglijînd frecarea de pereţii conductei putem scrie următoarele ecuaţii ale mişcării:

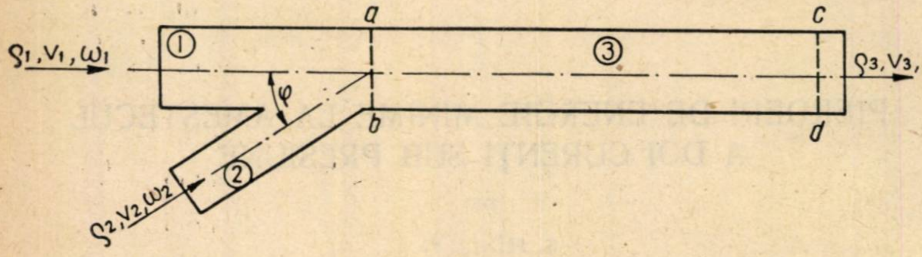


Fig. 1

ecuaţia energiei

$$E = \rho_1 \omega_1 \frac{v_1^3}{2} + \rho_2 \omega_2 \frac{v_2^3}{2} - \rho_3 \omega_3 \frac{v_3^3}{2} + \omega_3 v_3 (p_x - p_y), \tag{1}$$

unde E este energia ce se transformă în căldură în unitate de timp, pe care noi, folosind terminologia obişnuită, însă nu tocmai potrivită, o numim pierdere de energie;

ecuaţia cantităţii de mişcare

$$\rho_3 \omega_3 v_3^2 - \rho_1 \omega_1 v_1^2 - \rho_2 \omega_2 v_2^2 \cos \varphi = (p_x - p_y)\, \omega_3, \tag{2}$$

unde φ este unghiul dintre direcţiile celor doi curenţi secanţi;

ecuaţia conservării masei

$$\rho_1 \omega_1 v_1 + \rho_2 \omega_2 v_2 = \rho_3 \omega_3 v_3; \tag{3}$$

ecuaţia geometrică

$$\omega_1 = \omega_3, \tag{4}$$

unde ρ_3 are expresia

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 \omega_1 v_1 + \rho_2 \omega_2 v_2}{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2}. \tag{5}$$

În plus notăm

$$\eta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Pentru viteza v_3 avem relaţia

$$v_3 = v_1 + \eta v_2. \tag{6}$$

Înlocuind pe (2) în (1), obţinem

$$E = \rho_1 \omega_1 \frac{v_1^3}{2} + \rho_2 \omega_2 \frac{v_2^3}{2} + \rho_3 \omega_3 \frac{v_3^3}{2} - v_3 (\rho_1 \omega_1 v_1^2 + \rho_2 \omega_2 v_2^2 \cos \varphi) \tag{7}$$

sau sub altă formă,

$$E = \rho_1 \omega_1 v_1 \frac{(v_1 - v_3)^2}{2} + \rho_2 \omega_2 v_2 \frac{(v_2 - v_3)^2}{2} + \rho_2 \omega_2 v_2^2 v_3 (1 - \cos \varphi). \tag{8}$$

Expresia (7) constituie relaţia de bază a lui P. N. Kamenev [1] pentru analiza teoretică a pierderilor de energie la amestecul a două fluide secante.

Expresia (8) reprezintă o formă generalizată a relaţiei date de Zeiner pentru pierderile de energie la amestec în cazurile $\cos \varphi = 0$ şi $\cos \varphi = 1$.

P. N. Kamenev [1], V. N. Taliev [2], ca şi Bergeron citat în [1] şi-au propus să găsească minimul expresiei (7) sau (8) în raport cu variabila v_3 neglijînd relaţiile (3) şi (4), care supun relaţiile (7) sau (8) la două legături suplimentare.

În realitate, se poate pune problema numai a unui minimum condiţionat de relaţiile (3) şi (4).

Introducînd în expresia (7) condiţiile (3) şi (4), obţinem pentru energia transformată în căldură relaţia

$$\frac{E}{\rho_1 \omega_1} = L = \frac{v_1^3}{2} + \alpha\eta \frac{v_2^3}{2} + (v_1 + \alpha\eta\, v_2) \frac{(v_1 + \eta v_2)^2}{2} - (v_1 + \eta v_2)(v_1^2 + \\ + \alpha\, \eta\, v_2^2 \cos\varphi). \tag{9}$$

Ne propunem să găsim minimul absolut al funcţiei L pe variabilele v_1 şi v_2. $\frac{\partial L}{\partial v_1} = 0$ conduce la ecuaţia

$$v_1 v_2 + v_2^2 \left(\frac{\eta}{2\alpha} + \eta - \cos \alpha \right) = 0, \tag{10}$$

care dă soluţii pentru viteza în tronsonul 2

$$v_2 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \cos \varphi - \frac{\eta}{2\alpha} - \eta. \tag{12}$$

Ambele soluții sînt reale din punct de vedere fizic.

$\frac{\partial L}{\partial v_2} = 0$ conduce la ecuația

$$v_1^2 + 2\, v_1 v_2 \left(2\eta + \frac{\eta}{\alpha} - 2 \cos \varphi\right) + 3 v_2^2 \,(1 + \eta^2 - 2\eta \cos \varphi) = 0, \qquad (13)$$

care dă următoarele soluții :

$$\frac{v_1}{v_2} = 2 \cos \varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(2 \cos\varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right)^2 - 3\,(1 + \eta^2 - 2\eta \cos\varphi)}. \qquad (14)$$

Condițiile care trebuie îndeplinite pentru ca soluțiile să fie compatibile și reale sînt

$$\left(2 \cos \varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right)^2 - 3\,(1 + \eta^2 - 2\eta \cos \varphi) > 0, \qquad (15)$$

$$2 \cos \varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(2 \cos \varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right)^2 - 3\,(1 + \eta^2 - 2\eta \cos \varphi)} = \\ = \cos \varphi - \frac{\eta}{2\alpha} - \eta. \qquad (16)$$

Pentru ca să avem minimum absolut va trebui de asemenea ca în punctele v_1 și v_2 date de relațiile (12) și (14) să fie îndeplinite simultan inegalitățile

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2} > 0, \qquad (17)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial v_1\, \partial v_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_2\, \partial v_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial v_2^2} \end{vmatrix} > 0. \qquad (18)$$

Condiția (18) impune ca

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_2^2} > 0. \qquad (19)$$

Condițiile (15) și (16) se mai pot scrie respectiv

$$1 + \eta^2 - 2\eta \cos \varphi < \frac{1}{3}\left(2 \cos \varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right)^2, \qquad (15')$$

$$1 + \eta^2 - 2\eta \cos \varphi = \frac{1}{4}\left(2 \cos \varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right)^2, \qquad (16')$$

ceea ce, evident, sînt compatibile.

Efectuînd calculele, condițiile (17) și (19) se prezintă sub forma

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2} = \frac{\alpha\eta v_1}{2} > 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_2^2} = \alpha\eta v_1\left(2\eta - 2\cos\varphi + \frac{\eta}{\alpha}\right) + 3\,\alpha\eta v_2\,(1 + \eta^2 - 2\eta\cos\varphi) > 0. \tag{21}$$

Deoarece $v_1 > 0$ rezultă că $\frac{\partial^2 L}{\partial v_1^2} > 0$.

Dacă condiția (16′) este îndeplinită se obține

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_2^2} = 2\alpha\eta\,\frac{v_1^2}{v_2} > 0 \tag{22}$$

deoarece $v_2 > 0$.

Condiția (16′) impune o legătură funcțională între raportul η și unghiul de întîlnire a celor doi curenți φ

$$\eta = \frac{2\alpha}{4\alpha + 1}\left(\cos\varphi + \sqrt{1 + 4\alpha\sin^2\varphi}\right). \tag{23}$$

În acest caz relația (12) devine

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\alpha}{4\,\alpha + 1}\cos\varphi - \frac{2\alpha + 1}{4\alpha + 1}\sqrt{1 + 4\,\alpha\sin^2\varphi}, \tag{24}$$

incompatibilă cu condițiile $v_1 > 0$ și $v_2 > 0$.

Prin urmare nu se poate pune problema unui minimum absolut al pierderilor de energie la amestecul a doi curenți sub presiune. Se poate pune problema numai a unui minimum relativ al funcției L în raport cu variabilele v_1 sau v_2. Minimul relativ al funcției L în raport cu variabila v_1, considerînd pe v_2 parametru, se obține pentru raportul $k = \frac{v_1}{v_2}$ dat de relația (12), în care se subînțelege

$$\eta < \frac{2\,\alpha\cos\varphi}{2\,\alpha + 1}. \tag{25}$$

Minimul relativ al funcției L în raport cu variabila v_2, considerînd pe v_1 drept parametru, se obține pentru una din valorile raportului $\frac{v_1}{v_2}$ date de relația (14), respectînd condițiile (15) și (19).

Deoarece

$$\sqrt{\left(2\cos\varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right)^2 - 3\,(1 + \eta^2 - 2\eta\cos\varphi)} < \left|2\cos\varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha}\right| \tag{26}$$

este necesar să aibă loc relația

$$2\cos\varphi - 2\eta - \frac{\eta}{\alpha} > 0\,. \tag{27}$$

Condiţia (19) în acest caz se scrie

$$\frac{v_1}{v_2} < 3\,\frac{1+\eta^2-2\,\eta\cos\varphi}{2\cos\varphi-2\,\eta-\dfrac{\eta}{\alpha}}, \tag{28}$$

sau

$$2\cos\varphi-2\eta-\frac{\eta}{\alpha}\pm\sqrt{\left(2\cos\varphi-2\eta-\frac{\eta}{\alpha}\right)^2-3\,(1+\eta^2-2\eta\cos\varphi)} < \frac{3\,(1+\eta^2-2\,\eta\cos\varphi)}{2\cos\varphi-2\,\eta-\dfrac{\eta}{\alpha}}. \tag{29}$$

Ţinînd seama de (15) şi (27) minimul relativ se obţine pentru următoarea valoare a raportului $k=\frac{v_1}{v_2}$

$$k_2'=\frac{v_1}{v_2}=2\cos\varphi-2\eta-\frac{\eta}{\alpha}-\sqrt{\left(2\cos\varphi-2\eta-\frac{\eta}{\alpha}\right)^2-3\,(1+\eta^2-2\eta\cos\varphi)}\,. \tag{30}$$

Pentru

$$k_2''=\frac{v_1}{v_2}=2\cos\varphi-2\eta-\frac{\eta}{\alpha}+\sqrt{\left(2\cos\varphi-2\eta-\frac{\eta}{\alpha}\right)^2-3\,(1+\eta^2-2\eta\cos\varphi)},$$

funcţia L are un maximum relativ.

Locul geometric al tuturor punctelor care dau minimum relativ al funcţiei E în spaţiul E, v_1, v_2 se obţine introducînd valorile k_1 şi k_2' în expresia

$$E=\rho_1\omega_1 v_1^3\left\{\frac{\eta^2}{2}\,k+\frac{\alpha\eta}{2}\,[k-(1-\eta)]^2+\alpha\,\eta\,(k+\eta)\,(1-\cos\varphi)\right\}. \tag{31}$$

Pentru ca pierderile de energie la amestec să fie minime, P. N. Kamenev [1] consideră suficient să aibă loc relaţia

$$v_3=\frac{\rho_1\omega_1 v_1^3+\rho_2\,\omega_2\,v_2^3\cos\varphi}{\rho_1\omega_1 v_1+\rho_2\omega_2 v_2}, \tag{32}$$

pe care o obţine din condiţia de minimum a funcţiei (7) în raport cu v_3, considerînd pe v_3 variabilă independentă.

Cum între vitezele v_1, v_2 şi v_3 există relaţia (6) independent de consideraţiile teoretice ce se fac, rezultă pentru raportul optim k propus de Kamenev expresia

$$k_p=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\alpha\,(\cos\varphi-\eta)}{1+\alpha} \tag{33}$$

diferită de (12) sau (31). Pentru această valoare a raportului k şi pentru o viteză v_1 sau v_2 dată, evident, pierderile de energie la amestec sînt diferite de cele minime.

Dacă între vitezele v_1, v_2, v_3 are loc relaţia (32), pe lungimea de amestec între secţiunile ab şi cd presiunea statică are aceeaşi valoare $p_x = p_y$. Acest fapt i-a determinat pe cercetătorii amintiţi să considere că pierderile de energie minime la amestecul a doi curenţi se obţin în cazul în care presiunea statică se menţine constantă pe toată lungimea de amestec.

În realitate, în cazul pierderilor de energie minime, diferenţa $p_x - p_y$ are expresia

$$p_x - p_y = \rho_1 \eta v_2^2 \left[k\,(1+\alpha) - \alpha\,(\cos\varphi - \eta)\right], \tag{34}$$

unde k are valoarea k_1 sau k_2'.

Egalitatea $p_x - p_y = 0$ în cazul pierderilor de energie minime impune o legătură între $\cos\varphi$, η şi α, care rezultă din $k_1 = k_p$ sau $k_2' = k_p$.

În practică, în majoritatea cazurilor se pune problema pierderilor de energie la amestec pe traseul 1—3 sau pe traseul 2—3. Aplicînd aceleaşi teoreme obţinem pentru pierderile de energie la amestec în unitate de timp

$$E_{1-3} = \frac{\rho_1}{2}\,\eta\,\left[v_1^2\, v_2\,(1+\alpha) - \alpha v_1 v_1^2\,(2\cos\varphi - \eta)\right]\omega_1, \tag{35}$$

pe traseul 1—3 şi

$$E_{2-3} = \frac{\rho_1}{2}\left[v_1 v_2^2\,(1+\alpha)\,\eta - v_1^2 v_2 + \alpha v_2^3\,(1+\eta^2 - 2\eta\cos\varphi)\right]\omega_2, \tag{36}$$

pe traseul 2—3.

Egalînd cu zero derivatele de ordinul I ale expresiilor E_{1-3} şi E_{2-3} în raport cu v_1 şi v_2, găsim următoarele valori caracteristice ale raportului $\frac{v_1}{v_2}$:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha\,(2\cos\varphi - \eta)}{2\,(1+\alpha)} \qquad \left(\frac{\partial E_{1-3}}{\partial v_1} = 0\right), \tag{37}$$

pentru care funcţia E_{1-3} are un minimum relativ în raport cu v_1 ($v_2 =$ = const.);

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\alpha\,(2\cos\varphi - \eta)}{1+\alpha} \qquad \left(\frac{\partial E_{1-3}}{\partial v_2} = 0\right), \tag{38}$$

pentru care funcţia E_{1-3} are un maximum relativ în raport cu v_2.

Apoi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\eta}{2}\,(1+\alpha) \qquad \left(\frac{\partial E_{2-3}}{\partial v_1} = 0\right), \tag{39}$$

pentru care funcția E_{2-3} are un maximum relativ în raport cu v_1 ($v_2 =$ $=$ const.), și

$$\frac{v_1}{v_2} = \eta\,(1+\alpha) + \sqrt{\eta^2\,(1+\alpha)^2 + 3\alpha\,(1+\eta^2 - 2\eta\cos\varphi)} \quad \left(\frac{\partial E_{2-3}}{\partial v_2} = 0\right), \tag{40}$$

pentru care funcția E_{2-3} are un minimum relativ în raport cu v_2 ($v_1 =$ $=$ const.).

Importante sînt valorile raportului $\dfrac{v_1}{v_2}$ pentru care pierderile de energie la amestec sînt egale cu zero pe unul din cele două trasee. Avem $E_{1-3} = 0$, pentru

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha\,(2\cos\varphi - \eta)}{1+\alpha}, \tag{41}$$

și $E_{2-3} = 0$, pentru

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\eta}{2}\,(1+\alpha) + \sqrt{\frac{\eta^2}{4}\,(1+\alpha)^2 + \alpha\,(1+\eta^2 - 2\eta\cos\varphi)}. \tag{42}$$

În plus $E_{1-3} = 0$ și pentru $v_2 = 0$.

Se observă că în cazurile în care $E_{1-3} = 0$, se anulează și diferența de presiune $p_x - p_y$ dată de relația (34), expresia (41) fiind identică cu expresia (34). Prin urmare, presiunea statică în lungul lungimii de amestec păstrează o valoare constantă numai în cazul în care pierderile de energie la amestec pe traseele 1—3 sînt nule.

Pornind de la expresiile (35) și (36) se pot defini coeficienții pierderilor de sarcină la amestec, raportați la presiunea dinamică corespunzătoare tronsonului 3 în felul următor :

$$\xi_{1-3} = \frac{E_{1-3}}{\omega_1 v_1 \dfrac{\rho_3 v_3^2}{2}} = \frac{k\,(1+\alpha)\,\eta - \alpha\eta\,(2\cos\varphi - \eta)}{(k+\alpha\eta)\,(k+\eta)}, \tag{43}$$

$$\xi_{2-3} = \frac{E_{2-3}}{\omega_2 v_2 \dfrac{\rho_3 v_3^2}{2}} = \frac{k\,(1+\alpha)\,\eta - k^2 + \alpha\,(1+\eta^2 - 2\,\eta\cos\varphi)}{(k+\alpha\eta)\,(k+\eta)}, \tag{44}$$

unde $k = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Valorile coeficienților ξ_{1-3} și ξ_{2-3} nu diferă de cele obținute de Kamenev și Taliev. Este interesant de menționat faptul că pentru calculul acestor coeficienți, Kamenev consideră pierderile de sarcină la amestec ca o sumă a două pierderi de sarcină : una de amestec minime cu viteza v_3' dată de relația (32) și una de schimbare de viteză de la v_3' la v_3. Dacă pierderile de sarcină de schimbare de viteză de la v_3' la v_3 sînt

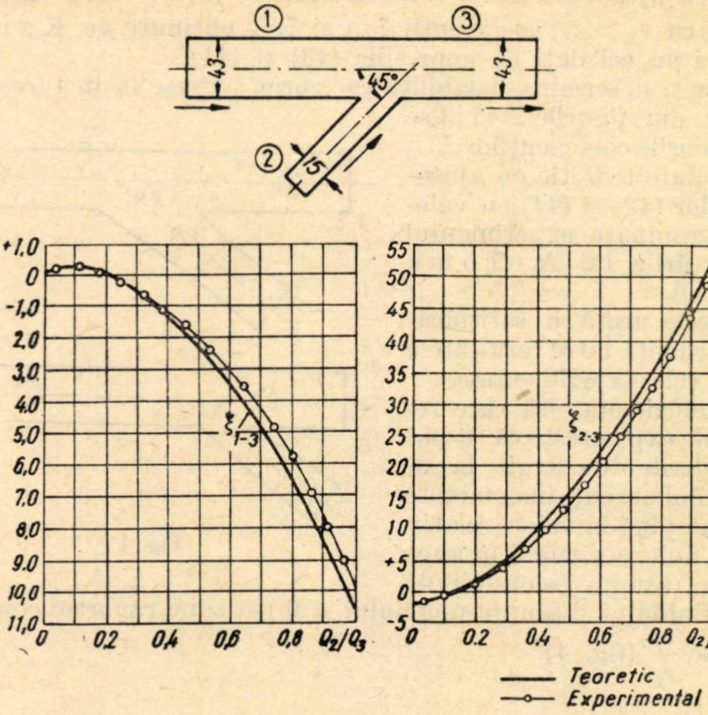

①
③
43
45°
43
②
15
+1,0
0
-1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
8,0
9,0
10,0
11,0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
Q2/Q3
ξ_{1-3}
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
+5
0
-5
0
0,2
0,4
0,6
0,8
Q2/Q3
ξ_{2-3}
Teoretic
Experimental

Fig. 2

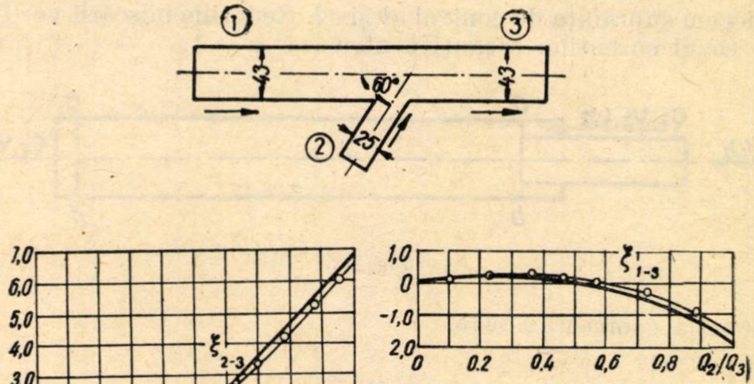

①
③
43
60°
43
②
25
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2.0
1.0
0
-1.0
0
0,2
0.4
0,6
0,8
Q2/Q3
ξ_{2-3}
1,0
0
-1,0
2,0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
Q2/Q3
ξ_{1-3}
Teoretic
Experimental

Fig. 3

exprimate cu ajutorul formulei Borda-Karnot (acest lucru fiind posibil numai pentru $v_3 > v_3'$) coeficienții ξ_{1-3} și ξ_{2-3} obținuți de Kamenev sînt identici cu cei dați de expresiile (43) și (44).

Pentru a determina valabilitatea teoriei expuse în lucrarea de față în graficele din figurile 2 și 3 se compară valorile coeficienților ξ_{1-3} și ξ_{2-3} calculate teoretic cu ajutorul formulelor (43) și (44) cu valorile lor determinate experimental după încercările lui A. Toma (citate în [1]).

Graficele arată o satisfăcătoare concordanță între rezultatele teoretice și cele experimentale.

O concluzie practică care rezultă din cele expuse este că se pot reduce pierderile de energie la amestecul a doi curenți în conducte sub presiune pînă la valori relativ minime sau nule, acționînd în anumite limite asupra secțiunii de scurgere a fluidului și asupra unghiului φ și realizînd raportul corespunzător de viteze $\frac{v_1}{v_2}$ (fig. 4).

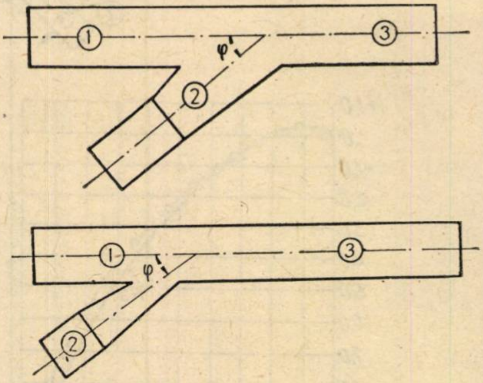


Fig. 4

b. **Curenți paraleli** (fig. 5)

Alegem suprafața de control *ab* și *cd*. Ecuațiile mișcării vor fi aceleași ca și în cazul curenților secanți pentru cos $\varphi = 1$.

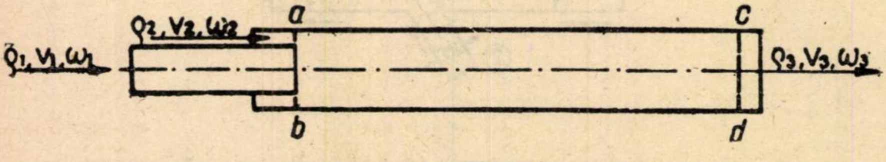


Fig. 5

Ecuația geometrică este

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \tag{45}$$

Notînd $\eta = \frac{\omega_1}{\omega_3}$ și $\alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, avem

$$E = \rho_1 \omega_1 v_1 \frac{(v_1 - v_3)^2}{2} + \rho_2 \omega_2 v_2 \frac{(v_2 - v_3)^2}{2}. \tag{46}$$

Folosind ecuaţia (45) putem scrie

$$L = \frac{E}{\rho_1 \omega_1} = (1-\eta)\frac{(v_1 - v_2)^2}{2}\left[v_1(1-\eta) + \alpha\eta v_2\right]. \tag{47}$$

Căutăm minimul absolut al acestei funcţii pe variabilele v_1 şi v_2. Anulînd derivata întîia în raport cu v_1 a funcţiei L, obţinem următoarele valori :

$$\frac{v_1}{v_2} = 1, \tag{48}$$

şi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-\eta(1+2\alpha)}{3(1-\eta)}. \tag{49}$$

Derivata funcţiei L în raport cu v_2 egalată cu zero conduce la următoarele valori :

$$\frac{v_1}{v_2} = 1, \tag{50}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{3\alpha\eta}{\eta(\alpha+2)-2}. \tag{51}$$

Pentru sistemul de valori (49) $\frac{v_1}{v_2} = 1$ funcţia L este egală cu zero. Se poate arăta că pentru acest sistem de valori avem de-a face cu un minimum absolut al pierderilor de energie la amestec.
Punînd

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1' + r\cos\psi, \\ & \qquad\qquad (r > 0) \\ v_2 &= v_1' + r\sin\psi, \end{aligned} \tag{52}$$

expresia (46) devine

$$L = (1-\eta)\frac{r^2(\cos\psi - \sin\psi)^2}{2}\{v_1^1(1-\eta+\alpha\eta) + r[(1-\eta)\cos\psi + \\ + \alpha\eta\sin\psi]\}, \tag{53}$$

unde $v_1' > 0$.

Se observă că pentru orice valoare a argumentului ψ funcţia L este pozitivă. Pentru $\psi = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n — număr întreg) $L = 0$. Suprafaţa L este tangentă la planul Ov_1v_2 după dreapta $v_1 = v_2$.

Prin urmare, independent de masa specifică a celor două fluide care se amestecă, minimul pierderilor de energie la amestec se obține pentru $v_1 = v_2$. Această concluzie diferă de concluzia obținută greșit de P. N. Kamenev [1] care arată că minimul pierderilor de energie la amestec are loc în cazul în care $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$.

Pentru sistemul de valori $\frac{v_1}{v_2}$ dat de relațiile (50), (51) funcția L prezintă numai maximuri relative.

Se poate pune problema pierderilor de energie la amestec minime pe traseul 1—3 sau 2—3. Utilizînd ecuația energiei, a cantității de mișcare și a continuității, obținem pentru pierderile de energie la amestec expresiile

$$E_{1-3} = \frac{\rho_1}{2}(1-\eta)\left[v_1^3(1-\eta) + v_1^2 v_2(1+\alpha)\eta - \alpha v_2^2 v_1(1+\eta)\right]\omega_1, \tag{54}$$

pe traseul 1—3 și

$$E_{2-3} = \frac{\rho_1}{2}\eta\left[v_1 v_2^2(1-\eta)(1+\alpha) + \alpha\eta v_2^3\right]\omega_2, \tag{55}$$

pe traseul 2—3.

Expresia E_{2-3} este continuu crescătoare în domeniul $v_1 > 0$ și $v_2 > 0$.

Expresia E_{1-3} prezintă un minimum relativ pentru

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-\eta(1+\alpha) + \sqrt{\eta^2(1+\alpha)^2 + 3(1-\eta^2)\alpha}}{3(1-\eta)} \tag{56}$$

și un maximum relativ pentru

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\alpha(1+\eta)}{\eta(1+\alpha)}. \tag{57}$$

Se pot obține pierderi de energie nule pe traseul 1—3 ($E_{1-3} = 0$) dacă

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-\eta(1+\alpha) + \sqrt{\eta^2(1-\alpha)^2 + 4\alpha}}{2(1-\eta)}. \tag{58}$$

Utilizarea acestor relații în calculul și proiectarea ejectoarelor este în strînsă legătură cu specificul funcționării acestor aparate. Se poate vedea ușor că la funcționarea unui ejector în ipoteza neglijării frecărilor fluidului de pereții conductei nu putem obține pierderi de energie nule la amestec, decît în cazul în care energiile specifice ale curenților din tronsoanele 1, 2 și 3 sînt egale. Or, se știe că ejectoarele se folosesc tocmai pentru a ridica energia specifică a unui fluid de la un nivel la altul.

Primită la redacție la 3 martie 1959.

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ПРИ СМЕШЕНИИ ДВУХ НАПОРНЫХ ПОТОКОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе рассматриваются две схемы смешения движущихся жидкостей: секущих потоков и параллельных потоков. Автор исходит из интегральных уравнений движения: уравнения энергии, уравнения импульса и уравнения сохранения массы, и аналитически определяет условия, приводящие к минимальным потерям энергии при смешении двух напорных потоков.

Указывается, что в случае секущих потоков потери энергии при смешении могут быть лишь относительно минимальными, а в случае параллельных потоков потери энергии являются абсолютно минимальными, если встречающиеся жидкости имеют одинаковую скорость.

PERTES MINIMA D'ÉNERGIE LORS DU MÉLANGE DE DEUX COURANTS SOUS PRESSION

RÉSUMÉ

Le présent travail traite de deux schémas de mélange des fluides en mouvement : courants sécants et courants parallèles. On part des équations intégrales du mouvement : équation de l'énergie, équation de l'impulsion et équation de la conservation de la masse et l'on détermine de façon analytique les conditions qui conduisent à des pertes minima d'énergie dans le cas du mélange de deux courants sous pression.

On montre que dans le cas des courants sécants, les pertes d'énergie, lors du mélange, ne peuvent être que des minima relatifs ; dans le cas des courants parallèles, les pertes d'énergie sont des minima absolus, si les fluides qui se rencontrent ont la même vitesse.

BIBLIOGRAFIE

1. П. Н. Каменев, *Гидроэлеваторы и другие струйные аппараты.* Машстройиздат, Москва, 1950.
2. В. Н. Талиев, *Расчет местных сопротивлений тройников.* Государственное, издательство по строительству и архитектуре, Москва, 1952.
3. И. Е. Идельчик, *Гидравлические сопротивления.* Государственное энергетическое издательство, Москва, 1954.

CERCETĂRI ASUPRA REGIMURILOR DE FUNCȚIONARE A LAGĂRELOR

I. INFLUENȚA VARIAȚIEI VISCOZITĂȚII

DE

N. TIPEI și AL. NICA

Distribuția presiunilor în filmul lubrifiant este influențată în mare măsură de variația viscozității μ în pelicula fluidă. Rezolvarea ecuațiilor care dau aceste presiuni, ținînd seama de faptul că μ este o funcție de coordonatele punctului respectiv este deosebit de grea și se admite de aceea adeseori $\mu = \text{const}$. Această ipoteză este practic posibilă, deoarece în anumite cazuri erorile asupra efectelor globale și asupra distribuției de presiuni nu sînt prea mari. Totuși, și în aceste situații, la o încărcare exterioară dată se pot obține prin calcul diferențe mari în ceea ce privește excentricitatea relativă $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ (e fiind excentricitatea, iar Δ jocul în cazul suprafețelor cilindrice), coeficienții de frecare, debitele etc. Cîmpul de temperatură are o distribuție complicată, care însă, pentru porțiunea încărcată a filmului se poate lega direct de variația grosimii δ sub o lege care permite, la rîndul ei, exprimarea viscozității μ sub forma simplă [1], [2]

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q, \tag{1}$$

dacă δ_1 este o valoare dată a lui δ, de exemplu grosimea maximă a peliculei. Experiențele, ale căror rezultate sînt date mai departe, confirmă expresia propusă (1).

Pentru construirea soluției generale a presiunilor p, aceasta se poate lega de soluția cunoscută pentru problema bidimensională p_∞. Notînd cu p_a, p_b presiunile la capetele lagărului, cu b lărgimea acestuia, cu b_1 distanța de la una din margini la planul format de axele $Ox_1\ x_2$ ce cuprinde normala Ox_2 la una din suprafețe și vectorul vitezei relative a celor două suprafețe solide care mărginesc mediul fluid, punînd apoi pentru suprafețele cilindrice cu axe paralele $x_1 = r_1\,\theta$ (r_1 reprezintă în această relație raza suprafeței interioare iar θ unghiul măsurat pe aceeași suprafață începînd de la generatricea pe care $\delta = \delta_1$), se poate scrie

$$p = p_\infty - \sum_{m=1}^{\infty} f_1m\,(\theta)\cdot f_{3m}\,(x_3) + \frac{p_b - p_a}{b}\,(x_3 + b_1) + p_a. \tag{2}$$

Soluțiile $f_3\,(x_3)$ cuprind funcții hiperbolice și au o formă cunoscută, în timp ce $f_{1m}\,(\theta)$ este de forma [2]

$$f_{1m} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{m,n}\sin n\theta + B_{m,n}\cos n\theta}{(1 + \alpha\cos\theta)^{\varkappa}}. \tag{3}$$

Coeficienții $A_{m,n}$ și $B_{m,n}$ satisfac ecuația cu diferențe

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha^2}{4}[\beta_m - (n + \varkappa + 2)(n + \varkappa + q - 1)]\,A_{m,n+2}\,(B_{m,n+2}) + \alpha\,[\beta_m - (n+1)\times\\&\times\left(n + \varkappa + \frac{q-1}{2}\right) + \frac{\varkappa}{2}\Bigr]A_{m,n+1}(B_{m,n+1}) + \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)(\beta_m - n^2) + \frac{\varkappa\alpha^2}{2}\,(\varkappa + q - 1)\right]\times\\&\times A_{m,n}\,(B_{m,n}) + \alpha\left[\beta_m - (n-1)\left(n - \varkappa - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{\varkappa}{2}\right]A_{m,n-1}\,(B_{m,n-1}) +\\&+ \frac{\alpha^2}{4}[\beta_m - (n - \varkappa - 2)(n - \varkappa - q + 1)]\,A_{m,n-2}\,(B_{m,n-2}) = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

unde β_m este un parametru arbitrar, iar $A_{m,n}$ și $B_{m,n}$ satisfac o serie de condiții, fiind legați de coeficienții a_n, b_n ai soluției p_∞

$$\left.\begin{aligned}&A_{m_1-n} = -A_{m,n}, \qquad B_{m,n} = B_{m,n},\\&\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} = a_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n} = b_n.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Utilizînd o metodă de rezolvare a ecuației (4) care a fost indicată într-o altă lucrare [2] se pot determina coeficienții $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ pentru orice q, la diferite valori ale excentricității α. Cazul $q = 1$ a fost studiat astfel în întregime, determinîndu-se o formulă generală pentru presiuni, la orice alungire $\lambda = \dfrac{b}{2\,r_1}$. Față de datele experimentale însă $q = 1$ reprezintă o valoare maximă. În general $0 \leqslant q \leqslant 1$; apare deci foarte util să se compare rezultatele anterioare cu soluția stabilită pentru cealaltă situație extremă $q = 0$, $\mu =$ constant. Convergența termenilor $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ ca și îndeplinirea ultimelor condiții (5) este strîns legată de alegerea valorilor β_m. Acestea au fost determinate pentru diferite excentricități α, ca și coeficienții soluției (3), în cazul $q = 0$, ținînd seama de observațiile desprinse pentru soluția cunoscută cînd $q = 1$. Mai departe se dau două exemple numerice pentru $\alpha = 0{,}4$ și $\alpha = 0{,}9$.

1. $\alpha = 0{,}4$. Prima ecuație (4) ($n = 0$) dă $A_{m,0} = 0$. Neglijînd pe A_{m3} în următoarele două ($n = 1$ și $n = 2$) și punînd condiții de compatibilitate a sistemului, rezultă valorile $\beta_1 = 1{,}1294$, $\beta_2 = 3{,}81$. Pentru prima valoare se găsește $A_{12} = 0{,}2228\ A_{11}$; considerînd apoi ecuațiile următoare în grupe de cîte două $n = i$ și $n = i + 1$ și neglijînd în acestea termenii ce cuprind pe A_{i+2} și A_{i+3} se găsește succesiv

$$A_{13} = 0{,}0058\ A_{11},\ A_{14} = 0{,}000161\ A_{11},\ A_{15} = 0{,}000003406\ A_{11},$$
$$A_{16} = 0{,}00000078\ A_{11}, \ldots \tag{6}$$

Același procedeu se poate aplica și pentru $\beta_2 = 3{,}81$. Este însă mai avantajos, pentru obținerea unei soluții cît mai convergente, cînd β_m este îndepărtat de unitate, să se admită o serie de valori, găsindu-se prin încercări pe cea mai potrivită. Fie $\beta_m = 4{,}22$. Primul grup de două ecuații ($i = 1$), în care se neglijează $A_{i+3} = A_4$ dă pe A_{22}, A_{23} și, în continuare, din următoarele trei ecuații în care se neglijează numai A_{27} se găsește șirul

$$A_{22} = -73{,}3724\ A_{21},\ A_{23} = -12{,}92375\ A_{21},\ A_{24} = -0{,}051146\ A_{21},$$
$$A_{25} = 0{,}0056078 A_{21},\ A_{26} = 0{,}00437\ A_{21}, \cdots \tag{7}$$

Numai cu aceste două soluții particulare se poate apoi construi ușor soluția generală. În adevăr, coeficienții presiunilor p_∞ sînt [2]

$$a_1 = \frac{12\,\alpha\mu_1 V r_1}{(2+\alpha^2)\Delta^2},\quad a_2 = \frac{\alpha}{4}a_1,\quad a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0. \tag{8}$$

Primele două condiții (5) sînt satisfăcute exact dacă se ia $A_{11} = 0{,}99833\ a_1$, $A_{21} = 0{,}00167\ a_1$. Rezultă apoi

$$\sum A_{m3} = -\ 0{,}0158\ a_1,\qquad \sum A_{m4} = -\ 0{,}0002464\ a_1,$$
$$\sum A_{m5} = 0{,}000012766\ a_1,\ \sum A_{m6} = -\ 0{,}000006521\ a_1, \ldots \tag{9}$$

Relațiile (6) — (9) arată că cele două soluții f_{11} și f_{12} considerate sînt foarte convergente și că toate aproximațiile introduse pentru determinarea coeficienților $A_{m,n}$ sînt pe deplin justificate. În general termenii neglijați nu reprezintă nici 1 % din ceilalți termeni ai ecuațiilor respective. Rezultă, de asemenea, că se îndeplinesc aproape exact toate condițiile (5), sumele pentru $n \geqslant 3$ fiind practic nule față de primii doi termeni. Pentru simplificarea expresiei presiunilor, se poate admite apoi aproximația indicată anterior (2)

$$1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_m}\,\dfrac{x_3 + b_1 - \dfrac{b}{2}}{r_1}}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_m}\,\lambda} \cong \frac{1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_m}\,\lambda}}{1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_m}\,\lambda}}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\,\dfrac{x_3 + b_1 - \dfrac{b}{2}}{r_1}}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\,\lambda}\right). \tag{10}$$

De asemenea, se poate considera, cu o eroare de ordinul 2‰

$$A_{11} \cong a_1, \quad \frac{A_{22}}{A_{11}} = \frac{\alpha a_1}{4\,A_{11}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} \cong \frac{\alpha}{4} - \frac{A_{12}}{A_{11}}, \tag{11}$$

astfel încît ecuația presiunilor se scrie, ținînd seama de condițiile la limită $p = p_a + \frac{p_b - p_a}{b}(x_3 + b_1)$, pentru $\theta = 0$ și $\theta = \pi$ $(B_{m,n} = 0)$,

$$p = p_a + \frac{p_b - p_a}{b}(x_3 + b_1) + \frac{12\,\mu_1 V\,r_1\alpha}{\Delta^2(2+\alpha^2)(1+\alpha\cos\theta)^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_1}}{r_1}\left(x_3 + b_1 - \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\,\lambda}\right] \times$$

$$\times \left\{\sin\theta + \left[\frac{A_{12}}{A_{11}} - \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_2}\,\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\beta_1}\,\lambda}}\left(\frac{A_{12}}{A_{11}} - \frac{\alpha}{4}\right)\sin 2\,\theta\right]\right\}. \tag{12}$$

Înlocuind în această relație valorile determinate ale raportului $\frac{A_{12}}{A_{11}}$, precum și β_1, β_2 corespunzătoare celor două soluții, presiunile pot fi apoi numeric determinate în cazul considerat, dacă se dau parametrii problemei, p_a, p_b, μ_1, V, r_1, Δ și λ.

2. $\alpha = 0{,}9$. Fie $\beta_1 = 1{,}5$; ecuațiile corespunzătoare valorilor $n = 1$ și $n = 2$ permit calculul lui A_{12} și A_{13}, neglijînd pe A_{14} în ultima. Convergența rapidă a coeficienților permite apoi calculul lor din aproape în aproape, neglijînd în fiecare ecuație dedusă din (5) termenul care conține A_{n+2}. Se obține astfel șirul următor

$$A_{12} = 0{,}549\ A_{11},\ A_{13} = 0{,}04475\ A_{11},\ A_{14} = 0{,}00188\ A_{11}$$
$$A_{15} = -0{,}00319\ A_{11},\ A_{16} = 0{,}00184\ A_{11}, \ldots \tag{13}$$

Admițînd a doua valoare $\beta_2 = 4$ și procedînd la fel ca și pentru $\beta_1 = 1{,}5$, se găsesc coeficienții celei de a doua soluții

$$A_{22} = 16{,}19\ A_{21},\ A_{23} = 3{,}465\ A_{21},\ A_{24} = 0{,}755\ A_{21},$$
$$A_{25} = -0{,}336\ A_{21},\ A_{26} = 0{,}1155\ A_{21}, \ldots \tag{14}$$

Din primele două condiții (5) rezultă $A_{11} = 1{,}0207\,a_1$ și $A_{21} = -0{,}0207\,a_1$. Introducînd aceste valori în (13) și (14), se obține

$$\sum A_{m3} = -0{,}0261\ a_1,\ \sum A_{m4} = -0{,}0137\ a_1,\ \sum A_{m_5} = 0{,}0037\ a_1,$$
$$\sum A_{m_6} = -0{,}00051\ a_1, \ldots \tag{15}$$

Contribuția tuturor acestor termeni în expresia (3) a lui f_{1m} nu depășește 3 % față de primii doi termeni și poate fi, în consecință, neglijată. Astfel, condițiile (5) se pot considera și în acest caz îndeplinite pentru toate valorile n. Se remarcă însă, că deși convergența soluțiilor $m = 1$ și $m = 2$ este foarte rapidă, ea rămîne totuși mai puțin bună decît în cazul $\alpha = 0{,}4$. Acest lucru s-a găsit și pentru $q = 1$ [2] și în general se poate spune că pe măsură ce excentricitatea relativă tinde către limită, $\alpha \rightarrow 1$ funcțiile f_{1m} sînt mai puțin convergente, fără ca aceasta să împiedice formarea soluției complete numai cu două valori ale lui m, în toate cazurile. În adevăr, s-a dat o demonstrație generală [2] că totdeauna soluțiile sînt convergente, cu excepția cazului $\alpha = 1$, care nu are importanță nici teoretică, nici practică, deoarece corespunde unui regim mixt de ungere, pentru care nu se poate considera numai aspectul hidrodinamic al frecării.

Ecuația (12) reprezintă soluția problemei și pentru $\alpha = 0{,}9$, ca și pentru orice valoare a excentricității.

Variația lui β_1 cu α este destul de redusă și foarte apropiată de legea liniară și de asemenea raportul $\frac{A_{12}}{A_{11}}$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 0{,}83292 + 0{,}7412\,\alpha, \\ \frac{A_{12}}{A_{11}} &= 0{,}6524\,\alpha - 0{,}03816, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

în timp ce $\beta_2 \cong 4$, rămîne constant. Astfel toți termenii din formula(12) sînt determinați pentru toate excentricitățile.

Se observă că β_1 variază între 1,1294 pentru $\alpha = 0{,}4$ și 1,5 la $\alpha = 0{,}9$ în cazul $q = 0$, în timp ce la valoarea $q = 1$ variația corespunzătoare este cuprinsă între 1,028 și 1,149, iar β_2 rămîne la aceeași valoare $\beta_2 \sim 4$. Raportul $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ este cuprins între 0,2228 la $\alpha = 0{,}4$ și 0,549 ($\alpha = 0{,}9$) pentru $q = 0$, respectiv între 0,2665 și 0,584 pentru $q = 1$. Se amintește, de asemenea, că în toate cazurile coeficienții $B_{m,n} = 0$ pentru condițiile la limită alese. S-a arătat apoi [2], [3], că aceste condiții concordă din punct de vedere practic cu alte ipoteze curente, prezintă un foarte bun acord față de experiențe și au avantajul unei mari simplicități a formulelor finale (12). Diferența esențială între cele două cazuri limită $q = 0$ și $q = 1$ o constituie de fapt valorile a_1 și a_2 din soluțiile p_∞, valori însă binecunoscute ca funcții de q [2]. Variația lentă a celorlalți parametri α și mai ales în raport cu q permit să se liniarizeze expresiile lor care capătă o formă, foarte simplă, avînd în vedere rezultatele găsite (16) și acelea date în [2].

Rezultă deci pentru un q oarecare

$$\left.\begin{aligned} \beta_{1q} &= 0{,}83292 + 0{,}09828\,q + (0{,}7412 - 0{,}4992\,q)\,\alpha, \\ \beta_{2q} &\cong 4, \\ \frac{A_{12q}}{A_{11q}} &= 0{,}05386\,q - 0{,}03816 + (0{,}6524 - 0{,}0254\,q)\,\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

iar expresia (12) a presiunilor capătă forma generală

$$p_q = p_a + \frac{p_b - p_a}{b}(x_3 + b_1) + \frac{6\,\mu_1\,V\,r_1\,\alpha}{\Delta^2 (1+\alpha)^q (1-\alpha^2)^{1-q}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 (1-q)\left(2 - \frac{q}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2}\alpha^2 (1-q)\left(1 - \frac{q}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{(1+\alpha\cdot\cos\theta)^2} \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\beta_{1q}}}{r_1}\left(x_3 - b_1 - \frac{b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right] \cdot \left\{\sin\theta + \left[\frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}} \cdot \left(\frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1 - \frac{1}{2}(1-q)\left[1 + \alpha^2\left(1 - \frac{q}{2}\right)\right]}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(2 - \frac{q}{2}\right)} \cdot \frac{\alpha}{2}\right)\right] \sin 2\theta\right\} \cdot \qquad (18)$$

Astfel, se ajunge la o formulă închisă, uşor maniabilă, dat fiind că variabile sînt unghiul θ şi x_3 iar celelalte mărimi reprezintă numai parametrii soluţiei. Relaţia (18) dă presiunile în cazul scurgerii tridimensionale pentru toate cazurile practic posibile ale variaţiei viscozităţii în filmul lubrifiant. Ea conţine numai particularizarea că μ se admite variabil în acelaşi sens cu δ pentru partea portantă a peliculei. Pentru verificarea acestei ipoteze s-au făcut o serie de experienţe, care completează datele cunoscute [4] şi sînt bazate pe determinarea temperaturilor, de care μ depinde direct, în peliculă.

Aparatul folosit se compune dintr-un lagăr experimental de alungire $\lambda = 0{,}5$, cu alimentarea printr-o fantă paralelă cu axul suprafeţelor şi avînd o lungime b_i caracterizată prin raportul $\nu = \frac{b_i}{b}$. Experienţele s-au făcut pe un fus de oţel cementat şi rectificat, cu un cuzinet din bronz de plumb ; diametrul fusului $2r_1 = 36$ mm, iar pentru ν s-au luat două valori $\nu = 0{,}167$ şi $\nu = 0{,}288$. Viteza unghiulară a fusului a fost $N = 960$ rot./min, iar încărcările specifice au avut valorile succesive de 20 ; 35,5 ; 51 ; 66,5 ; 83 şi 98,5 kg/cm². Presiunile de alimentare au avut, la rîndul lor valorile $p_i = 1$ kg/cm² şi $p_i = 2$ kg/cm² pentru fiecare grupă de determinări.

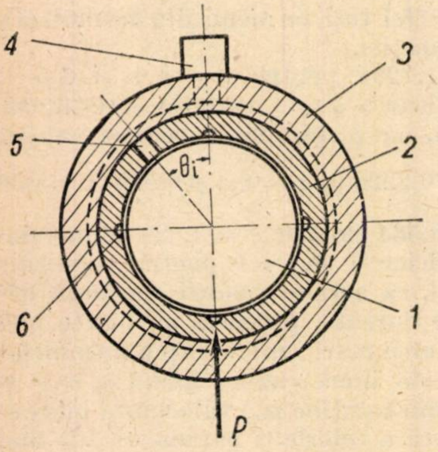


Fig. 1

1 – Fus ; 2 – Cuzinet experimental ; 3 – Corpul lagărului ; 4 – Conductă de ulei ; 5 – Orificiul cuzinetului ; 6 – Locaş traductor.

Orificiul de alimentare a fost plasat în 12 puncte diferite, parcurgîndu-se la intervale de 30° toată circumferinţa cuzinetului ; unghiul de poziţie θ_i al orificiului a fost măsurat de la poziţia normală a orificiului de alimentare (diametral opusă încărcării), în sensul de rotaţie al fusului. Temperaturile au fost determinate cu ajutorul unui aparat electronic, în 4 puncte situate la 90°, traductorii fiind plasaţi foarte aproape de suprafaţa cuzinetului (fig. 1) în planul median al lagărului*). În figura 2 se pot remarca diferitele elemente care compun standul experimental, şi anume : *1* — lagăr experimental cu electromotor ; *2* — sistemul de încărcare ; *3* — pompă de ulei cu electromotor ; *4* — aparat electronic de măsurat temperaturi.

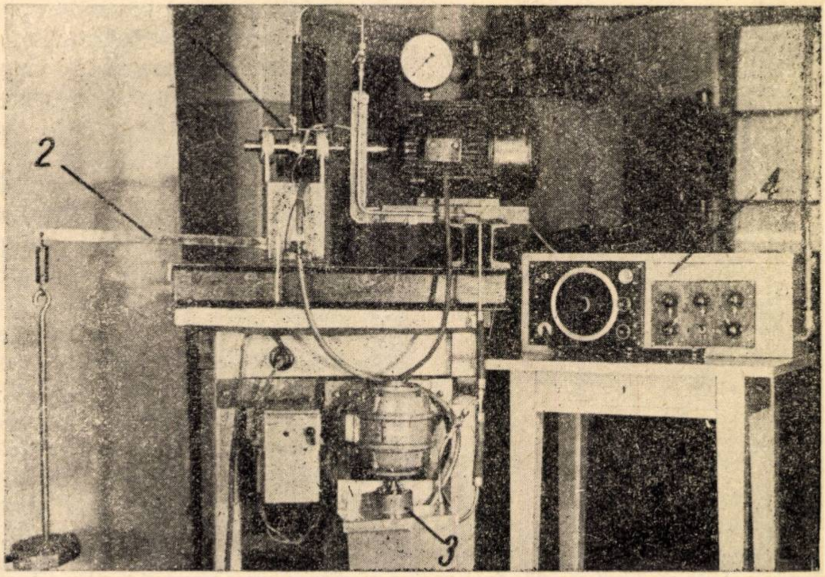


Fig. 2

Temperatura băii de ulei a fost menţinută constantă — dată fiind influenţa temperaturii uleiului la intrarea în lagăr asupra parametrilor funcţionali — cu ajutorul unui sistem adecvat de alimentare cu lubrifiant a lagărului (fig. 2) şi unor măsuri speciale de răcire, astfel încît temperatura în baie nu a fost inferioară limitei de 29°C la începutul experienţelor ($p = 20$ kg/cm^2) şi nu a depăşit limita de 35°C, la sfîrşitul experienţelor ($p = 98{,}5$ kg/cm^2).

Jocul relativ a fost $\psi = \frac{\Delta}{2r_1} = 1{,}14 \times 10^{-3}$ iniţial, iar la sfîrşitul experienţelor, datorită uzurii, $\psi = 1{,}66 \times 10^{-3}$.

Pentru calculul coeficientului de portantă $\zeta = \frac{p\psi^2}{\mu_1\Omega}$ (în care Ω

---

*) Aparatul electronic de măsurat temperaturi a fost realizat de Gh. Marin cu concursul secţiei de măsurători.

este viteza unghiulară și μ_1 viscozitatea uleiului la intrarea în lagăr), s-au considerat valorile lui ψ corespunzătoare diferitelor etape ale experiențelor. Curba viscozității uleiului folosit (ulei 305 — STAS) este reprezentată în figura 3.

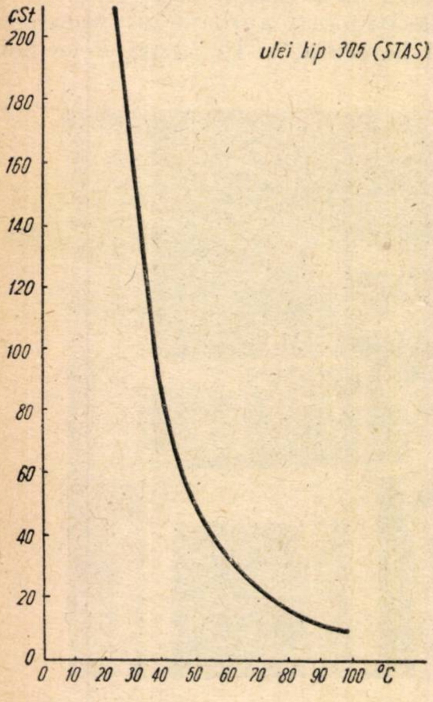


Fig. 3

Valorile temperaturilor și ale viscozităților corespunzătoare, în raport cu θ_i, sînt redate în figurile 4—19. Din examinarea acestor diagrame rezultă influența poziției orificiului de alimentare cu lubrifiant asupra caracteristicilor funcționale ale lagărului. Astfel, pentru $\theta_i = 0^0$, distribuția de temperaturi a filmului lubrifiant (t_f) în raport cu un punct curent de poziție θ de pe suprafața activă a cuzinetului, obținută în condițiile specificate (fig. 4, 5) este aproape simetrică în raport cu direcția sarcinii, rezultat în concordanță cu datele obținute și de alți cercetători [4]. În figura 6 și 7 este reprezentată variația viscozității filmului de lubrifiant, corespunzătoare distribuției de temperaturi pentru $\theta_i = 0°$.

Pentru $\theta_i = 90°$ și $\theta_i = 270°$ (fig. 8, 9 și 16, 17) se remarcă o asimetrie, datorită tendinței valorii minime a temperaturilor de a se situa în dreptul orificiului de alimentare. Așezarea orificiului în zona încărcată ($\theta_i = 180°$, fig. 12, 13) are ca rezultat un debit de lubrifiant extrem de mic, practic nul, și o funcționare a lagărului la temperaturi foarte ridicate.

Influența geometriei orificiului de alimentare asupra temperaturii a fost pusă în evidență într-o lucrare anterioară [5].

Variația viscozității filmului de lubrifiant, corespunzătoare fiecărei distribuții de temperaturi, este redată în figurile 10, 11; 14, 15 și 18, 19 pentru $\theta_i = 90°$, $\theta_i = 180°$ și $\theta_i = 270°$. Se poate remarca faptul că viscozitatea filmului de lubrifiant poate varia de-a lungul circumferinței între limite foarte largi.

Este de remarcat faptul că în toate aceste diagrame, indiferent de ceilalți parametri (presiunea de alimentare, așezarea fantei de alimentare etc.) temperaturile maxime respectiv viscozitățile minime se situează foarte aproape de grosimea minimă δ_2 a peliculei, respectiv la un unghi θ egal sau puțin mai mare decît 180° față de direcția încărcării, plecînd din zona descărcată a filmului.

Aceasta arată că legea de variație a lui μ exprimată prin relația (1) este corectă și că ea redă cu o bună aproximație fenomenul real, evident cu condiția ca exponentul q să fie, la rîndul său, în concordanță cu datele experimentale.

În cursul experiențelor a fost măsurată și temperatura uleiului care scapă din lagăr, obținîndu-se astfel o temperatură medie a uleiului care

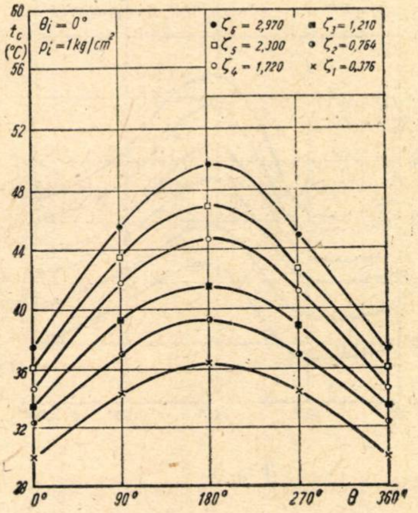


Fig. 4

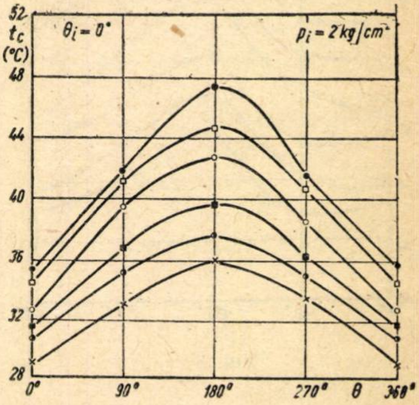


Fig. 5

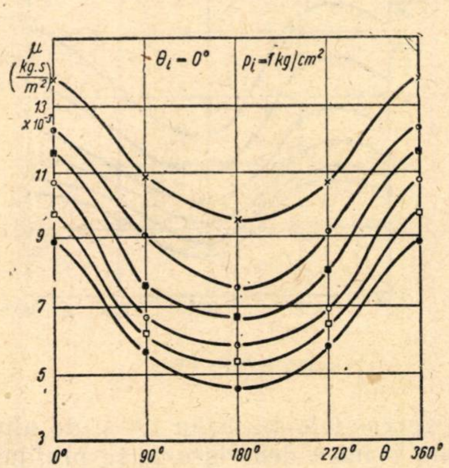


Fig. 6

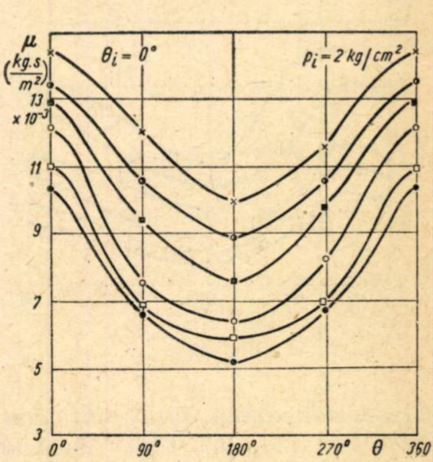


Fig. 7

scapă lateral din lagăr (t_{m_s}). S-a determinat și temperatura medie a filmului (t_{m_f}), planimetrîndu-se curbele din figurile 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16 și 17, constatîndu-se o foarte mare apropiere între aceste două valori (fig. 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 și 27).

Această constatare arată în primul rînd că temperaturile nu suferă variaţii mari în lungul generatricelor celor două suprafeţe cilindrice şi că profilul lor rămîne şi la capetele peliculei apropiat de distribuţia din secţiunea mediană, fapt confirmat de experienţele autorilor cît şi de alţi cercetători [4], [6]. Chiar dacă ar exista o mică deosebire între profilul temperaturilor (viscozităţilor) la capete faţă de secţiunea mediană, această deosebire nu are importanţă practică, deoarece la capete presiunile au în orice caz valori date şi exprimate prin condiţiile la limită pe care ecuaţia (18) le satisface. În consecinţă legea exprimată de relaţia (1) este valabilă în practică pe toată zona de acoperire a celor două suprafeţe cilindrice.

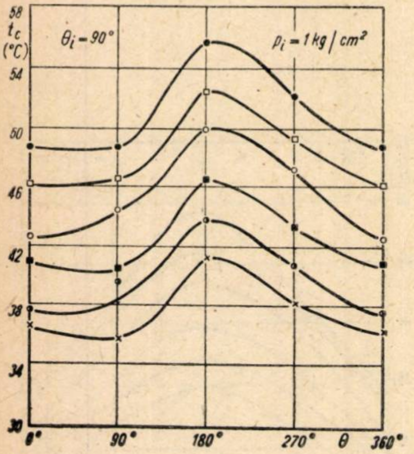


Fig. 8

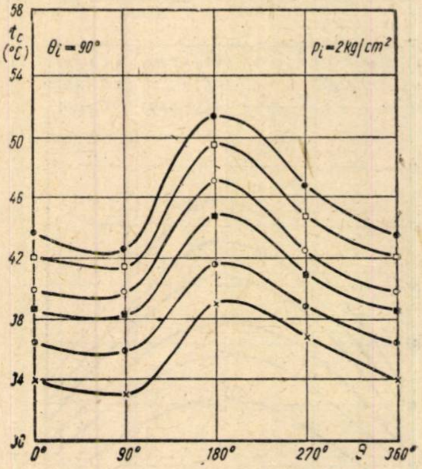


Fig. 9

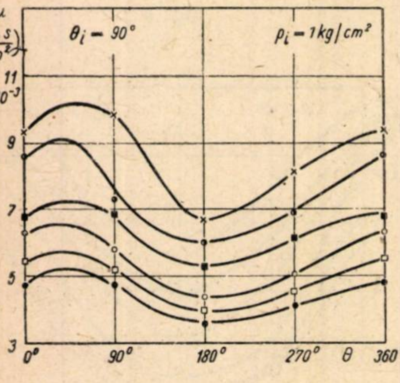


Fig. 10

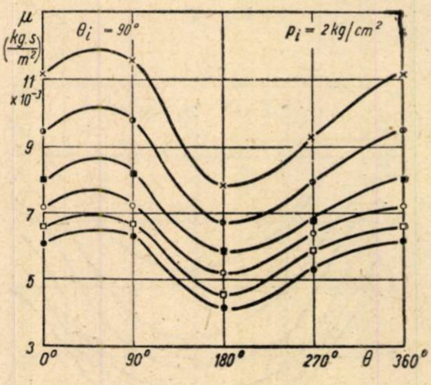


Fig. 11

Pe de altă parte, se poate preciza noţiunea de temperatură medie în lagăr, care este egală cu temperatura de ieşire şi nu cu media aritme-

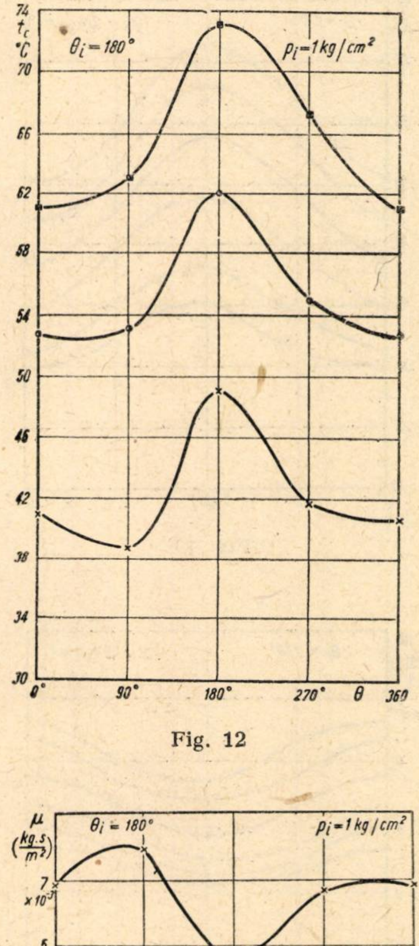


Fig. 12

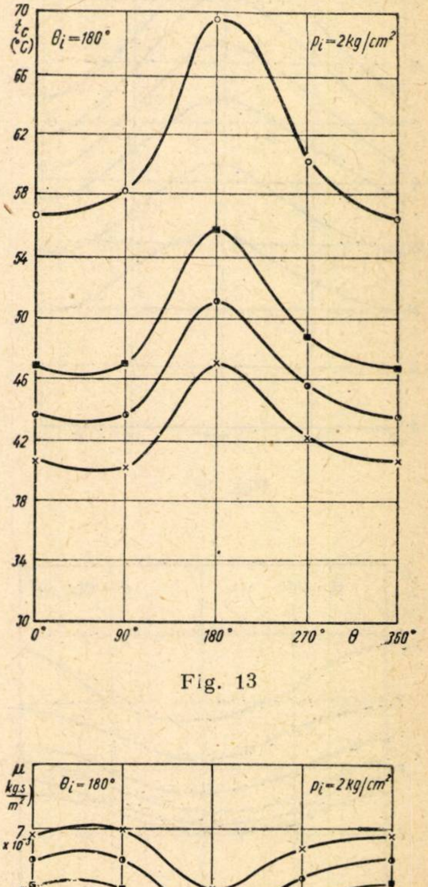


Fig. 13

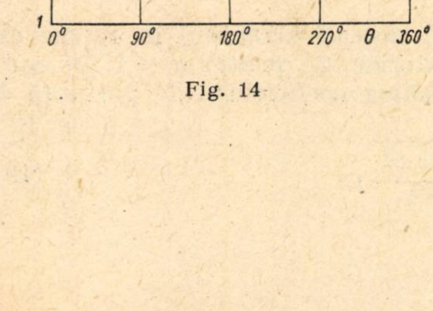


Fig. 14

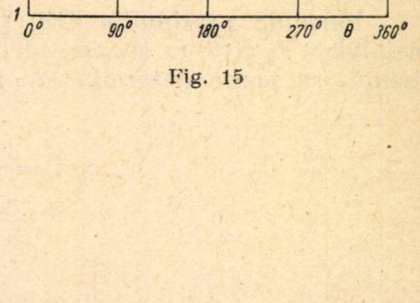


Fig. 15

tică a temperaturilor de intrare şi de ieşire a lubrifiantului, aşa cum se admite uneori.

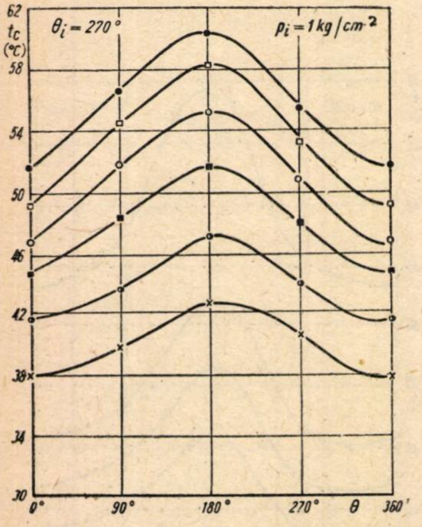


Fig. 16

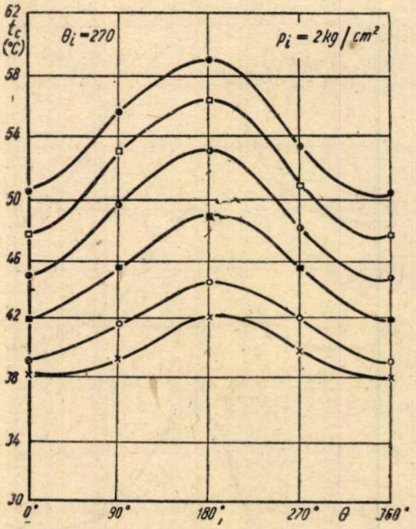


Fig. 17

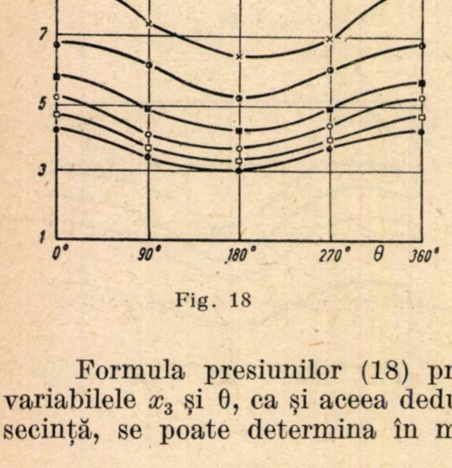


Fig. 18

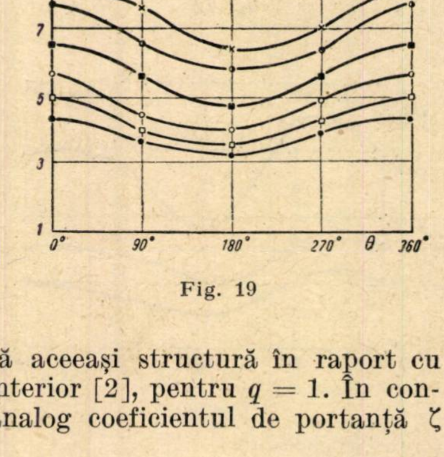


Fig. 19

Formula presiunilor (18) prezintă aceeaşi structură în raport cu variabilele x_3 şi θ, ca şi aceea dedusă anterior [2], pentru $q = 1$. În consecinţă, se poate determina în mod analog coeficientul de portanţă ζ

$$\zeta = \frac{3\sqrt{C_n^2 + C_t^2}}{(1 + \alpha)^q}, \tag{19}$$

în care, dacă se ia $p_a = p_b = p_0$ (situație aproape totdeauna întîlnită în diversele construcții de mașini), C_n și C_t au valorile [2].

$$\left.\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{(1-\alpha^2)^{1-q}} \cdot \frac{1-\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(2-\dfrac{q}{2}\right)}{1+\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(1-\dfrac{q}{2}\right)} \cdot \left(1-\frac{\operatorname{th}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right) \cdot \frac{\pi}{\alpha} \times \\
&\quad \times\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}-1\right)+\frac{4\bar{a}}{\alpha}\left(1-\frac{2-\alpha^2}{2\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\right\}, \\
C_t &= \frac{1}{(1-\alpha^2)^{1-q}} \cdot \frac{1-\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(2-\dfrac{q}{2}\right)}{1+\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(1-\dfrac{q}{2}\right)} \cdot \left(1-\frac{\operatorname{th}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}{\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}\right) \times \\
&\quad \times\left[-\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{2}{1-\alpha^2}-4\bar{a}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right], \\
\bar{a} &= \frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2\lambda}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1q}}}} \cdot \left(\frac{A_{12q}}{A_{11q}} - \frac{1-\dfrac{1}{2}(1-q)\left[1+\alpha^2\left(1-\dfrac{q}{2}\right)\right]}{1-\dfrac{1}{2}\alpha^2(1-q)\left(2-\dfrac{q}{2}\right)} \cdot \frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Pentru $q = 0$ se obțin astfel curbele $\zeta(\alpha)$ trasate cu linie plină, din figura 28; pentru comparație s-au trasat pe aceeași figură și diagramele corespunzătoare lui $q = 1$. Se vede că deosebirile sînt mari și că în general influența parametrului q poate atrage valori deosebite ale excentricității α, la o aceeași încărcare dată. În figura 29 s-au reprezentat, de asemenea, diagramele $\zeta(\alpha)$ pentru $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$ și $\lambda = 0{,}5$, în comparație cu rezultatele altor cercetători [7], [8]. Se vede că datele obținute cu ecuația (18) pentru $q = 0$ sînt în bun acord cu acelea stabilite de alți autori prin metode diferite și chiar cu condiții la limită diferite (Cameron-Wood, Schiebel-Bauer).

Cu ajutorul rezultatelor expuse se pot trage concluzii asupra valorii exponentului q. În adevăr, dacă μ_2 este viscozitatea în dreptul grosimii minime δ_2 se poate scrie, ținînd seama de variația lui δ, cu θ

$$q = \frac{\ln\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}{\ln\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \tag{21}$$

această relație, împreună cu $\zeta(\alpha, q) = \dfrac{F\psi^2}{2\mu_1 Vb}$ care are o valoare de asemenea dată, depinzînd de încărcarea totală F și de celelalte elemente cunoscute, permite determinarea lui α și q. Practic se pot folosi diagramele $\zeta(\alpha)$

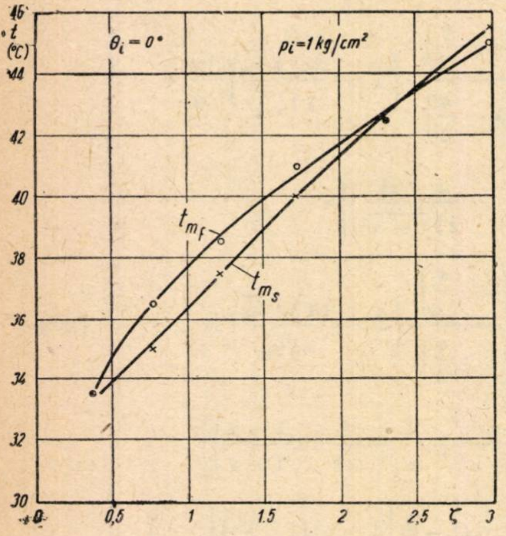


Fig. 20

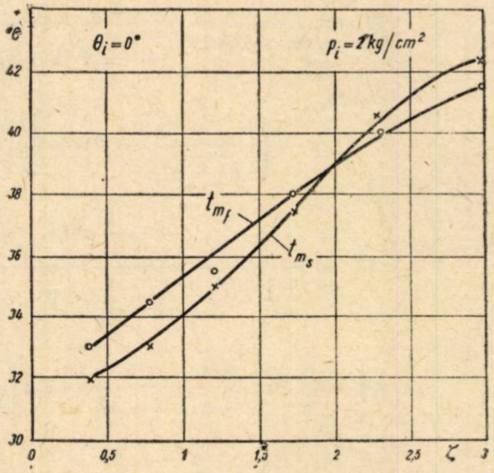


Fig. 21

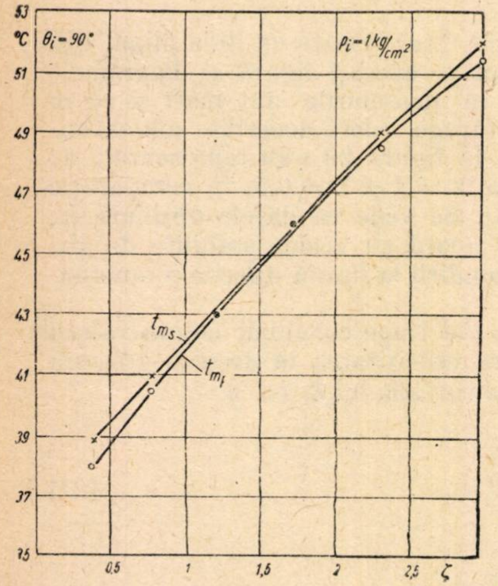


Fig. 22

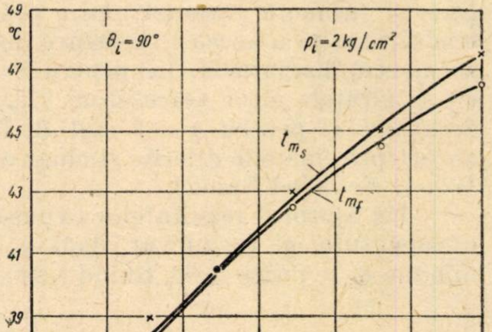


Fig. 23

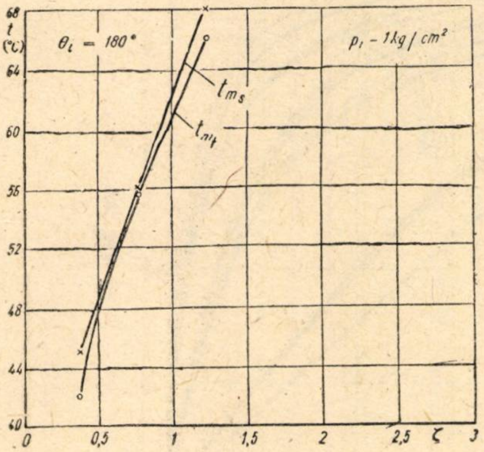


Fig . 24

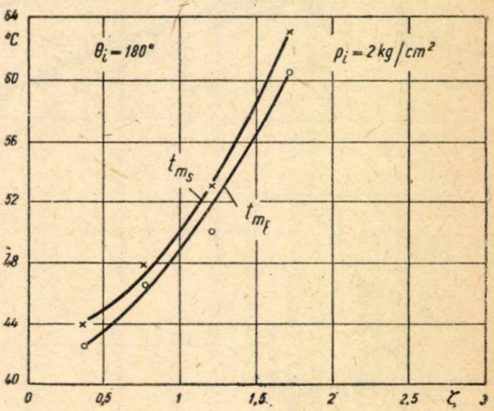


Fig. 25

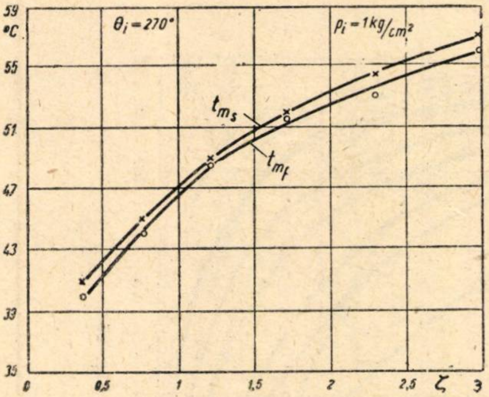


Fig. 26

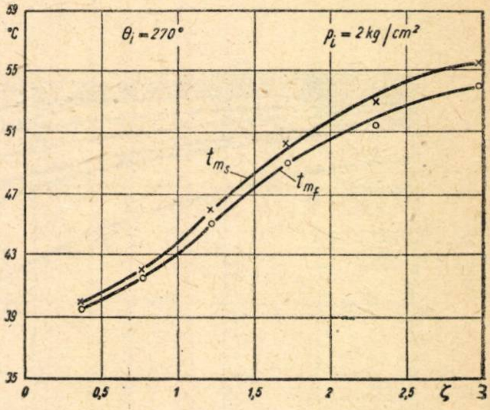


Fig. 27

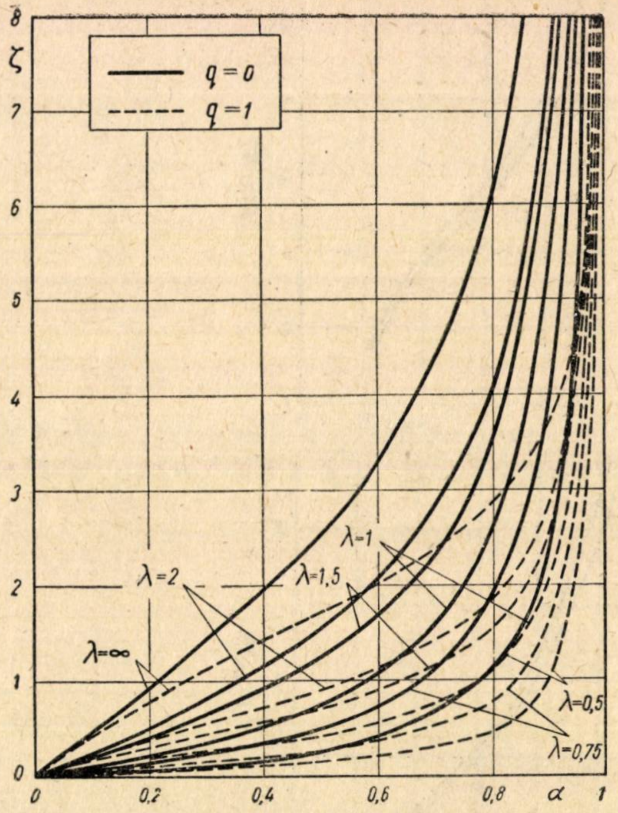

ζ
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
α
1
q = 0
q = 1
λ=∞
λ=2
λ=1,5
λ=1
λ=0,5
λ=0,75

Fig. 28

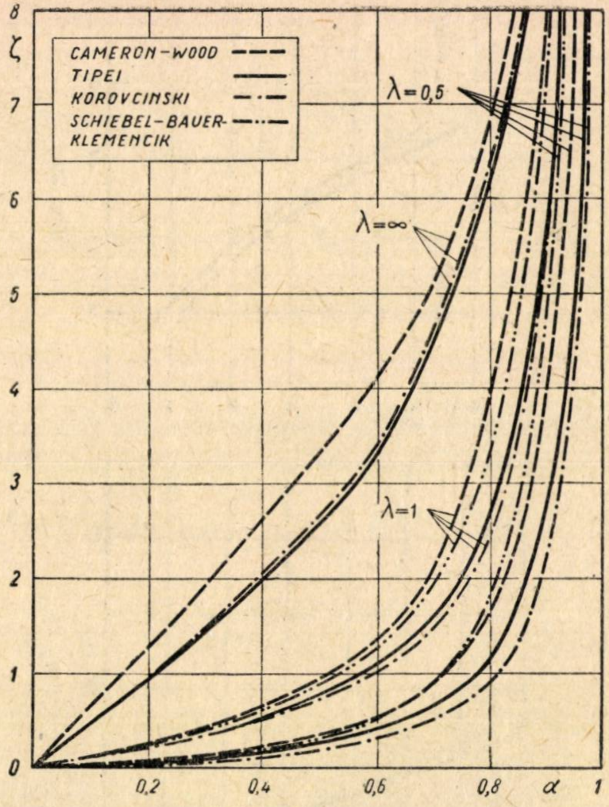

ζ
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
α
1
CAMERON-WOOD
TIPEI
KOROVCINSKI
SCHIEBEL-BAUER-KLEMENCIK
λ=0,5
λ=∞
λ=1

Fig. 29

din figura 28, considerîndu-se la un ζ dat o variaţie liniară a excentricităţii α între cele două cazuri extreme (curbele date de $q = 0$ şi acelea pentru care $q = 1$, corespunzătoare unei alungiri λ oarecare).

Astfel pentru cazul $\theta_i = 0$, $p_i = 1$ kg/cm^2 (fig. 4, 6, 28), se găseşte pentru $\zeta = 0{,}376$, $\alpha = 0{,}62$ şi $q = 0{,}25$, iar la $\zeta = 2{,}97$ corespunde $\alpha = 0{,}93$ şi $q = 0{,}2$.

În general, valorile lui q scad cînd α creşte, deşi ecartul între μ_1 şi μ_2 creşte de asemenea; totuşi scăderea viscozităţii este mai lentă decît descreşterea lui δ_2 cînd $\alpha \to 1$. Dimpotrivă, pentru valori $\alpha \to 0, q \to 1$; se remarcă totuşi că în cazul extrem $\alpha = 0$ soluţiile date de $q = 0$ şi $q = 1$ se confundă ($p = p_0 =$ const.). În general, deci, q va depinde de proprietăţile lubrifiantului, de condiţiile de răcire (construcţia lagărului) şi de excentricitatea relativă, respectiv de încărcarea exterioară. Se pot fixa pe tipuri de lagăre valorile cele mai adecvate ale lui q; de exemplu, pentru cazul unui lagăr necapsulat, lucrînd în mediul ambiant la o temperatură de circa 20°C, $q = 0{,}2 - 0{,}3$. Este evident că şi poziţia punctului de alimentare influenţează valoarea lui q, totuşi pentru o alimentare corectă în zona descărcată se poate neglija acest parametru.

Rezultatele precedente arată că variaţia viscozităţii nu trebuie neglijată, deoarece efectele sale sînt importante. Acest lucru este mai ales adevărat în cazurile cînd se urmăreşte o determinare cît mai exactă a excentricităţii relative, a poziţiei relative a celor două suprafeţe solide cilindrice, a coeficienţilor de frecare şi în consecinţă a temperaturilor de lucru, printr-un calcul termic bazat pe determinarea căldurii dezvoltate în timpul funcţionării.

Primită la redacţie la 21 martie 1959.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОЧЕГО РЕЖИМА ПОДШИПНИКОВ

I. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВЯЗКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Определяется общее решение в случае кольцевых подшипников скольжения с учетом изменения вязкости. Закон изменения вязкости подтверждается приведенными экспериментальными данными (определение распределения температур в смазывающей пленке по окружности подшипника и соответствующие значения вязкости).

Устанавливается также, что средняя температура в подшипнике имеет значение очень близкое к средней температуре масла, просачивающегося из подшипника.

При помощи уравнения давлений определяются величина несущей способности, а затем определяются рабочие параметры подшипника для реального изменения вязкости.

RECHERCHES SUR LES RÉGIMES DE FONCTIONNEMENT DES PALIERS

I. INFLUENCE DE LA VARIATION DE LA VISCOSITÉ

RÉSUMÉ

Les auteurs déterminent la solution générale des pressions pour le cas des paliers circulaires à glissement, en considérant la variation de la viscosité. La loi de la variation de la viscosité est confirmée par les données expérimentales présentées (détermination de la distribution des températures dans le film lubrifiant, le long de la circonférence du palier et valeurs correspondantes de la viscosité).

On établit également que la température moyenne dans le palier a une valeur très proche de la température moyenne de l'huile sortant du palier.

A l'aide de l'équation des pressions, on détermine la valeur du coefficient de portance et on déduit ensuite les paramètres fonctionnels du palier pour la variation réelle de la viscosité.

BIBLIOGRAFIE

1. G. DUFFING, *Handbuch der Mechanik.*, Ambrosius, Leipzig, V, cap. 3, 1931.
2. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
3. N. TIPEI, AL. NICA, *Asupra condițiilor la limită în problema lubrificației.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1* (1957).
4. J. A. COLE, *An Experimental Investigation of Temperature Effects in Journal Bearings.* Paper 63, Conference on Lubrication and Wear, London, 1957.
5. N. TIPEI, AL. NICA, *On the Boundary Conditions and Oil Flow in Complete Journal Bearings.* RMA, **II**, *1* (1957).
6. D. T. BARWELL, *Lubrication of Bearings.* Butterworths Scientific Works, London, 1956.
7. M. B. КОРОЧИНСКИЙ, Прикладная теория подшипников жидкостного трения Машгиз, Москва, 1954.
8. G. MANEA, R. MUSTAFA, M. ALDEA, *Asupra calculului lagărelor radiale prin alunecare, unse cu lichide, pe baza teoriei hidrodinamice.* Metalurgia și construcția de mașini, **VIII**, *8* (1956).

CALCULUL LAGĂRELOR COMPUSE DIN SUPRAFEȚE PLANE, LUBRIFICATE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

În unele lucrări anterioare [1], [2] am studiat influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant. Astfel, utilizînd ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl, tensiunea turbulentă $\rho\overline{u'v'}$ se poate pune egală cu

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|, \tag{1}$$

în care $\bar{u}$ este viteza în direcția mișcării, u' pulsația acesteia, v' pulsația turbulentă în direcția y normală la una din suprafețele lubrificate, iar l lungimea de amestec, considerată ca fiind o funcție liniară de distanța y

$$\left.\begin{aligned} l &= \varkappa y & &\left(0 < y < \frac{\delta}{2}\right), \\ l &= \varkappa(\delta - y) & &\left(\frac{\delta}{2} < y < \delta\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

unde δ este grosimea stratului de lubrifiant.

Pentru mișcările turbulente obișnuite din mecanica fluidelor, constanta $\varkappa$ are valoarea

$$\varkappa = 0{,}4. \tag{3}$$

În aceste condiții, notînd cu

$$\mathcal{Re} = \frac{\rho V \delta}{\mu}, \tag{4}$$

unde V este viteza relativă dintre suprafețele lubrificate, iar μ viscozitatea lubrifiantului, și cu u_{mt} viteza medie pe întreaga grosime a stratului de lubrifiant, legătura dintre această viteză și gradientul de presiune $\frac{\partial p}{\partial x}$ în direcția mișcării este [2]

$$-\frac{\delta^2}{\mu V}\frac{\partial p}{\partial x} = k_x\left(u_{mt}-\frac{V}{2}\right), \tag{5}$$

în care

$$k_x = k_{0x} + k_{1x}\mathcal{R}_e^{n} = 12 + 0{,}14\,\mathcal{R}_e^{0.725}. \tag{6}$$

Dat fiind faptul că mișcarea lubrifiantului se efectuează în straturi foarte subțiri, este posibil ca legile după care se produce mișcarea turbulentă să difere într-o oarecare măsură de legile obișnuite ale mișcărilor curente din mecanica fluidelor, care se produc la o scară macroscopică. Astfel, deși este foarte probabil ca mecanismul mișcării turbulente în interiorul stratului lubrifiant să fie același, este însă posibil ca pulsațiile turbulente și tensiunile turbulente să fie mai reduse decît pentru mișcările obișnuite, din cauza grosimii δ foarte reduse. Aceasta se traduce prin modificarea în consecință a lungimii de amestec l (2) și a valorii constantei $\varkappa$ (3).

În cazul cînd $\varkappa$ are altă valoare, toate rezultatele obținute pînă în prezent [1], [2], [3] rămîn valabile, cu corecția corespunzătoare modificării acestei constante. Într-adevăr, din examinarea ecuațiilor de mișcare și în special a ecuației distribuției vitezelor [1] se constată imediat că fenomenul nu depinde direct de numărul Reynolds, ci de parametrul

$$A = \varkappa^2\mathcal{R}_e. \tag{7}$$

Prin urmare, dacă în toate rezultatele obținute se înlocuiește numărul Reynolds cu $\frac{A}{0{,}16}$, acestea rămîn valabile pentru orice valoare a constantei $\varkappa$, care poate fi determinată experimental. Astfel relația (6) se scrie

$$k_x = 12 + 0{,}53\,A^{0.725}. \tag{8}$$

Din ecuația de continuitate, scrisă, pentru mișcările bidimensionale, sub forma globală

$$u_{mt}\delta = \frac{1}{2}V\delta_0 = \text{const.} \tag{9}$$

se deduce, ținînd seama de (5), ecuația diferențială a presiunilor sub forma

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu V}{\delta^2}\left[12 + 0{,}53\,\varkappa^{1.45}\left(\frac{\rho V\delta}{\mu}\right)^{0.725}\right]\left(1-\frac{\delta_0}{\delta}\right). \tag{10}$$

Să notăm cu

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\Delta},\quad \bar{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{\Delta}, \tag{11}$$

unde Δ este o grosime de referință.

Atunci, dacă se consideră viscozitatea constantă, și se pune

$$\mathcal{R}_e^* = \frac{\rho V \Delta}{\mu}, \quad A^* = \varkappa^2 \mathcal{R}_e^*, \tag{12}$$

ecuația diferențială (10) se scrie

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{\Delta^2} \frac{1}{\overline{\delta}^2}\left(1 - \frac{\overline{\delta}_0}{\overline{\delta}}\right) + \frac{0{,}265\, \mu V A^{*0{,}725}}{\Delta^2} \frac{1}{\overline{\delta}^{1{,}275}}\left(1 - \frac{\overline{\delta}_0}{\overline{\delta}}\right). \tag{13}$$

Dacă se consideră viscozitatea variabilă cu grosimea δ, după relația [2]

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q, \quad q = 1, \tag{14}$$

unde μ_1 este viscozitatea la intrare, respectiv în punctul în care începe zona de suprapresiuni ($\delta = \delta_1$), notînd cu

$$\mathcal{R}_{e1}^* = \frac{\rho V \Delta}{\mu_1}, \quad A_1^* = \varkappa^2 \mathcal{R}_{e1}^*, \tag{15}$$

ecuația diferențială a pierderilor (10) se poate pune sub forma

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu_1 V}{\overline{\delta}_1 \Delta^2}\left(1 + 0{,}044\ \overline{\delta}_1^{0{,}725}\ A_1^{*0{,}725}\right) \frac{1}{\overline{\delta}}\left(1 - \frac{\overline{\delta}_0}{\overline{\delta}}\right). \tag{16}$$

În cele ce urmează vom aplica rezultatele de mai sus la unele tipuri de lagăre mai uzuale.

1. LAGĂRE PLANE

Dacă grosimea stratului de lubrifiant variază liniar cu x, ecuațiile diferențiale (13) și (16) pot fi integrate fără dificultăți [2]. Astfel notînd cu δ_1 și δ_2 grosimea stratului de lubrifiant la cele două extremități (fig. 1)

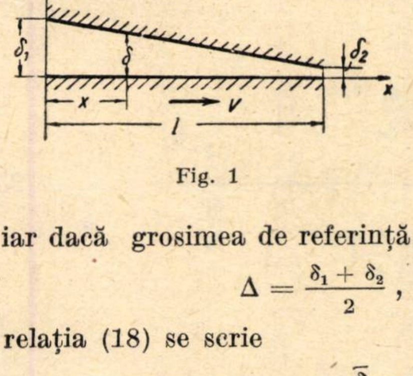


Fig. 1

$$\delta = \delta_1 - (\delta_1 - \delta_2)\frac{x}{l}, \tag{17}$$

sau respectiv

$$\overline{\delta} = \overline{\delta}_1 - (\overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_2)\frac{x}{l}, \tag{18}$$

iar dacă grosimea de referință este egală cu grosimea medie, notînd cu

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \alpha = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{\overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_2}{2}, \tag{19}$$

relația (18) se scrie

$$\overline{\delta} = 1 + \alpha - 2\alpha \frac{x}{l}. \tag{20}$$

Distribuția presiunilor, în cazul viscozității constante, va fi dată de relația

$$p = p_0 + \frac{6\mu\, Vl}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)\,\Delta^2}\left(\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}}{\bar{\delta}_1\,\bar{\delta}} - \frac{\bar{\delta}_0}{2\bar{\delta}_1^2}\,\frac{\bar{\delta}_1^2 - \bar{\delta}^2}{\bar{\delta}^2}\right) + \tag{21}$$
$$+ \frac{0{,}265\,\mu\, Vl\, A^{*0{,}725}}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta})\,\Delta^2}\left[\frac{1}{0{,}275\,\bar{\delta}_1^{0{,}275}}\left(\frac{\bar{\delta}_1^{0{,}275}}{\bar{\delta}^{0{,}275}} - 1\right) - \frac{\delta_0}{1{,}275\,\bar{\delta}_1^{1{,}275}}\left(\frac{\bar{\delta}_1^{1{,}275}}{\bar{\delta}^{1{,}275}} - 1\right)\right],$$

iar în cazul viscozității variabile

$$p = p_0 + \frac{6\mu\, Vl}{\bar{\delta}_1\,\Delta^2}\,(1 + 0{,}044\,\bar{\delta}_1^{0{,}725}\,A_1^{*0{,}725})\,\frac{1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\left(\ln\frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}} - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_1}\,\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}}{\bar{\delta}}\right)\cdot \tag{22}$$

În aceste relații, cu p_0 s-a notat presiunea din mediul înconjurător Constanta δ_0 trebuie determinată punînd condiția ca la $x = l$, $p = p_0$ (condiția ca $p = p_0$ la $x = 0$ este automat satisfăcută).

Se obține astfel, în cazul viscozității constante,

$$\bar{\delta}_0 = \frac{1 + 0{,}16\,A^{*0{,}725}\,\dfrac{(\bar{\delta}_1\,\bar{\delta}_2)^{0{,}725}}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\,(\bar{\delta}_1^{0{,}275} - \bar{\delta}_2^{0{,}275})}{1 + 0{,}069\,A^{*0{,}725}\,\dfrac{(\bar{\delta}_1\,\bar{\delta}_2)^{0{,}725}}{\bar{\delta}_1^2 - \bar{\delta}_2^2}\,(\bar{\delta}_1^{1{,}275} - \bar{\delta}_2^{1{,}275})}\cdot\frac{2\bar{\delta}_1\delta_2}{\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2}, \tag{23}$$

sau

$$\bar{\delta}_0 = \frac{1 + 0{,}08\,A^{*0{,}725}\,\dfrac{(1 - \alpha^2)^{0{,}725}}{\alpha}\,[(1 + \alpha)^{0{,}275} - (1 - \alpha)^{0{,}275}]}{1 + 0{,}01725\,A^{*0{,}725}\,\dfrac{(1 - \alpha^2)^{0{,}725}}{\alpha}\,[(1 + \alpha)^{1{,}275} - (1 - \alpha)^{1{,}275}]}\cdot(1 - \alpha^2), \tag{24}$$

sau încă, în funcție de raportul $\dfrac{\delta_1}{\delta_2}$,

$$\frac{\delta_0}{\delta_2} = \frac{1 + 0{,}16\,\bar{A}^{*0{,}725}\,\dfrac{\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}725}}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2} - 1}\left[\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}275} - 1\right]}{1 + 0{,}069\,\bar{A}^{*0{,}725}\,\dfrac{\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}725}}{\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 - 1}\left[\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}275} - 1\right]}\cdot\frac{2\dfrac{\delta_1}{\delta_2}}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2} + 1}, \tag{25}$$

unde acum

$$\bar{A}^{*} = \varkappa^2\,\overline{\mathcal{R}_e^{*}}, \quad \overline{\mathcal{R}_e^{*}} = \frac{\rho V \delta_2}{\mu}\,. \tag{26}$$

În cazul viscozității variabile, se obține

$$\overline{\delta}_0 = \frac{\overline{\delta}_1\overline{\delta}_2}{\overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_2} \ln \frac{\overline{\delta}_1}{\overline{\delta}_2} = \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha} \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}, \tag{27}$$

sau, în funcție de raportul $\frac{\delta_1}{\delta_2}$,

$$\frac{\delta_0}{\delta_2} = \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1} \ln \frac{\delta_1}{\delta_2}. \tag{28}$$

Pentru rezultanta presiunilor, pe unitatea de lățime a lagărului

$$P = \int_0^l (p - p_0)\, dx, \tag{29}$$

vom introduce coeficienții adimensionali

$$\zeta = \frac{P\Delta^2}{2\mu V l^2}, \quad \overline{\zeta} = \frac{P\delta_2^2}{2\mu V l^2}, \tag{30}$$

unde $\mu = \mu_m$ în cazul viscozității constante, și $\mu = \mu_1$ în cazul viscozității variabile.

Astfel, în cazul viscozității constante

$$\zeta = \frac{3}{4\alpha^2}\left[\ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} - \frac{2\alpha}{1 - \alpha}\left(1 + \frac{\alpha\overline{\delta}_0}{1 - \alpha^2}\right)\right] + 0{,}011 \frac{A^{*0{,}725}}{\alpha^2}\left\{\frac{1}{0{,}275}\left[\frac{(1+\alpha)^{0{,}725} - (1-\alpha)^{0{,}725}}{0{,}725} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)^{0{,}275}}\right] - \frac{\overline{\delta}_0}{1{,}275\,(1 + \alpha)^{1{,}275}}\left[\frac{1 + \alpha}{0{,}275} \frac{(1 + \alpha)^{0{,}275} - (1 - \alpha)^{0{,}275}}{(1 - \alpha)^{0{,}275}} - 2\alpha\right]\right\}, \tag{31}$$

sau, în funcție de raportul $\frac{\delta_1}{\delta_2}$,

$$\overline{\zeta} = \frac{3}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right)^2}\left[\ln \frac{\delta_1}{\delta_2} - \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta_0}{\delta_2} \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{0{,}044\, \overline{A}^{*0{,}725}}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right)^2}\left\{\frac{1}{0{,}275}\left[\frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}725} - 1}{0{,}725} - \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}275}}\right] - \right. \tag{32}$$

$$\left. - \frac{\frac{\delta_0}{\delta_2}}{1{,}275}\left[\frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}275} - 1}{0{,}275\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}275}} - \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}275}}\right]\right\}.$$

În cazul viscozității variabile

$$\zeta = \frac{3}{2\alpha(1+\alpha)}\left[1 + 0{,}044\ A_1^{\star\,0{,}725}(1+\alpha)^{0{,}725}\right]\left[1 - \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2}\left(\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2\right], \tag{33}$$

și

$$\overline{\zeta} = \frac{3}{\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}-1\right)}\left[1 + 0{,}44\ \overline{A}_1^{\star\,0{,}725}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}725}\right]\left[1 - \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}-1\right)^2}\left(\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\right], \tag{34}$$

unde acum

$$\overline{A}_1^{\star} = \varkappa^2\,\overline{\mathcal{R}}_{e1}^{\star}, \quad \overline{\mathcal{R}}_{e1}^{\star} = \frac{\rho V \delta_2}{\mu_1}. \tag{35}$$

Distanța $x^\star$ la care este plasată rezultanta presiunilor este egală cu

$$\frac{x^\star}{l} = \frac{1}{Pl}\int_0^l (p-p_0)\,x\,dx = \frac{\Delta^2}{2\mu V l^3 \zeta}\int_0^l (p-p_0)\,x\,dx. \tag{36}$$

În cazul viscozității constante rezultă

$$\begin{aligned}\frac{x^\star}{l} = \frac{1+\alpha}{2\alpha} - \frac{3}{8\alpha^3\zeta}\Biggl\{\biggl[2\alpha - \frac{\overline{\delta}_0}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{2\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{\delta_0}{2}\,\frac{1}{1+\alpha}\right)\biggr] + \\ + 0{,}044A^{\star 0{,}725}\Biggl\{\frac{1}{0{,}275\,(1+\alpha)^{0{,}275}}\biggl[\frac{(1+\alpha)^{0{,}275}}{1{,}725}\Bigl((1+\alpha)^{1{,}725} - (1-\alpha)^{1{,}725}\Bigr) - \\ - 2\alpha\biggr] - \frac{\overline{\delta}_0}{1{,}275\,(1+\alpha)^{1{,}275}}\biggl[\frac{(1+\alpha)^{1{,}275}}{0{,}725}\Bigl((1+\alpha)^{0{,}725} - (1-\alpha)^{0{,}725}\Bigr) - 2\alpha\biggr]\Biggr\}\Biggr\},\end{aligned} \tag{37}$$

sau

$$\begin{aligned}\frac{x^\star}{l} = \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\frac{\delta_1}{\delta_2}-1} - \frac{3}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}-1\right)^3\overline{\zeta}}\Biggl\{\Biggl[\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 - \frac{\delta_0}{2\delta_2}\ln\frac{\delta_1}{\delta_2} - \frac{\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}-1}{2\,\frac{\delta_1}{\delta_2}}\left(1 - 2\,\frac{\frac{\delta_0}{\delta_2}}{\frac{\delta_1}{\delta_2}}\right)\Biggr] + \\ + 0{,}044\ \overline{A}^{\star 0{,}725}\Biggl\{\frac{1}{0{,}275\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}275}}\Biggl[\frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}275}}{1{,}725}\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}725} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} - 1\right)\Biggr] - \\ - \frac{\frac{\delta_0}{\delta_2}}{1{,}275\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}275}}\Biggl[\frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}275}}{0{,}725}\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}725} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} - 1\right)\Biggr]\Biggr\}\Biggr\},\end{aligned} \tag{38}$$

iar în cazul viscozității variabile

$$\frac{x^\star}{l} = \frac{1-\alpha^2}{8\,\alpha^2}\,\frac{\left(1 - \frac{1+\alpha}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1 - \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2}\left(\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2}, \tag{39}$$

sau

$$\frac{x^\star}{l} = \frac{1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right)^2}\,\frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}\right)\ln\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{3}{4}\,\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right] + \frac{1}{4}}{1 - \frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}\right)^2}. \tag{40}$$

Dacă viscozitatea este variabilă, alura curbei presiunilor este aceeași ca și pentru cazul regimului laminar, valorile efective fiind amplificate cu factorul $\left\{1 + 0{,}44\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0,725}\overline{A}_1^{\star\,0,725}\right\}$. În cazul viscozității constante presiunile își modifică alura față de cazul laminar, însă diferențele sînt reduse, după cum se constată din figura 2, în care s-a reprezentat distribuția presiunilor raportate la presiunea medie pentru $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 2$, pentru regimul laminar și regimul tubulent extrem $\mathcal{R}_e \rightarrow \infty$. În figurile 3 și 4 s-a reprezentat variația coeficientului $\overline{\zeta}$ în funcție de $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ în cazul viscozității constante și variabile.

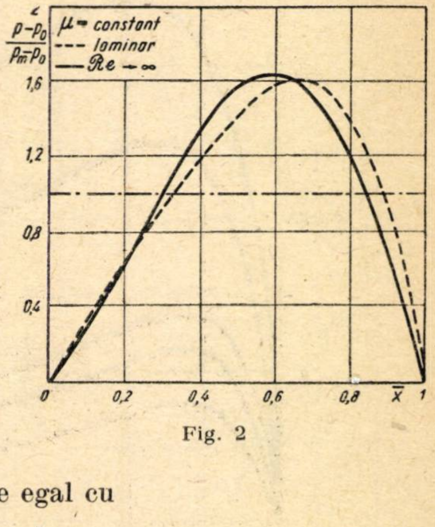


Fig. 2

Rezultatele de mai sus sînt evident valabile numai dacă mișcarea în interiorul stratului de lubrifiant este efectiv turbulentă. Astfel, procedînd întocmai ca și pentru lagărele circulare [2] pentru a verifica acest fapt, vom nota cu

$$\mathcal{R}_{em} = \frac{2\,\rho u_{mt}\,\delta}{\mu}, \tag{41}$$

care, în cazul viscozității constante, este egal cu

$$\mathcal{R}_{em} = \overline{\delta}_0\,\mathcal{R}_e^\star = \frac{\delta_0}{\delta_2}\,\overline{\mathcal{R}_e}^\star \tag{42}$$

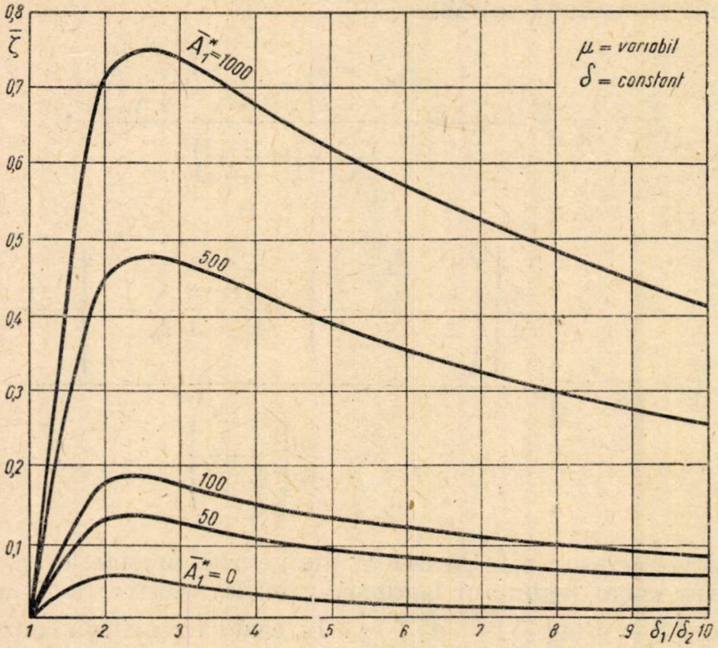

0,8
$\bar{\zeta}$
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\bar{A}_1^* = 1000$
500
100
50
$\bar{A}_1^* = 0$
μ = variabil
δ = constant
1
2
3
4
5
6
7
8
9
δ_1/δ_2
10

Fig. 3

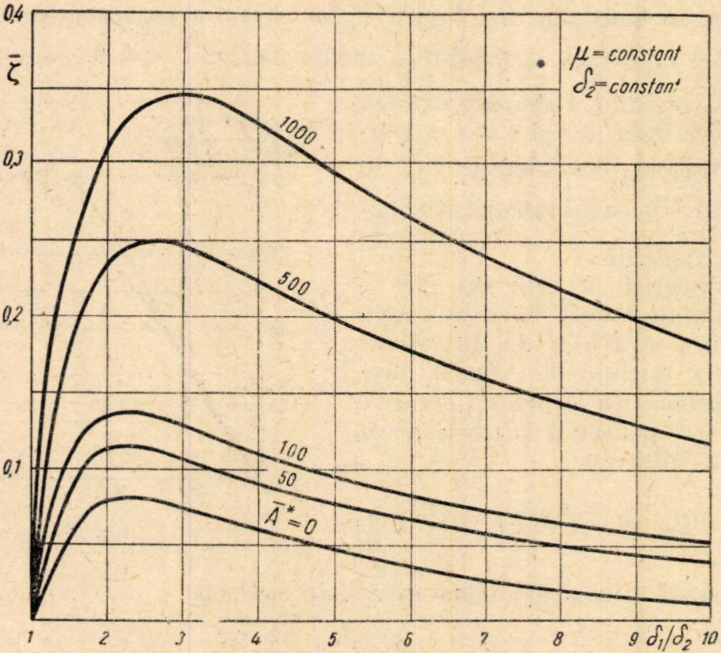

0,4
$\bar{\zeta}$
0,3
0,2
0,1
1000
500
100
50
$\bar{A}^* = 0$
μ = constant
δ_2 = constant
1
2
3
4
5
6
7
8
9
δ_1/δ_2
10

Fig. 4

şi este constant în lungul stratului de lubrifiant. În cazul viscozității variabile

$$\mathcal{R}e_m = \frac{\overline{\delta}_0 \overline{\delta}_1}{\overline{\delta}} \mathcal{R}e_1^{\star} = \frac{\delta_0}{\delta_2} \frac{\delta_1}{\delta} \overline{\mathcal{R}e}_1^{\star} . \tag{43}$$

şi creşte în lungul stratului de lubrifiant.

Valoarea $\mathcal{R}e_m$ trebuie evident să depăşească numărul Reynolds critic.

2. LAGĂRE CU DISCONTINUITĂŢI DE ORDINUL I

Să considerăm lagărul din figura 5. Pentru prima zonă, grosimea variază liniar cu x_1 şi sînt valabile formulele (21) şi (22). Pentru a doua zonă, $\delta = \delta_2 = \text{const.}$, şi din ecuaţia de continuitate (9), rezultă

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \text{const.} \tag{44}$$

întocmai ca şi în cazul regimului laminar [4]. În consecinţă, dacă notăm cu p_2 presiunea în punctul B, distribuţia presiunilor pe zona BC este egală cu

$$p = p_2 - \frac{p_2 - p_0}{l_2} x_2 . \tag{45}$$

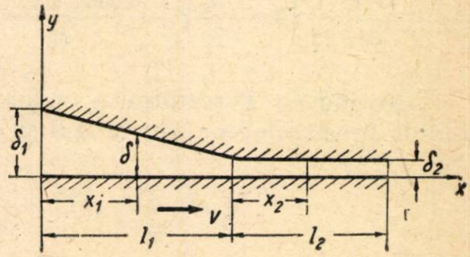


Fig. 5

Necunoscutele p_2 şi δ_0 se determină punînd condiţiile de racordare în punctul B pentru cele două soluţii

$$(p)_{AB} = (p)_{BC}, \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)_{AB} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)_{BC}, \tag{46}$$

sau se scriu, dacă se consideră viscozitatea variabilă,

$$\left.\begin{aligned} &p_2 - p_0 = \frac{6\mu_1 V l_1}{\overline{\delta}_1 \Delta^2 (\overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_2)} (1 + 0{,}044\, \overline{\delta}_1^{0{,}725} A_1^{\star 0{,}725}) \left(\ln \frac{\overline{\delta}_1}{\overline{\delta}_2} - \frac{\overline{\delta}_0}{\overline{\delta}_1} \frac{\overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_2}{\overline{\delta}_2}\right), \\ &\frac{6\mu_1 V}{\overline{\delta}_1 \Delta^2} (1 + 0{,}044\, \overline{\delta}_1^{0{,}725} A_1^{\star 0{,}725}) \frac{1}{\overline{\delta}_2} \left(1 - \frac{\overline{\delta}_0}{\overline{\delta}_2}\right) = - \frac{p_2 - p_0}{l_2}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

de unde se deduce imediat

$$\delta_0 = \delta_2 \frac{\dfrac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2} \ln \dfrac{\delta_1}{\delta_2} + \dfrac{l_2}{l_1} \dfrac{\delta_1}{\delta_2}}{1 + \dfrac{l_2}{l_1} \dfrac{\delta_1}{\delta_2}}, \tag{48}$$

şi

$$p_2 - p_0 = \frac{6\mu_1 V l_2}{\bar{\delta}_1 \Delta^2}\left(1 + 0{,}044\ \bar{\delta}_1^{0,725} A_1^{\star 0,725}\right)\frac{1}{\bar{\delta}_2}\left(1 - \frac{\dfrac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}\ln\dfrac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2} + \dfrac{l_2}{l_1}\dfrac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}}{1 + \dfrac{l_2}{l_1}\dfrac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2}}\right). \quad (49)$$

În cazul cînd viscozitatea este constantă, valorile δ_0 şi p_2 se deduc din sistemul

$$\left.\begin{aligned} p_2 - p_0 &= \frac{6\mu V l_1}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)\Delta^2}\left(\frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2} - \frac{\bar{\delta}_0}{2}\frac{\bar{\delta}_1^2 - \bar{\delta}_2^2}{\bar{\delta}_1^2\bar{\delta}_2^2}\right) + \frac{0{,}265\,\mu V l_1 A^{\star 0,725}}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)\Delta^2} \times \\ &\times\left[\frac{1}{0{,}275}\frac{\bar{\delta}_1^{0,275} - \bar{\delta}_2^{\,0,275}}{(\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2)^{0,275}} - \frac{\bar{\delta}_0}{1{,}275}\frac{\bar{\delta}_1^{\,1,275} - \bar{\delta}_2^{\,1,275}}{(\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2)^{1,275}}\right], \\ \frac{6\mu V}{\Delta^2}\frac{1}{\bar{\delta}_2^2}\left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_2}\right) &+ \frac{0{,}265\,\mu V A^{\star 0,725}}{\Delta^2}\frac{1}{\bar{\delta}_2^{\,1,275}}\left(1 - \frac{\bar{\delta}_0}{\bar{\delta}_2}\right) = -\frac{p_2 - p_0}{l_2}. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Notînd cu P rezultanta presiunilor, şi cu P_1 şi P_2 respectiv rezultantele presiunilor pe zonele AB şi BC, şi cu

$$\bar{\zeta} = \frac{P\delta_2^2}{2\mu V l^2}, \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{P_1\delta_2^2}{2\mu V l_1^2}, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{P_2\delta_2^2}{2\mu V l_2^2}, \quad (51)$$

rezultă

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_1\frac{l_1^2}{l^2} + \bar{\zeta}_2\frac{l_2^2}{l^2}, \quad (52)$$

în care

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_1 = 3\left(1 + 0{,}044\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0,725}\bar{A}_1^{\star 0,725}\right)\frac{1}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right)} \times \\ \times\left[1 - \frac{1}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2} - 1}\ln\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\dfrac{\delta_0}{\delta_2}}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}}\left(1 - \frac{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}}{\dfrac{\delta_1}{\delta_2} - 1}\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\right], \end{aligned} \quad (53)$$

în cazul viscozităţii variabile şi este dat de aceeaşi relaţie (32) în cazul viscozităţii constante, iar

$$\bar{\zeta}_2 = \frac{(p_2 - p_0)\,\delta_2^2}{4\mu V l_2}, \quad (54)$$

în care $\mu = \mu_m$ sau $\mu = \mu_1$, după cum se consideră viscozitatea constantă sau variabilă.

3. LAGĂRE ÎN TREPTE

În acest caz (fig. 6), rezultă o distribuție liniară a presiunilor atît pe zona AB, cît și pe zona BC

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{p_2 - p_0}{l_1} x_1 , \\ p &= p_2 - \frac{p_2 - p_0}{l_2} x_2 , \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

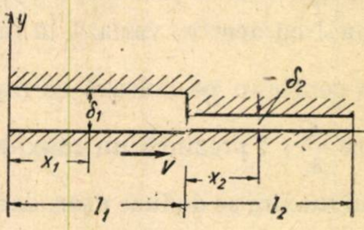


Fig. 6

iar necunoscuta p_2 se deduce din condiția ca debitul de lubrifiant să fie același în ambele zone

$$u_{mt_1} \, \delta_1 = u_{mt_2} \, \delta_2, \qquad (56)$$

sau, ținînd seama de relația (5) și notînd

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 12 + 0{,}53 \, A_1^{0{,}725} = 12 + 0{,}53 \varkappa^{1{,}45} \left(\frac{\rho V \delta_1}{\mu} \right)^{0{,}725} , \\ k_2 &= 12 + 0{,}53 \, A_2^{0{,}725} = 12 + 0{,}53 \varkappa^{1{,}45} \left(\frac{\rho V \delta_2}{\mu} \right)^{0{,}725} , \\ & \frac{A_2}{A_1} = \frac{\mathcal{R}e_2}{\mathcal{R}e_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} , \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

rezultă ecuația

$$-\frac{\delta_1^3}{\mu k_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{V}{2} \delta_1 = -\frac{\delta_2^3}{\mu k_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{V}{2} \delta_2 . \qquad (58)$$

Calculînd derivatele $\dfrac{\partial p}{\partial x_{1,2}}$ cu ajutorul relațiilor (55), ecuația (58) se scrie

$$-\frac{\delta_1^3}{\mu k_1} \frac{p_2 - p_0}{l_1} + \frac{V}{2} \delta_1 = \frac{\delta_2^3}{\mu k_2} \frac{p_2 - p_0}{l_2} + \frac{V}{2} \delta_2 , \qquad (59)$$

de unde se deduce

$$p_2 - p_0 = \frac{\mu k_1 V l_1}{2 \delta_1^2} \, \frac{1 - \dfrac{\delta_2}{\delta_1}}{1 + \dfrac{\delta_2^3}{\delta_1^3} \dfrac{k_1}{k_2} \dfrac{l_1}{l_2}} . \qquad (60)$$

Pentru rezultanta presiunilor, considerînd același coeficient adimensional $\overline{\zeta}$ ca și mai înainte (51) rezultă imediat

$$\overline{\zeta} = \frac{(p_2 - p_0) \, \delta_2^2}{2 \mu \, V l} = \frac{k_1}{4} \, \frac{l_1}{l} \, \frac{\left(1 - \dfrac{\delta_2}{\delta_1} \right) \dfrac{\delta_2^2}{\delta_1^2}}{1 - \dfrac{\delta_2^3}{\delta_1^3} \dfrac{k_1}{k_2} \dfrac{\dfrac{l_1}{l}}{1 - \dfrac{l_1}{l}}} . \qquad (61)$$

Dacă în această relație se face $\mathcal{R}e = 0$, respectiv $k_1 = k_2 = 12$ se regăsește formula obținută pentru cazul regimului laminar [4].

După cum se poate ușor constata, atît p_2 cît și $\bar{\zeta}$ care este direct proporțional cu acesta, variază în funcție de rapoartele $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ și $\frac{l_1}{l}$. Mai precis $\bar{\zeta}$ crește continuu pe măsură ce raportul $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ scade, iar, pentru o anumită valoare $\frac{\delta_2}{\delta_1}$, $\bar{\zeta}$ prezintă un maxim în funcție de raportul $\frac{l_1}{l}$. Valoarea acestui maxim se deduce ușor, derivînd relația (6) în raport cu $\frac{l_1}{l}$ și egalînd rezultatul cu zero. Se obține astfel

$$\left(\frac{l_1}{l}\right)_{\text{optim}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{62}$$

ar valoarea $\bar{\zeta}$ corespunzătoare

$$\zeta_{\text{optim}} = \frac{k_1}{4}\,\frac{l_1}{l}\,\frac{\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}}{1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{63}$$

După cum se vede, raportul $\frac{l_1}{l}$ optim depinde atît de $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ cît și de numărul Reynolds al scurgerii. El tinde către unitate cînd $\frac{\delta_2}{\delta_1} \to 0$. Acest fapt nu este fizic posibil și de aceea valoarea minimă $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ trebuie limitată printr-o condiție fizică. Această condiție se poate pune la fel ca și pentru cazul regimului laminar [4] și anume ca distribuția vitezelor să nu prezinte zone cu viteze negative (fig. 7), cu alte cuvinte ca

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0. \tag{64}$$

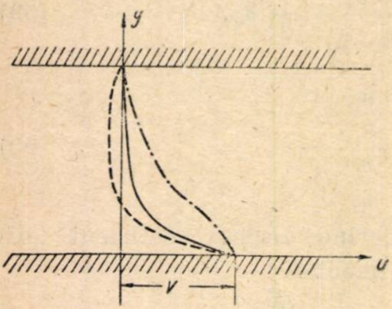


Fig. 7

Această condiție se poate pune cu ușurință, ținînd seama de rezultatele obținute anterior pentru distribuția vitezelor în stratul de lubrifiant. Astfel din lucrarea [1] se deduce că în aceste condiții

$$\frac{dp}{dx_1} = \frac{\mu V}{\delta_1^2} B_1', \tag{65}$$

se deduce calculînd valoarea B_1' din sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\sqrt{A_1 B_1'}},\\
&C_2 = 1 - B_1'\bar{y}_{\mathrm{I}}\left(1-\frac{\bar{y}_{\mathrm{I}}}{2}\right) + \sqrt{\frac{B_1'}{A_1}}\left[2\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}}}{1-\sqrt{1-\bar{y}_{\mathrm{I}}}}\right],\\
&C_2 - \sqrt{\frac{B_1'}{A_1}}\left[\sqrt{2} - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = C_2' + \sqrt{2\frac{B_1'}{A_1}},\\
&C_2' = \frac{B_1'}{2}\, y_{\mathrm{I}}'^{2} - \sqrt{\frac{B_1'}{A_1}}\sqrt{\bar{y}_{\mathrm{I}}'},\\
&\bar{y}_{\mathrm{I}}' = \frac{1}{(A_1 B_1')^{\frac{1}{3}}},
\end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

unde A_1 este dat de relația (7) în care numărul Reynolds este raportat la grosimea δ_1, iar $y_{\mathrm{I}} = \delta_1\bar{y}_{\mathrm{I}}$, $y_{\mathrm{I}}' = \delta_1 y_{\mathrm{I}}'$ sînt grosimile substraturilor laminare din imediata apropiere a celor două suprafețe, și C_2, C_2' constante de integrare.

Apoi raportul $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ se deduce înlocuind în relația (65) derivata $\frac{dp}{dx_1}$ obținută cu ajutorul relațiilor (55) și (60). Se obține astfel, ținînd seama și de relația (62), ecuația

$$2B_1'\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} + k_1\frac{\delta_2}{\delta_1} - (k_1 - 2B_1') = 0. \qquad (67)$$

Pentru diferite numere Reynolds, respectiv pentru diferite valori ale parametrului A_1, valorile corespunzătoare pentru B_1', $\frac{\delta_2}{\delta_1}$, $\frac{l_1}{l}$ și $\bar{\zeta}$ optime sînt trecute în tabela 1 și în diagrama din figura 8.

Tabela 1

A	0	160	800	1 600	16 000
B_1'	2	7,5	21,9	36	200
$\frac{\delta_2}{\delta_1}$	0,535	0,405	0,305	0,290	0,200
$\frac{l_1}{l}$	0,721	0,776	0,812	0,818	0,860
$\bar{\zeta}$	0,206	0,885	1,36	1,96	4,9

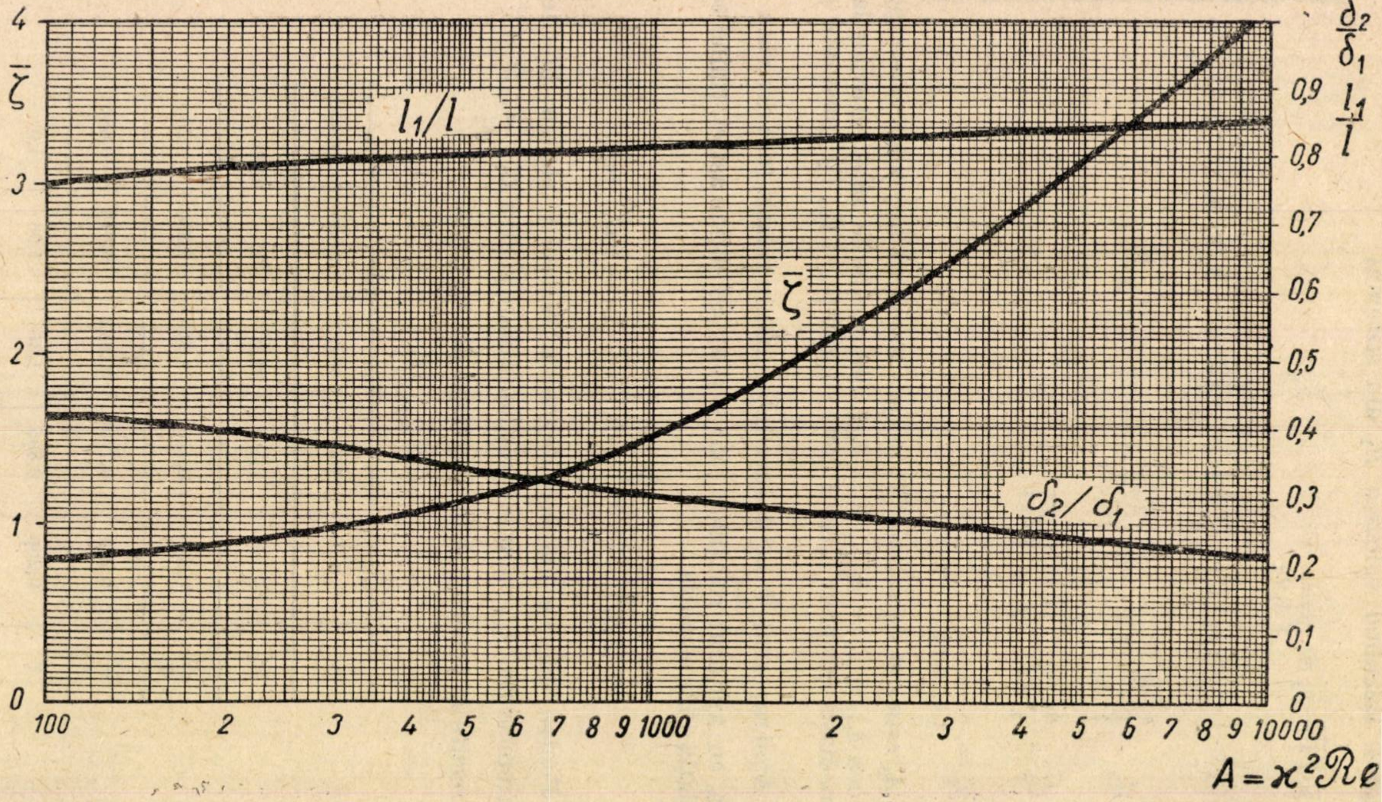

$\bar{\zeta}$
4
3
2
1
0
l_1/l
$\bar{\zeta}$
δ_2/δ_1
$\frac{\delta_2}{\delta_1}$ $\frac{l_1}{l}$
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
100
2
3
4
5
6
7
8
9
1000
2
3
4
5
6
7
8
9
10000
$A = \varkappa^2 \mathcal{R}e$

Fig. 8

Se constată că toate aceste mărimi prezintă o variație continuă cu numărul Reynolds. În particular, variația parametrului B'_1 cu numărul Reynolds în funcție de care celelalte valori se calculează imediat, poate fi aproximată foarte bine de relația

$$B'_1 = 2 + 0{,}101\ A_1^{0,79}. \tag{68}$$

Pe măsură ce numărul Reynolds crește, raportul $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ scade, raportul $\frac{l_1}{l}$ crește, iar coeficientul $\overline{\zeta}$ crește de asemenea. Se constată creșterea apreciabilă a capacității portante cu numărul Reynolds, în special față de cazul regimului laminar.

Numărul Reynolds $\mathcal{R}e_m$ (41), care trebuie comparat cu numărul Reynolds critic pentru a verifica dacă mișcarea este efectiv turbulentă sau nu, poate fi ușor calculat. Astfel, pentru prima zonă el este egal cu

$$\mathcal{R}e_{m_1} = \mathcal{R}e_1\left(1 + \frac{2B_1}{k_1}\right) = \frac{\rho V \delta_1}{\mu}\left(1 - \frac{2}{k_1}\frac{\delta_1^2}{\mu V}\frac{p_2 - p_0}{l_1}\right), \tag{69}$$

iar pentru a doua zonă

$$\mathcal{R}e_{m_1} = \mathcal{R}e_2\left(1 - \frac{2B_2}{k_2}\right) = \frac{\rho V \delta_2}{\mu}\left(1 + \frac{2}{k_1}\frac{\delta_2^2}{\mu V}\frac{p_2 - p_0}{l_2}\right). \tag{70}$$

★

Din cele de mai sus se constată că se pot calcula distribuțiile de presiuni cu ajutorul rezultatelor obținute anterior [1], [2], într-o serie de tipuri de lagăre care interesează pentru aplicații, ca de exemplu lagărele compuse din suprafețe plane. Pe lîngă exemplele date, se pot calcula pe aceeași cale și alte tipuri de lagăre mai complicate, ca de exemplu lagăre în trepte cu suprafețe înclinate etc. În toate cazurile se observă că alura distribuției presiunilor este asemănătoare aceleia care se obține în cazul regimului laminar, dar că valorile presiunilor sînt sensibil mai mari și cresc cu numărul Reynolds.

Primită la redacție la 11 martie 1959.

РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ СМАЗКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Определяется распределение давлений в подшипниках, состоящих из плоских поверхностей при турбулентном режиме смазки на основе полученных ранее результатов [1], [2] с использованием гипотезы длины смещения Прандтля. Эти результаты представляются в более общем

виде, справедливом для различных зависимостей длины смешения расстояния до стенки.

Приводятся формулы и диаграммы для расчета плоских подлинников и подшипников с прерывистым слоем смазки (ступенчатые подшипники) в различных условиях работы и для различных чисел Рейнольдса.

LE CALCUL DES PALIERS COMPOSÉS DE SURFACES PLANES, LUBRIFIÉS EN RÉGIME TURBULENT

RÉSUMÉ

En utilisant des résultats obtenus antérieurement [1], [2] basés sur l'hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl, l'auteur détermine la distribution des pressions dans les paliers composés de surfaces planes, lubrifiés en régime turbulent. Les résultats sont mis sous une forme générale, valable pour différentes relations entre la longueur de mélange et la distance aux parois.

On obtient des formules et diagrammes pour le calcul des paliers plans et des paliers pour lesquels la couche de lubrifiant présente des discontinuités, pour différentes conditions de fonctionnement et en fonction du nombre de Reynolds.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 103 (1958).
2. — *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 139 (1958).
3. — *Asupra lubrificației cu gaze în regim turbulent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2* (1958).
4. N. TIPEI, *Hidro-aerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.

ASUPRA TRADUCTORULUI POLAR PENTRU CERCETAREA MECANISMELOR

DE

R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC și GR. ANTONESCU

Pentru studiul pe cale experimentală a traiectoriilor diferitelor puncte ale elementelor mecanismelor plane, în cadrul laboratorului de teoria mecanismelor, de la Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R., a fost realizată o instalație simplă dotată cu o aparatură experimentală adecvată. Această instalație se compune dintr-o masă pentru modelarea mecanismelor, o trusă cu diferite elemente prelucrate în așa fel încît din ele să se poată monta pe masă un număr cît mai variat de scheme cinematice și traductori pentru transformarea parametrilor cinematici în mărimi electrice. În felul acesta, variațiile mărimilor mecanice pot fi transpuse pe ecranul unui oscilograf catodic cu persistență pentru a putea fi vizualizate (fig. 1).

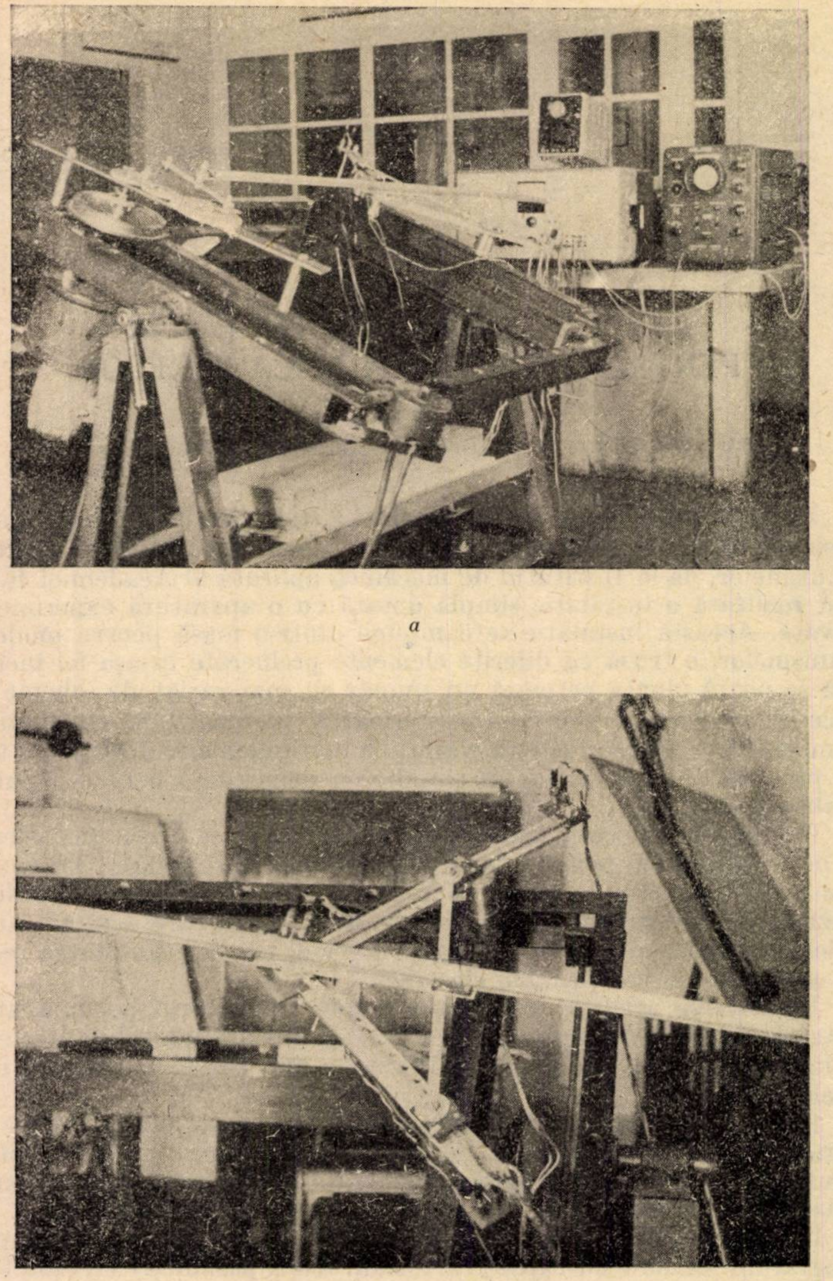
Pentru înregistrare, traiectoriile se descompun după un sistem de axe de coordonate rectangulare — carteziene sau polare. Traductorul mecanic, ce descompune mișcarea după un sistem de axe de coordonate carteziene, a fost studiat în lucrarea noastră [1] în care s-au arătat atît erorile sistematice și accidentale care intervin, cît și posibilitatea reducerilor, prin metoda compensării electrice.

În lucrarea aceasta, vom trata despre traductorul polar, analizînd avantajele sale față de traductorul cartezian, precum și posibilitatea extinderii lui la cercetarea traiectoriilor diferitelor puncte ale elementelor mecanismelor spațiale.

1. Traductorul polar mecanic se compune dintr-o bielă OM articulată în punctul M, aparținînd unui element al mecanismului a cărui mișcare se studiază. Această bielă, împreună cu culisa OA, articulată în O la suportul instalației, formează un mecanism cu culisă oscilantă (fig. 2).

În felul acesta, se pot obține parametrii polari ρ și θ. Din cauza oscilografului catodic cu baleiaj cartezian, acești parametri trebuie transformați în parametri cartezieni prin relațiile cunoscute

$$x = \rho \cos\theta,$$
$$y = \rho \sin\theta.$$



a

b

Fig. 1

Transformarea mecanică a parametrului θ în sin θ și cos θ se realizează cu un mecanism elipsograf. De culisa oscilantă OA este articulată în punctul A o bară $\overline{M}_x\,\overline{M}_y$, cu capetele M_x și M_y, articulate la rîndul lor la două culise ce se pot deplasa de-a lungul a două direcții perpendiculare

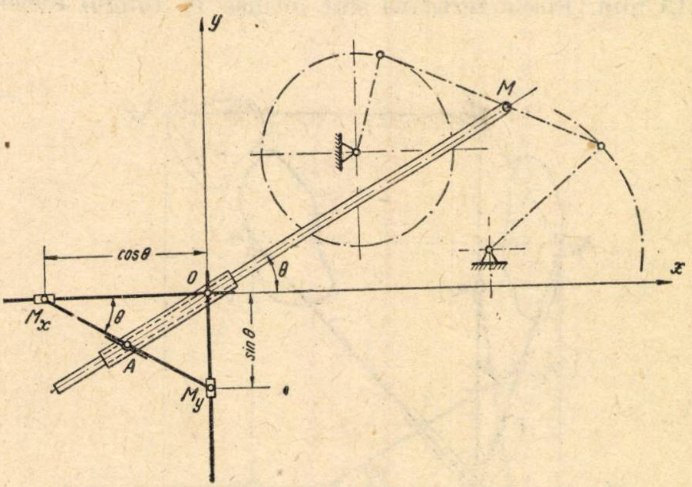


Fig. 2

Ox și Oy și care formează sistemul de axe de coordonate rectangulare. Din cauza lungimilor luate constructiv egale după figură

$$OA = AM_x = AM_y = r$$

rezultă

$$OM_x = 2r.\cos\theta,$$
$$OM_y = 2r.\sin\theta.$$

Efectuarea produselor ρ cos θ și ρ sin θ respectiv $\overline{OM}\cdot\overline{OM}_y$ și $\overline{OM}\cdot\overline{OM}_x$, se face pe cale electronică, după ce în prealabil variațiile lungimilor respective au fost transformate în variații proporționale de tensiuni electrice.

Acest traductor se poate extinde și la cercetarea mecanismelor spațiale, prin urmărirea coordonatelor polare spațiale ρ, θ și φ. Traductorul mecanic spațial din punct de vedere constructiv nu se deosebește de acela pentru studiul mecanismelor plane decît prin adaptarea în plus a unui mecanism elipsograf pentru transformarea parametrului polar φ în funcțiile trigonometrice sin φ și cos φ. Conform figurii 3 avem

$$OM_x = 2r.\cos\theta, \qquad OM_y = 2r\cdot\cos\varphi,$$
$$OM_{yz} = 2r\cdot\sin\theta, \qquad OM_z = 2r\cdot\sin\varphi.$$

Coordonatele carteziene se obțin la fel pe cale electronică

$$x = \rho\ \cos\theta,$$
$$y = \rho\ \sin\theta\ \cos\varphi,$$
$$z = \rho\ \sin\theta\ \sin\varphi.$$

Pe ecranul oscilografului catodic apare fie diagrama proiecţiei deplasării pe una din axe în funcţie de timp, fie proiecţia traiectoriei pe unul din planele de coordonate.

2. Drept traductori electrici se utilizează fire rezistive din manganină de $\varnothing = 0{,}15$ mm. Firele rezistive sînt întinse în lungul bielei OM şi în lungul laturilor OM_x şi OM_y, ale mecanismului elipsograf. Prin intermediul unor contactori, se culeg tensiuni proporţionale cu variaţia rezistenţei firelor, deci proporţionale şi cu deplasările liniare ale pietrelor de culisă. Astfel, în punctele O, M_x şi M_y se obţin tensiunile u_ρ, $u_{\cos\theta}$ şi $u_{\sin\theta}$.

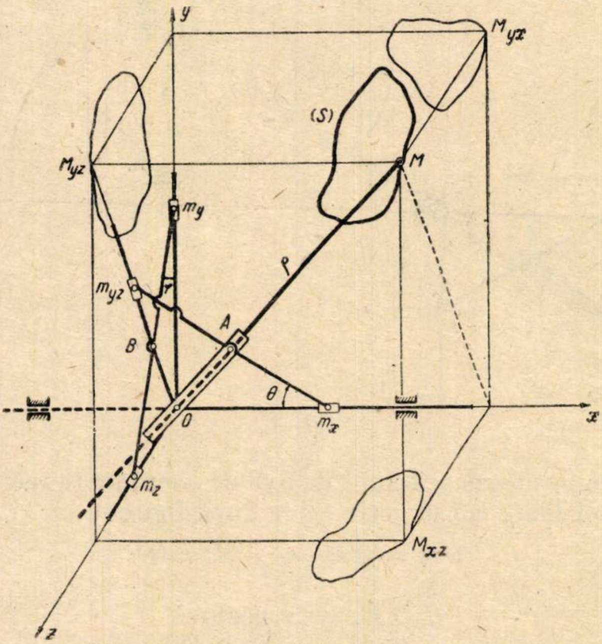


Fig. 3

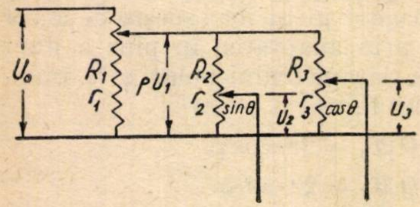


Fig. 4

3. Realizarea produselor $\rho\cos\theta$ şi $\rho\sin\theta$ se face pe cale electronică, pe principiul înmulţirii potenţiometrice (fig. 4).

Dacă circuitul este alimentat sub tensiunea U_0, rezultă tensiunea U_1 aproximativ proporţională cu rezistenţa r_1, iar tensiunea U_2 (respectiv U_3) aproximativ proporţională cu produsul rezistenţelor $r_1.r_2$ (respectiv $r_1 \cdot r_3$).

Acestea fiind proporționale cu ρ și $\cos\theta$ sau $\sin\theta$ se obțin produsele care determină coordonatele x și y

$$U_1 \simeq \frac{U_0}{R_1} r_1 [\rho],$$

$$U_2 = \frac{U_1}{R_2} r_2 [\sin\theta] \simeq \frac{U_0}{R_1 R_2} r_1 r_2 [\rho \sin\theta],$$

$$U_3 \simeq \frac{U_1}{R_3} r_3 [\cos\theta] \simeq \frac{U_0}{R_1 R_3} r_1 r_3 [\rho \cos\theta],$$

adică

$$U_2 \simeq k_2 y,$$

$$U_3 \simeq k_3 x.$$

Rezistențele R_1, R_2 și R_3 sînt traductorii electrici rezistivi de pe care se culeg mărimile r_1 (ρ), r_2 ($\sin\theta$), r_3 ($\cos\theta$). Instalația dă o precizie cu atît mai mare, cu cît se realizează mai bine condițiile

$$R_2 \gg R_1, \quad R_3 \gg R_1, \quad R_m \gg R_2 \text{ și } R_3,$$

unde R_m este rezistența instrumentului de măsură. Îndeplinirea acestor condiții se face prin introducerea unui etaj separator între R_1 și R_2 respectiv R_3 (fig. 5).

Pentru evitarea unei construcții complicate și pentru obținerea unei bune stabilități, cît și a unei manipulări simple, s-a evitat utilizarea amplificatorilor de curent continuu. În acest sens, traductorii electrici sînt alimentați cu o tensiune alternativă de frecvență $f = 10$ kHz, aleasă în condiția $f \gg f_m$, unde f_m este frecvența de repetiție a traiectoriilor. S-a impus

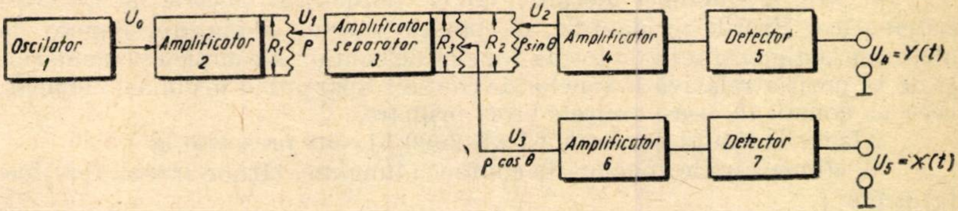

Oscilator 1
U_0
Amplificator 2
R_1
ρ
U_1
Amplificator separator 3
R_3
R_2
U_2
$\rho \sin\theta$
Amplificator 4
Detector 5
$U_4 = Y(t)$
U_3
$\rho \cos\theta$
Amplificator 6
Detector 7
$U_5 = X(t)$

Fig. 5

această condiție pentru o evitare a eventualelor distorsiuni ale anvelopei. Cum mecanismele sînt acționate cu un motor electric de 1 500 rot/min, printr-un reductor cu șase trepte, fiecare treaptă de reducere fiind $i = 1/2{,}5$, rezultă că

$$0{,}1 \text{ Hz} < f_m < 10 \text{ Hz},$$

ceea ce este satisfăcător și pentru un număr destul de mare de armonici. Conform schemei bloc (fig. 5), oscilațiile sinusoidale de tensiune U_0 și frecvență f sînt amplificate și modulate cu frecvența f_m, corespunzătoare oscialațiilor ρ și $\rho \cos\theta$ sau $\rho \sin\theta$ și în urmă detectate pentru obținerea variațiilor corespunzătoare x și y.

Schema de principiu (fig. 6) arată că oscilatorul local T_1 este realizat cu pentoda 6Ж4, într-un montaj R — C, cu trei celule de defazare. Primul etaj de amplificare T_2 este realizat cu pentoda de putere 6п9, intrarea făcîndu-se prin potențiometrul P_1, grila tubului fiind legată la cursor. În felul acesta nivelul aplicat pe grila amplificatorului T_2 este prereglat pentru a se menține un nivel suficient, nedistorsionat la bornele B_2 — B_4, unde se montează rezistența R_1 a traductorului ρ. Bornele B_2 — B_4 pot fi legate la diferite prize ale transformatorului Tr_1, pentru a se face adaptarea între impedanța de sarcină optimă pe care lucrează tubul 6п9 și rezistența traductorul ρ. Cursorul traductorului ρ legat la borna B_3, aplică tensiunea corespunzătoare la amplificatorul separator (T_3), realizat după aceleași principii. Între bornele B_6 — B_7 și B_9 — B_{10}, se obțin tensiuni proporționale cu $\rho \cos\theta$ și $\rho \sin\theta$, amplificate în T_4 prin dubla triodă 6H8C și reglate pentru a nu fi distorsionate în etajele T_8 și T_{10}, cu potențiometrii P_2 și P_3 la o tensiune de grilă de maximum 0,2 V. În cazul în care se lucrează cu amplificatori de curent continuu, aceste oscilații sînt detectate în dubla diodă 6 X 6 C, iar în caz contrar sînt amplificate în curent alternativ prin pentodele 6п6 C (T_8 și T_{10}) și în urmă detectate prin diodele 6ц5C (T_9 și T_{11}), obținîndu-se amplitudini suficiente (max. 200 V), pentru a putea fi introduse direct în oscilograful catodic. Deplasarea spotului pe ecranul tubului catodic pe cele două axe, se face cu ajutorul potențiometrilor P_4 și P_5, care înseriază cu tensiunile obținute de la ieșirea detectorilor o tensiune constantă, reglată de potențiometrii susmenționați. Schema de principiu prevede în plus etajul format cu lămpile 6п6C și 6ц5 C, care se introduce în circuit numai în cazul în care parametrul θ are variații cuprinse în două cadrane ale cercului trigonometric.

4. Atît traductorul mecanic, cît și traductorul electric nu au erori sistematice. Erorile accidentale, de poziție sau de deplasare, depind de abaterile la dimensiuni și la forma zonelor de contact ale cuplelor cinematice și de la poziția relativă a zonelor de contact aparținînd aceluiași element, ceea ce constituie așa-numitele erori primare.

Abaterile limită conform STAS 2090/51 sînt prescrise la

— dimensiunile zonelor de contact : lungime, lățime (rază), înălțime (grosime) ;

— forma zonelor de contact : de la rectilinitate, de la planeitate, la ovalitate și la conicitate ;

— poziția zonelor de contact : la dimensiuni (coaxialitate, bătaie) la paralelism sau perpendicularitate.

Pentru cuplele cinematice, considerînd numai abaterile la dimensiunile zonelor de contact, presupunînd că cele referitoare la formă sînt incluse în acestea, se obțin jocuri între zonele de contact. Acestea duc la deplasări de translație Δd și de rotație $\Delta\varphi$ a unei zone de contact în raport cu cea-

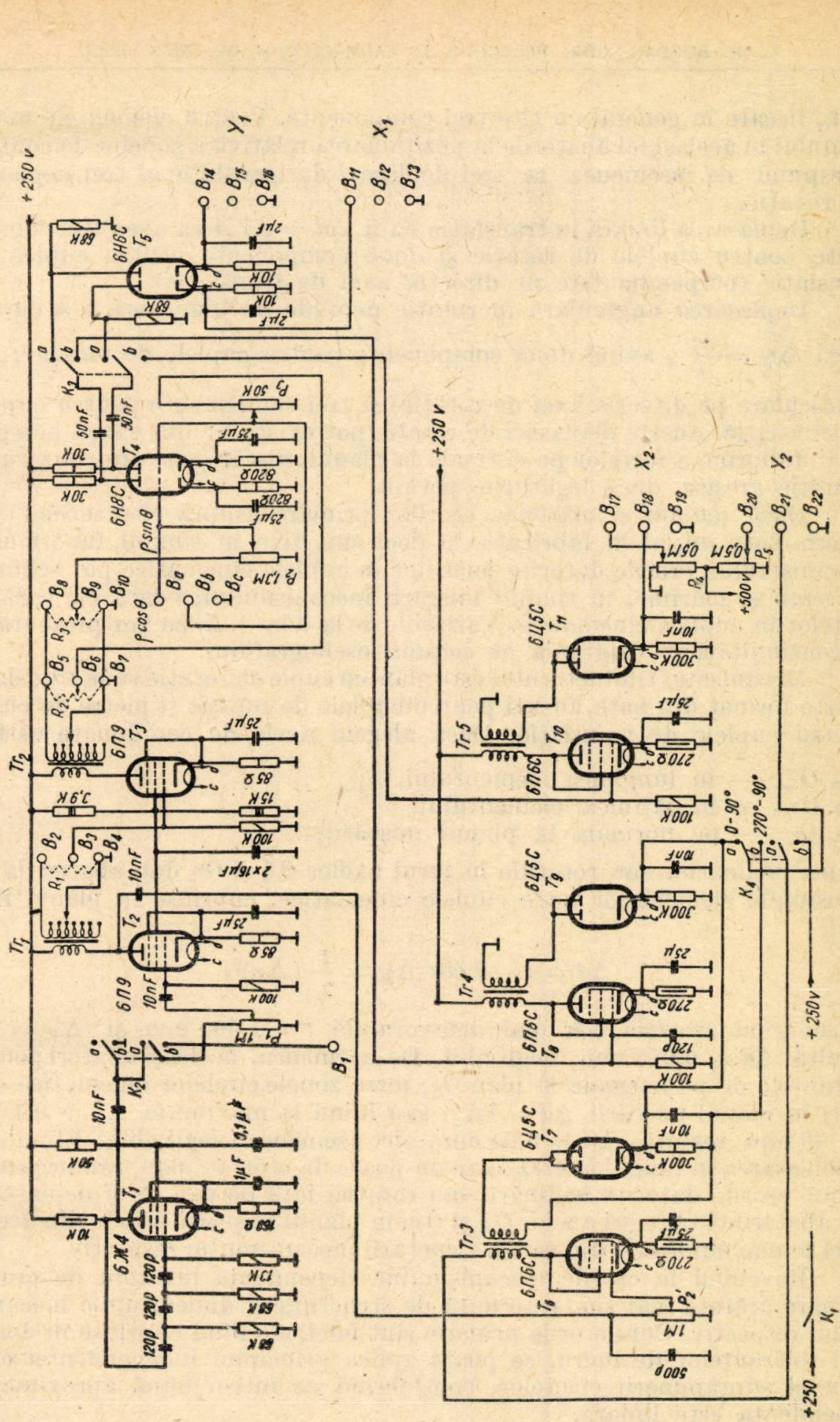

+ 250 v
+ 250 v
+250 v
+250
+500 v
6Ж4
T1
6П9
T2
6П9
T3
6Н8С
T4
6Н6С
T5
6П6С
T6
6Ц5С
T7
6П6С
T8
6Ц5С
T9
6П6С
T10
6Ц5С
T11
Tr1
Tr2
Tr-3
Tr4
Tr-5
K1
K2
K4
R1
R2
R3
P1 1M
P2 1,2M
P3 50K
P'2
P4
P5
B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
B8
B9
B10
B11
B12
B13
B14
B15
B16
B17
B18
B19
B20
B21
B22
Ba
Bb
Bc
p sin θ
p cos θ
X1
Y1
X2
Y2
0-90°
270°-90°
a
b
10K
50K
10nF
0,1μF
1μF
160Ω
13K
68K
120p
100K
25μF
85Ω
2×16μF
15K
3,9K
820Ω
30K
50nF
2μF
1M
500p
270Ω
300K
0,5M
a
c
g

Fig. 6

laltă, fiecare în general cu cîte trei componente. Pentru elementele mecanismului în același fel abaterile la poziționarea relativă a zonelor de contact corespund de asemenea la trei deplasări de translație și trei deplasări de rotație.

Deplasarea liniară în translație va fi $\Delta d = \Delta j$ și va avea trei componente pentru cuplele de rotație și două componente pentru cuplele de translație (perpendiculare pe direcția axei de translație).

Deplasarea unghiulară în rotație depinde de înălțimea h a cuplei, adică $\Delta\varphi = \frac{\Delta j}{h}$, avînd două componente pentru cuplele de rotație (perpendiculare pe direcția axei de rotație) și trei componente pentru cuplele de translație. Aceste deplasări de rotație pot exista fie din cauza nerepartiției uniforme a forțelor pe normala la planul mișcării, fie din cauza unor montaje greșite, dacă legăturile permit.

Dacă semnul și mărimea erorilor primare asupra elementelor sînt determinate inițial la fabricație și deci sînt fixe în timpul funcționării mecanismului, erorile datorite jocurilor în cuplele cinematice pot schimba de semn și mărime, în timpul mișcării mecanismului, o dată cu variația forțelor în cuplele cinematice. Variațiile de la 0 la $+\Delta j$ se vor prezenta ca discontinuități în diagramă pe ecranul oscilografului.

Mecanismul traductorului este plan, cu cuple de rotație și de translație și este format din bare, fusuri pentru cuplele de rotație și pietre de culisă pentru cuplele de translație. Dacă alegem axele de coordonate astfel:

axa $O\xi$ — în lungimea elementului,
axa $O\eta$ — în lățimea elementului,
axa $O\zeta$ — pe normala la planul mișcării,

atunci înclinările sau rotațiile în jurul axelor $O\xi$ și $O\eta$ dau abateri la dimensiunile elementelor între cuplele cinematice, cuprinse în planul mișcării

$$\Delta d = l - l\cos\Delta\varphi \simeq \frac{l}{2}\,(\Delta\varphi)^2.$$

Considerînd situația cea mai defavorabilă $l = 1\,500$ mm și $\Delta\varphi = 1\%$ rezultă $\Delta d = 0{,}075$ mm, neglijabil. De asemenea, aceleași abateri pentru distanțele de pe normala la plan $O\zeta$, între zonele cuplelor cinematice dau erori în planul mișcării $\Delta d = l\,\Delta\varphi$, sau luînd la maximum $\Delta\varphi = 0{,}1\%$ și $l = 40$ mm rezultă $\Delta d = 0{,}04$ mm, de asemenea neglijabil. Eliminînd și deplasarea în lungul axei $O\zeta$ care nu poate da erori în plan, rămîn pentru calcul erorile datorite înclinării sau rotației față de axa $O\zeta$ și deplasările sau abaterile în lungul axelor $O\xi$ și $O\eta$, în planul mișcării. Unele din aceste erori se mai elimină și din cauza structurii mecanismului respectiv.

Revenind la erorile mecanismului, dependența acestora de erorile primare arătate mai sus, este dată de structura și dimensiunile mecanismului respectiv. Cum erorile primare sînt mici, ele fiind cuprinse în domeniul toleranțelor de lucru, se poate aplica principiul independenței cauzelor și suprapunerii efectelor, considerînd că într-o bună aproximație, dependența este liniară.

În acest sens dependența erorilor mecanismului de erorile primare rezultă din relațiile

$$x = \rho \cos\theta = \frac{OM . OM_x}{2r},$$

$$\Delta x = \Delta \rho \cos\theta - \rho \sin\theta . \Delta\theta = \Delta \rho \cos\theta + \frac{\rho}{2r} \Delta OM_x,$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta \rho}{\rho} - \operatorname{tg}\theta . \Delta\theta.$$

Se observă în special că pentru $\theta \rightarrow 90°$, adică în regiunea $x \rightarrow 0$, eroarea relativă devine foarte mare $\operatorname{tg}\theta \rightarrow \infty$. Se impune deci, de la început, o restrîngere a posibilităților de utilizare a mecanismului elipsograf, astfel încît unghiurile de aproximativ 10°, de la capetele cadranului de 90°, nu pot fi folosite ($\operatorname{tg} 80° = 5{,}7$).

Tabela erorilor

Element cuplă	Abaterea – joc	Eroarea
1. Fusul cuplei de rotație M	$\Delta \xi = \Delta d_1 \cos \alpha = \Delta \rho$ $\Delta \eta = \Delta d_1 \sin \alpha = \rho \Delta \theta$	$\Delta x = \Delta d_1 \cos(\alpha + \theta)$ $\lvert \Delta x \rvert \leqslant \lvert \Delta d_1 \rvert$
Biela OM	$\Delta \xi = \Delta d_2 = \Delta \rho$ $\Delta \eta = \Delta d_2' = \rho \Delta \theta$	— $\Delta x = - \Delta d_2' \sin \theta$ $\lvert \Delta x \rvert \leqslant \lvert \Delta d_2' \rvert$
3. Piatra de culisă $OO'A$	$\Delta \eta_{OO'} = \Delta d_3'' = \rho \Delta \theta$ $\Delta \xi_{OA} = \Delta d_3$ și $\Delta \eta_{OA} = \Delta d_3'$ Dar $\overline{OA} + \overline{AM}_x = \overline{OM}_x$ $\Delta (\overline{O}M_x - \bar{O}A) . \overline{AM}_x = 0$ $\Delta \overline{O}M_x = \Delta OA \frac{\cos \sphericalangle (\Delta OA . AM_x)}{\cos \theta}$ $\Delta OM_x = \Delta \xi \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ $\Delta OM_x = - \Delta \eta \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = - \Delta \eta \, 2 \sin \theta$	$\Delta x = - \Delta d_3'' \sin \theta$ $\lvert \Delta x \rvert \leqslant \lvert \Delta d_3'' \rvert$ $\Delta x = \frac{\rho}{2r} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \cdot \Delta d_3$ $\lvert \Delta x \rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{2r} 5{,}4 \cdot \lvert \Delta d_3 \rvert$ $\Delta x = - \frac{\rho}{r} \sin \theta \, \Delta d_3'$ $\lvert \Delta x \rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{r} \lvert \Delta d_3' \rvert$
4. Elementul $M_x A M_y$	$\Delta \xi_{AM_x} = \Delta d_4 ; \Delta \eta_{AM_x} = \Delta d_4'$ $\overline{OA} + \overline{AM}_x = \overline{OM}_x$. $\Delta (\overline{OM}_x - \overline{AM}_x) . \overline{OA} = 0.$ $\Delta OM_x = \Delta AM_x \frac{\cos \sphericalangle (\overline{OA} . \Delta \overline{AM}_x)}{\cos \theta}$ $\Delta OM_x = \Delta \xi \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ $\Delta OM_x = \Delta \eta . 2 \sin \theta$	$\lvert \Delta x \rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{2r} 5{,}4 \lvert \Delta d_4 \rvert$ $\lvert \Delta x \rvert \leqslant \frac{\rho_{max}}{r} \lvert \Delta d_4' \rvert$

(urmare)

Element cuplă	Abaterea — joc	Eroarea
5. Piatra de culisă M_x (sau M_y)	$\Delta\xi_{OM_x} = \Delta d_5;\ \Delta\eta_{OM_x} = \Delta d'_5$ $\Delta OM_x = \Delta d_5$	$\Delta x = \frac{\rho}{2r}\Delta d_5$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{2r}\lvert\Delta d_5\rvert$
6. Suportul cu ghidajul culisei M_x (sau M_y)	$\Delta\xi_{OM_x} = \Delta d_6 = \Delta OM_x$ $\Delta\theta_\xi = \frac{\Delta\varphi_6}{2}$	$\Delta x = \rho\frac{\Delta d_6}{2r}$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{2r}\lvert\Delta d_6\rvert$ $\Delta x = -\rho\sin\theta\frac{\Delta\varphi_6}{2}$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{2}\lvert\Delta\varphi_6\rvert$
7. Cupla de rotație M	$\Delta\xi = \Delta j_7 \cos\alpha = \Delta\rho$ $\Delta\eta = \Delta j_7 \sin\alpha = \rho\Delta\theta$	$\Delta x = \Delta j_7 \cos(\alpha + \theta)$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \lvert\Delta j_7\rvert$
8. Cupla de translație OA	$\Delta\eta = \Delta j_8 = \rho\Delta\theta$ $\Delta\theta_\xi = \frac{\Delta j_8}{h_8}$ h_8 = lungimea pietrei de culisă	$\Delta x = -\Delta j_8 \sin\theta$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \lvert\Delta j_8\rvert$ $\Delta x = -\rho\sin\theta\frac{\Delta j_8}{h_8}$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{\rho_{\max}}{h_8}\lvert\Delta j_8\rvert$
9. Cupla de rotație O	$\Delta\xi = \Delta j_9 \cos\alpha = \Delta\rho$ $\Delta\eta = \Delta j_9 \sin\alpha = \rho\Delta\theta'$	$\Delta x = \Delta j_9 \cos(\alpha + \theta)$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \lvert\Delta j_9\rvert$
10. Cupla de rotație A	$\Delta\xi_{OA} = \Delta j_{10}\cos\alpha$ $\Delta\eta_{OA} = \Delta j_{10}\sin\alpha$ Conform punctului 3.	$\Delta x = \frac{\rho}{2r}\Delta j_{10}\frac{\cos(2\theta + \alpha)}{\cos\theta}$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{6\rho_{\max}}{2r}\lvert\Delta j_{10}\rvert$
11. Cupla de rotație M_x (sau M_y)	$\Delta\xi_{AM_x} = \Delta j_{11}\cos\alpha$ $\Delta\eta_{AM_x} = \Delta j_{11}\sin\alpha$ Conform punctului 4	$\Delta x = \frac{\rho}{2r}\Delta j_{11}\frac{\cos(2\theta - \alpha)}{\cos\theta}$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{6\rho_{\max}}{2r}\lvert\Delta j_{11}\rvert$
12. Cupla de translație M_x (sau M_y)	$\Delta\eta = \Delta j_{12}$ $\Delta OM_x = \Delta j_{12}\,\mathrm{tg}\,\theta$	$\Delta x = \frac{\rho}{2r}\Delta j_{12}\,\mathrm{tg}\,\theta$ $\lvert\Delta x\rvert \leqslant \frac{5{,}7\rho_{\max}}{2r}\lvert\Delta j_{12}\rvert$

Pentru evaluarea aproximativă a erorilor, vom considera acoperitor următoarele valori :

$$\begin{array}{lll}
\Delta d = \Delta j = 0{,}1\ \text{mm}, & \Delta\varphi = 0{,}1\,\%, & \rho_{\max} = 1\,200\ \text{mm}, \\
r = 200\ \text{mm}, & h_8 = 300\ \text{mm}, & \\
|\,\Delta x_1\,| \leqslant 0{,}1\ \text{mm}, & |\,\Delta x_2\,| \leqslant 0{,}1\ \text{mm}, & |\,\Delta x_3\,| \leqslant 2{,}2\ \text{mm}, \\
|\,\Delta x_4\,| \leqslant 2{,}2\ \text{mm}, & |\,\Delta x_5\,| \leqslant 0{,}3\ \text{mm}, & |\,\Delta x_6\,| \leqslant 0{,}9\ \text{mm}, \\
|\,\Delta x_7\,| \leqslant 0{,}1\ \text{mm}, & |\,\Delta x_8\,| \leqslant 1{,}8\ \text{mm}, & |\,\Delta x_9\,| \leqslant 0{,}1\ \text{mm}, \\
|\,\Delta x_{10}\,| \leqslant 1{,}8\ \text{mm}, & |\,\Delta x_{11}| \leqslant 1{,}8\ \text{mm}, & |\,\Delta x_{12}\,| \leqslant 1{,}7\ \text{mm},
\end{array}$$

sau $|\,\Delta x\,| \leqslant \Sigma\,|\,\Delta x_i\,| = 12$ mm, adică 1%.

Se remarcă deci influența mare a erorilor primare din mecanismul elipsograf și se recomandă reducerea unghiului de oscilație al bielei între 20 și 70 grade, pentru care caz ar trebui refăcut calculul numeric al erorilor.

În traductorul electric se găsesc următoarele erori primare :

a) — poziționarea firului rezistiv,
b) — deplasarea originilor — punctelor de potențial nul,
c) — contacte nepunctuale,
d) — neomogeneitatea firului rezistiv.

Cercetînd erorile introduse de cauzele de mai sus, constatăm :

a) Fixarea firelor rezistive înclinate cu unghiul $\Delta\varphi$ duce la abateri neglijabile la lungimea firelor. Astfel, pentru cazul cel mai defavorabil de la mecanismul elipsograf

$$\Delta OM_x = l - l\cos\Delta\varphi \simeq \frac{l}{2}\,(\Delta\varphi)^2,$$

$$\Delta x = \frac{\rho_{\max}}{2r}\cdot\frac{l}{2}\,(\Delta\varphi)^2 \simeq 0{,}06\ \text{mm}.$$

b) Deplasarea punctelor de origină cu $\Delta\rho = \Delta d_1$ și $\Delta OM_x = \Delta d_2$ corespunde la

$$\Delta x = \Delta d_1 \cos\theta + \frac{\rho}{2r}\,\Delta d_2,$$

$$|\,\Delta x\,| < |\,\Delta d_1\,| + \frac{\rho_{\max}}{2r}\,|\,\Delta d_2\,| = |\,\Delta d\,|\left(1 + \frac{\rho_{\max}}{2r}\right).$$

c) Pentru contactele nepunctuale — de grosime e avem

$$\Delta\rho = \frac{e}{\rho_{\max}}\cdot\rho \quad \text{și} \quad \Delta OM_x = \frac{e}{2r}\cdot OM_x = e\cos\theta,$$

$$\Delta x = \frac{e}{\rho_{\max}}\cdot\rho\cos\theta + \frac{\rho}{2r}\,e\cos\theta,$$

$$|\,\Delta x\,| \leqslant e\left(1 + \frac{\rho_{\max}}{2r}\right).$$

d) În cazul neomogenităţii firelor rezistive

$$\Delta \rho = -\frac{\Delta k}{k}\,\rho \text{ şi } \Delta OM_x = -\frac{\Delta k}{k}\,OM_x\,,$$

$$\Delta x = -\,2\,\frac{|\,\Delta k\,|}{k}\,\rho\cos\theta,$$

$$|\,\Delta x\,| \leqslant 2\,\frac{|\,\Delta k\,|}{k}\,\rho_{\max}\,.$$

Eroarea totală datorită erorilor primare ale traductorului electric polar este

$$|\,\Delta x\,| \leqslant 2\,\frac{|\,\Delta k\,|}{k}\,\rho_{\max} + \left(1 + \frac{\rho_{\max}}{2r}\right)(\,|\,\Delta d\,| + e)\,,$$

sau pentru

$$\frac{|\,\Delta k\,|}{k} = 0{,}1\,\%,\ \rho_{\max} = 1\,200 \text{ mm},\ \Delta d = 0{,}5 \text{ mm},\ e = 0{,}3 \text{ mm}\,,$$

reiese

$$|\,\Delta x\,| < 5{,}6 \text{ mm adică } 0{,}5\,\%\,.$$

5. Cu ajutorul traductorului polar studiat, se pot explora curbe situate într-un sector circular de unghi $\theta \simeq 80°$ şi rază maximă $\rho = 1\,200$ mm. Tensiunile culese de pe traductorii electrici rezistivi sînt de maximum 0,2 V, ieşirea din amplificator fiind de aproximativ 200 V, pentru intrarea direct în oscilograful catodic. Acesta are un ecran cu persistenţă cu diametrul util de aproximativ 120 mm, pentru care rezultă o sensibilitate minimă de 1/10 (pentru deplasările maxime). Eroarea totală a traductorului polar mecano-electric este de aproximativ 1,5 %, acceptabilă în astfel de măsurători, eroarea aparaturii electronice anexe fiind de aproximativ 3—4 %.

Primită la redacţie la 3 februarie 1959.

О ПОЛЮСНОМ ДАТЧИКЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе рассматривается полюсный датчик для эксперимантального исследования траекторий различных точек плоского механизма и возможности распространения его на исследование пространственных механизмов. Экспериментальная аппаратура состоит в основном из механического датчика, оснащенного коромыслом и механизмом эллипсографа и умножающего усилителя, построенного по принципу потенциометрического умножения с буферным каскадом. Исследуются погрешности как механического, так и электрического датчика, причем устанавливается общая погрешность в размере 1,5%, допустимая в измерениях такого рода. Преимуществом датчика является то, что он допускает исследование кривых, расположенных в круговом секторе около 80° с максимальным радиусом 1 200 мм.

ON THE POLAR TRANSDUCER FOR THE INVESTIGATION OF MECHANISMS

SUMMARY

This paper concerns a polar transducer for the experimental investigation of the paths of various points in a plane mechanism and the possibility of extending its use to spatial mechanisms. The experimental device consists of a mechanical transducer, including a swinging slider and an additional mechanism, and of an electronic multiplier based on the principle of multiplication in a potentiometer type circuit with separating stages. Errors are examined and the results indicate the total error as being 1.5%, which is accessible in measurements of this kind. The transducer is advantageous in that it allows the investigation of a curve situated within an 80° and 1 200 mm radius circular sector.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bogdan, Chr. Pelecudi, E. Bugaevski, L. Calmaciuc, *Studii asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
2. И. И. Артоболевский, З. С. Блох, К. В. Добровольский, *Синтез механизмов*. Огиз. Гостехиздат, Москва, 1944.
3. Н. П. Раевский, *Методы экспериментальных механических параметров машин*. Издат. Акад. Наук СССР, Москва, 1952.
4. A. M. Turicin, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
5. G. Korn, Th. Korn, *Electronic Analog Compters*. Ed. Mc Graw-Hill Co., New York, 1952.

INFLUENȚA LUNGIMII BALANSIERULUI ASUPRA ECHILIBRĂRII UNITĂȚII DE POMPARE

DE

N. S. PÎRVULESCU

Influența lungimii bielei asupra echilibrării unității de pompare a fost studiată anterior [1]. Procedăm și de astă dată în mod analog.

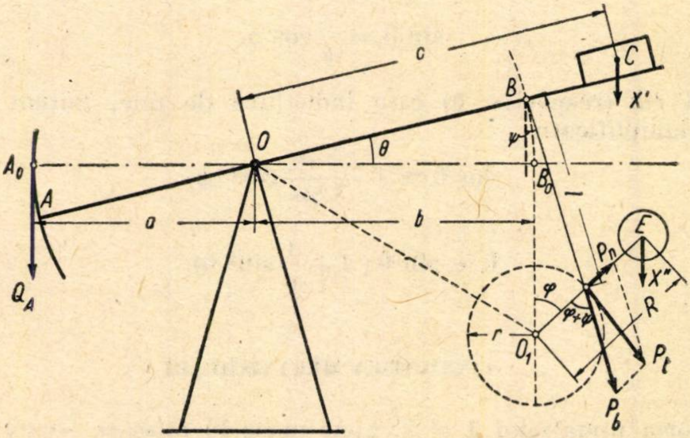


Fig. 1

Admitem următoarele premise simplificatoare :

1. Sarcini statice constante

— la cursa ascendentă

$$Q_{A1} = P + G, \tag{1}$$

— la cursa descendentă

$$Q_{A2} = P, \tag{2}$$

aplicate nemijlocit la capătul A (capul de cal) al balansierului (fig. 1); P fiind greutatea aparentă a prăjinilor, iar G greutatea lichidului ridicat de piston.

2. Masa mecanismului, în afară de contragreutăți, neglijabilă.
3. Viteza de rotație ω a manivelei constantă.
4. Spre deosebire de cazul menționat [1]

$$r/l = 0, \quad r/b \neq 0, \tag{3}$$

în care r, l, b sînt respectiv lungimile manivelei, bielei și a brațului balansierului dinspre manivelă (depărtarea articulației B de axul O al balansierului).

5. Corespondenta $\theta = 0$ pentru $\varphi = \pi/2$; θ și φ fiind unghiurile pe care balansierul și manivela le face cu direcțiile orizontală și respectiv verticală, direcția bielei fiind verticală.

CONSIDERAȚII GEOMETRICE

Premisa 4 conduce la condiția

$$\psi = 0 \tag{4}$$

și deci componentele verticale ale deplasărilor punctelor B și D sînt egale, conform premisei 5, adică

$$\sin \theta = \frac{r}{b} \cos \varphi. \tag{5}$$

Dacă r/b (respectiv θ) este îndeajuns de mic, putem să folosim expresiile simplificate

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1 - \frac{r^2}{2b^2} \cos^2 \varphi, \\ \theta &\approx \sin \theta \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \tag{6}$$

CINEMATICA MECANISMULUI

Conform premiselor 1 și 2, apar mase în mișcare legate numai de punctele A, C, D, ale căror accelerații ne interesează pentru stabilirea forțelor de inerție. Conform premisei 3, punctul D are accelerația tangențială nulă. Nu mai rămîne deci, de luat în considerație, decît :

a) accelerația w_A a punctului A, care, datorit formei capului de cal, are direcția verticală ;

b) accelerația w_C a punctului C, care poate fi descompusă în două componente

— w_{Cv} după direcția verticală,
— w_{Co} după direcția orizontală.

Să considerăm ca origini ale mișcărilor, pozițiile corespunzătoare începutului cursei ascendente a capului de cal, pentru care $\theta = \theta_0$.

Accelerația w_A

Pe considerații geometrice (fig. 2), drumul parcurs x_A de tija lustruită, avînd în vedere mișcarea pe verticală asigurată de legătura flexibilă așezată pe capul de cal, este

$$x_A = u_A - a\theta, \tag{7}$$

în care u_A este lungimea semicursei descrisă de tija lustruită.

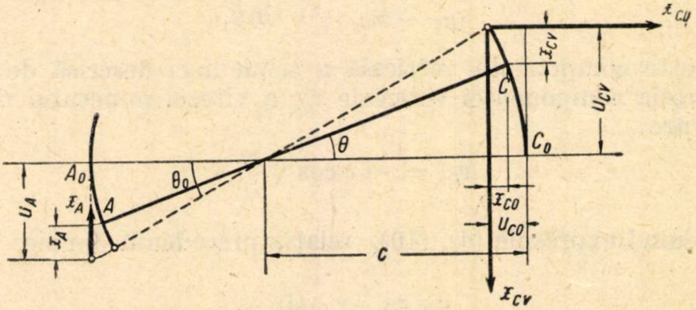


Fig. 2

Înlocuind pe $\sin\theta$ cu expresia (5), relația (6) devine

$$\theta \approx \frac{r}{b}\cos\varphi\left(1 + \frac{r^2}{6b^2}\cos^2\varphi\right), \tag{8}$$

în care

$$\varphi = \omega t. \tag{9}$$

Derivatele succesive în raport cu timpul t ale expresiei (8) ținînd seamă de (9) și (6), sînt

$$\frac{d\theta}{dt} \approx -\frac{r\omega\sin\varphi}{b\cos\theta}, \tag{10}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{r\omega^2\cos\varphi}{b\cos\theta}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi\right). \tag{11}$$

Expresiile vitezei v_A a punctului A, precum și a accelerației w_A se obțin prin derivarea expresiei (7) și anume

$$v_A = -a\frac{d\theta}{dt}, \quad w_A = -a\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{12}$$

Făcînd înlocuirile date de (10) şi (11) se obţin expresiile

$$v_A \approx r\omega \frac{a \sin\varphi}{b\cos\theta}, \tag{13}$$

$$w_A \approx r\omega^2 \frac{a\cos\varphi}{b\cos\theta}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi\right). \tag{14}$$

Acceleraţia w_{Cv}

În mod analog cazului precedent (fig. 2), componenta verticală x_{Cv} a drumului parcurs de punctul C este dat de expresia

$$x_{Cv} = u_{Cv} - c\sin\theta, \tag{15}$$

unde u_{Cv} este componenta verticală a semicursei descrisă de C.

Expresia componentei verticale v_{Cv} a vitezei punctului C se obţine prin derivare

$$v_{Cv} = -c\cos\theta\frac{d\theta}{dt}. \tag{16}$$

Înlocuind expresiile (6), (10), relaţia precedentă devine

$$v_{Cv} \approx \frac{c}{b} r\,\omega\sin\varphi, \tag{17}$$

iar componenta verticală w_{Cv} a acceleraţiei

$$w_{Cv} \approx \frac{c}{b} r\,\omega^2\cos\varphi. \tag{18}$$

În relaţia (18), regăsim expresia acceleraţiei din teoria elementară.

Acceleraţia w_{Co}

În mod analog, componenta orizontală x_{Co}, a drumului parcurs de punctul C este

$$x_{Co} = u_{Co} - c\cos\theta, \tag{19}$$

unde u_{Co} este componenta orizontală a semicursei descrisă de C.

Deci, expresia componentei orizontale v_{Co} a vitezei punctului C este

$$v_{Co} = c\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \tag{20}$$

şi ţinînd seama de (6), (10) se obţine

$$v_{Co} \approx -\frac{cr^2\omega\sin 2\varphi}{2b^2\cos\theta}. \tag{21}$$

Prin derivare, ţinînd seama de (6), se obţine expresia componentei orizontale w_{Co} a acceleraţiei

$$w_{Co} \approx -\frac{cr^2}{b^2}\,\omega^2\left\{\cos 2\,\varphi + \frac{r^2}{2\,b^2}\left(\cos 2\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)\right\}. \qquad (22)$$

Dacă r/b este îndeajuns de mic, pentru ca să neglijăm termenul al doilea din acoladă, expresia precedentă devine

$$w_{Co} \approx -\frac{cr^2}{b^2}\,\omega^2\cos 2\varphi. \qquad (23)$$

DINAMICA UNITĂŢII DE POMPARE

Efortul P_b din bielă

Să scrim ecuaţia de momente în raport cu axa O

$$a\,Q_A = b\cos\theta\;P_b + c\cos\theta\;Q_{Cv} + c\,\sin\theta\;Q_{Co}, \qquad (24)$$

în care

Q_A — sarcina din A a cărei expresie (14) din [1] se menţine

$$Q_A = P\left(\pm\frac{\varkappa}{2} + 1 + \frac{\varkappa}{2}\right)(1 + w_A/g), \qquad (25)$$

semnele ± se referă astfel : cel superior pentru cursa ascendentă iar cel inferior pentru cursa descendentă.

Q_{Cv} — componenta verticală a sarcinii din C, care în mod analog cu expresiile (4), (6), (7), din [1] devine

$$Q_{Cv} = X'\,(1 - w_{Cv}/g) \qquad (26)$$

Q_{Co} — componenta orizontală a sarcinii din C

$$Q_{Co} = -X'\,w_{Co}/g. \qquad (27)$$

Se menţin notaţiile şi următoarele relaţii din lucrarea citată :

X' — contragreutatea de pe balansier, în punctul C

$$X' = \frac{a}{c}\,\mu P\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right), \qquad (28)$$

$$\varkappa = G/P, \qquad (29)$$

în care

c — depărtarea punctului C de axul O al balansierului,

μ — cota parte din sarcina statică medie $P + G/2$ contrabalansată pe balansier,

X'' — contragreutatea de pe manivelă, în punctul E

$$X'' = \frac{ra}{Rb} \nu P \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right), \tag{30}$$

R— depărtarea punctului E de axul O_1 al manivelei,
ν — cota parte din sarcina medie $P+G/2$ contrabalansată pe manivelă

$$\mu + \nu = 1. \tag{31}$$

Cu acestea, relațiile (26), (27) devin

$$\begin{aligned} Q_{Cv} &= \frac{a}{c} \mu P \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) (1 - w_{Cv}/g), \\ Q_{Co} &= -\frac{a}{c} \mu P \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) w_{Co}/g. \end{aligned} \tag{32}$$

Relația (24) se poate pune sub forma explicită

$$P_b = \frac{a Q_A - c Q_{Ct}}{b \cos \theta}, \tag{33}$$

în care

Q_{Ct} — componenta tangențială a sarcinii din C

$$Q_{Ct} = Q_{Cv} \cos \theta + Q_{Co} \sin \theta. \tag{34}$$

Făcînd înlocuirile date de (32), se obține

$$Q_{Ct} = \frac{a}{c} \mu P \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{w_{Cv}}{g}\right) \cos \theta - \frac{w_{Co}}{g} \sin \theta\right] \cdot \tag{35}$$

Înlocuind expresiile (18), (23), relația precedentă devine :

$$Q_{Ct} = \frac{a}{c} \mu P \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) \cos \theta \left\{1 - \chi \cos \varphi \frac{c}{b} \left[1 + \frac{r^2 \cos 2\varphi}{b^2 \cos \theta}\right]\right\}, \tag{36}$$

în care

$$\chi = \frac{r \omega^2}{g} = \frac{r \pi^2 n^2}{900\, g} \cdot \tag{37}$$

Făcînd înlocuirile în (33) se obține

$$P_b = A^\star + B^\star \cos \varphi, \tag{38}$$

în care

$$A^\star \approx \frac{a P}{b \cos \theta} \left[\pm \frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) (1 - \mu \cos \theta)\right], \tag{39}$$

$$B^\star \approx \frac{a^2}{b^2} P \chi \left[\pm \frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right) \left(1 + \mu \frac{c}{a}\right)\right] \zeta, \tag{40}$$

şi

$$\zeta = 1 + \frac{r^2}{b^2} \cos 2\,\varphi, \tag{41}$$

întrucît din (25) şi (14) se obţine

$$Q_A = P\left[\pm\frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right]\left[1 + \chi\,\frac{a\cos\varphi}{b\cos\theta}\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{42}$$

Pentru $r/b = 0$ avem $\cos\theta = 1$, $\zeta = 1$ şi se regăsesc expresiile (17), (18) din [1] şi anume

$$A = \frac{a}{b}\,P\left[\pm\frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\nu\right], \tag{43}$$

$$B = \frac{a^2}{b^2}\,\chi\,P\left[\pm\frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \mu\frac{c}{a}\right)\right]. \tag{44}$$

Ţinînd seama de aceste expresii, relaţiile (39), (40) devin

$$A^{\star} = A + \frac{r^2 a}{2b^3}\,P\left[\pm\frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right]\cos^2\varphi, \tag{45}$$

$$B^{\star} = B\zeta. \tag{46}$$

Efortul tangenţial P_t

S-a arătat în relaţia (21) din [1], că expresia efortului din butonul *D* al manivelei este

$$P_t = P_b \sin(\varphi + \psi) - \frac{R}{r}\,X'' \sin\varphi, \tag{47}$$

care pentru $\psi = 0$, devine

$$P_t = \left(P_b - \frac{R}{r}\right)\sin\varphi, \tag{48}$$

regăsindu-se expresia din teoria elementară.

Făcînd înlocuirile date de (30), (38), (39), (40), se obţine

$$P_t = A^{\star\star}\sin\varphi + B^{\star\star}\frac{\sin 2\varphi}{2}, \tag{49}$$

în care

$$A^{\star\star} = \pm\frac{a}{b}\,P\frac{\varkappa}{2} + \frac{r^2 a}{2b^3}\,P\left[\pm\frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right]\cos^2\varphi, \tag{50}$$

regăsindu-se expresia din teoria elementară, pentru $r/b = 0$
iar

$$B^{**} = B^{*}, \tag{51}$$

în care valoarea B^{*} este exprimată de relația (46) cu (41) și (44).

Cu aceste înlocuiri, relația (49) se mai poate pune sub forma

$$P_t = P \sum_{i=1}^{4} C_i \sin i\,\varphi, \tag{52}$$

în care

$$\begin{gathered} C_1 = \pm \frac{a}{b}\frac{\varkappa}{2} + \frac{r^2 a}{8 b^3}\left[\pm \frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right], \; C_2 = B/2P, \\ C_3 = \frac{r^2 a}{8 b^3}\left[\pm \frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\right], \; C_4 = Br^2/4b^2P. \end{gathered} \tag{53}$$

CONCLUZII

Examinînd relațiile (45), (46) se observă că lungimea balansierului prin raportul $(r/b)^2$ influențează atît efortul static, respectiv A^{**}, cît și efortul dinamic respectiv B^{**}; însă la acesta din urmă, influența este mai pronunțată cu cît echilibrarea se face pe balansier (cu cît μ este mai mare). Dacă raportul r/b este îndeajuns de mic, pătratul său devine și mai mic, așa încît această influență poate să devină neglijabilă.

Semicursa u_A este dată de relația

$$u_A = ra/b \tag{54}$$

și prin urmare, pentru aceeași cursă $2u_A$, dacă mărim raportul a/b putem folosi un r mai mic.

Pentru aceeași cursă, ca să micșorăm influența defavorabilă r/b urmează să mărim pe a.

Influența defavorabilă a contrabalansării pe balansier se manifestă cu lungimea c.

Din examinarea relației (28) rezultă însă, că micșorarea lungimii c reclamă contragreutăți mai mari.

Sub forma (52), termenii cu i impar reprezintă efortul static spre deosebire de termenii cu i par, care reprezintă efectul dinamic. Dacă turația n este destul de redusă pentru ca χ să devină foarte mic, forțele de inerție pot să devină neglijabile.

Influența lungimii balansierului se accentuează cu creșterea cursei $2u_A$.

În încheiere, formulele finale (52), (53) servesc la stabilirea dimensiunilor principale a, b, c, r sau a influenței lor, în vederea proiectării unităților de pompare.

Primită la redacție la 23 martie 1959.

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ЛОЖНОЙ КАЧАЛКИ НА БАЛАНСИРОВКУ ПРИВОДНОЙ КАЧАЛКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе уточняются упрощающие предпосылки для выявления влияния длины качалки и определяются по геометрическим соображениям выражения угла θ, образуемого качалкой с горизонталью.

Исследуется кинематика механизма в отношении ускорения точек, с которым связаны значительные движущиеся массы с целью определения соответствующих сил инерции.

Изучается динамика приводной качалки в целях определения усилий в шатуне и пальце кривошипа.

В заключение обсуждаются окончательные формулы, служащие для определения основных размеров или их влияния ввиду конструирования приводных качалок.

INFLUENCE DE LA LONGUEUR DU BALANCIER SUR L'ÉQUILIBRAGE DE L'UNITÉ DE POMPAGE

RÉSUMÉ

On donne d'abord des précisions sur les prémisses destinées à simplifier la théorie, afin de faire ressortir l'influence de la longueur du balancier, et l'on établit, par des considérations géométriques, les expressions de l'angle θ que le balancier fait avec l'horizontale.

Pour déterminer les forces d'inertie, on étudie la cinématique du mécanisme, en ce qui concerne les accélérations des points liés aux masses considérables en mouvement.

On étudie ensuite la dynamique du dispositif afin de déterminer les efforts de la bielle et du maneton.

Pour conclure, on fait l'analyse des formules finales, servant à établir les dimensions principales ou leur influence, en vue de l'élaboration des projets des ensembles de pompage.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. PÎRVULESCU, *Influența lungimii bielei asupra echilibrării unităților de pompare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1*,173 (1959).

O METODĂ DE CALCUL, PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE, A STRUCTURILOR MULTIPLU NEDETERMINATE, ÎN DOMENIUL PLASTIC

DE

MIHAIL HANGAN *)

A. CONSIDERAȚII ASUPRA CALCULULUI STRUCTURILOR STATICE ÎN DOMENIUL PLASTIC

Calculul structurilor statice ale construcțiilor, în domeniul plastic, se găsește într-un stadiu puțin înaintat și aceasta, în primul rînd, din cauza marilor dificultăți cu care se poate stabili poziția articulațiilor plastice. Toată literatura tehnică, pînă în prezent, aduce puține progrese în acest domeniu și la ora actuală, numai un număr redus de structuri simple, cum sînt plăcile, grinzile continue și cadrele cu grad mic de nestaticitate, au putut fi rezolvate.

Lipsa unui calcul practic al structurilor în domeniul plastic este cu atît mai mult simțită, cu cît proiectarea secțiunilor elementelor de construcții se face, adesea, prin metode de calcul la limită (metoda capacității totale de rezistență sau metoda stărilor limită), care se dezvoltă, ținînd seama de proprietățile plastice ale materialelor. În acest mod, poate rămîne o discordanță între calculul structurilor, făcut în domeniul elastic și calculul elementelor de construcții făcut la rupere sau la alte stări limită.

Rezolvarea calculului structurilor în domeniul plastic, în forme aplicabile în proiectare, este cu atît mai importantă, cu cît se observă marea rezervă de rezistență pe care o au structurile unor construcții, intrate în domeniul plastic. Într-adevăr, dacă proprietățile plastice ale materialelor arată că în secțiuni se mai găsesc oarecare rezerve de rezistență, față de cele date de un calcul elastic, structurile statice în ansam-

---

*) Institutul de construcții, București.

blul lor au, în stadiul de rupere, rezerve mari de rezistențe față de cele date de un calcul elastic, adesea ridicîndu-se la 30—40 % și chiar depășind aceste procente, pentru unele ipoteze de încărcare.

Metoda de calcul expusă în cele ce urmează, este o metodă de aproximații succesive, care poate stabili în mod consecutiv apariția articulațiilor plastice, pînă la transformarea structurii într-un sistem static determinat și apoi în mecanism. Ea poate rezolva la nivelul proiectării curente, sisteme cu grade oricît de mari de nedeterminare statică.

În forma expusă, aplicabilă fără scrierea sistemului de ecuații liniare, care să rezolve sistemul static, metoda ce se expune este o metodă curentă de proiectare. Ținînd seama de proprietățile plastice ale materialelor, ea pune în evidență pentru diferite ipoteze de încărcare, rezervele de rezistență ale unei structuri statice. Metoda pune în evidență de asemenea, rezervele de rezistență ale unei construcții pentru cazul apariției unui număr redus de articulații plastice.

★

În proiectarea construcțiilor în domeniul plastic, pentru un sistem de n ori static nedeterminat, este necesar să se cunoască punctele de apariție a celor n sau $(n+1)$ articulații plastice care să transforme structura statică într-o structură static determinată, sau mecanism. În urmă, se pot stabili capacitățile de încărcare și coeficientul de siguranță al construcției față de sarcina de rupere sau de pierdere a stabilității.

În mod curent, construcțiile, în starea de exploatare, trebuie să rămînă în domeniul elastic. În acest mod, tot domeniul de încărcare în care apar diferitele articulații plastice, va constitui o zonă suplimentară de siguranță a construcției, față de sarcina de rupere.

Este indicat de asemenea ca în regim de exploatare, construcția să aibă și un coeficient de siguranță fie chiar de valoare redusă, față de apariția primei articulații plastice. În acest mod, vom avea siguranța că în tot cazul, intrarea în plastificare a vreunei secțiuni oarecare din construcție, sau a mai multor secțiuni, în starea curentă de exploatare, nu este probabilă. Această prevedere este cu atît mai de dorit, cu cît la unele construcții și în special la cele de beton armat, articulațiile plastice, apar cu fisurări pronunțate și uneori cu deformări nedorite sau chiar neadmisibile în exploatare.

Menționăm totuși că, aceste prevederi, rămîn simple deziderate sau păreri asupra modului de proiectare, metoda expusă asupra calculului construcțiilor în domeniul plastic, fiind generală, fără ca vreo restricție de aplicare să fie necesară, în sensul celor mai sus arătate.

La o construcție bine proiectată în domeniul elastic calculată la o singură ipoteză de încărcare, articulațiile plastice ar trebui să apară, aproape simultan, la o supraîncărcare. De fapt, din cauza ipotezelor variate de încărcare, construcțiile nu pot fi proiectate, astfel ca toate punctele cele mai încărcate ale structurii să fie în mod egal îndepărtate de starea de plastificare. Din acest motiv, apar mai întotdeauna, mari rezerve de rezistență prin calculul în domeniul plastic. Fiecare secțiune din construcție se calculează la efortul cel mai mare ce poate apare în acea secțiune, efort dat de o anumită ipoteză de încărcare. În mod curent, la construcțiile calculate în mai multe ipoteze de încărcare, toate aceste ipoteze au rezerve de rezistență, mai mari sau mai mici.

Asemenea rezerve de rezistență apar și mai vizibile în cazul structurilor ce au încărcări locale, în anumite puncte sau pe anumite deschideri, cazuri care cu metodele de calcul din domeniul plastic de pînă acum, prezentau dificultăți de calcul atît de mari încît nu au fost studiate. Cu metoda expusă în cele ce urmează, asemenea probleme pot fi studiate în domeniul plastic, cu dificultățile curente, ce apar și la structurile din domeniul elastic.

★

În crearea unei teorii în calculul plastic a construcțiilor de beton armat, se fac o serie de ipoteze simplificatoare, care adesea sînt dificil de admis. Cu toate acestea, deoarece numai prin asemenea simplificări se poate trece la elaborarea unei metode simple de calcul, voi admite aceste ipoteze, în forma în care sînt utilizate astăzi în acest domeniu, după cum urmează :

a) Structura este executată dintr-un material elastico-plastic, ceea ce presupune că diagrama solicitări-deformații are aspectul teoretic al diagramei din figura 1 (după atingerea momentului încovoietor de plastificare $\mathfrak{M}$ deformațiile secțiunii cresc pentru $\mathfrak{M}$ constant);

b) Sarcina de rupere este acea valoare a sarcinii exterioare pentru care într-o structură de n ori static nedeterminată apar cel puțin $(n + 1)$ articulații plastice (se admite că structura este astfel concepută, încît să nu apară mecanisme locale);

c) Apariția articulațiilor plastice se face fără distrugeri locale ale barelor sau nodurilor;

d) Formarea articulațiilor plastice se face fără deformații care să pericliteze stabilitatea sistemului sau rezistența barei la alte solicitări (de ex. forțe tăietoare);

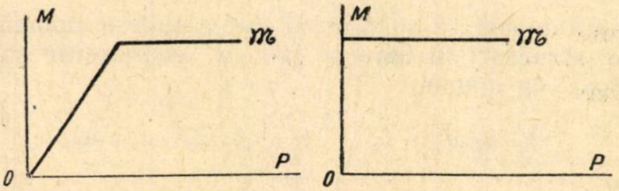


Fig. 1. — Relația dintre încărcare și momentul încovoietor într-o secțiune ce se plastifică :

a) pînă la plastificare; *b*) după plastificare.

e) Între două articulații plastice vecine, barele lucrează în stadiul elastic;

f) Articulațiile plastice se pot considera punctuale în sistemele statice. În calculul rotirilor, se poate admite, că ele se produc pe o lățime egală cu înălțimea piesei;

g) Valorile factorilor ce hotărăsc apariția articulațiilor plastice și deformațiile barelor elastice, acoperă erorile incluse în ipotezele precedente precum și pe cele rezultate din variația rigidității barei în lungul ei, fisurării și variației poziției axei neutre în lungul barelor;

h) La secțiunile de beton armat, valoarea momentului de plastificare, este determinată de curgerea armăturii; nu se ține seama de proprietățile plastice pentru secțiuni la care ruperea se produce prin cedarea betonului.

B. STABILIREA PE CALE ANALITICĂ A ORDINII DE APARIȚIE A ARTICULAȚIILOR PLASTICE

Să notăm pentru un capăt de bară oarecare, în punctul k:

M_k — momentul încovoietor obținut dintr-un calcul elastic cu sarcina p,

M_k^e — momentul încovoietor obținut dintr-un calcul elastic, multiplicat cu coeficientul de siguranță propus $M_k^e = c \cdot M_k$,

$\mathfrak{M}_k$ — momentul încovoietor de plastificare din secțiunea k,

$\overline{M}_k^e = -[M_k^e - \mathfrak{M}_k]$ — diferența momentelor încovoietoare $\mathfrak{M}_k$ și M_k^e,

ρ_k^e — raportul valorilor precedente $\rho_k^e = M_k^e / \mathfrak{M}_k$,

ρ_k — raportul $\rho_k = M_k / \mathfrak{M}_k$,

$\overline{M}_{ik}$ — momentul încovoietor ce apare în i, cînd în punctul k se introduce momentul încovoietor $\overline{M}_k$,

t_{ij} — coeficientul de transmisie a momentului unitar din i în j prin structura elastică cînd în punctul i se face o secțiune în bară și se introduc două momente unitare în cele două capete vecine de bară.

În sistemul de ecuații ale staticii care stabilesc momentele încovoietoare ale unei structuri în care se iau ca necunoscute statice momentele încovoietoare la noduri

$$\sum_{j=1-n} a_{ij} M_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

dacă exprimăm momentele încovoietoare M_1, M_2 ... în funcție de momentele de plastificare $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... prin relațiile

$$M_1 = \rho_1 \mathfrak{M}_1, \qquad M_2 = \rho_2 \mathfrak{M}_2 \ldots, \qquad M_n = \rho_n \mathfrak{M}_n, \tag{2}$$

și se notează

$$\overline{a}_{11} = a_{11} \mathfrak{M}_1, \qquad \overline{a}_{12} = a_{12} \mathfrak{M}_2, \qquad \overline{a}_{in} = a_{in} \mathfrak{M}_n, \tag{2'}$$

sistemul precedent de ecuații ia forma

$$\sum_{j=1 \ldots n} \overline{a}_{ij} \rho_j = b_i \qquad (i = 1,2, \ldots, n). \tag{3}$$

Dacă sarcinile ce acţionează asupra lucrării cresc proporţional, prima secţiune a sistemului care se va plastifica va fi aceea pentru care ρ are valoarea maximă. Urmează să se găsească deci cea mai mare rădăcină a sistemului (3). Fie ρ_k această rădăcină. Pentru ca secţiunea k să se plastifice este necesar să se realizeze $\rho_k > 1$.

O dată plastificat punctul k valoarea ρ_k devine constantă şi anume $\rho_k = 1$ iar în sistemul 1 sau 3 dispare ecuaţia care exprimă continuitatea fibrei medii în punctul k în mod normal ecuaţia de ordin k.

Pentru o creştere ulterioară a sarcinii, în punctul k trebuie considerată o articulaţie. În acest mod, unii din coeficienţi a sau $\bar{a}$ se schimbă. Trebuie scris un alt sistem de ecuaţii pentru sporurile de sarcini de după plastificarea secţiunii k. Cu noul sistem, se va proceda la fel ca şi cu primul, pentru a se găsi cea de-a doua articulaţie plastică şi în acelaşi mod, va trebui să se procedeze şi cu articulaţiile următoare. Acest mod de calcul este laborios şi nu poate fi considerat ca sistem practic de rezolvare a problemei. Din acest motiv, vom căuta a da problemei o rezolvare prin aproximaţii succesive, sistem care să nu ceară scrierea ecuaţiilor statice şi să permită rezolvarea întregii probleme, pe un număr cît mai redus de diagrame de aproximaţii succesive.

Cunoaşterea valorilor succesive cele mai mari ale lui ρ pentru stadiul în care se găseşte structura, adică considerînd că punctele plastificate sînt articulaţii pentru orice noi încărcări, echivalează cu însăşi găsirea ordinii de apariţie a articulaţiilor plastice.

★

Modul precedent de a găsi ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice este şi el uşurat atunci cînd se lucrează prin aproximaţii succesive. Într-adevăr, să admitem că se lucrează prin aproximaţii succesive luîndu-se ca necunoscute momentele încovoietoare, după metoda Cros.

Este de menţionat că într-o diagramă de calcul Cros cu momente, dacă o bară la un nod, din încastrată devine articulată, calculul se poate face cu aceiaşi coeficienţi de distribuţie la noduri şi de transmitere pe bare ca atunci cînd toate nodurile sînt încastrate. Singura diferenţă ce apare faţă de nodul încastrat, atunci cînd nodul este articulat, este că momentele încovoietoare se retransmit din acest nod în întregime, ca în figura 2.

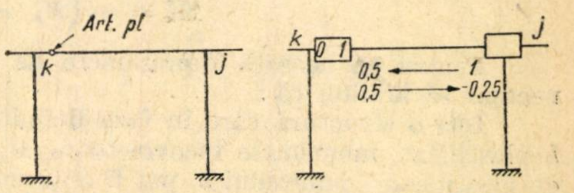


Fig. 2. — După apariţia unei articulaţii plastice în k se poate continua calculul cu aceiaşi coeficienţi de repartiţie în j.

Momentul încovoietor unitar din punctul i se transmite în punctul j care este plastificat cu valoarea $t_{ij} = 1/2$ iar apoi se retransmite din j în i multiplicat cu $t_{ji} = 1/2$ astfel că rămîne în bară în punctul i, momentul încovoietor.

$$M^*_{ij} = M_{ij}\,(1 - t_{ij} \cdot t_{ji}) = M_{ij} \cdot (1 - 0{,}25) = 0{,}75\ M_{ij}.$$

Restul calculului urmează calea obişnuită a metodei utilizate (fig. 2).

Pentru nodurile la care articulația apare pe bară lîngă nod, recalcularea coeficienților de repartiție la nod este necesară după apariția unei articulații plastice.

Fiind cunoscute valorile momentelor încovoietoare M, se pot deduce și valorile rapoartelor ρ pentru întreaga structură.

Pentru a putea urmări ordinea de plastificare a diferitelor puncte ale structurii se va completa diagrama de calcul prin aproximații succesive Cros, alcătuită pentru obținerea momentelor încovoietoare M sau M^e cu un tabel care să dea valorile ρ și deci ordinea de apariție a diferitelor articulații plastice. În aplicațiile date în cele ce urmează se poate urmări modul de dezvoltare a calculului.

În expunerea ce urmează, s-au considerat cazurile curente în care articulațiile plastice vor apare la noduri și s-a dat și metoda de procedare, pentru cazul apariției articulațiilor plastice în cîmpul diferitelor bare.

C. VALABILITATEA INTRODUCERII UNOR MOMENTE ÎNCOVOIETOARE SUPLIMENTARE ÎN PUNCTELE PLASTIFICATE ALE UNEI STRUCTURI STATICE

Cînd la o structură statică la care un punct k are un moment de plastificare $\mathfrak{M}_k$ iar momentul încovoietor calculat elastic multiplicat cu coeficientul de siguranță $M_k^e = c \cdot M$ este

$$M_k^e \geqslant \mathfrak{M}_k,$$

momentul încovoietor din nod rămîne cu valoarea $\mathfrak{M}_k$.

Rezultatul este același ca atunci cînd plecînd de la momentul calculat elastic M_k^e, am introduce în nod un moment încovoietor suplimentar

$$\overline{M}_k^e = -[M_k^e - \mathfrak{M}_k]. \tag{4}$$

Pentru ca această suprapunere de momente să fie posibilă, este necesar să arătăm că:

Într-o structură care în faza definitivă de lucru rămîne cu nodul k plastificat, momentele încovoietoare M_{jk} realizate cînd se ține seama de plastificarea punctului k, pot fi obținute plecîndu-se de la momentele încovoietoare în structura complet elastică M_j. La aceste momente încovoietoare se adaugă sporurile de momente $\overline{M}_{jk}$ ce apar dacă în aceeași structură, se consideră făcută o secțiune în punctul k iar în acea secțiune se introduc momentele încovoietoare $\overline{M}_k = -(M_k - \mathfrak{M}_k)$.

În ipoteza unei structuri complet elastice, momentele încovoietoare în diferitele capete de bare vor fi date de grupul de relații

$$\sum_{i=1-n} a_{ij} M_j = b_i \qquad (j = 1,2, \ldots, n), \tag{5}$$

iar în ipoteza plastificării secțiunii k din grupul precedent dispare relația de continuitate a fibrei medii în secțiunea k iar momentul încovoietor în acea secțiune ia valoarea $\mathfrak{M}_k$ și grupul de relații precedent devine

$$\sum_{i\neq k=1\ldots n} a_{ij}M_{jk} + a_{ik}\,\mathfrak{M}_k = b_i \qquad (j \neq k = 1\ldots n). \tag{6}$$

Din scăderea celor două relații precedente rezultă:

$$\sum a_{ij}\,(M_{jk} - M_j) + a_{ik}\,(\mathfrak{M}_k - M_k) = 0. \tag{7}$$

Notînd

$\mathfrak{M}_k - M_k = \overline{M}_k$ — momentul ce se introduce prin plastificare în punctul k,

$M_{jk} - M_j = \overline{M}_{jk}$ — diferența între momentul încovoietor din punctul j după și înainte de plastificarea punctului k.

Relația precedentă se mai scrie

$$\sum a_{ij}\,\overline{M}_{jk} + a_{ik}\,\overline{M}_k = 0. \tag{8}$$

Din adunarea relațiilor (5) și (8) rezultă grupul

$$\sum a_{ij}\,M_{jk} = b_i - a_{ik}\overline{M}_k, \tag{9}$$

care arată că momentele încovoietoare după plastificarea punctului k se obțin, dacă la momentele încovoietoare elastice M_j se adună momentele încovoietoare $\overline{M}_{jk}$ obținute cînd în punctul k se introduce momentul încovoietor

$$\overline{M}_k = -(M_k - \mathfrak{M}_k).$$

Din cele precedente, se observă că prin suprapunerea celor două stări de solicitare (5) și (8), în punctul k rămîne numai momentul încovoietor de plastificare $\mathfrak{M}_k$.

Momentul nou introdus $\overline{M}_k$ conform relației (4) se consideră ca moment exterior introdus după efectuarea secțiunii în bară. În felul acesta, la un nod, la care se întîlnesc p bare, dacă capătul unei bare se plastifică, momentul nou introdus $\overline{M}_k$ se va repartiza celorlalte (p—1) bare neplastificate ce intră în nod (fig. 3).

Într-un calcul prin aproximații succesive, momentele încovoietoare nou introduse, vor fi transmise și repartizate restului structurii, după legile structurilor elastice, ținîndu-se bineînțeles seama de eventualele secțiuni sau noduri anterior plastificate, ce ar mai exista în structură.

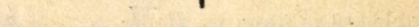


Fig. 3. — Momentul încovoietor introdus lîngă un nod cu p bare se distribuie la cele (p — i) bare nesecționate.

Plastificarea unui al doilea punct sau a celor următoare duce la sisteme de ecuații de (n—2), (n—3),. . . necunoscute. Este de amintit că rigiditățile barelor și deci coeficienții a_{ij} se vor schimba dat fiind că pentru restul încărcărilor, punctele în care au apărut articulații plastice, rămîn ca simple articulaţii. Dacă însă calculul se face pe o diagramă Cros de aproximaţii succesive se poate ţine seama de observaţia făcută precedent asupra modului de operare cînd un nod se plastifică (fig. 2). În acest caz, calculul poate fi făcut, în foarte multe cazuri, pe aceeaşi diagramă, înainte şi după plastificarea unui nod.

★

Vom aplica teoria precedentă la o grindă continuă. Considerăm o grindă continuă cu 4 deschideri (fig. 4). Să admitem că pentru această

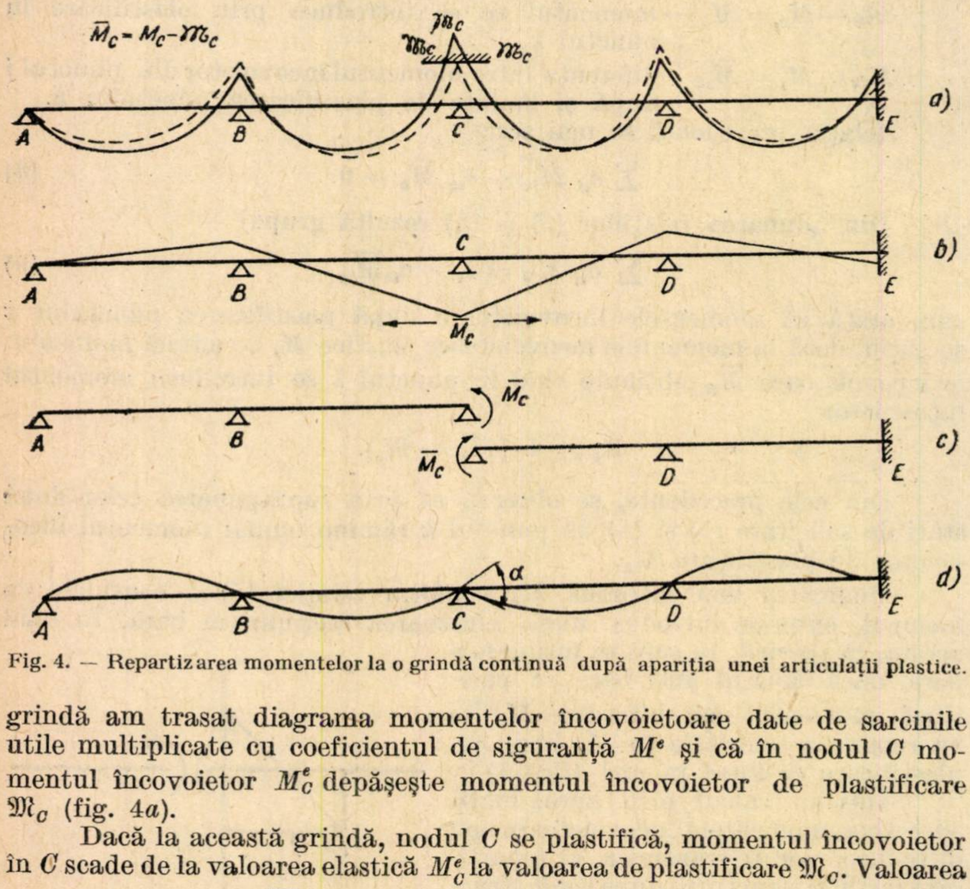


Fig. 4. — Repartizarea momentelor la o grindă continuă după apariţia unei articulaţii plastice.

grindă am trasat diagrama momentelor încovoietoare date de sarcinile utile multiplicate cu coeficientul de siguranţă M^e şi că în nodul C momentul încovoietor M_C^e depăşeşte momentul încovoietor de plastificare $\mathfrak{M}_C$ (fig. 4*a*).

Dacă la această grindă, nodul C se plastifică, momentul încovoietor în C scade de la valoarea elastică M_C^e la valoarea de plastificare $\mathfrak{M}_C$. Valoarea acestei scăderi va fi $\overline{M}_C = -[M_C^e - \mathfrak{M}_C]$. Scăzînd momentul în C, în celelalte noduri ale grinzii, momentele încovoietoare se vor schimba; vor creşte în B şi D (fig. 4*b*).

Noua distribuţie de momente încovoietoare a grinzii se poate obţine dacă se suprapun peste diagrama momentelor încovoietoare elastice momentele încovoietoare ce rezultă din momentul $-\overline{M}_C^e$ aplicat în punctul C (fig. 4*b*). Un asemenea moment încovoietor poate fi introdus în punctul C dacă se taie grinda şi se introduc în cele două porţiuni de grindă momentele încovoietoare ($\overline{M}^e_C$) (fig. 4*c*). Se va obţine astfel repartiţia de momente încovoietoare de după plastificarea nodului *C*, prin suprapunerea diagramei de momente încovoietoare (fig. 4*b*) peste diagrama din figura 4*a*.

În punctul *C* se pierde continuitatea fibrei medii a grinzii, tangentele la cele două semigrinzi ce se întîlnesc în *C* vor face un unghi α necompatibil cu o grindă continuă, dar posibil la o grindă cu o articulaţie plastică în nodul *C* (fig. 4*c* şi *d*).

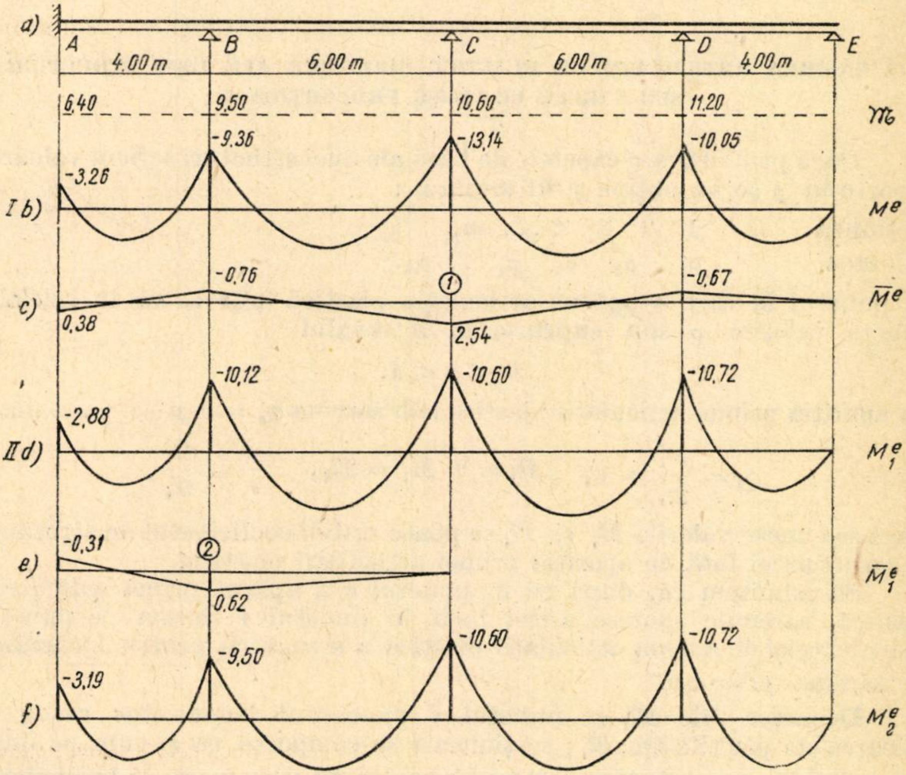

a)
A
B
C
D
E
4,00m
6,00m
6,00m
4,00m
6,40
9,50
10,60
11,20
𝔐
-9,36
-13,14
-10,05
-3,26
I b)
M^e
-0,76
①
-0,67
c)
0,38
2,54
$\overline{M}^e$
-10,12
-10,60
-10,72
-2,88
II d)
M^e_1
-0,31
②
e)
0,62
$\overline{M}^e_1$
-10,60
-10,72
-9,50
-3,19
f)
M^e_2

Fig. 5. — Grindă continuă cu două secţiuni plastificate.

Exemplul I. Distribuţia momentelor încovoietoare în grinda continuă din figura 5.

Grinda continuă din figura 5, de 4 ori static nedeterminată,calculată elastic cu un coeficient de siguranţă $c = 2$ capătă o articulaţie plastică pe reazimul *C* în care momentul încovoietor calculat elastic e $M^e_C = -13{,}14$ şi $\mathfrak{M}_C = 10{,}6$ t. m.

În nodul *C* se introduce un moment egal cu $\overline{M}^e_C = -[M^e_C - \mathfrak{M}_C] = 2{,}54$ t. m. care se transmite celorlalte reazeme ale grinzii continue (după metoda Cros) (fig. 5).

Cu noua distribuţie de momente în nodul *B*, momentul elastic depăşeşte pe cel plastic.

În nodul *B* se introduce un moment egal cu $\overline{M}_B = -(M^e_B - \mathfrak{M}_B)$

$$\overline{M}_B = -[10{,}12 - 9{,}50] = 0{,}62 \text{ t. m.},$$

care se transmite celorlalte noduri neplastificate ale grinzii. Pentru această nouă distribuţie de momente, nodul *C* apare ca o articulaţie.

Se capătă astfel distribuția generală de momente cu nodurile C şi B plastificate.

Ordinea de plastificare a nodurilor este C, B.

După apariția fiecărei articulații plastice la noduri trebuie să se verifice dacă nu apar şi în cîmp articulații plastice.

Se poate deduce sporul de sarcină care poate fi suportat de structură în ipoteza apariției celor două articulații plastice, față de sarcina din regim elastic, în ipoteza că dimensiunile structurii, rămîn aceleaşi.

D. GĂSIREA ARTICULAȚIILOR PLASTICE SUCCESIVE ALE UNEI STRUCTURI SUB SARCINI CE CRESC PROPORȚIONAL

Dacă pentru toate capetele de bară ale unei structuri scriem valoarea raportului ρ se va obține şirul următor:

secțiunea	1	2	3	4 ...	m,
valoarea	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4 ...	ρ_m.

În punctul în care a apărut articulația plastică $\rho \geqslant 1$, iar în celelalte puncte valorile ρ sînt cuprinse în intervalul

$$0 < \rho < 1.$$

La apariția primei articulații plastice sub sarcina $p_e = c_1 p$ se va realiza:

$$\rho_1 = \frac{M_i^e}{\mathfrak{M}_i} = 1, \quad M_i^e = c_1 M_i = \mathfrak{M}_i, \quad \frac{1}{c_1} = \frac{M_i}{\mathfrak{M}_i}.$$

Dacă se cunosc valorile M_i şi $\mathfrak{M}_i$ se poate stabili coeficientul de siguranță al construcției față de apariția primei articulații plastice.

Să admitem că, după ce în punctul i a apărut prima articulație plastică, sarcinile sporesc astfel încît în punctul j sîntem pe punctul apariției celei de-a doua articulații plastice a structurii pentru încărcarea cu sarcina $p_e^2 = c_2 p$.

Deoarece $M_i^e > \mathfrak{M}_i$ în punctul i momentul încovoietor scade la valoarea de plastificare $\mathfrak{M}_i$; secțiunea i se comportă ca şi cum pe lîngă momentul încovoietor M_i^e s-ar fi mai introdus un nou moment încovoietor $\overline{M}_i^e$ care să satisfacă relația

$$M_i^e + \overline{M}_i^e = \mathfrak{M}_i. \tag{10}$$

În acelaşi timp, în punctul j apare momentul încovoietor $M_j^e + t_{ij}\overline{M}_i^e$. Cum sîntem în momentul apariției articulației plastice din j, se va avea

$$M_j^e + t_{ij}\overline{M}_i^e = \mathfrak{M}_j. \tag{11}$$

Momentele încovoietoare M_i^e şi M_j^e se obține în ipoteza structurii fără articulații plastice, calculată la sarcina $p_e^2 = c_2 p$. Coeficientul de transmisie t este dedus în ipoteza structurii secționate în i. Cunoscînd momentul încovoietor M_i, este cunoscut şi momentul $\overline{M}_i^e = [\mathfrak{M}_i - M_i^e]$ şi deci valoarea

$$\rho_j^e = \frac{M_j^e + t_{ij}\overline{M}_i^e}{\mathfrak{M}_j}. \tag{12}$$

A doua articulație plastică apare atunci cînd

$$\rho_j^e = \frac{M_i^e + \overline{M}_i^e}{\mathfrak{M}_i} = \frac{M_j^e + t_{ij}\overline{M}_i^e}{\mathfrak{M}_j} = 1. \tag{13}$$

Coeficientul de siguranță al structurii față de apariția acestei a doua articulații plastice va fi dat de relația

$$c_2\,(M_j + t_{ij}\overline{M}_i) = M_j^e + t_{ij}\,\overline{M}_i^e = \mathfrak{M}_j, \tag{14}$$

$$c_2 = \frac{\mathfrak{M}_j}{M_j + t_{ij}\overline{M}_i}. \tag{15}$$

În același mod se poate găsi coeficientul de siguranță al structurii față de apariția următoarelor articulații plastice.

Astfel dacă următoarea articulație plastică ar fi să apară în punctul k plecînd de la momentele încovoietoare M_i și M_j din faza precedentă în punctele i și j se vor introduce noi momente încovoietoare $\overline{\overline{M}}_i^e$ și $\overline{M}_j^e$ care vor face ca momentul încovoietor din punctul k să satisfacă relația

$$\frac{M_i^e + \overline{M}_i^e}{\mathfrak{M}_i} = \frac{M_j^e + t_{ij}\overline{M}_i^e}{\mathfrak{M}_j} = \frac{M_k^e + t_{ik}\overline{\overline{M}}_i^e + t_{jk}\overline{M}_j^e}{\mathfrak{M}_k}, \tag{16}$$

iar coeficientul de siguranță al structurii , față de apariția celei de-a treia articulații plastice, ar fi

$$c_3 = \frac{\mathfrak{M}_k}{M_k + t_{ik}\overline{\overline{M}}_i + t_{jk}\overline{M}_j}. \tag{17}$$

Analitic, momentele $M_j + t_{ij}\overline{M}_i$ și $M_k + t_{ik}\overline{\overline{M}}_i + t_{jk}\overline{M}_j \ldots$ sînt greu de calculat, coeficienții de transmisie t fiind alții pentru fiecare nouă apariție de articulații plastice. Aceste momente încovoietoare se pot afla însă fără greutate printr-un calcul cu aproximații succesive Cros, obținut prin introducerea în noduri a unor momente încovoietoare $\overline{M}_i^e$ și $\overline{M}_j^e$ care să satisfacă relațiile (4) și (7).

Calculul poate fi urmat pe această cale pînă la găsirea ultimei articulații plastice.

E. CONDUCEREA CALCULULUI ÎN DOMENIUL ELASTIC PLECÎND DE LA ÎNCĂRCĂRILE REALE ALE STRUCTURII

În cele expuse, s-a văzut că toate operațiile au fost făcute în regim elastic, ținîndu-se numai seama de articulațiile plastice apărute înainte de o anumită fază a calculului. În cele ce urmează se va arăta că acest calcul poate fi făcut și la nivelul momentelor încovoietoare date de sarcinile reale, fără introducerea coeficientului de siguranță al construcției.

Cînd într-o structură secțiunea i se plastifică, rămîne în acea secțiune momentul încovoietor

$$\mathfrak{M}_i = M_i^e + \overline{M}_i^e,$$

iar în nodul j, a doua secțiune ce se va plastifica, va apare momentul încovoietor

$$\mathfrak{M}_j = M_j^e + t_{ij}\overline{M}_i^e.$$

Dacă structura are două secțiuni plastificate și urmează plastificarea secțiunii k, momentele încovoietoare în punctele plastificate anterior vor fi

$$\mathfrak{M}_i = M_i^e + \overline{M}_i^e, \qquad \mathfrak{M}_j = M_j^e + t_{ij}\,\overline{M}_i^e, \tag{18}$$

iar în nodul k va apare momentul

$$\mathfrak{M}_k = M_k^e + t_{ik}\,\overline{\overline{M}}_i^e + t_{jk}\,\overline{M}_j^e, \tag{18'}$$

unde s-a notat prin dubla barare momentele încovoietoare, introduse după plastificarea penultimului nod.

Să admitem acum că am pleca de la momentele încovoietoare date de sarcinile p în care caz am avea

$$\frac{M_i}{\mathfrak{M}_i} = \rho_i < 1, \qquad \frac{M_j}{\mathfrak{M}_j} = \rho_j < \rho_i < 1, \qquad \frac{M_k}{\mathfrak{M}_k} = \rho_k < \rho_j < \rho_i < 1. \tag{19}$$

După plastificarea secțiunii i, la apariția celei de-a doua articulații plastice se va obține

$$\frac{M_i + \overline{M}_i}{\mathfrak{M}_i} = \frac{M_j + t_{ij}\,\overline{M}_j}{\mathfrak{M}_j} = \rho_j\,. \tag{20}$$

După plastificarea mai multor secțiuni, la apariția articulației plastice în secțiunea k se va avea

$$\frac{M_i + \overline{M}_i}{\mathfrak{M}_i} = \frac{M_j + t_{ij}\,\overline{M}_i}{\mathfrak{M}_j} = \ldots = \frac{M_k + t_{ik}\,\overline{\overline{M}}_i + t_{jk}\,\overline{M}_j}{\mathfrak{M}_k}\,. \tag{20'}$$

Ținînd seama că

$$\frac{M_i^e}{M_i} = \frac{M_j^e}{M_j} = \ldots = \frac{M_k^e}{M_k},$$

rezultă din relațiile precedente (19) și (20)

$$\frac{M_i^e}{M_i} = \frac{M_j^e}{M_j} = \ldots \frac{\overline{M}_i^e}{\overline{M}_i} = \frac{\overline{M}_j^e}{\overline{M}_j} = \ldots \frac{\overline{\overline{M}}_i^e}{\overline{\overline{M}}_i} = \frac{\overline{\overline{M}}_j^e}{\overline{\overline{M}}_j}\,. \tag{21}$$

Se deduce de aici că operațiile făcute la nivelul momentelor încovoietoare

$$M_i^e,\ M_j^e, \ldots, M_k^e$$

pot fi făcute și la nivelul

$$M_i,\ M_j, \ldots\ M_k$$

introducîndu-se momente încovoietoare $\overline{M}_i$, $\overline{M}_j$ proporționale. În acest caz, valorile de $1/\rho_i$, $1/\rho_j \ldots 1/\rho_k$ sînt chiar coeficienții de siguranță ai construcției, față de apariția articulațiilor plastice în secțiunile i și $j \ldots k$.

F. ARTICULAȚII PLASTICE APĂRUTE ÎN CÎMPUL DIFERITELOR BARE

După fiecare etapă de calcul, adică după găsirea fiecărei articulații plastice din capetele de bare se va cerceta dacă nu vor apare articulații plastice în cîmpul barelor, înainte de a apare o nouă articulație plastică la un nod. Cunoscînd momentele încovoietoare la nodurile barelor şi momentele încovoietoare de simplă rezemare din cîmpul barelor date de

$$M = M_0 + \frac{x_2}{l} M_{k-1} + \frac{x_1}{l} M_k ,$$

se poate cunoaşte punctul de apariţie al unei articulaţii plastice în cîmp (fig. 6).

În cîmpul unei bare, articulaţia plastică se dezvoltă pe o oarecare lungime de bară astfel că practic, nu prezintă interes de a considera, cel puţin la construcţii încărcate cu sarcini distribuite, pentru poziţia articulaţiei plastice din cîmp, un alt punct decît mijlocul barei (fig. 6).

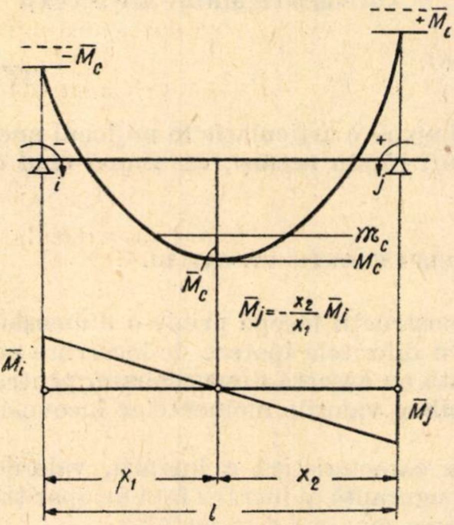


Fig. 6. — Transmiterea momentelor la o grindă ce are o articulaţie plastică în cîmp.

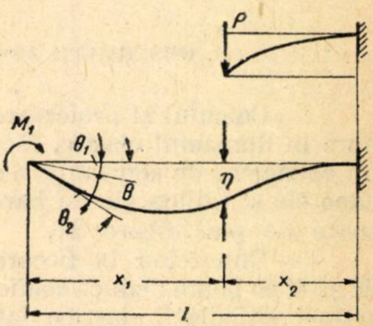


Fig. 7. — Rigiditatea barelor ce au o articulaţie plastică în cîmp.

Apariţia articulaţiei plastice din cîmpul unei bare se poate constata luînd pentru mijlocul barei, valoarea raportului ρ şi comparînd această valoare cu celelalte valori ρ ale structurii (exemplul 3).

La apariţia unei articulaţii plastice în cîmp, momentul încovoietor nou întrodus în mijlocul deschiderii

$$\overline{M}_c = -[M_c - \mathfrak{M}_c],$$

se transmite la reazeme cu valorile întregi şi semnul metodei Cros adică conform figurii 6.

Momentul încovoietor întrodus în unul din nodurile deschiderii cu articulaţia plastică în cîmp, după apariţia acestei articulaţii se transmite ca în figura 6. Dacă articulaţia plastică este aşezată la distanţele x_1 şi x_2 de capetele barei, momentul transmis din punctul 1 în 2 va fi $M_2 = -M_1 . x_2/x_1$, şi deci $t_{12} = -x_2/x_1$. Cînd $x_1 = x_2$ atunci $M_2 = -M_1$, iar în diagrama Cros aceste momente se notează cu acelaşi semn.

Momentele ajunse la capetele deschiderii plastificate în cîmp vor fi : $(-\overline{M}_i + \overline{M}_j)$ în i şi $(+\overline{M}_i + \overline{M}_j)$ în j şi se transmit întregii structuri neplastificate conform metodei Cros.

Pentru restul structurii, trebuie să se stabilească rigiditatea unei bare care are o articulaţie plastică în cîmp. Se poate deduce, cu notaţiile din figura 7 că rigiditatea unei bare care are o articulaţie plastică la distanţele x_1 şi x_2 de capete este

$$R = \frac{3EI}{x_1} \cdot \frac{x_1^3}{x_1^3 + x_2^3}. \tag{22}$$

De aici, rezultă că pentru $x_1 = l/2$ şi $x_1 = l$ această rigiditate are aceeaşi valoare

$$R = \frac{3EI}{l}. \tag{22'}$$

Urmează că în metoda Cros, cînd apare o articulaţie în mijlocul unei bare, coeficienţii de repartiţie la noduri rămîn aceiaşi, ca atunci cînd o bară, este articulată la celălalt capăt.

G. OBSERVAŢII ASUPRA MODULUI PRACTIC DE CALCUL

— Calculul şi proiectarea unei construcţii începe printr-o dimensionare în domeniul elastic, făcută pentru diferitele ipoteze de încărcare cu un coeficient de siguranţă redus. O dată cu această dimensionare, pentru capetele şi mijloacele de bare, se stabilesc valorile momentelor încovoietoare de plastificare $\mathfrak{M}$.

— Cunoscînd în fiecare secţiune caracteristică a lucrării, valorile $\mathfrak{M}$ şi M se poate deduce coeficientul de siguranţă al lucrării faţă de apariţia primei articulaţii plastice dat de valoarea maximă a raportului

$$c_1 = \frac{1}{\rho_i}, \quad \rho_i = \frac{M_i}{\mathfrak{M}_i}. \tag{23}$$

— Se introduce în punctul i un moment încovoietor $\overline{M}_i$ pentru care

$$\rho_j = \frac{M_i + \overline{M}_i}{\mathfrak{M}_i} = \frac{M_j + t_{ij}\overline{M}_i}{\mathfrak{M}_j} = \frac{1}{c_2}; \tag{24}$$

t_{ij} se calculează în structura secţionată în punctul i. Nu este necesar a se calcula valoarea t_{ij} ci totul se obţine dintr-o diagramă Cros la care distribuţia momentului încovoietor $\overline{M}_i$ se face în ipoteza structurii secţionate în i.

— Plecînd de la momentele încovoietoare la care s-a ajuns mai înainte, se introduc noi momente încovoietoare $\overline{\overline{M}}_i$ şi $\overline{M}_j$ astfel încît pentru un al treilea punct al structurii să se realizeze

$$\rho_k = \frac{M_i + \overline{\overline{M}}_i}{\mathfrak{M}_i} = \frac{M_j + \overline{M}_j}{\mathfrak{M}_j} = \frac{M_k + t_{ik}\overline{\overline{M}}_i + t_{jk}\overline{M}_j}{\mathfrak{M}_k} = \frac{1}{c_3}, \tag{25}$$

valorile t_{ik} şi t_{jk} pentru această fază de calcul se iau pentru structura secţionată în punctele i şi j. În calculul prin metoda Cros se consideră punctele i şi j articulate pentru această fază de calcul.

— Înainte de apariţia fiecărei articulaţii plastice pe reazeme, se cercetează dacă nu au apărut articulaţii plastice în cîmp şi în acest caz s-au dat în cele de mai sus bazele de procedare.

— Expunerea precedentă se menține la formele generale ale problemei în cazurile mai complicate. În anumite cazuri se pot da soluții simplificate care întroduc oarecare îndepărtări de soluția exactă dar care au un mod simplu de aplicare.

★

Exemplul II. Stabilirea ordinii de apariție a articulațiilor plastice la o grindă continuă. Vom expune, în cele ce urmează, modul de aplicare a celor expuse mai înainte la o grindă continuă, calculată în trei ipoteze de încărcare (fig. 8).

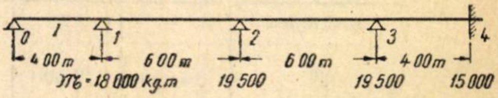

0
1
1
2
3
4
4 00m
6 00m
6 00m
4 00m
𝔐 = 18 000 kg.m
19 500
19 500
15 000

Fig. 8. — Schema unei grinzi continue.

Să urmărim calculul din ipoteza III cînd grinda e încărcată cu sarcina $p + g = 3$ t/m.l. Admițînd că grinda este calculată cu coeficientul de siguranță $c = 2$ în unul din nodurile grinzii, raportul între momentul încovoietor elastic și momentul de plastificare $\mathfrak{M}$ va fi apropiat de 0,5, fie pentru nodul 2, $\rho = 0{,}504$, iar pentru celelalte noduri, momentele încovoietoare M_k^e satisfac relația $\rho_k = \dfrac{M_k^e}{\mathfrak{M}_k} < 0{,}5$.

Dacă în nodul 2 se introduce un moment încovoietor $\overline{M_2}$ de semn schimbat cu momentul încovoietor calculat elastic, $\overline{M}_2$, ar rămîne în acel punct momentul încovoietor $M_2 + \overline{M}_2$ iar raportul ρ ar scădea în consecință. De exemplu, pentru $M_2 = 1{,}830$ t.m. se realizează valori apropiate de $\rho_1 = 0{,}440$ (tabela 1).

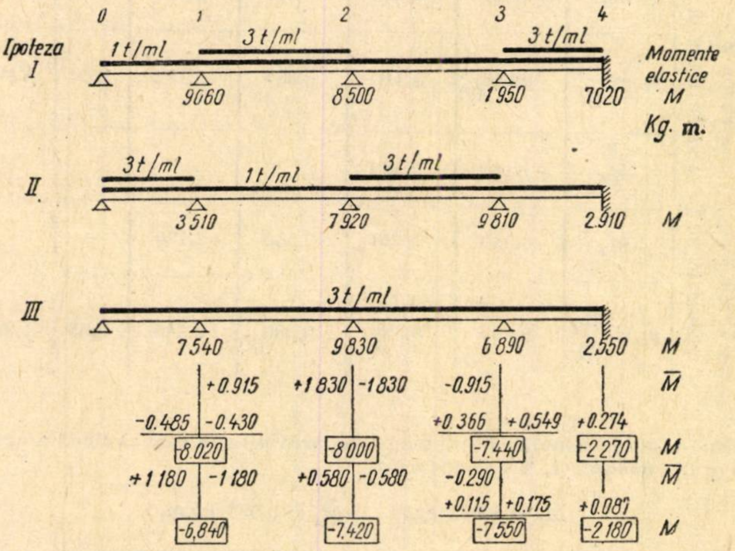

0
1
2
3
4
Ipoteza I
1 t/ml
3 t/ml
3 t/ml
9060
8500
1950
7020
Momente elastice M
Kg. m.
II
3 t/ml
1 t/ml
3 t/ml
3510
7920
9810
2.910
M
III
3 t/ml
7540
9830
6890
2550
M
+0.915
+1 830
-1830
-0.915
M̄
-0.485
-0.430
+0.366
+0.549
+0.274
-8.020
-8000
-7.440
-2270
M
+1 180
-1 180
+0.580
-0.580
-0.290
M̄
+0.115
+0.175
+0.087
-6,840
-7.420
-7.550
-2.180
M

Fig. 9. — Schema de încărcare la grinda din figura 8.

După introducerea momentului încovoietor $\overline{M}_2$, dacă, vom spori sarcina în raportul $1/\rho_2 = 1/0{,}446 = 2{,}24$ se va ajunge la valorile de plastificare ale secțiunilor din nodurile 1 și 2 (fig. 9).

Momentul introdus într-un prim calcul $\overline{M}_2 = 1830$ kg.m. nu realizează riguros $\rho_1 = \rho_2$. Prin încercări se observă că $\overline{M}_2 = 1330$ kg.m. ar fi realizat valori mai apropiate $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}436$ și $c = 2{,}29$.

Stabilirea momentului încovoietor $\overline{M}_2$ se face fără greutate prin încercări, deoarece o dată cu introducerea lui în schemă, M_1 crește. Ținînd seama de coeficientul de transmisie a momentului între nodul 2 și 1, se poate face și un calcul exact, însă practic pentru proiectare este mai ușor de făcut calculul prin încercări care dau precizia dorită.

Tabela 1

Momente încovoietoare elastice relative la grinda din figura 8

Secțiunea		1	2	3	4	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{P_i}{P_1}$
$\mathfrak{M}$		18,000	19,500	19,500	15,000		
— Etapa 1 — pînă la prima artic. pl.	M_1	$-7,540$	$-9,830$	$-6,890$	$-2,550$		
	$\rho_1 = \frac{M_1}{\mathfrak{M}}$	0,420	0,504 ①	0,353	0,170	1,99	1,00
	$\overline{M}_1$		$+1,830$				
— Etapa 2 — a doua artic. pl.	M_2	$-8,020$	$-8,000$	$-7,440$	$-2,270$		
	$\rho_2 = \frac{M_2}{\mathfrak{M}}$	0,446 ②	0,410	0,381	0,152	2,24	1,12
	$\overline{M}_2$	$+1,180$	$+0,580$				
— Etapa 3 — a treia artic. pl.	M_3	$-6,840$	$-7,420$	$-7,550$	$-2,180$		
	$\rho_3 = \frac{M_3}{\mathfrak{M}}$	0,380	0,380	0,386 ③	0,145	2,58	1,29

Aplicînd acum în nodurile 1 și 2 momente încovoietoare care să tindă a egaliza valorile rapoartelor ρ din nodurile 1, 2 și 3 anume:

$$\overline{M}_1 = 1\,180 \text{ kg.m}, \qquad \overline{M}_2 = 0,580 \text{ kg.m},$$

se va ajunge la o situație în care valorile ρ în punctele 1, 2, 3 sînt sensibil egale $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0,380$ și sporind sarcina în raportul $1/\rho_3$ se vor obține concomitent articulații plastice în punctele 1, 2 și 3. În acest mod se justifică introducerea unor noi momente de corecție în 1 și 2 și se capătă sub forma $1/\rho_3$ sporul de sarcină pentru care structura capătă trei articulații plastice.

Este de observat că toate transmisiile și distribuțiile de momente încovoietoare s-au făcut pe o diagramă statică elastică și numai la sfîrșit, prin sporirea proporțională a sarcinii în toată structura, s-a ajuns la realizarea simultană a momentelor de plastificare în cîte o serie de noduri.

Din cauză că toate operațiile s-au făcut în domeniu elastic s-ar fi putut lucra cu orice sistem de sarcini proporționale cu sarcinile date.

Înainte de a se trece de la un nod plastificat la cel următor, trebuie examinat dacă :

— apar articulații plastice în cîmp,

— apar mecanisme locale care să ducă la pierderea stabilității unei părți din lucrare.

Aceste două elemente se pot cerceta cu ușurință deoarece se cunosc momentele negative de pe reazemele tuturor deschiderilor.

Deoarece s-a lucrat cu momentele încovoietoare date de sarcinile reale, rapoartele între momentele încovoietoare elastice și cele de plastificare, dau chiar coeficienții de siguranță

$$\rho_1 = 1{,}99, \quad \rho_2 = 2{,}24, \quad \rho_3 = 2{,}58,$$

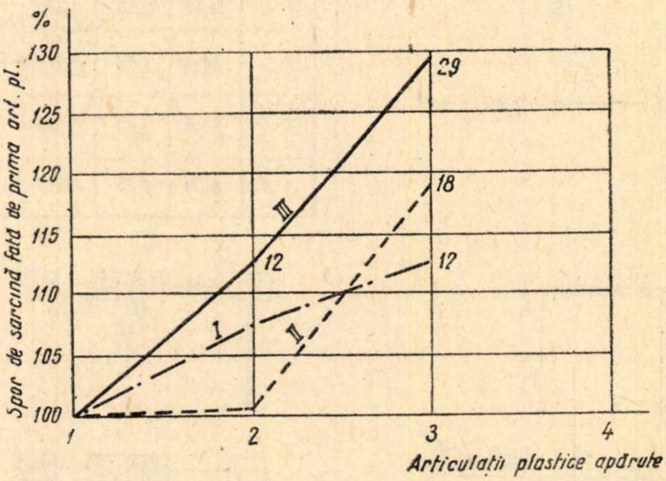


Fig. 10. — Sporul de încărcare a structurii la apariția a 2 și 3 articulații plastice.

ai structurii pînă la apariția a 1, 2, 3 articulații plastice. Cum domeniul elastic se întinde pînă la apariția primei articulații plastice rapoartele

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1{,}12, \quad \frac{\rho_3}{\rho_1} = 1{,}29,$$

dau sporurile de sarcini cu care structura este dusă la cea de-a doua sau a treia articulație plastică.

În figura 10 s-au trasat pentru cele trei ipoteze de încărcare arătate în figura 8 curbele ce dau față de sarcina maximă elastică, sporurile de sarcini, atunci cînd apar 1, 2, 3 articulații plastice.

Exemplul III. Calculul unui cadru în trei ipoteze de încărcare

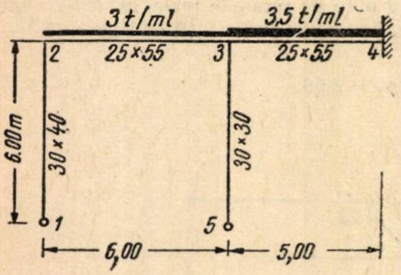
Cadrul cu noduri fixe din figura 11 este calculat în trei ipoteze de încărcare. Calculul s-a făcut în condițiile de lucru ale proiectării curente. În acest scop atunci cînd s-au egalat valorile ρ și s-au introdus momentele încovoietoare suplimentare $\overline{M}$ nu s-a urmărit o egalare prea riguroasă a valorilor ρ, pentru că aceasta nu ar fi dus la o îmbunătățire a proiectării.

În principiu, nu apare nici o problemă în plus față de grinzile continue.

Calculul începe prin o primă dimensionare făcută în domeniul elastic, în mod normal cu un coeficient de siguranță scăzut.

În timpul calculului, dacă primele articulații apar în puncte nedorite, armătura anumitor secțiuni poate fi întărită astfel încît să nu ajungă la plastificare.

Pe aceeaşi cale, întărind unele secţiuni, se pot lua măsuri care să evite apariţia unor mecanisme locale. În acest mod, cu un spor foarte redus de material, coeficientul de siguranţă la rupere al construcţiei poate fi considerabil sporit.


3 t/ml
3,5 t/ml
2
25×55
3
25×55
4
6,00m
30×40
30×30
1
5
6,00
5,00

Bara	I	α	$i=\frac{I}{l}\alpha$	Σi	$r=\frac{i}{\Sigma i}$
1-2	16,00	0,75	0,200	0,775	0,260
2-3	34,60	1,00	0,575		0,740
				1,350	0,430
3-4	34,60	1,00	0,690		0,510
3-5	6,75	0,75	0,085		0,060

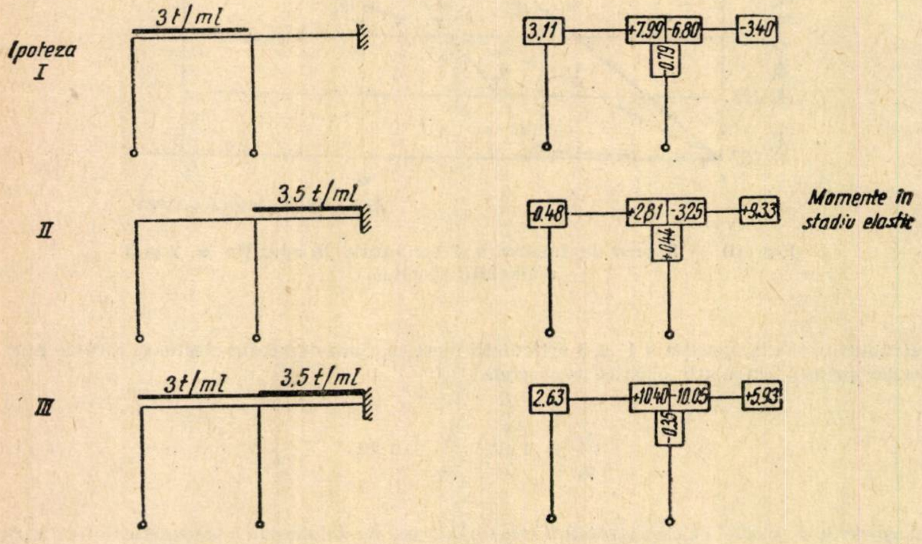

Ipoteza I
3 t/ml
3,11
+7.99
-6.80
-3.40
-0.79
II
3.5 t/ml
-0.48
+2.81
-3.25
+9.33
+0.44
Momente în stadiu elastic
III
3 t/ml
3.5 t/ml
2.63
+10.40
-10.05
+5.93
-0.35

Fig. 11. — Schema unui cadru cu noduri fixe.

În tabela 2 se dau detaliile de calcul, pentru ipoteza II de încărcare. Se observă că prima articulaţie plastică apare în secţiunea 4—3, unde este necesar a se introduce un moment încovoietor $\overline{M}_{23} = -0{,}700$ t.m, pentru ca valoarea $\rho = 0{,}594$ din acel punct să scadă şi să se obţină

$$\rho_{43} = \rho_{304} = 0{,}550.$$

Pentru că există posibilitatea ca o articulaţie să apară în cîmp, în tabela 2 s-a introdus şi o coloană pentru articulaţia din cîmp a barei 4—3, coloană notată 3 0 4. Cea de-a doua articulaţie apare în cîmp în bara 3 0 4, deoarece pentru mijlocul deschiderii $\rho_{304} = 0{,}518$ creşte la $\rho_{304} = 0{,}550$.

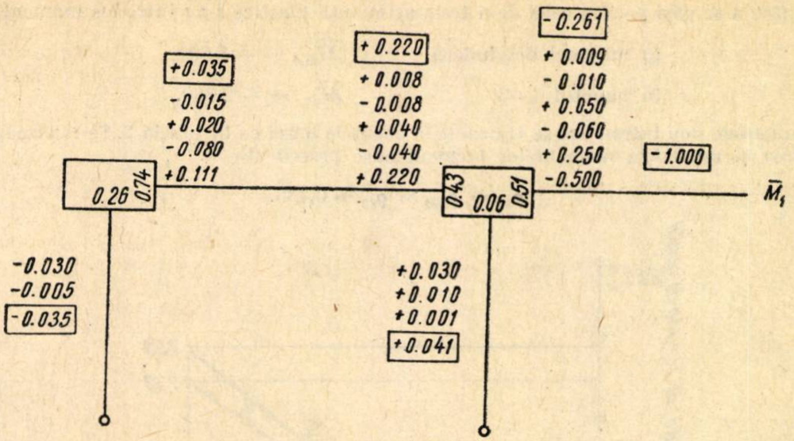

-0.261
+0.009
-0.010
+0.050
-0.060
+0.250
-0.500
+0.220
+0.008
-0.008
+0.040
-0.040
+0.220
+0.035
-0.015
+0.020
-0.080
+0.111
0.26
0.74
0.43
0.06
0.51
-1.000
$\overline{M}_1$
-0.030
-0.005
-0.035
+0.030
+0.010
+0.001
+0.041

Fig. 12. — Momente încovoietoare obţinute în cadrul din figura 11 prin introducerea momentului $M = 1\,000$ kgm în punctul 4—3.

Tabela 2

Momente elastice relative la cadrul din figura 11
Ipoteza II

Secţiunea		2—1	2—3	3—2	3—4	304	4—3	3—5	$\frac{1}{\rho}$	Obs.
𝔐		±6,050	−4,900	+ 16,700	−16,700	+9,000	+15,700	±5,920		
— Etapa 1 — pînă la prima art. pl.	M_1	−0,480	+0,480	+2,800	−3,250	+4,660	+9,330	+0,450		
	ρ_1	0,079	0,097	0,168	0,195	0,518	0,594	0,076	1,69	Prima art. pl. în 4—3
	$\overline{M}_1$	−0,025	+0,025	+0,154	−0,182	+0,260	−0,700	+0,028		
— Etapa 2 — a doua art. pl.	M_2	−0,505	+0,505	+2,954	−3,432	+4,920	+8,630	+0,478		
	ρ_2	0,083	0,103	0,177	0,205	0,550	0,550	0,081	1,82	A doua art. pl. în 304
	$\overline{M}_2$	−0,533	+0,533	+3,345	−1,000 −2,800	−1,000	+1,000 −2,800	+0,455		
— Etapa 3 — a treia art. pl.	M_3	−1,038	+1,038	+6,299	−7,232	+3,920	+6,830	+0,933		
	ρ_3	0,178	0,220	0,376	0,435	0,435	0,435	0,154	2,30	A treia art. pl. în 3—4.

Pentru a se găsi poziția celei de-a treia articulații plastice s-au introdus momentele :

în mijlocul deschiderii $\overline{M}_{304} = -1\,000,$

în punctul 4—3 $\overline{M}_{43} = -2\,800.$

Momentele nou introduse, se transmit la capetele barei ca în tabela 2. Se realizează după transmiterea și repartiția momentelor încovoietoare precedente

$$\rho_{34} = \rho_{304} = \rho_{43} = 0{,}435.$$

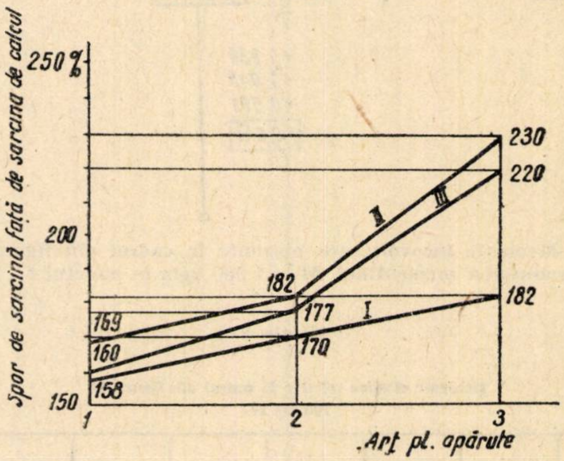


Fig. 13. — Coeficientul de siguranță al cadrului din figura 12 la apariția a 2, 3...articulații plastice.

Valorile ρ pentru diferitele faze de calcul, dau coeficienții de siguranță de la apariția fiecărei noi articulații plastice $c = 1/\rho$.

În urma calculului cadrului, s-au trasat în figura 13 curbele care dau în cele trei ipoteze de încărcare, coeficienții de siguranță ai structurii pentru care apar 2, 3, 4 articulații plastice. Se vede din acea diagramă că pentru același număr de articulații plastice apărute, sporul de sarcină de care este capabil cadrul, diferă pentru diferite scheme de încărcare.

H. CONCLUZII ȘI OBSERVAȚII ASUPRA CONDUCERII CALCULULUI

Metoda expusă permite a rezolva, la nivelul proiectării și studiului teoretic, pentru o construcție cu un grad oricît de mare de nestaticitate, o serie de probleme ce apar în proiectarea curentă a structurilor statice și anume :

a) Starea reală de lucru a unei construcții incomplet plastificată, cu apariția unui număr limitat și redus de articulații plastice.

b) Punctele și ordinea de apariție a tuturor articulațiilor plastice într-o structură total sau parțial încărcată.

c) Modul de comportare și coeficientul de siguranță al unei construcții, la care au apărut un număr de articulații plastice mai mic ca numărul total posibil.

d) Studierea treptată a apariției articulațiilor plastice în cîmp, după apariția unui număr de articulații plastice la noduri.

e) Studierea eventualelor realizări de mecanisme locale care să distrugă echilibrul structurii, înainte de plastificarea completă.

f) Ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice la cadre cu noduri deplasabile solicitate de forţe orizontale.

g) Corectarea momentelor încovoietoare la cadre cu noduri deplasabile, solicitate de încărcări verticale, calculate prin aproximaţii succesive.

h) Aplicată în rotaţii, metoda permite calculul în vederea limitării deschiderilor fisurilor unei grinzi de beton armat.

Primită la redacţie la 4 aprilie 1959.

МЕТОД РАСЧЕТА ГИНЕР СТАТИЧЕСКИХ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПУТЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Гиперстатические конструкции с большой степенью статической неопределимости могут быть рассчитаны в пластической области методом последовательных приближений.

Приведенный метод расчета опирается на следующие основные принципы:

— Уравнения статически неопределимой системы, в которых изгибающие моменты на концах стержней считаются неизвестными, преобразуются, приняв за неизвестные величины $\rho_k = M_k/\mathfrak{M}_k$ (где ρ_k — отношение момента, полученного из упругого расчета к моменту пластицирования $\mathfrak{M}$ в сечении k).

Последовательные разгружающие значения величины ρ_k, выведенные для каждого случая с учетом появившихся ранее пластических шарниров, могут указать на порядок появления этих пластических шарниров.

Таблица, дающая значение ρ после пластицирования каждого сечения, дополняет расчет системы методом последовательных приближений.

— Указывается, что сечения, остающиеся в конструкции до конца пластицированными, можно ввести пары моментов $\overline{M}_k$ приводящие значения упругих моментов к моментам пластицирования $\overline{M}_k = -(M_k - \mathfrak{M}_k)$.

Распределение этих моментов методом последовательных приближений или же методом Кросса, позволяет получить, без всяких затруднений, распределение изгибающих моментов в конструкции с пластицированными сечениями.

— Расчет можно производить в рассматриваемой конструкции при упругом режиме, исходя из рабочей нагрузки, единичной нагрузки или рабочей нагрузки, умноженной на коэффициент запаса *c*. Путем

подходящего подбора расчетной нагрузки можно добиться того, чтобы значения $1/\rho$ дали коэффициент запаса конструкции после последовательных появлений различных пластических шарниров.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Соотношение между нагрузкой и изгибающим моментом в пластицирующемся сечении: *a* — до пластицирования; *b* — после пластицирования.

Рис. 2. — После появления пластического шарнира в *i* можно продолжать вычисление с теми же коэффициентами распределения в *j*.

Рис. 3. — Изгибающий момент, введенный вблизи узла с *p* стержнями распределяется на $(p\text{-}1)$ — неразрезанные стержни.

Рис. 4. — Распределение моментов на неразрезной балке после появления пластического шарнира.

Рис. 5. — Неразрезная балка с двумя пластицированными сечениями.

Рис. 6. — Передача моментов на балке, имеющей пластический шарнир в поле.

Рис. 7. — Жесткость стержней с пластическим шарниром в поле.

Рис. 8. — Схема неразрезной балки.

Рис. 9. — Схема нагрузки на балку, указанную на рис. 8.

Рис. 10. — Добавочная нагрузка при появлении 2-го и 3-го пластического шарнира.

Рис. 11. — Схема рамы с неподвижными узлами.

Рис. 12. — Изгибающие моменты, полученные в раме, указанной на рис. 11 путем введения момента $M = 1\,000$ кгм в точку 4—3.

Рис. 13. — Коэффициент запаса рамы, указанной на рис. 12 при появлении **2**-го и 3-го пластического шарнира.

UNE MÉTHODE DE CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES DANS LE DOMAINE ÉLASTO-PLASTIQUE

RÉSUMÉ

On expose une méthode de calcul par approximations successives des structures hyperstatiques, ayant un grand degré d'indétermination.

La méthode applique les idées fondamentales suivantes :

— On exprime les équations du système hyperstatique, les inconnues étant les valeurs $\rho_k = M_k/\mathfrak{M}_k$ (ρ_k représente le rapport entre le moment élastique multiplié par le coefficient de sécurité M_k et le moment de plastifiation $\mathfrak{M}_k$ dans une section k).

Les valeurs décroissantes succesives des ρ_k, déduites en tenant compte, pour chacune, des articulations plastiques déjà paruess, peuvent fournir l'ordre d'apparition de ces articulations.

Un tableau qui donne les valeurs des ρ, après la plastification de chaque section, complète le calcul par approximations successives du système.

— On montre que, dans les sections de la structure qui, à la fin, seront plastifiées, on peut introduire des paires de moments $\overline{M}_k$ qui réduisent les valeurs des moments élastiques aux valeurs de plastification $\overline{M}_k = -(M_k - \mathfrak{M}_k)$.

La distribution de ces moments par une méthode d'approximations successives, soit par la méthode de Cros, permet d'obtenir sans difficulté la distribution des moments fléchissants de la structure plastifiée.

— Les calculs peuvent être faits dans le stade élastique (charges-unité, charges d'exploitation ou charges d'exploitation multipliées par un coefficient c). Par un chois convenable de la charge de calcul, on peut s'arranger de manière à ce que les valeurs $1/\rho$ fournissent les coefficients de sécurité de la structure, après l'apparition successive des articulations plastiques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Relation entre la charge et le moment fléchissant dans une section en voie de plastification : *a*) avant la plastification ; *b*) après la plastification.

Fig. 2. — Après l'apparition d'une articulation plastique en *k*, on peut continuer le calcul avec les mêmes cœfficients de répartition en *j*.

Fig. 3. — Le moment fléchissant introduit près d'un nœud à *p* barres distribué aux ($p - 1$) barres non sectionnées.

Fig. 4. — Répartition des moments dans une poutre continue, après l'apparition d'une articulation plastique.

Fig. 5. — Poutre continue à deux sections plastifiées.

Fig. 6. — Transmission des moments dans une poutre ayant une articulation plastique dans la portée.

Fig. 7. — Rigidité des barres ayant une articulation plastique dans la portée.

Fig. 8. — Schéma d'une poutre continue.

Fig. 9. — Schéma des charges pour la poutre de la figure 8.

Fig. 10. — Capacité de charge de la structure, à l'apparition de 2 et 3 articulations plastiques.

Fig. 11. — Schéma d'un cadre à nœuds fixes.

Fig. 12. — Moments fléchissants obtenus dans le cadre de la figure 11 par l'introduction du moment $M = 1\,000$ kgm au point 4—3.

Fig. 13. — Coefficient de sécurité du cadre de la figure 12 lors de l'apparition de 2, 3... articulations plastiques.

REZISTENȚA MATERIALELOR — ELASTICITATE — PLASTICITATE

APLICAREA METODEI RELAXĂRII LA CALCULUL ÎNVELITORILOR SUBȚIRI

DE

M. MIHAILESCU și Y. MIHAILESCU

Problemele de elasticitate, ca majoritatea problemelor de matematici aplicate, sînt caracterizate prin dificultățile care apar la *construirea* soluțiilor legate de respectarea condițiilor reale de margine, *existența* și *unicitatea* soluțiilor fiind implicit demonstrată.

Un procedeu avantajos pentru integrarea *ecuațiilor* cu *derivate parțiale* constă în trecerea la un *sistem algebric* de relații cu *diferențe finite*, format pentru suficientă precizie din 100—400 ecuații pentru rezolvarea căruia apare indicată *metoda relaxării*, formulată în [1].

Scopul lucrării este de a analiza posibilitățile de aplicare ale metodei relaxării la calculul învelitorilor subțiri, preocupare care a mai apărut în literatura tehnică însă cu un caracter mai restrîns.

I

1. Metoda relaxării elaborată de Southwell este un *procedeu general* de rezolvare prin iterație al sistemelor de ecuații liniare, similar metodei Cross.

Ideea constă în corectarea succesivă a unor valori inițial alese ca necunoscute ale sistemului , pînă cînd ecuațiile sînt satisfăcute.

Vom scrie necunoscutele sistemului sub forma unui șir convergent

$$x_i^{(n)} = x_i^{(0)} + z_1 + z_2 + \dots + z_m,$$

unde x reprezintă valoarea arbitrară dată inițial necunoscutei, iar $z_1, z_2, \dots, z_n$ corecțiile necunoscutei pe fiecare treaptă de calcul, astfel încît $x_i^{(n)}$ să reprezinte soluția căutată.

Dacă în sistemul de ecuații

$$A\mathbf{x} - \mathbf{p} = 0,$$

unde A este matricea coeficienţilor, $\mathbf{x}$ vectorul necunoscutelor şi $\mathbf{p}$ vectorul termen liber, se introduc valorile aproximative ale necunoscutelor de pe o treaptă oarecare de calcul $x_i^{(K)}$, fiecare ecuaţie va fi egală cu un reziduu, toate reziduurile formînd un vector $\mathbf{S}_K$, astfel încît

$$A\mathbf{x}^{(K)} - \mathbf{p} = \mathbf{S}_K,$$

la fel pentru o treaptă anterioară de calcul

$$A\mathbf{x}^{(K-1)} - \mathbf{p} = \mathbf{S}_{K-1},$$

corecţiile necunoscutelor $\mathbf{z}_K = x^{(K)} - x^{(K-1)}$, formează un vector care satisface sistemul

$$Az_{\mathbf{K}} + \mathbf{S}_{K-1} = \mathbf{S}_K .$$

Corecţia se aplică de obicei pe rînd cîte unei necunoscute, vectorul corecţiilor avînd atunci o singură componentă diferită de zero ; în consecinţă sistemul de ecuaţii $\mathrm{A}\, z_{\mathbf{m}} + S_{\mathbf{K-1}} = \mathbf{S}_K$ se poate scrie în cazul corectării necunoscutei x_m

$$\begin{aligned} a_{1m}\cdot z_m + S_1^{(K-1)} &= S_1^{(K)},\\ a_{2m}\cdot z_m + S_2^{(K-1)} &= S_2^{(K)},\\ &\vdots\\ a_{nm}\cdot z_m + S_n^{(K-1)} &= S_n^{(K)}. \end{aligned}$$

Valoarea corecţiei z_m se determină astfel încît să anuleze reziduul $S_m^{(K)}$ din ecuaţia nodului m

$$z_m = -\frac{S_m^{(K-1)}}{a_{mm}}.$$

Operaţia se repetă pentru fiecare treaptă corectînd necunoscuta principală din condiţia de anulare a reziduului respectiv.

Operarea asupra reziduurilor se face în ordinea mărimii lor.

Calculul se efectuează cu suficientă precizie cu rigla, numărul operaţiilor depinzînd de experienţa calculatorului, o calificare superioară fiind necesară numai la proiectarea reţelei, la transformarea ecuaţiei diferenţiale în ecuaţie cu diferenţe finite şi la evaluarea erorii.

Problemele de convergenţă ale metodei reţelelor au fost studiate de mulţi cercetători ; problema Dirichlet fiind singura mai bine studiată de Liusternik, Petrovski, Wallsh şi Young, aşa cum se indică în lucrarea lui I. Babuska [2].

Pentru accelerarea convergenţei se folosesc o serie de procedee ca *relaxarea în bloc*, *relaxarea în grup*, *suprarelaxarea.*

Pentru aplicarea relaxării în bloc se acordă creşterii unitare simultan mai multor necunoscute (procedeul a fost aplicat la calculul învelitorilor cu goluri).

Relaxarea în grup indicată mai ales la rezolvarea sistemelor de ecuații este o operație în bloc generalizată, prin care se atribuie simultan necunoscutelor creșteri de diferite valori.

Suprarelaxarea constă în atribuirea unor valori necunoscutelor astfel încît modificarea reziduului să devină de semn contrar, permițînd ca la operațiile următoare reziduurile din vecinătate să scadă algebric.

2. *Inlocuirea derivatelor parțiale* prin *diferențe finite* se poate face construind direct expresia derivatei (fig. 1) pe o direcție dată x, cu ajutorul valorilor funcției într-un punct c și în două puncte vecine situate pe direcția x la distanțele $-h$ și $+h$ de punctul C; astfel conform figurii 1 ecuația cu diferențe finite corespunzătoare derivatei de ordinul doi pe direcția x este

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_C = \frac{F_B + F_D - 2F_C}{h^2}. \qquad (1)$$

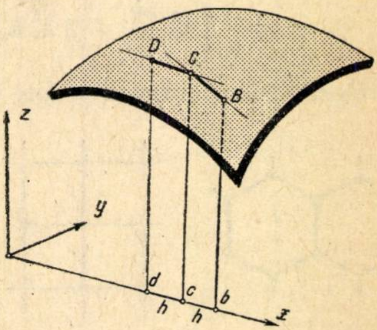


Fig. 1

Pe de altă parte, ecuația cu diferențe finite corespunzătoare derivatei de ordinul doi se poate obține dezvoltînd funcția F în serie Taylor în jurul punctului C (pînă la derivatele de ordinul IV) și calculînd valorile ei la distanțele $-h$ și h adică B și D, rezultă

$$F_B = F(x-h,y) = F(x,y)_C - h\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_C + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_C - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_C + \frac{h_4}{4!}\left(\frac{\partial_4 F}{\partial x^4}\right)_C,$$

$$F_D = F(x+h,y) = F(x,y)_C + h\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_C + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_C + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_C + \frac{h_4}{4!}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)_C.$$

Adunînd cele două expresii de mai sus, se obține

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}\right)_C = \frac{F_B + F_D - 2F_C}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)_C. \qquad (2)$$

Diferența $\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)$ dintre expresiile (2) și (1), reprezintă aproximația de calcul a formulei directe cu diferențe finite în cazul derivatei de ordinul doi. Ca urmare, pentru a mări precizia calculului, R. V. Southwell arată că linia cea mai operativă este cea de a micșora intervalul rețelei (astfel încît termenul multiplicat cu h^2 să poată fi neglijat), spre deosebire de calea mai complicată indicată de V. W. Fox (citat după [5]) care menținînd mare pasul rețelei ia în considerare și expresiile derivatelor de ordin superior.

Aproximarea operatorilor diferențiali prin expresii cu diferențe finite se deduce pe o cale simplă: plecînd de la dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții de două variabile

$$f(x_0 + h_x, \, y_0 + h_y) = f(x_0, y_0) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} + h_y \frac{\partial f}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\, h_x h_y \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} + h_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial_y{}^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(h_x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\, h_x^2 h_y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3\, h_x h_y^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + h_y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) + \ldots$$

valorile funcției necunoscute în diferite puncte ale rețelii se scriu față de coordonatele raportate la origina $f_0\,(x_0, y_0)$,

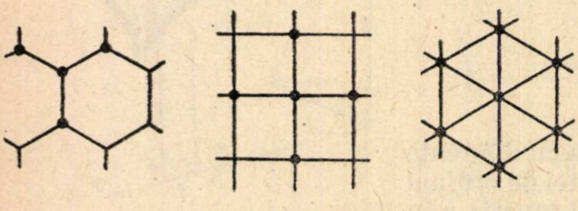


Fig. 2

3. *Alegerea tipului de rețea* depinde de o serie de factori: forma domeniului de integrare, îndesirea punctelor în anumite porțiuni ș. a.

Pînă în prezent s-au studiat rețele paralelogramice, exagonale, dreptunghiulare și pătrate (fig. 2).

Din toate aceste tipuri, rețelele pătrate au fost utilizate în aproximativ 90 % din problemele rezolvate, cele dreptunghiulare sau triunghiulare fiind folosite doar la forme speciale ale conturului.

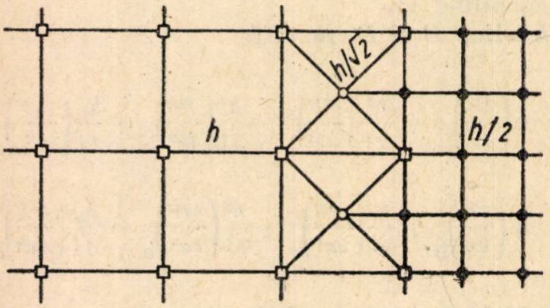


Fig. 3

Dacă într-o anumită porțiune sînt necesare valori mai numeroase ale funcției căutate, îndesirea nodurilor se face folosind rețele diagonale, așa cum recomandă A. Denis și D. N. G. Allen, (fig. 3) *evitînd îndesirea* printr-o rețea neregulată, foarte incomodă.

II

4. Ecuația diferențială de echilibru a unei invelitori subțiri în *teoria de membrană* se poate scrie după A. Pucher

$$r \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = P, \qquad (3)$$

unde $P = Z - pX - qY - r \int X dx - t \int Y dy$

iar X, Y, Z, sînt componentele încărcării pe învelitoare și

$$Z = f\,(x, y),\; p = \frac{\partial z}{\partial x},\; q = \frac{\partial z}{\partial y},\; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

fiind ecuația suprafeței și derivatele prime și secunde ; F este funcția de forțe ale cărei derivate secunde sînt egale cu eforturile din învelitoare proiectate pe planul de referință xOy (fig. 4)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = n^{xx} - \int X\,dx, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = n^{yy} - \int Y\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\,n^{xy}.$$

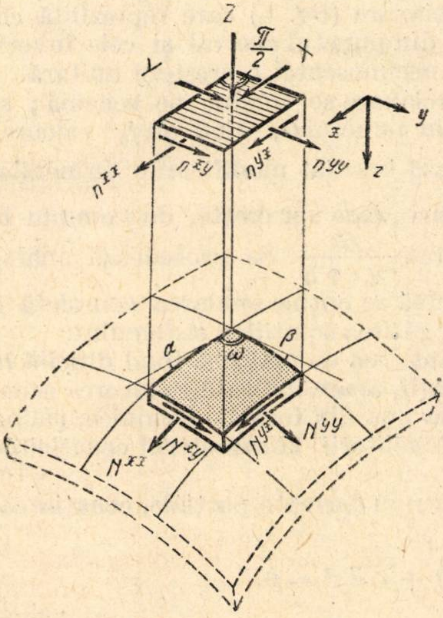


Fig. 4

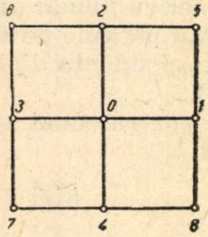


Fig. 5

Eforturile în învelitoare se obțin din expresiile eforturilor proiectate pe planul xOy, pe baza relațiilor

$$N^{xx} = n^{xx}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad N^{yy} = n^{yy}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad N^{xy} = n^{xy}, \tag{5}$$

unde α și β sînt unghiurile tangentelor la suprafață pe direcțiile x, respectiv y, cu planul de referință xOy.

5. Înlocuind în ecuația (3) derivatele parțiale prin diferențe finite, conform figurii 5

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\,(F_1 + F_3 - 2F_0),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\,(F_2 + F_4 - 2F_0),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{h^2}\,(F_5 + F_7 - F_6 - F_8),$$

se obține

$$r(F_2 + F_4) + t(F_1 + F_3) - \frac{s}{2}(F_5 + F_7 - F_6 - F_8) -$$

$$-2F_0(r + t) = h^2 P. \qquad (6)$$

Pentru ecuația cu diferențe finite, care conține în cazul general nouă necunoscute, corespunde schema de relaxare (fig. 6) care reprezintă corectarea reziduurilor din punctul central și cele învecinate, cînd se acordă necunoscutei o creștere unitară.

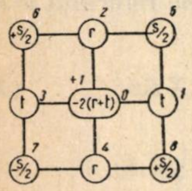


Fig. 6

Operațiile de relaxare se conduc pe schemă; se anulează reziduul din punctul O, dînd lui f_0 valoarea $\frac{R}{2(r+t)}$ și se calculează imediat modificările termenilor liberi în punctele vecine, care vor crește, de exemplu în punctul 2, cu valoarea $\frac{rR}{2(r+t)}$. Se procedează analog în celelalte puncte pînă se obține anularea completă a tuturor reziduurilor, ceea ce coincide cu găsirea soluțiilor sistemului.

Operarea cu o schemă complicată ca cea de mai sus, fiind dificilă în cazul sistemelor cu număr mare de ecuații, apare indicată reducerea ecuației cu derivate parțiale de ordinul II la una din formele canonice, ținînd seama de corespondența dintre forma învelitorii și caracterul ecuației de echilibru [3].

Scriind pentru ecuația de echilibru cu derivate parțiale, ecuația caracteristicilor

$$t dy^2 + 2\, s\, dx\, dy + r\, dx^2 = 0,$$

se pot determina pentru $\frac{dy}{dx}$ două expresii

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y) \quad \text{și} \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y). \qquad (7)$$

6. În cazul învelitorilor de *tip eliptic*, discriminantul direcțiilor caracteristice fiind $s^2 - rt < 0$, funcțiile μ_1 și μ_2 sînt imaginar conjugate; prin integrarea expresiilor (7) se obține

$$X = C_1 \quad \text{și} \quad Y = C_2$$

unde X și Y sînt două funcții imaginar conjugate. Presupunînd

$$X = \xi + i\eta \quad \text{și} \quad Y = \xi + i\eta \qquad (8)$$

deoarece r, s, t sînt funcții analitice, se pot schimba variabilele x, y cu X, Y, obținînd forma redusă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X\, \partial Y} = F\left(X, Y, Z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right). \qquad (9)$$

Înlocuind variabilele X și Y cu expresiile (8), ecuația (9) devine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = P\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \tag{10}$$

căreia îi corespunde ecuația cu diferențe finite

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 4F_0 - h^2 P = 0, \tag{11}$$

cu schema de relaxare din figura 7.

7. În cazul ecuațiilor de *tip hiperbolic*, $s^2 - rt > 0$, se operează la fel ca în cazul ecuațiilor de tip eliptic, observînd că de data aceasta ecuațiile direcțiilor caracteristice sînt reale

$$X(x, y) = C_1 \quad \text{și} \quad Y(x, y) = C_2.$$

Schimbînd variabilele x, y cu funcțiile X, Y se ajunge la forma canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X\, \partial Y} = P\left(X, Y, Z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right), \tag{12}$$

în cazul obișnuit cînd P nu depinde de $\frac{\partial z}{\partial X}$, $\frac{\partial z}{\partial Y}$, ecuația cu diferențe finite corespunzătoare ecuației diferențiale, este

$$F_6 + F_8 - F_5 - F_7 = 4h^2 P, \tag{13}$$

căreia îi corespunde schema de relaxare din figura 8.

Deoarece în acest caz, sistemul de ecuații cu diferențe finite nu satisface criteriile de convergență necesare procedeelor de iterație, pentru a opera pe schemă ca la ecuațiile de tip eliptic, se aplică o transformare liniară, așa cum se arată mai jos.

Scriind pentru nodurile de pe rîndul 2 (fig. 9) sistemul de ecuații cu diferențe finite

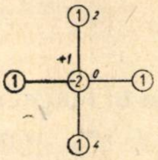


Fig. 7

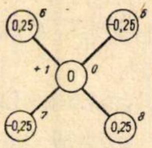


Fig. 8

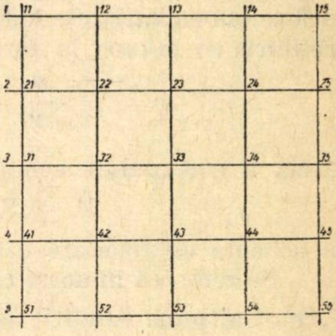


Fig. 9

$$F_{13} + F_{31} - F_{11} - F_{33} - P_{22} = 0, \tag{14}$$

$$F_{14} + F_{32} - F_{12} - F_{34} - P_{23} = 0, \tag{15}$$

$$F_{15} + F_{33} - F_{13} - F_{35} - P_{24} = 0. \tag{16}$$

Scăzînd ecuaţia (16) din (14), se obţine

$$-2(F_{33}-F_{13})+(F_{31}-F_{11})+(F_{35}-F_{15})-h^2(P_{22}-P_{24})=0.$$

Notînd

$$\left.\begin{aligned} F_{33}-F_{13}&=F_3^{31}\\ F_{31}-F_{11}&=F_1^{31}\\ F_{15}-F_{35}&=F_5^{31}\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

şi

$$K_3^{31}=(P_{24}-P_{22}).\ \mathrm{h}^2$$

ecuaţia ia forma următoare :

$$-2F_3^{31}+F_1^{31}+F_5^{31}+K_3^{31}=0,\qquad(18)$$

căreia îi corespunde schema de relaxare din figura 10.

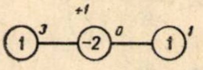


Fig. 10

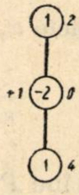


Fig. 11

După determinarea necunoscutelor F_3^{31}, $F_1^{31}\ldots,F_j^{ik}$ se deduc valorile funcţiei de forţă din rezolvarea sistemului (17), rezolvare foarte simplă, deoarece se pleacă de la o serie de valori de margine, unde $f_{ij}=F_j^{ik}$,

8. În cazul ecuaţiilor de *tip parabolic* $s^2-rt=0$, caracteristicile sînt confundate. Considerînd $X(x,y)=C$ ecuaţia familiei de caracteristici, dacă se iau ca variabile independente X şi o funcţie oarecare Y, ecuaţia de echilibru se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}=F\left(X,Y,Z,\frac{\partial z}{\partial X},\frac{\partial z}{\partial Y}\right),\qquad(19)$$

căreia îi corespunde ecuaţia cu diferenţe finite

$$F_2+F_4-2F_0+F(X,Y)h^2=0,\qquad(20)$$

cu schema de relaxare din figura 11.

Se remarcă în acest caz că rezolvarea se face numai în lungul axelor Y, putînd pune condiţii de margini numai pentru $\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}=n^{xx}$, verificînd astfel un lucru cunoscut.

III

9. Să analizăm acum aplicarea metodei relaxării pentru teoria de încovoiere.

În cadrul aproximaţiei lui V. Z. Vlasov, aşa cum s-a arătat într-o lucrare anterioară [4], ecuaţia generală de echilibru este dată de o ecuaţie cu derivate parțiale de ordinul 8, funcția necunoscută U care este mixtă, depinzînd de eforturi și deformații

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\, U + D_K\, D_K\, U = P, \tag{21}$$

în care Δ este operatorul lui Laplace, iar D_K un operator diferențial cu coeficienți variabili, funcție de forma suprafeței

$$D_K = r\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2s\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + t\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,\cdot$$

Întrucît soluția particulară a ecuației generale se poate deduce cu ajutorul teoriei de membrană, se pune numai problema rezolvării ecuației omogene

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\, U + D_K D_K U = 0. \tag{22}$$

Această ecuație se poate separa în două ecuații, avînd ca necunoscute funcția de forțe F și deplasarea w pe normala la învelitoare

$$\frac{1}{d}\Delta\Delta F - D_K W = 0, \quad \text{în care} \quad d = E\,(1\text{-}\mu)\,h, \tag{23}$$

$$k\Delta\Delta\, W + D_K F = 0, \qquad k = \frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)}\,, \tag{24}$$

presupunînd mai întîi funcția de forțe F nulă, vom determina din ecuația (2) valorile w pentru condițiile reale pe contur, care se vor introduce în ecuația (23), determinînd pe F funcție de condiții pe contur date.

Revenim cu valorile obținute pentru F în ecuația (24) și determinăm din nou valorile lui w, pe care le introducem în prima ecuație. Se conduce prin urmare un calcul de iterație pe două grupuri de ecuații cu diferențe finite, care se rezolvă fiecare în parte prin metoda relaxării.

După cum se vede din schema de relaxare, pentru laplacean (fig. 12) numărul de operații este foarte mare și calculul pe această cale nu este recomandabil decît acolo unde nu se pot construi soluții direct prin integrarea ecuației cu derivate parțiale, așa cum se procedează la cilindri, cupole sferice, paraboloizi hiperbolici. Atunci cînd se recurge, la un asemenea calcul numărul de operații necesare pentru a obține o precizie satisfăcătoare este atît de mare, încît trebuie presupus un mijloc mecanic de ajutor o mașină electronică.

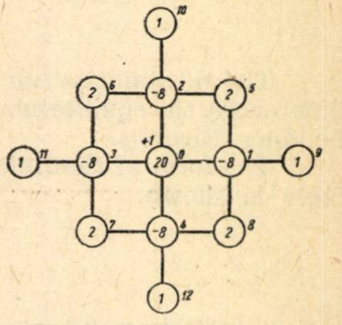


Fig. 12

Un calcul asemănător a fost efectuat recent [5], relativ la un baraj cilindric încastrat pe trei laturi.

10. *Concluzia studiului nostru* : metoda relaxării este în special indicată pentru învelitorile de *tip eliptic la care calculul în ipoteza de membrană*

este suficient, oricare ar fi încărcarea sau condițiile de rezemare pe contur, echivalente încărcării.

La aceste învelitori care se aseamănă în statică cu grinzile cu zăbrele în spațiu, momentele și forțele tăietoare sînt eforturi secundare care apar în urma deformației elementului, efectul lor putîndu-se prelua prin măsuri constructive.

În consecință, s-a trecut la calculul efectiv al unor învelitori de tip eliptic cu aplicații interesante în construcții.

Primită la redacție la 6 ianuarie 1959.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЛАКСАЦИИ К РАСЧЕТУ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе рассматривается возможность выразить при помощи конечных разностей уравнения равновесия тонких оболочек в теории мембраны и в теории изгиба.

Дается вид уравнений с конечными разностями для поверхностей различного типа.

APPLICATION OF THE RELAXATION METHOD TO THE CALCULATION OF THIN SHELLS

SUMMARY

The possibilities are discussed of expressing, with the aid of finite differences, the equilibrium equations of thin shells in the membrane and bending theories.

The form of the finite difference equations for various types of surfaces is shown.

BIBLIOGRAFIE

1. R. V. SOUTHWELL, *Relaxation Method in Theoretical Physics*, University Press, Oxford, 1949.
2. И. БАБУШКА, Л. МЕЗЛИК, Касопис про постовани Матиматики, **50**, 1953.
3. M. MIHAILESCU, *Criterii generale pentru calculul învelitorilor subțiri.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția științe tehnice și chimice, **VI** (1954).
4. M. MIHAILEȘCU, *Cîteva observații în legătură cu stadiul si proiectarea învelitorilor subțiri.* Industria construcțiilor și materialelor de construcții, **III**, *9* (1952).
5. O. RESCHER, *Die Gewölbestaumauer. Berechnung einer Kreiszylinderschale mittels Relaxations methode.* Abh. Docum. Technik., Wien. 1961.

REZISTENȚA MATERIALELOR —

ELASTICITATE—PLASTICITATE

EXTINDEREA ANALOGIEI STATICO-GEOMETRICE PENTRU ÎNVELITORILE ELASTICE SUBȚIRI CU ANIZOTROPIE DE MATERIAL

DE

CRISTIAN STĂNESCU și VIOREL VISARION

1. Introducere. Vom prezenta în cele ce urmează o extindere a analogiei statico-gemetrice pentru învelitorile elastice subțiri cu anizotropie de material.

Analogia statico-geometrică formulată pentru învelitorile cu izotropie de material de A. L. Goldenweizer [1], a fost extinsă într-o lucrare anterioară [2] pentru învelitorile cu ortotropie de material; ea a permis obținerea multor rezultate pe căi simple, dovedindu-se a fi un puternic instrument de cercetare, după cum au dovedit rezultatele publicate într-o serie de lucrări recente [3], [4], [5], [6].

Pentru elementele ce intervin în cuprinsul acestei lucrări, au fost adoptate următoarele notații, presupunînd că suprafața mediană este referită la un sistem ortogonal de coordonate curbilinii α, β :

$\mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\beta$ — forțe axiale,
$\mathfrak{N}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{N}_{\beta\alpha}$ — forțe de lunecare,
$\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\beta$ — momente de încovoiere,
$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ — momente de torsiune,
Q_α , Q_β — forțe tăietoare,
ε_1 ε_2, ω — componentele deformației tangențiale a suprafeței mediane,
χ_1 χ_2, τ — componentele deformației de încovoiere a suprafeței mediane,
a, b, c, ν — funcțiile de tensiune, definite ca în monografia [1],
$\overline{V}$ $(u,\ v,\ -w)$ — vectorul deplasării elastice.

2. Legea lui Hooke. Presupunem că materialul din care este confecționată învelitoarea, prezintă următorul gen de simetrie elastică : prin fiecare punct al mediului tridimensional ocupat de învelitoare, putem duce un plan, care să fie tangent în acest punct la suprafaţa echidistantă de suprafaţa mediană, astfel încît două direcţii oarecare, simetrice în raport cu acest plan sînt echivalente în ceea ce priveşte însuşirile elastice. Aceasta reprezintă la învelitori, extinderea anizotropiei cu plan de simetrie elastică.

Admiţînd ipotezele clasice din teoria învelitorilor, legea lui Hooke se scrie

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\tau_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_\beta &= a_{21}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\tau_{\alpha\beta}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= a_{31}\sigma_\alpha + a_{32}\sigma_\beta + a_{33}\tau_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{1}$$

coeficienţii de deformaţie a_{ij} putînd fi exprimaţi cu ajutorul constantelor tehnice.

Să notăm cu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

şi fie $(-1)^{i+j}\, d_{ij}$ complementul algebric al elementului a_{ij}.

Dacă introducem notaţia

$$A_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\, d_{ij}}{\Delta},$$

atunci sistemul (1) se poate scrie şi sub forma echivalentă eforturi-deformaţii

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= A_{11}\varepsilon_\alpha + A_{12}\varepsilon_\beta + A_{13}\gamma_{\alpha\beta}, \\ \sigma_\beta &= A_{21}\varepsilon_\alpha + A_{22}\varepsilon_\beta + A_{23}\gamma_{\alpha\beta}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= A_{31}\varepsilon_\alpha + A_{32}\varepsilon_\beta + A_{33}\gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2}$$

3. **Relaţiile elasticităţii.** Prin integrare pe grosime şi neglijînd mărimile de ordinul $\frac{h}{R}$ în comparaţie cu unitatea, se obţin următoarele relaţii între eforturi, momente şi deformaţiile suprafeţei mediane :

a) Eforturi tangenţiale

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_\alpha &= 2\,h\,A_{22}\left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\varepsilon_1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_2 + \frac{A_{13}}{A_{22}}\omega\right), \\ \mathfrak{N}_\beta &= 2\,h\,A_{22}\left(\frac{A_{21}}{A_{22}}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{A_{23}}{A_{22}}\omega\right), \\ \mathfrak{N}_{\alpha\beta} &= -\mathfrak{N}_{\beta\alpha} = 2\,h\,A_{22}\left(\frac{A_{31}}{A_{22}}\varepsilon_1 + \frac{A_{32}}{A_{22}}\varepsilon_2 + \frac{A_{33}}{A_{22}}\omega\right). \end{aligned} \tag{3}$$

b) Momente

$$\mathfrak{M}_\alpha = -\frac{2h^3}{3} A_{22}\left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\varkappa_1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\varkappa_2 + 2\frac{A_{13}}{A_{22}}\tau\right), \tag{3'}$$

$$\mathfrak{M}_\beta = -\frac{2h^3}{3} A_{22}\left(\frac{A_{21}}{A_{22}}\varkappa_1 + \varkappa_2 + 2\frac{A_{23}}{A_{22}}\tau\right),$$

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = -\mathfrak{M}_{\beta\alpha} = \frac{2h^3}{3} A_{22}\left(\frac{A_{31}}{A_{22}}\varkappa_1 + \frac{A_{32}}{A_{22}}\varkappa_2 + 2\frac{A_{33}}{A_{22}}\tau\right).$$

Rezolvînd sistemele (3) şi (3′) în raport cu componentele deformaţiei se obţin

c) Componentele deformaţiei tangenţiale ale suprafeţei mediane

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{11}}{2h}\left(\mathfrak{N}_\alpha + \frac{a_{12}}{a_{11}}\mathfrak{N}_\beta + \frac{a_{13}}{a_{11}}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}\right),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{11}}{2h}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\mathfrak{N}_\alpha + \frac{a_{22}}{a_{11}}\mathfrak{N}_\beta + \frac{a_{23}}{a_{11}}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}\right), \tag{3''}$$

$$\omega = \frac{a_{11}}{2h}\left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\mathfrak{N}_\alpha + \frac{a_{32}}{a_{11}}\mathfrak{N}_\beta + \frac{a_{33}}{a_{11}}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}\right).$$

d) Componentele deformaţiei de încovoiere a suprafeţei mediane

$$\varkappa_1 = -\frac{3}{2h^3} a_{11}\left(\mathfrak{M}_\alpha + \frac{a_{12}}{a_{11}}\mathfrak{M}_\beta - \frac{a_{13}}{a_{11}}\mathfrak{M}_{\alpha\beta}\right),$$

$$\varkappa_2 = -\frac{3}{2h^3} a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\mathfrak{M}_\alpha + \frac{a_{22}}{a_{11}}\mathfrak{M}_\beta - \frac{a_{23}}{a_{11}}\mathfrak{M}_{\alpha\beta}\right), \tag{3'''}$$

$$\tau = -\frac{3}{2h^3} a_{11}\left(\frac{a_{31}}{2a_{11}}\mathfrak{M}_\alpha + \frac{a_{32}}{2a_{11}}\mathfrak{M}_\beta - \frac{a_{33}}{2a_{11}}\mathfrak{M}_{\alpha\beta}\right).$$

După cum se remarcă din formulele de mai sus eforturile $\mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\beta$, $\mathfrak{N}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{N}_{\beta\alpha}$ sînt legate numai cu componentele deformaţiei tangenţiale, iar momentele $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ numai cu componentele deformaţiei de încovoiere.

Relaţiile elasticităţii, astfel deduse, conduc la două ecuaţii liniare nediferenţiale, între eforturile şi momentele din învelitoare. În cadrul variantei alese pentru relaţiile elasticităţii, una din ele diferă de ecuaţia a şasea de echilibru prin termeni secundari, iar cealaltă este tocmai ecuaţia suplimentară a teoriei învelitorilor subţiri, sub forma

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} + \mathfrak{M}_{\beta\alpha} = 0.$$

4. **Analogia statico-geometrică.** Vom considera sistemul ecuaţiilor omogene de echilibru, în eforturi şi momente, precum şi sistemul ecuaţiilor de continuitate a deformaţiilor [1].

Potrivit relaţiilor elasticităţii, vom lua a şasea ecuaţie de echilibru sub forma

$$\mathfrak{N}_{\alpha\beta} + \mathfrak{N}_{\beta\alpha} = 0,$$

iar în ecuaţiile de continuitate a deformaţiilor, vom folosi relaţiile aproximative

$$\tau^{(1)} = -\tau^{(2)} = \tau.$$

După cum se ştie, structura diferenţială a celor două sisteme este identică şi, mai precis, un sistem se transformă în celălalt dacă între mărimile statice şi geometrice se stabileşte următoarea corespondenţă [1] :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_\alpha \leftrightarrow \chi_2, & \mathfrak{N}_\beta \leftrightarrow \chi_1, & \mathfrak{N}_{\alpha\beta} \leftrightarrow -\tau, \\ \mathfrak{M}_\alpha \leftrightarrow \varepsilon_2, & \mathfrak{M}_\beta \leftrightarrow \varepsilon_1, & \mathfrak{M}_{\alpha\beta} \leftrightarrow \dfrac{\omega}{2}, \\ Q_\alpha \leftrightarrow -\zeta_2, & Q_\beta \leftrightarrow \zeta_1. & \end{array} \qquad \text{(A)}$$

Eforturilor tăietoare Q_α şi Q_β le corespund mărimile geometrice ζ_1 şi ζ_2 care sînt determinate numai prin componentele deformaţiei tangenţiale a suprafeţei mediane şi a derivatelor lor [1]*.

De asemenea, analogia stabilită de A. L. Goldenweizer între funcţiile de tensiune, deplasări şi unghiul de rotire δ

$$a \leftrightarrow u, \qquad b \leftrightarrow v, \qquad c \leftrightarrow w, \qquad \nu \leftrightarrow \delta \qquad \text{(B)}$$

rămîne valabilă în aceeaşi formă şi în cazul anizotrop.

Grupurile de corespondenţe (A) şi (B) decurg din relaţii stabilite, fie în baza legilor statice, fie din consideraţii pur geometrice. În consecinţă, ele se menţin indiferent de natura materialului din care este făcută învelitoarea.

În acelaşi sens se poate obţine o trecere a relaţiilor elasticităţii, unele în altele, plecînd de la corespondenţa (A).

Să considerăm de exemplu, relaţiile (3) şi (3‴). Punînd în (3) în conformitate cu tabloul de corespondenţe (A)

$$\mathfrak{N}_\alpha = \chi_2, \quad \mathfrak{N}_\beta = \chi_1, \quad \mathfrak{N}_{\alpha\beta} = -\tau, \quad \varepsilon_1 = \mathfrak{M}_\beta, \quad \varepsilon_2 = \mathfrak{M}_\alpha, \quad \omega = 2\mathfrak{M}_{\alpha\beta},$$

se obţin relaţiile (3‴), dacă introducem următoarele corespondenţe suplimentare :

$$\left.\begin{array}{l} 2h\,A_{22} \leftrightarrow -\dfrac{3}{2h^3}a_{11} \qquad \text{(a)} \\ \dfrac{A_{11}}{A_{22}} \leftrightarrow \dfrac{a_{22}}{a_{11}} \ \text{(b)}, \quad \dfrac{A_{12}}{A_{22}} \leftrightarrow \dfrac{a_{21}}{a_{11}} \ \text{(c)}, \quad 2\dfrac{A_{13}}{A_{22}} \leftrightarrow -\dfrac{a_{23}}{a_{11}} \qquad \text{(d)}, \\ \dfrac{A_{21}}{A_{22}} \leftrightarrow \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \ \text{(e)}, \quad 2\dfrac{A_{23}}{A_{22}} \leftrightarrow -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} \ \text{(f)}, \quad 2\dfrac{A_{31}}{A_{22}} \leftrightarrow -\dfrac{a_{32}}{a_{11}} \qquad \text{(g)} \\ 2\dfrac{A_{32}}{A_{22}} \leftrightarrow -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} \ \text{(h)}, \quad 4\dfrac{A_{33}}{A_{22}} \leftrightarrow \dfrac{a_{33}}{a_{11}} \ \text{(j)}. \end{array}\right\} \text{(C)}$$

---

*) p. 56.

Ca urmare a tablourilor de corespondențe (A) și (C) relațiile (3′) și (3″) trebuie să se transforme una în alta, ceea ce se poate constata ușor și ca o consecință în plus, trebuie să rezulte corespondența

$$\frac{a_{11}}{2h} \longleftrightarrow -\frac{2h^3}{3} A_{22}. \tag{D}$$

Demonstrația corespondenței (D)

Observînd că

$$\sum_i A_{ij}\, a_{ij} = 1, \qquad \sum_j A_{ij}\, a_{ij} = 1$$

putem scrie

$$\frac{2h}{a_{11}} = \frac{2h}{a_{11}} (A_{21}\, a_{21} + A_{22}\, a_{22} + A_{23} a_{23}) =$$

$$= 2h\, A_{22} \left(\frac{A_{21}}{A_{22}} \frac{a_{21}}{a_{11}} + \frac{A_{22}}{A_{22}} \frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{A_{23}}{A_{22}} \frac{a_{23}}{a_{11}} \right).$$

În baza tabelului de corespondențe (C) rezultă că

$$\frac{2h}{a_{11}} \longleftrightarrow -\frac{3}{2\,h^3}\, a_{11} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{A_{12}}{A_{22}} + \frac{a_{11}}{a_{11}} \frac{A_{11}}{A_{22}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{A_{13}}{A_{22}} \right) = -\frac{3}{2h^3 A_{22}}.$$

În modul acesta, corespondența (D) este verificată.

În încheierea grupului de corespondențe, se remarcă că se poate înlocui corespondența (C.b) în baza corespondenței (C.a) cu următoarea

$$2\,h\, A_{11} \longleftrightarrow -\frac{3}{2\,h^3}\, a_{22}. \tag{E}$$

De asemenea, din (C. b) și (D) rezultă

$$\frac{a_{22}}{2h} \longleftrightarrow -\frac{2\,h^3}{3} A_{11}. \tag{F}$$

5. Considerațiile făcute pînă în prezent au un caracter general și ele se pot aplica la toate învelitorile, pentru care relațiile elasticității sînt de forma (3), adică depind de nouă constante elastice arbitrare.

Presupunînd însă că modificările în timpul deformației se produc izotermic sau adiabatic, rezultă că între constantele elastice a_{ij}, numite coeficienții de deformație, avem relațiile [7], [8]

$$a_{ij} = a_{ji}$$

și implicit

$$A_{ij} = A_{ji},$$

adică avem patru constante elastice independente.

Aceste patru constante elastice a_{ij} se pot exprima cu ajutorul constantelor tehnice prin următoarele relații :

$$a_{11} = \frac{1}{E_\alpha}, \qquad a_{12} = -\frac{\mu_\alpha}{E_\alpha}, \qquad a_{13} = \frac{\eta_\alpha}{E_\alpha},$$

$$a_{21} = -\frac{\mu_\beta}{E_\beta}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E_\beta}, \qquad a_{23} = \frac{\eta_\beta}{E_\beta},$$

$$a_{31} = \frac{\nu_\alpha}{G}, \qquad a_{32} = \frac{\nu_\beta}{G}, \qquad a_{33} = \frac{1}{G}\cdot$$

Sensul fizic al acestor constante este evident ; E_α, E_β sînt modulii de elasticitate longitudinali după direcțiile α și β ; μ_α, μ_β sînt coeficienții lui Poisson ; G — modulul de elasticitate transversal ; η_α , η_β , care se numesc coeficienți de influență reciprocă de ordinul întîi, iar ν_α, ν_β — coeficienții de influență reciprocă de ordinul doi — caracterizează : primii, lungirile pe direcțiile paralele cu liniile de coordonate provocate de tensiunile tangențiale, iar ultimii lunecările în plane paralele cu cele de coordonate, sub acțiunea tensiunilor normale [7].

În acest caz, la grupurile de corespondențe (A) și (B) trebuie adăugate următoarele corespondențe distincte :

$$\begin{gathered} 2\,h\,A_{11} \longleftrightarrow -\frac{3}{2\,h^3}\,a_{22}, \qquad 2h\,A_{22} \longleftrightarrow -\frac{3}{2\,h^3}\,a_{11}, \\ \frac{A_{12}}{A_{22}} \longleftrightarrow \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad 2\,\frac{A_{13}}{A_{22}} \longleftrightarrow -\frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad 2\,\frac{A_{23}}{A_{22}} \longleftrightarrow -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \\ 4\,\frac{A_{33}}{A_{22}} \longleftrightarrow \frac{a_{33}}{a_{11}}, \end{gathered} \tag{C$_1$}$$

care se obține prin particularizarea corespondențelor anterioare.

În funcție de constantele tehnice tabloul (C$_1$) devine*)

$$\begin{gathered} \frac{2hE_\alpha\,(1-\eta_\beta\,\nu_\beta)}{\Delta_1} \longleftrightarrow -\frac{3}{2\,h^3\,E_\beta}, \qquad \frac{2h\,E_\beta\,(1-\eta_\alpha\,\nu_\alpha)}{\Delta_1} \longleftrightarrow -\frac{3}{2\,h^3\,E_\alpha}, \\ \mu_\alpha \longleftrightarrow -\frac{\mu_\alpha+\eta_\alpha\,\nu_\beta}{1-\eta_\alpha\,\nu_\alpha}, \quad \eta_\beta\,\frac{E_\alpha}{E_\beta} \longleftrightarrow 2\,\frac{\nu_\alpha+\mu_\beta\,\nu_\beta}{1-\eta_\alpha\,\nu_\alpha}\cdot\frac{E_\alpha}{E_\beta}, \\ \eta_\alpha \longleftrightarrow 2\,\frac{\nu_\beta+\mu_\alpha\,\nu_\alpha}{1-\eta_\alpha\,\nu_\alpha}, \qquad \frac{E_\alpha}{G} \longleftrightarrow 4\,\frac{1-\mu_\alpha\,\mu_\beta}{1-\eta_\alpha\,\nu_\alpha}\cdot\frac{G}{E_\beta}, \end{gathered} \tag{C$_2$}$$

în care Δ_1 este dat de

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\mu_\alpha & \eta_\alpha \\ -\mu_\beta & 1 & \eta_\beta \\ \nu_\alpha & \nu_\beta & 1 \end{vmatrix}$$

---

*) Observăm că avem.
$(\mu_\beta + \eta_\beta\,\nu_\alpha)\,E_\alpha = (\mu_\alpha + \eta_\alpha\,\nu_\beta)\,E_\beta$

Din primele două corespondențe (C_2) rezultă corespondența

$$\frac{E_\alpha}{E_\beta} \longleftrightarrow \frac{1-\eta_\beta \nu_\beta}{1-\eta_\alpha \nu_\alpha} \cdot \frac{E_\alpha}{E_\beta},$$

în baza căreia, tabloul (C_2) se poate înlocui cu

$$\frac{2h\,E_\alpha (1-\eta_\beta \nu_\beta)}{\Delta_1} \longleftrightarrow -\frac{3}{2h^3 E_\beta}, \qquad \frac{2hE_\beta (1-\eta_\alpha \nu_\alpha)}{\Delta_1} \longleftrightarrow -\frac{3}{2h^3 E_\alpha}$$

$$\mu_\alpha \longleftrightarrow -\frac{\mu_\alpha + \eta_\alpha \nu_\beta}{1-\eta_\alpha \nu_\alpha}; \tag{C_3}$$

$$\eta_\alpha \longleftrightarrow 2\,\frac{\nu_\beta + \mu_\alpha \nu_\alpha}{1-\eta_\alpha \nu_\alpha}, \qquad \eta_\beta \longleftrightarrow 2\,\frac{\nu_\alpha + \mu_\beta \nu_\beta}{1-\eta_\beta \nu_\beta},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{G} \longleftrightarrow 2\,\frac{G}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\,\frac{1-\mu_\alpha \mu_\beta}{\sqrt{(1-\eta_\alpha \nu_\alpha)(1-\eta_\beta \nu_\beta)}}.$$

a) Semnalăm existența următoarelor corespondențe care rezultă din tabloul (C_3):

$$\frac{E_\alpha}{E_\beta} \longleftrightarrow \frac{1-\eta_\beta \nu_\beta}{1-\eta_\alpha \nu_\alpha} \cdot \frac{E_\alpha}{E_\beta},$$

$$\mu_\beta \longleftrightarrow -\frac{\mu_\beta + \eta_\beta \nu_\alpha}{1-\eta_\beta \nu_\beta},$$

$$\frac{1-\eta_\alpha \nu_\alpha}{1-\eta_\beta \nu_\beta} \longleftrightarrow \frac{1-\eta_\beta \nu_\beta}{1-\eta_\alpha \nu_\alpha}.$$

b) Dacă se introduce constanta adimensională *k* prin relația

$$G = k\,\frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{2\left[1+\sqrt{\dfrac{(\mu_\alpha + \eta_\alpha \nu_\beta)(\mu_\beta + \eta_\beta \nu_\alpha)}{(1-\eta_\alpha \nu_\alpha)(1-\eta_\beta \nu_\beta)}}\right]},$$

rezultă corespondența

$$\frac{1}{k} \longleftrightarrow \frac{k\left(1+\sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right)}{\sqrt{(1-\eta_\alpha \nu_\alpha)(1-\eta_\beta \nu_\beta)} + \sqrt{(\mu_\alpha + \eta_\alpha \nu_\beta)(\mu_\beta + \eta_\beta \nu_\alpha)}}.$$

c) Prin particularizarea tablourilor de corespondențe de mai sus, se obțin analogiile statico-geometrice pentru cazul izotrop [1], ortotrop [2] și a învelitorilor construite din mai multe straturi simetrice față de suprafața mediană [5], [6].

Primită la redacție la 21 ianuarie 1959.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ НА ТОНКИЕ УПРУГИЕ ОБОЛОЧКИ С АНИЗОТРОПИЕЙ МАТЕРИАЛА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе авторы распространяют установленное путем статико-геометрической аналогии соответствие в случае тонких упругих изотропных [1] и ортотропных [2] оболочек на случай оболочек с анизотропией материала.

Выводятся таблицы соответствия, характеризующие эту аналигию.

EXTENSION DE L'ANALOGIE STATICO-GÉOMÉTRIQUE AUX COQUES ÉLASTIQUES MINCES, À ANISOTROPIE DU MATÉRIEL

RÉSUMÉ

Dans ce travail les auteurs étendent la correspondance établie par analogie statico-géométrique, dans le cas des coques élastiques minces, isotropes [1] et orthotropes [2], au cas des coques à anisotropie du matériel.

Ils en déduisent les tableaux des correspondances qui caractérisent cette analogie.

BIBLIOGRAFIE

1. А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, *Теория упругих тонких оболочек*. Москва, 1953.
2. V. VISARION, C. STĂNESCU, *Extinderea analogiei statico-geometrice pentru învelitorile elastice subţiri cu ortotropie de material*. Comunicările Academiei R.P.R., **VII**, *3* (1957).
3. — *Etude des semi-invariantes de l'analogie statico-géométrique pour les enveloppes élastiques minces en matériaux isotropes et orthotropes*. Acta Technica Hungaricae (sub tipar).
4. К. СТЭНЕСКУ, В. ВИСАРИОН, *Статико-геометрическая аналогия для тонких упругих оболочек с ортотропией материала и ее применения к расчету пологих оболочек и цилиндрических оболочек круглого сечения*. Журнал Прикладной Механики, **III**, *1* (1958).
5. Л. ЛИБРЕСКУ, Задачи теории тонких упругих оболочек, составленных из упругих изотропных слоев, распюложенных симметрично относительно срединной поверхности. Журнал Прикладной Механики, 2, 1959.
6. L. LIBRESCU, *În legătură cu teoria structurilor elastice subţiri construite din straturi ortotrope, simetric dispuse faţă de suprafaţa mediană*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *3* (1959).
7. С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, 1950.
8. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical theory of elasticity*. Mc.Graw-Hill, New York, 1946.

REZISTENȚA MATERIALELOR —
ELASTICITATE — PLASTICITATE

ÎN LEGĂTURĂ CU TEORIA STRUCTURILOR ELASTICE SUBȚIRI, ALCĂTUITE DIN STRATURI ORTOTROPE, SIMETRIC DISPUSE PE GROSIME ÎN RAPORT CU SUPRAFAȚA MEDIANĂ

DE

LIVIU LIBRESCU

1. În această lucrare vom extinde rezultatele obținute de noi în lucrările [1], [2] teoriei structurilor subțiri construite din straturi simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafața mediană a acesteia, fiecare strat component fiind omogen și ortotrop.

1.1. Ipoteze. Vom considera că fiecare strat omogen și ortotrop ascultă de legea fizică a lui Hooke.

Vom adopta ipotezele formulate în [3], [4], după care straturile sînt împreunate rigid. Se exclude astfel posibilitatea ca ele să alunece pe suprafețele de contact, fiind astfel forțate a se deforma împreună ca un tot.

Pentru structura în ansamblu, considerăm valabile ipotezele următoare [3]:

a) Ipoteza nedeformabilității elementului normal la suprafața mediană a învelitorii.

b) Ipoteza nulității eforturilor unitare normale pe suprafețele echidistante față de suprafața mediană.

În baza acestor ipoteze, vom neglija în cele ce urmează mărimile de ordinul $\frac{\delta}{R_{min}}$ în raport cu unitatea.

Vom considera structura referită la un sistem ortogonal de coordonate (α. β) în general vorbind neconjugat, sistem ce coincide cu direcțiile principale de ortotropie, $z =$ const. reprezentînd o anumită suprafață paralelă cu suprafața mediană considerată.

În cele ce urmează vom nota cu j un strat oarecare din cele $(2n + 1)$ straturi considerate, iar mărimile statice, fizice și geometrice ce caracterizează stratul j le vom afecta cu indicele j.

1.2. Legile fizice. Ținînd seama de ipotezele enunțate anterior, eforturile unitare ale unui strat j, exprimate prin legea lui Hooke sînt date de relațiile

$$\begin{aligned} \overset{j}{\sigma}_{\alpha} &= B^{j}_{11}\varepsilon_1 + B^{j}_{12}\varepsilon_2 + z\,(B^{j}_{11}\varkappa_1 + B^{j}_{12}\varkappa_2), \\ \overset{j}{\sigma}_{\beta} &= B^{j}_{22}\varepsilon_2 + B^{j}_{12}\varepsilon_1 + z\,(B^{j}_{22}\varkappa_2 + B^{j}_{12}\varkappa_1), \\ \overset{j}{\tau}_{\alpha\beta} &= G^{j}\,(\omega + 2z\tau), \end{aligned} \tag{1}$$

unde [3]

$$B^{j}_{11} = \frac{E^{j}_{\alpha}}{1 - \mu^{j}_{\alpha}\mu^{j}_{\beta}}, \quad B^{j}_{22} = \frac{E^{j}_{\beta}}{1 - \mu^{j}_{\alpha}\mu^{j}_{\beta}},$$

$$B^{j}_{12} = \frac{E^{j}_{\alpha}\mu^{j}_{\beta}}{1 - \mu^{j}_{\alpha}\mu^{j}_{\beta}} = \frac{E^{j}_{\beta}\mu^{j}_{\alpha}}{1 - \mu^{j}_{\alpha}\mu^{j}_{\beta}},$$

$$G^{j} = K^{j}\frac{\sqrt{E^{j}_{\alpha}E^{j}_{\beta}}}{2\left(1 + \sqrt{\mu^{j}_{\alpha}\mu^{j}_{\beta}}\right)}, \text{ [5]},$$

K^{j} fiind o constantă adimensională;

σ_{α}, σ_{β}, $\tau_{\alpha\beta}$ reprezintă eforturile unitare din mediul tridimensional;

E_{α}, E_{β} — modulii de elasticitate ai materialului pe cele două direcții principale;

μ_{α}, μ_{β} — coeficienții de contracție transversală;

ε_1, ε_2, ω — deformațiile tangențiale ale suprafeței mediane ale învelitoarei;

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ — deformațiile de încovoiere ale suprafeței mediane.

Eforturile și momentele reduse la suprafața mediană au următoarele expresii :*)

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= \sum_{j=1}^{n+1}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\overset{j}{\sigma}_{\alpha}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\overset{j}{\sigma}_{\alpha}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz\right], \\ T_{\beta} &= \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\overset{j}{\sigma}_{\beta}\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\overset{j}{\sigma}_{\beta}\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)dz\right], \\ T_{\alpha\beta} &= \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\tau_{\beta\alpha}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\tau_{\beta\alpha}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)dz\right], \\ M_{\alpha} &= -\sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\overset{j}{\sigma}_{\alpha}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\overset{j}{\sigma}_{\alpha}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)zdz\right], \\ M_{\beta} &= -\sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\overset{j}{\sigma}_{\beta}\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\overset{j}{\sigma}_{\beta}\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)zdz\right], \\ M_{\alpha\beta} &= \sum\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\overset{j}{\tau}_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)zdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}}\overset{j}{\tau}_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)zdz\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

---

*) În cele ce urmează pentru simplificarea scrisului, vom pune în loc de $\sum\limits_{j=1}^{n+1} F_j$, expresia $\Sigma\, F_j$, subînțelegînd că sumarea se face de la $j = 1$ la $j = n + 1$.

Introducînd în expresiile (2) relațiile (1) și raportîndu-ne la ipotezele făcute inițial se obțin următoarele expresii pentru eforturi și momente pe care, pentru considerații ușor de dedus din cele ce vor urma, le vom pune sub forma

$$T_\alpha = 2 \sum \frac{E_\alpha^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \left[\varepsilon^{(1)} + \frac{\sum \frac{\mu_\beta^j E_\alpha^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum \frac{E_\alpha^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \varepsilon^{(2)} \right]^{*)}, \tag{3a}$$

$$T_\beta = 2 \sum \frac{E_\beta^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \left[\varepsilon^{(2)} + \frac{\sum \frac{\mu_\alpha^j E_\beta^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum \frac{E_\beta^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \varepsilon^{(1)} \right], \tag{3b}$$

$$T_{\alpha\beta} = 2 \sum \frac{K^j E_\alpha^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}} \left[\omega^{(1)} + \frac{\sum \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j K^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum \frac{E_\alpha^j K^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}} \omega^{(2)} \right], \tag{3c}$$

$$T_{\beta\alpha} = 2 \sum \frac{K^j E_\beta^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}} \left[\omega^{(2)} + \frac{\sum \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum \frac{E_\beta^j K^j \left(\delta_j - \delta_{j-1}\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}} \omega^{(1)} \right], \tag{3d}$$

$$M_\alpha = \frac{2}{3} \sum \frac{E_\alpha^j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \left[\varkappa^{(1)} + \frac{\sum \frac{\mu_\beta^j E_\alpha^j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum \frac{E_\alpha^j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \varkappa^{(2)} \right], \tag{3e}$$

$$M_\beta = \frac{2}{3} \sum \frac{E_\beta^j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \left[\varkappa^{(2)} + \frac{\sum \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right.}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum \frac{E_\beta^j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \varkappa^{(1)} \right], \tag{3f}$$

---

*) În aceste relații $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, $\varkappa^{(1)}$, $\varkappa^{(2)}$ reprezintă componentele energetice ale deformației legate de componentele deformației prin relațiile [6]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{(1)}. \quad \varkappa_2 = -\varkappa^{(2)}, \quad \varkappa_1 = -\varkappa^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{(2)},$$

$$\omega^{(1)} = \frac{\omega}{2}, \quad \tau^{(2)} = -\tau, \quad \tau^{(1)} = \tau, \quad \omega^{(2)} = -\frac{\omega}{2}.$$

$$M_{\alpha\beta}=\frac{2}{3}\sum\frac{K^j E^j_\alpha\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\sqrt{\frac{E^j_\beta}{E^j_\alpha}}\left[\tau^{(1)}+\frac{\sum\frac{E^j_\alpha\mu^j_\beta K^j\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}{\sum\frac{E^j_\alpha K^j\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\sqrt{\frac{E^j_\beta}{E^j_\alpha}}}\,\tau^{(1)}\right], \tag{3g}$$

$$M_{\beta\alpha}=\frac{2}{3}\sum\frac{K^j E^j_\beta\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\sqrt{\frac{E^j_\alpha}{E^j_\beta}}\left[\tau^{(2)}+\frac{\sum\frac{E^j_\beta\mu^j_\alpha K^j\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}{\sum\frac{E^j_\beta K^j\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\sqrt{\frac{E^j_\alpha}{E^j_\beta}}}\,\tau^{(1)}\right]^{*)}. \tag{3h}$$

1.3. Analogia statico-geometrică. În baza relațiilor fizice (3a). (3b), (3c) și (3f) se observă că se poate scrie

$$\begin{aligned}T_\alpha&=\overset{1}{F}_\alpha\left[\varepsilon^{(1)}+\overset{1}{\mu}_\beta\,\varepsilon^{(2)}\right],\\ T_\beta&=\overset{1}{F}_\beta\left[\varepsilon^{(2)}+\overset{1}{\mu}_\alpha\,\varepsilon^{(1)}\right],\end{aligned} \tag{4}$$

și

$$\begin{aligned}\varkappa^{(1)}&=\overset{1}{D}_\alpha\left[M_\alpha-\overset{3}{\mu}_\alpha\,M_\beta\right],\\ \varkappa^{(2)}&=\overset{1}{D}_\beta\left[M_\beta-\overset{3}{\mu}_\beta\,M_\alpha\right],\end{aligned} \tag{5}$$

unde s-au introdus notațiile

$$\overset{1}{F}_\alpha=2\sum\frac{E^j_\alpha\left(\delta_j-\delta_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta},\quad \overset{1}{F}_\beta=2\sum\frac{E^j_\beta\left(\delta_j-\delta_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}$$

$$\overset{1}{D}_\alpha=\frac{1}{\frac{2}{3}\sum\frac{E^j_\alpha\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\left[1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right]},\quad \overset{1}{D}_\beta=\frac{1}{\frac{2}{3}\sum\frac{E^j_\beta\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\left[1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right]}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mu}_\alpha&=\frac{\sum\frac{\mu^j_\alpha E^j_\beta\left(\delta_j-\delta_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}{\sum\frac{E^j_\beta\left(\delta_j-\delta_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}},\quad &\overset{1}{\mu}_\beta&=\frac{\sum\frac{\mu^j_\beta E^j_\alpha\left(\delta_j-\delta_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}{\sum\frac{E^j_\alpha\left(\delta_j-\delta_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}\\ \overset{3}{\mu}_\alpha&=\frac{\sum\frac{E^j_\beta\mu^j_\alpha\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}{\sum\frac{E^j_\beta\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}},\quad &\overset{3}{\mu}_\beta&=\frac{\sum\frac{E^j_\alpha\mu^j_\beta\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}{\sum\frac{E^j_\alpha\left(\delta^3_j-\delta^3_{j-1}\right)}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}}.\end{aligned} \tag{7}$$

---

*) Relațiile obținute mai sus au fost deduse în ipoteze că suprafața mediană este referită la linii de curbură. O astfel de restricție nu este însă esențială. Ele rămîn valabile și în cazul mai general al coordonatelor ortogonale dar neconjugate.

Se observă că grupurile de relații (4) și (5) pot trece unul într-altul dacă între elementele ce intervin se stabilesc următoarele corespondențe :

$$\begin{gathered}
T_\alpha \leftrightarrow -\varkappa^{(2)}, \qquad M_\beta \leftrightarrow \varepsilon^{(1)}, \qquad M_\alpha \leftrightarrow \varepsilon^{(2)}, \qquad T_\beta \leftrightarrow -\varkappa^{(1)}, \\
\overset{1}{\mu}_\alpha \leftrightarrow -\overset{3}{\mu}_\alpha , \qquad \overset{1}{\mu}_\beta \longleftrightarrow -\overset{3}{\mu}_\beta , \\
\overset{1}{F}_\alpha \longleftrightarrow -\overset{1}{D}_\beta , \qquad \overset{1}{F}_\beta \longleftrightarrow -\overset{1}{D}_\alpha .
\end{gathered} \tag{I}$$

Un alt grup de corespondențe ne este sugerat de expresiile eforturilor de lunecare și momentelor de răsucire. În acest sens, ecuațiile fizice (3c), (3d), (3g) și (3h) pot fi scrise sub următoarea formă :

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= \overset{2}{F}_\alpha \left(\omega^{(1)} + \overset{2}{\mu}_\beta \, \omega^{(2)} \right) , \\
T_{\beta\alpha} &= \overset{2}{F}_\beta \left(\omega^{(2)} + \overset{2}{\mu}_\alpha \, \omega^{(1)} \right) ,
\end{aligned} \tag{8}$$

și

$$\begin{aligned}
\tau^{(1)} &= \overset{2}{D}_\alpha \left(M_{\alpha\beta} - \overset{4}{\mu}_\alpha \, M_{\beta\alpha} \right) , \\
\tau^{(2)} &= \overset{2}{D}_\beta \left(M_{\beta\alpha} - \overset{4}{\mu}_\beta \, M_{\alpha\beta} \right) ,
\end{aligned} \tag{9}$$

unde s-au introdus următoarele notații

$$\overset{2}{F}_\alpha = 2 \sum \frac{E^j_\alpha K^j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\frac{E^j_\beta}{E^j_\alpha}} , \qquad \overset{2}{F}_\beta = 2 \sum \frac{E^j_\beta K^j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\frac{E^j_\alpha}{E^j_\beta}} \tag{10}$$

$$\overset{4}{\mu}_\alpha = \frac{\sum \dfrac{E^j_\beta \mu^j_\alpha K^j \left(\delta^3_j - \delta^3_{j-1} \right)}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}}{\sum \dfrac{E^j_\beta K^j \left(\delta^3_j - \delta^3_{j-1} \right)}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\dfrac{E^j_\alpha}{E^j_\beta}}} , \qquad \overset{4}{\mu}_\beta = \frac{\sum \dfrac{E^j_\alpha \mu^j_\beta K^j \left(\delta^3_j - \delta^3_{j-1} \right)}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}}{\sum \dfrac{E^j_\alpha K^j \left(\delta^3_j - \delta^3_{j-1} \right)}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\dfrac{E^j_\beta}{E^j_\alpha}}} , \tag{11}$$

$$\mu_\alpha = \frac{\sum \dfrac{E^j_\beta \mu^j_\alpha K^j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}}{\sum \dfrac{E^j_\beta K^j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\dfrac{E^j_\alpha}{E^j_\beta}}} , \qquad \overset{2}{\mu}_\beta = \frac{\sum \dfrac{E^j_\alpha \mu^j_\beta K^j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}}{\sum \dfrac{E^j_\alpha K^j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\dfrac{E^j_\beta}{E^j_\alpha}}} , \tag{11'}$$

$$\begin{aligned}
\overset{2}{D}_\alpha &= \frac{1}{\dfrac{2}{3} \sum \dfrac{E^j_\alpha K^j \left(\delta^3_j - \delta^3_{j-1} \right)}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\dfrac{E^j_\beta}{E^j_\alpha}} \left[1 - \overset{4}{\mu}_\alpha \overset{4}{\mu}_\beta \right]} , \\
\overset{2}{D}_\beta &= \frac{1}{\dfrac{2}{3} \sum \dfrac{E^j_\beta K^j \left(\delta^3_j - \delta^3_{j-1} \right)}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \sqrt{\dfrac{E^j_\alpha}{E^j_\beta}} \left[1 - \overset{4}{\mu}_\alpha \overset{4}{\mu}_\beta \right]} .
\end{aligned} \tag{12}$$

Grupurile de relații (8) și (9) pot trece unul în celălalt, dacă se stabilesc corespondențele date de tabloul II

$$T_{\alpha\beta} \leftrightarrow \tau^{(2)}, \quad M_{\beta\alpha} \leftrightarrow -\omega^{(1)}, \quad M_{\alpha\beta} \leftrightarrow -\omega^{(2)}, \quad T_{\beta\alpha} \leftrightarrow \tau^{(1)}.$$

$$\overset{2}{F}_{\alpha} \leftrightarrow -\overset{2}{D}_{\beta}, \qquad \overset{2}{F}_{\beta} \leftrightarrow -\overset{2}{D}_{\alpha}, \qquad \text{(II)}$$

$$\overset{2}{\mu}_{\beta} \leftrightarrow -\overset{4}{\mu}_{\beta}, \qquad \overset{2}{\mu}_{\alpha} \leftrightarrow -\overset{4}{\mu}_{\alpha}.$$

Grupurile de corespondențe (I) și (II) se completează observînd că în cazul neomogen ca și în cazul omogen, pe de o parte ecuațiile de echilibru omogene în eforturi și ecuațiile de continuitate în deformații, pe de altă parte relațiile dintre eforturi și funcții de efort și relațiile dintre deformații și deplasări se mențin la fel.

De aici se obțin relațiile ce completează corespondențele date în (I) și (II)

$$Q_{\beta} \leftrightarrow \zeta_1, \qquad Q_{\alpha} \leftrightarrow -\zeta_2,$$

și (III)

$$a \leftrightarrow u, \quad b \leftrightarrow v, \quad c \leftrightarrow w, \quad \nu \leftrightarrow \delta,$$

unde Q_{α}, Q_{β} — forțele tăietoare,

ζ_1, ζ_2 — deformațiile transversale

a, b, c, ν — funcțiile de efort [6]

u, v, w — componentele vectorului deplasare

δ — componenta pe normală a rotirii elastice.

În felul acesta, prin corespondențele stabilite în (I), (II), (III) numărul necunoscutelor și a relațiilor de cercetat este redus efectiv la jumătate.

2. **Structuri de mică curbură** *) În cele ce urmează vom utiliza analogia statico-geometrică stabilită anterior, la calculul structurilor de mică curbură, în condițiile existenței sarcinii exterioare de componente X', Y', $-Z'$ și a cîmpului de temperatură neuniform $T(\alpha, \beta, z)$.

În acest scop vom relua procedeul utilizat de noi în lucrările [1] și [2] pe baza ideii formulată în [8] de reducere a determinării stării de tensiune, la găsirea unei funcții complexe $C = c + i\zeta w$. Vom porni de la ecuațiile de echilibru și de compatibilitate, ecuații care în condițiile existenței unui cîmp de temperatură neuniform își mențin aceeași formă ca şi în cazul elastic. În cadrul ipotezelor proprii teoriei învelitorilor de mică curbură*), aceste ecuaţii se pot scrie sub forma [6]

---

*) Un studiu al acestor structuri îi este datorit lui S. A. Ambarțumian [3], [7].

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T'_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+X'=0, \qquad \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T'_\beta}{\partial\beta}+Y'=0,\\
&\frac{T'_\alpha}{R_1}-2\frac{T'_{\alpha\beta}}{R_{12}}+\frac{T'_\beta}{R_2}+\frac{\partial Q'_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q'_\beta}{\partial\beta}+Z'=0,\\
&\frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial M'_\beta}{\partial\beta}+Q'_\beta=0, \qquad \frac{\partial M'_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-Q'_\alpha=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varkappa_\star^{(2)}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tau_\star^{(1)}}{\partial\beta}=0, \qquad \frac{\partial\tau_\star^{(2)}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varkappa_\star^{(1)}}{\partial\beta}=0,\\
&-\frac{\varkappa_\star^{(2)}}{R_1}-\frac{\varkappa_\star^{(1)}}{R_2}-2\frac{\tau_\star^{(2)}}{R_{12}}-\frac{\partial\zeta_2^\star}{\partial\alpha}+\frac{\partial\zeta_1^\star}{\partial\beta}=0,\\
&-\frac{\partial\omega_\star^{(2)}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varepsilon_\star^{(1)}}{\partial\beta}+\zeta_1^\star=0, \qquad \frac{\partial\varepsilon_\star^{(2)}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega_\star^{(2)}}{\partial\beta}+\zeta_2^\star=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Urmărind aplicarea analogiei statico-geometrice formulată anterior, vom reduce formal ecuaţiile de echilibru (13) şi de compatibilitate (14) la cazul elastic.

În acest scop, urmărind ideia din [9], [10] vom porni de la expresia eforturilor unitare date în cazul existenţei cîmpului de temperatură neuniform $T\ (\alpha,\ \beta,\ z)$ şi admiterii ipotezei Love-Kirchoff.

Le vom da sub forma

$$
\begin{aligned}
&\sigma'^j_\alpha=\sigma^j_\alpha-\frac{E^j_\alpha}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\left(\beta^j_\alpha+\mu^j_\beta\beta^j_\beta\right)T,\\
&\sigma'^j_\beta=\sigma^j_\beta-\frac{E^j_\beta}{1-\mu^j_\alpha\mu^j_\beta}\left(\beta^j_\beta+\mu^j_\alpha\beta^j_\alpha\right)T,\\
&\tau'^j_{\alpha\beta}=\tau^j_{\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
&\sigma^j_\alpha=B^j_{11}\varepsilon_1+B^j_{12}\varepsilon_2+z\left(B^j_{11}\varkappa_1+B^j_{12}\varkappa_2\right),\\
&\sigma^j_\beta=B^j_{22}\varepsilon_2+B^j_{12}\varepsilon_1+z\left(B^j_{22}\varkappa_2+B^j_{12}\varkappa_1\right),\\
&\tau^j_{\alpha\beta}=G^j\ (\omega+2z\tau),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

reprezintă eforturile unitare ce ar apare în mediul tridimensional al învelitoarei în absenţa cîmpului de temperatură neuniform; β_α, β_β sînt coeficienţii de dilatare liniară pe cele două direcţii ortogonale.

---

*) Aceste ipoteze sînt :

a) Se renunţă la eforturile tăietoare Q'_α, Q'_β în primele două ecuaţii de echilibru.

b) Se renunţă la deformaţiile transversale $\zeta_1^\star$, $\zeta_2^\star$ în primele două ecuaţii de compatibilitate.

c) Metrica suprafeţei mediane este identică cu cea a planului. Pentru simplificare vom lua $A=B=1$.

Din utilizarea relațiilor (2) și (16) rezultă pentru eforturi și momente, expresii care se pot pune sub forma

$$
\begin{aligned}
T'_\alpha &= T_\alpha - t_\alpha ,\\
T'_\beta &= T_\beta - t_\beta ,\\
T'_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} ,\\
M'_\alpha &= M_\alpha + m_\alpha ,\\
M'_\beta &= M_\beta + m_\beta ,\\
M'_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta} ,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

unde

$t_\alpha, t_\beta, m_\alpha, m_\beta$ sînt dați de relațiile

$$
\begin{aligned}
t_\alpha &= \sum \frac{E^j_\alpha}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) T dz\right],\\
t_\beta &= \sum \frac{E^j_\beta}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) T dz\right],\\
m_\alpha &= \sum \frac{E^j_\alpha}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) Tz dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) Tz dz\right],\\
m_\beta &= \sum \frac{E^j_\beta}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta}\left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) Tz dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) Tz dz\right],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

iar T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ reprezintă eforturile și momentele care rezultă în absența cîmpului de temperatură neuniform. Din aceste relații ținînd seama de ecuațiile fizice, se obține expresia deformațiilor sub următoarea formă :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{(1)}_* &= \varepsilon^{(1)} + \frac{t_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha t_\beta}{\frac{1}{F_\alpha}\left(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta\right)} ,\\
\varepsilon^{(2)}_* &= \varepsilon^{(2)} + \frac{t_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta t_\alpha}{\frac{1}{F_\beta}\left(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta\right)} ,\\
\omega^* &= \omega,\\
\varkappa^{(1)}_* &= \varkappa^{(1)} - \frac{m_\alpha - \overset{3}{\mu}_\alpha m_\beta}{\frac{1}{G_\alpha}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)} ,\\
\varkappa^{(2)}_* &= \varkappa^{(2)} - \frac{m_\beta - \overset{3}{\mu}_\beta m_\alpha}{\frac{1}{G_\beta}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)} ,\\
\tau^{(1)}_* &= \tau^{(1)} ,\\
\tau^{(2)}_* &= \tau^{(2)} ,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

unde

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{T_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha T_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha \left(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta\right)}, \qquad \varepsilon^{(2)} = \frac{T_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta T_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta \left(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta\right)},$$

$$\varkappa^{(1)} = \frac{M_\alpha - \overset{3}{\mu}_\alpha M_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha \left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)}, \qquad \varkappa^{(2)} = \frac{M_\beta - \overset{3}{\mu}_\beta M_\alpha}{\overset{1}{G}_\beta \left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)}, \tag{20}$$

$\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ reprezintă deformații energetice fictive, corespunzînd cazului cînd cîmpul de temperatură neuniform ar fi nul. Ținînd seama în ecuațiile (13), de relațiile (17) se obțin ecuațiile de echilibru ale învelitorilor de mică curbură reduse formal la cazul elastic

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + X = 0, \qquad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} + Y = 0,$$

$$\frac{T_\alpha}{R_1} - 2\frac{T_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{T_\beta}{R_2} + \frac{\partial Q'_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q'_\beta}{\partial \beta} + Z = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + Q'_\beta = R, \qquad \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - Q'_\alpha = -P,$$

unde am introdus notațiile

$$X = X' - \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum \frac{E^j_\alpha}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) T dz \right],$$

$$Y = Y' - \frac{\partial}{\partial \beta} \sum \frac{E^j_\beta}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) T dz \right],$$

$$Z = Z' - \frac{1}{R_1} \sum \frac{E^j_\alpha}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) T dz \right] -$$

$$- \frac{1}{R_2} \sum \frac{E^j_\beta}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) T dz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) T dz \right], \tag{21'}$$

$$R = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum \frac{E^j_\beta}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) Tzdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\beta + \mu^j_\alpha \beta^j_\alpha\right) Tzdz \right],$$

$$P = \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum \frac{E^j_\alpha}{1 - \mu^j_\alpha \mu^j_\beta} \left[\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) Tzdz + \int_{-\delta_j}^{-\delta_{j-1}} \left(\beta^j_\alpha + \mu^j_\beta \beta^j_\beta\right) Tzdz \right].$$

Ținînd seama de relațiile (19) în ecuațiile de compatibilitate (14) acestea devin

$$\frac{\partial \varkappa^{(2)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \beta} = \Gamma_1, \qquad \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varkappa^{(1)}}{\partial \beta} = \Gamma_2,$$

$$-\frac{\varkappa^{(2)}}{R_1} - \frac{\varkappa^{(1)}}{R_2} - 2\frac{\tau^{(2)}}{R_{12}} - \frac{\partial \zeta^*_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta^*_1}{\alpha\beta} = \Lambda, \tag{22}$$

$$-\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varepsilon^{(1)}}{\partial \beta} + \zeta^*_1 = \Delta_1, \qquad \frac{\partial \varepsilon^{(2)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \beta} + \zeta^*_2 = -\Delta_2,$$

unde am introdus notațiile

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{1}{\overset{1}{G}_\beta\left(1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right)}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(m_\beta-\overset{3}{\mu}_\beta\, m_\alpha\right),\\
\Gamma_2 &= -\frac{1}{\overset{1}{G}_\alpha\left(1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right)}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(m_\alpha-\overset{3}{\mu}_\alpha\, m_\beta\right),\\
\Lambda &= -\frac{1}{R_1\overset{1}{G}_\beta\left(1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right)}\left(m_\beta-\overset{3}{\mu}_\beta\, m_\beta\right)-\frac{1}{R_2\overset{1}{G}_\alpha\left(1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right)}\left(m_\alpha-\overset{3}{\mu}_\alpha\, m_\beta\right),\\
\Delta_1 &= \frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha\left(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\right)}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(t_\alpha-\overset{1}{\mu}_\alpha\, t_\beta\right),\\
\Delta_2 &= \frac{1}{\overset{1}{F}_\beta\left(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\right)}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(t_\beta-\overset{1}{\mu}_\beta\, t_\alpha\right).
\end{aligned}\tag{22'}$$

Ecuațiile omogene de compatibilitate sub forma (22), pe de o parte, și ecuațiile omogene de echilibru (21), pe de altă parte, au aceeași structură (analogia statico-geometrică). De aceea, ele se pot reuni într-un singur sistem, fiecare ecuație a sistemului fiind un semiinvariant al analogiei statico-geometrice. Pentru aceasta vom înmulți ecuațiile de compatibilitate cu factorul $i\zeta$*) și le vom aduna cu ecuațiile de echilibru. Se obțin astfel ecuațiile teoriei structurilor de mică curbură sub formă complexă. Rezultatul acestei operații se sugerează că este avantajos a se introduce în cele ce urmează următoarele combinații :

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_\alpha &= T_\alpha - i\zeta\varkappa^{(2)},\\
\widetilde{T}_\beta &= T_\beta - i\zeta\varkappa^{(1)},\\
\widetilde{T}_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} + i\zeta\tau^{(2)},\\
\widetilde{T}_{\beta\alpha} &= T_{\beta\alpha} + i\zeta\tau^{(1)},\\
\widetilde{Q}_\alpha &= Q'_\alpha - i\zeta\zeta^*_2,\\
\widetilde{Q}_\beta &= Q'_\beta + i\zeta\zeta^*_1,
\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_\alpha &= M_\alpha + i\zeta\varepsilon^{(2)},\\
\widetilde{M}_\beta &= M_\beta + i\zeta\varepsilon^{(1)},\\
\widetilde{M}_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta} - i\zeta\omega^{(2)},\\
\widetilde{M}_{\beta\alpha} &= M_{\beta\alpha} - i\zeta\omega^{(1)}.
\end{aligned}\tag{24}$$

---

*) ζ este un factor deocamdată nedeterminat.

În baza acestor expresii pe care le vom numi eforturi complexe ecuațiile teoriei structurilor de mică curbură sub formă complexă vor fi date de sistemul

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \widetilde{T}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \widetilde{X} = 0, \qquad \frac{\partial \widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{T}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Y} = 0, \\
\frac{\widetilde{T}_\alpha}{R_1} - 2\,\frac{\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{R_{12}} + \frac{\widetilde{T}_\beta}{R_2} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Z} = 0, \\
\frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Q}_\beta = \widetilde{R}, \qquad \frac{\partial \widetilde{M}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \widetilde{Q}_\alpha = -\widetilde{P},
\end{gathered} \tag{25}$$

unde

$$\begin{aligned}
\widetilde{X} &= X + i\zeta\Gamma \;{}^{*)}, \\
\widetilde{Y} &= Y + i\zeta\Gamma_2, \\
\widetilde{Z}' &= Z + i\zeta\Lambda, \\
\widetilde{R} &= R + i\zeta\Delta_1, \\
\widetilde{P} &= P + i\zeta\Delta_2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Se observă ușor că sistemele (21) și (22), de zece ecuații sînt echivalente sistemului de cinci ecuații sub formă complexă (25). Rămîne de determinat factorul ζ.

Vom relua în acest sens raționamentul din lucrarea [11]. Vom pune la început condiția ca fiecare efort complex să fie unitar din punct de vedere dimensional. De aici rezultă că din punct de vedere dimensional ζ satisface relației

$$|\zeta| = |F| \tag{27}$$

$|F|$ fiind dimensiunea forței.

În continuare, vom exprima ζ sub forma celei mai generale combinații de constante ce intervin în analogia statico-geometrică

$$\begin{aligned}
\zeta = {} & \left(\overset{1}{F}_\alpha\right)^l \left(\overset{1}{F}_\beta\right)^m \left(\overset{2}{F}_\alpha\right)^n \left(\overset{2}{F}_\beta\right)^p \left(\overset{1}{D}_\alpha\right)^q \left(\overset{1}{D}_\beta\right)^r \left(\overset{2}{D}_\alpha\right)^s \left(\overset{2}{D}_\beta\right)^t \left(\overset{1}{\mu}_\alpha\right)^a \left(\overset{1}{\mu}_\beta\right)^b \times \\
& \times \left(\overset{2}{\mu}_\alpha\right)^c \left(\overset{2}{\mu}_\beta\right)^d \left(\overset{3}{\mu}_\alpha\right)^e \left(\overset{3}{\mu}_\beta\right)^f \left(\overset{4}{\mu}_\alpha\right)^g \left(\overset{4}{\mu}_\beta\right)^h,
\end{aligned} \tag{28}$$

unde exponenții l, m, n, p, q, r, s, t, a, b, c, d, e, f, g, h sînt deocamdată nedeterminați. Este evident că nici una din rigiditățile de aceeași natură nu pot fi privilegiate. Din această condiție rezultă în mod evident

$$\begin{gathered}
l = m = n = p, \\
q = r = s = t.
\end{gathered}$$

---

*) Este evident că aceste mărimi nu se bucură de proprietatea de semiinvarianță.

În acest caz avem

$$\zeta=\left(\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\beta}\right)^{l}\left(\overset{1}{D}_{\alpha}\overset{1}{D}_{\beta}\overset{2}{D}_{\alpha}\overset{2}{D}_{\beta}\right)^{q}\left(\overset{1}{\mu}_{\alpha}\right)^{a}\left(\overset{1}{\mu}_{\beta}\right)^{b}\left(\overset{2}{\mu}_{\alpha}\right)^{c}\left(\overset{2}{\mu}_{\beta}\right)^{d}\left(\overset{3}{\mu}_{\alpha}\right)^{e}\left(\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^{f}\left(\overset{4}{\mu}_{\alpha}\right)^{g}\cdot\left(\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^{h}$$

şi deoarece dimensional avem

$$\left|\overset{1}{F}_{\alpha}\right|=\left|\overset{1}{F}_{\beta}\right|=\left|\overset{2}{F}_{\alpha}\right|=\left|\overset{2}{F}_{\beta}\right|=\left|F\right|\left|L\right|^{-1},$$

$$\left|\overset{1}{D}_{\alpha}\right|=\left|\overset{2}{D}_{\alpha}\right|=\left|\overset{1}{D}_{\beta}\right|=\left|\overset{2}{D}_{\beta}\right|=\left|F\right|^{-1}\left|L\right|^{-1},$$

rezultă că

$$|\zeta|=|F|^{4(l-q)}|L|^{-4(l+q)}$$

unde $|L|$ reprezintă dimensiunea unei lungimi. De aici rezultă că

$$l=\frac{1}{8}\quad,\quad q=-\frac{1}{8}$$

şi deci

$$\zeta=\left(\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}}{\overset{1}{D}_{\alpha}\overset{2}{D}_{\alpha}\overset{1}{D}_{\beta}\overset{2}{D}_{\beta}}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\overset{1}{\mu}_{\alpha}\right)^{a}\left(\overset{1}{\mu}_{\beta}\right)^{b}\left(\overset{2}{\mu}_{\alpha}\right)^{c}\left(\overset{2}{\mu}_{\beta}\right)^{d}\left(\overset{3}{\mu}_{\alpha}\right)^{e}\left(\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^{f}\left(\overset{4}{\mu}_{\alpha}\right)^{g}\left(\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^{h}. \qquad (29)$$

Vom impune condiţia [11], ca eforturile complexe (23) şi (24) să fie semi-invarianţi ai analogiei statico-geometrice (potrivit acestei noţiuni, aceste eforturi transpuse prin analogie trebuie să se reproducă înmulţite cu o constantă). Din această condiţie rezultă

$$\zeta_{a}=-\frac{1}{\zeta}, \qquad (30)$$

ζ_a fiind analogul lui ζ.
Condiţia (30) aplicată relaţiei (29) conduce la

$$-\left(\frac{\overset{1}{D}_{\alpha}\overset{2}{D}_{\alpha}\overset{1}{D}_{\beta}\overset{2}{D}_{\beta}}{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\overset{1}{\mu}_{\alpha}\right)^{-a}\left(\overset{1}{\mu}_{\beta}\right)^{-b}\left(\overset{2}{\mu}_{\alpha}\right)^{-c}\left(\overset{2}{\mu}_{\beta}\right)^{-d}\left(\overset{3}{\mu}_{\alpha}\right)^{-e}\left(\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^{-f}\left(\overset{4}{\mu}_{\alpha}\right)^{-g}\left(\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^{-h}=$$

$$=\left(\frac{\overset{1}{D}_{\alpha}\overset{2}{D}_{\alpha}\overset{1}{D}_{\beta}\overset{2}{D}_{\beta}}{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}}\right)^{\frac{1}{8}}(-1)^{a+b+c+d+e+f+g+h}\left(\overset{3}{\mu}_{\alpha}\right)^{a}\left(\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^{b}\left(\overset{4}{\mu}_{\alpha}\right)^{c}\left(\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^{d}\left(\overset{1}{\mu}_{\alpha}\right)^{e}\left(\overset{1}{\mu}_{\beta}\right)^{f}\left(\overset{2}{\mu}_{\alpha}\right)^{g}\left(\overset{2}{\mu}_{\beta}\right)^{h}$$

de unde $a=b=c=d=f=e=g=h=0$.

Rezultă în definitiv

$$\zeta=\left(\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}}{\overset{1}{D}_{\alpha}\overset{2}{D}_{\alpha}\overset{1}{D}_{\beta}\overset{2}{D}_{\beta}}\right)^{\frac{1}{8}}. \qquad (31)$$

Factorul ζ fiind astfel determinat, eforturile complexe (23), (24), devin înlocuind în ele componentele deformației suprafeței mediane prin eforturi și momente

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{\alpha} &= T_{\alpha} - i\sqrt[8]{\sigma_1}\left(M_{\beta} - \overset{3}{\mu}_{\beta} M_{\alpha}\right),\\
\widetilde{T}_{\beta} &= T_{\beta} - i\sqrt[8]{\sigma_2}\left(M_{\alpha} - \overset{3}{\mu}_{\alpha} M_{\beta}\right),\\
\widetilde{T}_{\alpha\beta} &= T_{\alpha\beta} + i\sqrt[8]{\sigma_3}\left(M_{\beta\alpha} - \overset{4}{\mu}_{\beta} M_{\alpha\beta}\right),\\
\widetilde{T}_{\beta\alpha} &= T_{\beta\alpha} + i\sqrt[8]{\sigma_4}\left(M_{\alpha\beta} - \overset{4}{\mu}_{\alpha} M_{\beta\alpha}\right),
\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{\alpha} &= M_{\alpha} + i\sqrt[8]{\sigma_5}\left(T_{\beta} - \overset{1}{\mu}_{\beta} T_{\alpha}\right),\\
\widetilde{M}_{\beta} &= M_{\beta} + i\sqrt[8]{\sigma_6}\left(T_{\alpha} - \overset{1}{\mu}_{\alpha} T_{\beta}\right),\\
\widetilde{M}_{\alpha\beta} &= M_{\alpha\beta} - i\sqrt[8]{\sigma_7}\left(T_{\beta\alpha} - \overset{2}{\mu}_{\beta} T_{\alpha\beta}\right),\\
\widetilde{M}_{\beta\alpha} &= M_{\beta\alpha} - i\sqrt[8]{\sigma_8}\left(T_{\alpha\beta} - \overset{2}{\mu}_{\alpha} T_{\beta\alpha}\right),
\end{aligned}\tag{33}$$

unde am notat

$$\begin{aligned}
\sqrt[8]{\sigma_1} &= \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\beta}\overset{1}{G}_{\alpha}\overset{2}{G}_{\alpha}\overset{2}{G}_{\beta}\left(1-\overset{4}{\mu}_{\alpha}\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^2}{\left(\overset{1}{G}_{\beta}\right)^7\left(1-\overset{3}{\mu}_{\alpha}\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^6}},\\
\sqrt[8]{\sigma_2} &= \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}\overset{1}{G}_{\beta}\overset{2}{G}_{\alpha}\overset{2}{G}_{\beta}\left(1-\overset{4}{\mu}_{\alpha}\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^2}{\left(\overset{1}{G}_{\alpha}\right)^7\left(1-\overset{3}{\mu}_{\alpha}\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^6}},\\
\sqrt[8]{\sigma_3} &= \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}\overset{1}{G}_{\alpha}\overset{1}{G}_{\beta}\overset{2}{G}_{\alpha}\left(1-\overset{3}{\mu}_{\alpha}\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^2}{\left(\overset{2}{G}_{\beta}\right)^7\left(1-\overset{4}{\mu}_{\alpha}\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^6}},\\
\sqrt[8]{\sigma_4} &= \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{1}{F}_{\beta}\overset{2}{F}_{\beta}\overset{1}{G}_{\alpha}\overset{1}{G}_{\beta}\overset{2}{G}_{\beta}\left(1-\overset{3}{\mu}_{\alpha}\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^2}{\left(\overset{2}{G}_{\alpha}\right)^7\left(1-\overset{4}{\mu}_{\alpha}\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^6}},\\
\sqrt[8]{\sigma_5} &= \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha}\overset{2}{F}_{\beta}\overset{1}{G}_{\alpha}\overset{1}{G}_{\beta}\overset{2}{G}_{\alpha}\overset{2}{G}_{\beta}\left(1-\overset{3}{\mu}_{\alpha}\overset{3}{\mu}_{\beta}\right)^2\left(1-\overset{4}{\mu}_{\alpha}\overset{4}{\mu}_{\beta}\right)^2}{\left(\overset{1}{F}_{\beta}\right)^7\left(1-\overset{1}{\mu}_{\alpha}\overset{1}{\mu}_{\beta}\right)^8}},
\end{aligned}\tag{34}$$

$$\sqrt[8]{\sigma_6} = \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_\beta \overset{2}{F}_\alpha \overset{2}{F}_\beta \overset{1}{G}_\alpha \overset{1}{G}_\beta \overset{2}{G}_\alpha \overset{2}{G}_\beta \left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)^2 \left(1 - \overset{4}{\mu}_\alpha \overset{4}{\mu}_\beta\right)^2}{\left(\overset{1}{F}_\alpha\right)^7 \left(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta\right)^8}},$$

$$\sqrt[8]{\sigma_7} = \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{F}_\beta \overset{2}{F}_\alpha \overset{1}{G}_\alpha \overset{2}{G}_\beta \overset{2}{G}_\alpha \overset{2}{G}_\beta \left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)^2 \left(1 - \overset{4}{\mu}_\alpha \overset{4}{\mu}_\beta\right)^2}{\left(\overset{2}{F}_\beta\right)^7 \left(1 - \overset{2}{\mu}_\alpha \overset{2}{\mu}_\beta\right)^8}},$$

$$\sqrt[8]{\sigma_8} = \sqrt[8]{\frac{\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{F}_\beta \overset{2}{F}_\beta \overset{1}{G}_\alpha \overset{1}{G}_\beta \overset{2}{G}_\alpha \overset{2}{G}_\beta \left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)^2 \left(1 - \overset{4}{\mu}_\alpha \overset{4}{\mu}_\beta\right)^2}{\left(\overset{2}{F}_\alpha\right)^7 \left(1 - \overset{2}{\mu}_\alpha \overset{2}{\mu}_\beta\right)^8}}.$$

Eforturile complexe (24) nu sînt independente fiind legate de eforturile complexe (23) prin relațiile

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_\alpha &= i\left(\lambda_1 \widetilde{T}_\alpha + \lambda_2 \widetilde{T}_\beta + \lambda_3 \overline{\widetilde{T}}_\alpha + \lambda_4 \overline{\widetilde{T}}_\beta\right), \text{*)} \\ \widetilde{M}_\beta &= i\left(\rho_1 \widetilde{T}_\alpha + \rho_2 \widetilde{T}_\beta + \rho_3 \overline{\widetilde{T}}_\alpha + \rho_4 \overline{\widetilde{T}}_\beta\right), \qquad (35) \\ \widetilde{M}_{\alpha\beta} &= i\left(\gamma_1 \widetilde{T}_{\alpha\beta} + \gamma_2 \overline{\widetilde{T}}_{\alpha\beta}\right), \end{aligned}$$

unde au fost introduse notațiile

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\overset{3}{\mu}_\alpha}{\sqrt[8]{\sigma_1}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)} - \overset{1}{\mu}_\beta \sqrt[8]{\sigma_5}\right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_5} + \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_2}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)}\right], \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\overset{3}{\mu}_\alpha}{\sqrt[8]{\sigma_1}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)} + \sqrt[8]{\sigma_5}\, \overset{1}{\mu}_\beta\right], \qquad (36) \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_5} - \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_2}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)}\right], \\ \rho_1 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_6} + \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_1}\left(1 - \overset{3}{\mu}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta\right)}\right], \end{aligned}$$

---

*) $\overline{\widetilde{T}}_\alpha$ este conjugatul lui $\widetilde{T}_\alpha$ etc.

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\overset{3}{\mu}_\beta}{1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta}\frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_2}} - \sqrt[8]{\sigma_6}\,\overset{1}{\mu}_\alpha\right],$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_6} - \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_1}\left(1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta\right)}\right], \quad \rho_4 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_6}\,\overset{1}{\mu}_\alpha + \frac{\overset{3}{\mu}_\beta}{1-\overset{3}{\mu}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta}\frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_2}}\right],$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_7}\left(1+\overset{2}{\mu}_\beta\right) + \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_3}\left(1+\overset{4}{\mu}_\beta\right)}\right],$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt[8]{\sigma_7}\left(1+\overset{2}{\mu}_\beta\right) - \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma_3}\left(1+\overset{4}{\mu}_\beta\right)}\right],$$

mărimile $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8$, fiind definite prin relațiile (34).

2.1. **Funcția de efort. Expresia eforturilor.** Se observă că primele două ecuații din sistemul de ecuații complexe (25) sînt identice satisfăcute prin introducerea funcției complexe

$$C = c + i\zeta w. \tag{37}$$

$$\widetilde{T}_\alpha = \frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} - \int \widetilde{X}\,d\alpha,$$

$$\widetilde{T}_\beta = \frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2} - \int \widetilde{Y}d\beta,$$

$$\widetilde{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Din ultimele două ecuații (25) ținîndu-se seama de relațiile (35) și (37) rezultă $\widetilde{Q}_\alpha$, $\widetilde{Q}_\beta$, exprimate prin funcția C

$$\widetilde{Q}_\alpha = i\left[(\lambda_1+\gamma_1)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + (\lambda_3+\gamma_2)\frac{\partial^3\overline{C}}{\partial\alpha\,\partial\beta^2} + \lambda_2\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^3} + \lambda_4\frac{\partial^3\overline{C}}{\partial\alpha^3} - \right.$$
$$\left. -(\lambda_3+\lambda_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\widetilde{X}\,d\alpha - (\lambda_2+\lambda_4)\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\widetilde{Y}\,d\beta\right] + \widetilde{P}, \tag{38}$$

$$\widetilde{Q}_\beta = i\left[(\gamma_1+\rho_2)\frac{\partial^3 C}{\partial\alpha^2\partial\beta} + (\gamma_2+\rho_4)\frac{\partial^3\overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \rho_1\frac{\partial^3 C}{\partial\beta^3} + \rho_3\frac{\partial^3\overline{C}}{\partial\beta^3} - \right.$$
$$\left. -(\rho_1+\rho_3)\frac{\partial}{\partial\beta}\int\widetilde{X}\,d\alpha - (\rho_2+\rho_4)\frac{\partial}{\partial\beta}\int\widetilde{Y}\,d\beta\right] + \widetilde{R}.$$

Funcția $C(\alpha, \beta)$ va satisface ecuația ce rezultă din înlocuirea în ecuația a treia a sistemului de ecuații complexe, a eforturilor complexe exprimate prin relațiile (37) și (38)

$$\frac{-1}{R_1}\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} + \frac{2}{R_{12}}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha_2} + i\Big[(\lambda_1 + 2\gamma_1 + \rho_2)\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} +$$

$$+ (\lambda_3 + 2\gamma_2 + \rho_4)\frac{\partial^4 \overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda_2\frac{\partial^4 C}{\partial\alpha^4} + \lambda_4\frac{\partial^4 \overline{C}}{\partial\alpha^4} + \rho_1\frac{\partial^4 C}{\partial\beta^4} +$$

$$+ \rho_3\frac{\partial^4 \overline{C}}{\partial\beta^4} = -\widetilde{Z} + \frac{1}{R_1}\int\widetilde{X}\,d\alpha + \frac{1}{R_2}\int\widetilde{Y}\,d\beta + i\Big[(\lambda_1 + \lambda_3)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{X}\,d\alpha + \qquad (39)$$

$$+ (\lambda_2 + \lambda_4)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int\widetilde{Y}\,d\beta + (\rho_1 + \rho_3)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\widetilde{X}\,d\alpha + (\rho_2 + \rho_4)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\int\widetilde{Y}\,d\beta -$$

$$-\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\widetilde{R}}{\partial\beta}\Big].$$

Determinarea funcției $C(\alpha, \beta)$ din ecuația (39) permite ușor calculul eforturilor și momentelor. Din relațiile (32) și (37) se obțin expresiile lui T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ în funcție de $c = \mathcal{R}e\,C$ și $w = \frac{1}{\zeta}\,\mathcal{I}m\,C$

$$T_\alpha = \frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} - \int X\,d\alpha,$$

$$T_\beta = \frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} - \int Y\,d\beta, \qquad (40)$$

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

$$M_\alpha = -\overset{1}{G}_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - \overset{3}{\mu}_\alpha\overset{1}{G}_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \overset{1}{G}_\alpha\int\Gamma_2\,d\beta + \overset{3}{\mu}_\alpha\overset{1}{G}_\beta\int\Gamma_1\,d\alpha,$$

$$M_\beta = -\overset{1}{G}_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \overset{3}{\mu}_\beta\overset{1}{G}_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \overset{1}{G}_\beta\int\Gamma_1\,d\alpha + \overset{3}{\mu}_\beta\overset{1}{G}_\alpha\int\Gamma_2\,d\beta,$$

$$M_{\alpha\beta} = \overset{2}{G}_\beta\frac{1 - \overset{4}{\mu}_\alpha\overset{4}{\mu}_\beta}{1 + \overset{4}{\mu}_\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Cunoașterea acestor mărimi permite pînă la urmă determinarea eforturilor și momentelor T'_α, T'_β, $T'_{\alpha\beta}$, M'_α, M'_β, $M'_{\alpha\beta}$ cu ajutorul relațiilor (17).

În baza relațiilor (19) rezultă componentele deformațiilor $\varepsilon^{(1)}_*$, $\varepsilon^{(2)}_*$, ω_*, $\varkappa^{(1)}_*$, $\varkappa^{(2)}_*$, $\tau^{(1)}_*$, $\tau^{(2)}_*$.

Cunoaşterea componentelor de deformaţie tangenţială şi de încovoiere a suprafeţei mediane, permite datorită relaţiilor (1) determinarea eforturilor unitare în mediul tridimensional.

Observaţie. În consideraţiile anterioare, am luat pentru simplitate $A = B = 1$. Este evident însă că ne putem elibera de această restricţie şi deci să luăm $A = A(\alpha, \beta)$ şi $B = B(\alpha, \beta)$ urmînd pentru acest ultim caz procedeul dat în lucrarea [1].

În încheiere, aduc mulţumirile mele ing. Cristian Stănescu cu care am discutat diverse probleme cuprinse în lucrare. Aceste discuţii au fost deosebit de utile.

Primită la redacţie la 31 decembrie 1958.

К ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОРТОТРОПНЫХ СЛОЕВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ СИММЕТРИЧНО ПО ТОЛЩИНЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача тонких упругих оболочек, составленных из слоев, расположенных симметрично по толщине относительно срединной поверхности, причем каждый слой является однородным и ортотропным.

В первом разделе работы для оболочек такого рода устанавливается статико-геометрическая аналогия.

Во втором разделе установленная аналогия применяется для расчета напряженного состояния пологих оболочек, при наличии поверхностной нагрузки и неравномерного температурного поля.

Полученные в настоящей работе результаты являются обобщением результатов, полученных автором в своих предыдущих работах [1] и [2].

À PROPOS DE LA THÉORIE DES STRUCTURES ÉLASTIQUES MINCES, CONSTITUÉES DE COUCHES ORTHOTROPES, SYMÉTRIQUEMENT DISPOSÉES SUR L'ÉPAISSEUR PAR RAPPORT À LA SURFACE MÉDIANE

RÉSUMÉ

L'auteur considère le problème des structures élastiques minces, constituées de couches symétriquement disposées sur l'épaisseur, par rapport à la surface médiane de celle-ci, chaque couche composante étant homogène et orthotrope.

Dans la première partie du travail, il établit l'analogie statico-géométrique pour ce genre de structure.

Dans la seconde partie, l'auteur applique l'analogie établie au calcul de l'état de contrainte des structures de faible courbure, dans les conditions de l'existence d'une charge superficielle et d'un champ de température non uniforme.

Les résultats obtenus dans ce travail sont une généralisation des résultats obtenus par l'auteur dans ses travaux [1] et [2].

BIBLIOGRAFIE

1. Л. ЛИБРЕСКУ, *Задачи теории тонких упругих оболочек, составленных из упругих изотропных слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности.* Revue de Mécanique Appliquée *2*, (1959).
2. L. LIBRESCU, *Cîteva probleme ale teoriei unei clase de învelitori elastice subţiri neomogene.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, 1 (1959).
3. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев.* Известия Акад. Наук Армянской ССР, **IV**, *6* (1951).
4. Е. И. ГРИГОЛЮК, *О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек.* Инж. Сборник, **XV**, *5* (1953).
5. V. VISARION, C. STĂNESCU, *Extinderea analogiei statico-geometrice pentru învelitorile elastice subţiri cu ortotropie de material.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, *3* (1957).
6. А. Л. ГОЛЬДЕВЕЙЗЕР, *Теория упругих тонких оболочек.* Гостехиздат, Москва, 1953.
7. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках.* Известия Акад. Наук Армянской ССР, **V**, *6* (1952).
8. V. VISARION, C. STĂNESCU, *Calculul învelitorilor elastice subţiri de mică curbură cu ortotropie de material.* Comunicările Acad. R.P.R., **VII**, *12* (1957).
9. L. LIBRESCU, *Asupra problemei turbo-elastice a învelitorilor subţiri de formă arbitrară.* Comunicările Acad. R.P.R., **VIII**, *8* (1958).
10. L. — *Asupra analogiei sarcinilor termice în problema termo-elastică a învelitorilor subţiri.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3* (1958).
11. V. VISARION, C. STĂNESCU, *Etudes des semi-invariantes de l'analogie statico-géométrique pour les enveloppes élastiques minces à matériaux isotropes et orthotropes.* Acta Technica Hungaricae (sub tipar).

ASUPRA REZOLVĂRII SISTEMELOR DE ECUAŢII DE ECHILIBRU ELASTIC CU MATRICE DE TIP JACOBI *)

DE

VALERIU PETCU

Introducere. În mecanica construcţiilor apar o serie de probleme, a căror soluţionare se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare avînd determinantul coeficienţilor de tip Jacobi.

În prezent se cunosc diferite metode de rezolvare a unui astfel de sistem de ecuaţii, însă printre acestea nu se găseşte şi soluţia directă a sistemului, prin determinanţi, cauza fiind calculele laborioase care apar atunci cînd numărul ecuaţiilor este mai mare ca trei.

În majoritatea cazurilor întîlnite în practică, construcţiile care corespund unui astfel de sistem de ecuaţii au, în general, o schemă statică uniformă în ceea ce priveşte caracteristicile geometrice şi modul de rezemare, cu excepţia zonelor de capăt sau de mijloc ale construcţiilor, în care pot avea loc perturbaţii ale acestei uniformităţi.

Determinantul coeficienţilor sistemului de ecuaţii corespunzător unei asemenea situaţii, capătă o formă particulară caracterizată prin :

— egalitatea tuturor coeficienţilor nesituaţi pe diagonala principală ;

— egalitatea coeficienţilor situaţi pe diagonala principală, cu excepţia celor doi coeficienţi de la capetele diagonalei, care pot fi diferiţi.

Din literatură se ştie că un astfel de determinant prezintă proprietatea de recurenţă.

În cele ce urmează, se demonstrează că şi determinanţii formaţi prin suprimarea unei coloane a determinantului coeficienţilor şi înlocuirea ei prin coloana termenilor liberi prezintă proprietatea de recurenţă.

Aceasta face ca sistemul de ecuaţii, în condiţiile indicate mai sus, să poată fi rezolvat direct, prin determinanţi, valoarea unei necunoscute apărînd sub forma unui raport de două expresii recurente.

---

*) Comunicare prezentată în şedinţa Catedrei de beton armat a Institutului de construcţii din Bucureşti, la data de 14 octombrie 1957.

Soluția prezentată sub această formă simplifică substanțial calculul direct și, într-o serie de cazuri, prezintă avantaje față de metodele folosite în prezent.

I. BAZELE TEORETICE

Sistemul de ecuații luat în considerație are forma:

$$\begin{aligned}
\beta'\cdot X_1 + \alpha\cdot X_2 + C_1 &= 0,\\
\alpha\cdot X_1 + \beta\cdot X_2 + \alpha\cdot X_3 + C_2 &= 0,\\
\alpha\cdot X_2 + \beta X_3 + \alpha\cdot X_4 + C_3 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
\alpha\cdot X_{n-2} + \beta\cdot X_{n-1} + \alpha\cdot X_n + C_{n-1} &= 0,\\
\alpha\cdot X_{n-1} + \beta''\cdot X_n + C_n &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Cu notațiile

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha},\ \gamma' = \frac{\beta'}{\alpha},\ \gamma'' = \frac{\beta''}{\alpha},\ K_i = \frac{C_i}{\alpha}, \tag{2}$$

sistemul (1) devine

$$\begin{aligned}
\gamma'\cdot X_1 + X_2 + K_1 &= 0,\\
X_1 + \gamma\cdot X_2 + X_3 + K_2 &= 0,\\
X_2 + \gamma\cdot X_3 + X_4 + K_3 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
X_{n-2} + \gamma\cdot X_{n-1} + X_n + K_{n-1} &= 0,\\
X_{n-1} + \gamma''\cdot X_n + K_n &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Determinantul coeficienților necunoscutelor are expresia

$$\overline{D}_n = \begin{vmatrix}
\gamma' & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
1 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \gamma & \ldots & 0 & 0 & 0\\
\ldots & & & & & & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 1\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \gamma''
\end{vmatrix} \tag{4}$$

Dacă se fac notațiile

$$\begin{aligned}
\gamma' &= \gamma + \delta',\\
\gamma'' &= \gamma + \delta'',
\end{aligned} \tag{5}$$

şi dacă se notează cu D_n valoarea lui $\overline{D}_n$ pentru $\delta' = \delta'' = 0$, atunci din dezvoltarea determinantului (4) rezultă

$$D_n = \gamma \cdot D_{n-1} - D_{n-2}, \tag{6}$$

$$\overline{D}_n = D_n + (\delta' + \delta'') \cdot D_{n-1} + \delta' \cdot \delta'' \cdot D_{n-2}. \tag{7}$$

Relaţia (6) este cunoscută în literatură, iar relaţia (7) este generalizarea relaţiei (6) pentru cazul în care intervin perturbaţii în valorile elementelor de la extremităţile diagonalei principale a determinantului.

Relaţiile (6) şi (7) exprimă proprietatea de recurenţă a determinantului format de coeficienţii necunoscutelor din sistemul (3).

Pentru simplitate, se notează

$$\begin{aligned} A'_n &= D_n + \delta' D_{n-1}, \\ A''_n &= D_n + \delta'' \cdot D_{n-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Avem deci

$$\overline{D}_n = A'_n + \delta'' \cdot A'_{n-1} = A''_n + \delta' . A''_{n-1}. \tag{9}$$

Soluţia generală a sistemului de ecuaţii (3) are forma

$$X_j = -\frac{\overline{\Delta}_n^j}{\overline{D}_n}, \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

în care $\overline{\Delta}_n^j$ este valoarea determinantului obţinut prin înlocuirea coloanei de rang j a determinantului coeficienţilor necunoscutelor cu coloana termenilor liberi, adică

$$\overline{\Delta}_n^j = \begin{vmatrix} \gamma' & 1 & 0 & \ldots & 0 & K_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & K_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & \ldots & 0 & K_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma & K_{j-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & K_j & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & K_{j+1} & \gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & K_{n-1} & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & K_n & 0 & \ldots & 0 & 1 & \gamma'' \end{vmatrix} \tag{11}$$

Dacă se dezvoltă determinantul (11) după elemnetele coloanei ce conţine termenii liberi rezultă

$$\overline{\Delta}_n^j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i-1} \cdot K_i \cdot M_{ji}, \tag{12}$$

în care M_{ji} este minorul rezultat din determinantul $\overline{\Delta}_n^j$ prin suprimarea coloanei de rang j şi a liniei de rang i. Minorul M_{ji} rezultă aşadar din matricea

$$T = \left\| \begin{matrix} \gamma' & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0, & 1 & \gamma'' \end{matrix} \right\| \tag{13}$$

prin suprimarea liniei de rang i.

La calculul acestor minori deosebim două cazuri şi anume

a) Linia care se suprimă este de rang $i \neq j$;

b) Linia care se suprimă este de rang $i = j$.

Cazul a) $i \neq j$

Dezvoltînd matricea (13) după elementele liniei de rang j obţinem

$$T = \pm \left\| \begin{matrix} \gamma' & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1 \quad \gamma''}_{n-j}} \end{matrix} \right\| \mp$$

$$\mp \left\| \begin{matrix} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\gamma' \quad 1 \quad 0 \quad \ldots}^{j-1}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \gamma'' \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

Primele semne se iau dacă linia ce se suprimă este de rang $i < j$ iar ultimele, pentru $i > j$.

Din examinarea matricelor (14) rezultă următoarele concluzii:

— Dacă linia ce se suprimă este de rang $i < j$, atunci determinantul rezultat din prima matrice este egal cu produsul a doi determinanţi, dintre care unul are valoarea A''_{n-j}; determinantul rezultat din matricea a doua este nul.

— Dacă linia ce se suprimă este de rang $i > j$, atunci determinantul rezultat din prima matrice este nul, iar cel rezultat din matricea a doua este egal cu produsul a doi determinanţi, dintre care unul are valoarea A'_{j-1}.

În cazul $i < j$, celălalt factor al produsului amintit mai sus este un determinant provenit din A'_{j-1}, prin suprimarea ultimei coloane şi a unei linii de rang i. Expresia acestui determinant este deci

$$P_1 = \begin{vmatrix} \gamma' & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd determinantul succesiv după elementele ultimei linii, rezultă:

$$P_1 = A'_{i-1}.$$

Pe aceeaşi cale se găseşte că în cazul $i > j$ celălalt factor al produsului este un determinant avînd valoarea

$$P_2 = A''_{n-i}.$$

Cazul b) $i = j$

Din matricea (13) rezultă imediat că minorul corespunzător acestui caz este un produs de doi determinanţi avînd valoarea

$$A'_{j-1} \cdot A''_{n-j}.$$

Ţinînd seama de rezultatele obţinute la calculul minorului M_{ji}, expresia (12) se poate pune sub forma

$$\overline{\Delta}{}_n^j = A''_{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \cdot A'_{i-1} \cdot K_i + A'_{j-1} \cdot \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \cdot A''_{n-i} \cdot K_i. \quad (15)$$

Prin urmare: *determinantul obţinut prin suprimarea unei coloane în determinantul coeficienţilor necunoscutelor şi înlocuirea ei cu coloana ter-*

menilor liberi are proprietatea de recurență, deoarece toate cantitățile care îl definesc se obțin prin recurență.

Soluția generală a sistemului (10) se poate scrie deci sub forma

$$X_j = \frac{A''_{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \cdot A'_{i-1} \cdot K_i + A'_{j-1} \cdot \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \cdot A''_{n-i} \cdot K_i}{\overline{D}_n}. \tag{16}$$

II. CAZURI PARTICULARE

În practică pot interveni următoarele cazuri particulare :

1. $\delta' = \delta'' = \delta$.

Rezultă :

$$A'_i = A''_i = A_i = D_i + \delta \cdot D_{i-1}$$

și soluția (16) devine

$$X_j = \frac{A_{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \cdot A_{i-1} \cdot K_i + A_{j-1} \cdot \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \cdot A_{n-i} \cdot K_i}{A_n + \delta \cdot A_{n-1}}. \tag{17}$$

2. $\delta' = 0$.

Rezultă : $A'_n = D_n$ și deci

$$X_j = \frac{A''_{n-j} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \cdot D_{i-1} \cdot K_i + D_{j-1} \cdot \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \cdot A''_{n-i} \cdot K_i}{A''_n}. \tag{18}$$

3. $\delta'' = 0$.

Rezultă : $A''_n = D_n$ și deci

$$X_j = \frac{D_{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \cdot A'_{i-1} \cdot K_i + A'_{j-1} \cdot \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \cdot D_{n-i} \cdot K_i}{A'_n}. \tag{19}$$

4. $\delta' = \delta'' = 0$.

Rezultă : $A'_n = A''_n = D_n$ și deci

$$X_j = \frac{D_{n-j} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j-i} \cdot D_{i-1} \cdot K_i + D_{j-1} \cdot \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \cdot D_{n-i} \cdot K_i}{D_n}. \tag{20}$$

III. FOLOSIREA SIMETRIEI ŞI ANTISIMETRIEI

Dacă $\delta' = \delta''$, atunci folosirea simetriei şi antisimetriei poate conduce la simplificări esenţiale şi chiar la extinderea cîmpului de aplicabilitate a procedeului.

Pentru exemplificare vom considera grinda continuă şi anume :

1. *Grinda continuă cu un număr par de deschideri* ($2n$). În cazul unei încărcări simetrice, pe reazemul central se realizează o încastrare perfectă şi deci problema se reduce la calculul necunoscutelor pe o jumătate de grindă, cu ajutorul unui sistem de n ecuaţii în loc de $2n - 1$, în care $\delta'' = -\frac{\gamma}{2}$.

Pentru o încărcare antisimetrică, pe reazemul central se realizează o articulaţie, astfel încît numărul de necunoscute se reduce la $n - 1$, iar coeficientul $\delta'' = 0$.

2. *Grinda continuă cu un număr impar de deschideri* ($2n + 1$). În cazul unei încărcări simetrice, calculul se face pe jumătate de grindă, ultima ecuaţie avînd forma

$$X_{n-1} + (\gamma + 1)\cdot X_n + K_n = 0,$$

adică

$$\delta'' = 1.$$

În cazul încărcării antisimetrice, în mijlocul deschiderii centrale apare o articulaţie, calculul făcîndu-se de asemenea pe jumătate de grindă.

Este de remarcat faptul că în cazul în care grinda are un număr impar de deschideri, atunci folosirea simetriei şi antisimetriei permite să se rezolve grinzi continue cu deschiderea centrală diferită de celelalte.

Concluziile rezultate din folosirea simetriei şi antisimetriei, obţinute din cazurile particulare tratate, se aplică întocmai şi la celelalte tipuri de construcţii care sînt rezolvabile prin metoda indicată.

IV. CONCLUZII

1. În lucrare s-a demonstrat proprietatea de recurenţă a soluţiei sistemului de ecuaţii cu matrice de tip Jacobi, caracterizat prin :

— egalitatea tuturor coeficienţilor nesituaţi pe diagonala principală a determinantului sistemului ;

— egalitatea coeficienţilor situaţi pe diagonala principală a determinantului sistemului, cu excepţia celor doi coeficienţi de la capetele diagonalei, care pot fi diferiţi.

Această proprietate prezintă avantajul scrierii directe a soluţiei generale a sistemului, independent de valorile termenilor liberi, elementele care intervin în expresia soluţiei obţinîndu-se exclusiv prin formule recurente simple.

2. Scrierea directă a soluţiei sistemului mai prezintă avantajul evaluării rapide a gradului de influenţă al diferiţilor termeni liberi asupra

valorii necunoscutelor, dînd astfel posibilitatea de a se neglija acei termeni care conduc la erori mai mici decît cele impuse.

3. Soluția prezentată este aplicabilă la o serie întreagă de probleme din mecanica construcțiilor sau din alte domenii, a căror rezolvare se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații de tipul considerat.

4. Folosirea simetriei și antisimetriei, pe lîngă faptul că simplifică problema, mai permite extinderea aplicării metodei și la construcții care au perturbații de alcătuire în zona axului lor de simetrie.

5. Soluția prezentată poate fi folosită cu succes la construirea liniilor de influență, așa cum se poate vedea din soluția obținută în exemplul de calcul.

6. Metoda este deosebit de avantajoasă la rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordinul II de forma $y'' + F(x) = 0$ prin metoda diferențelor finite, în care caz soluția (16) capătă forma simplă

$$y_j = + \frac{(n - j + 1) \cdot \sum_{1}^{j-1} i \cdot K_i + j \cdot \sum_{j}^{n} (n - i + 1) \cdot K_i}{n + 1},$$

în care

$$K_i = (\Delta x)^2 . F(x_i).$$

V. EXEMPLU DE CALCUL

Calculul grinzii continue din figura 1 pentru o încărcare oarecare.

1. Caracteristicile grinzii :

— secțiunea în cîmp 30 × 60 cm

— secțiunea pe reazem 30 × 100 cm

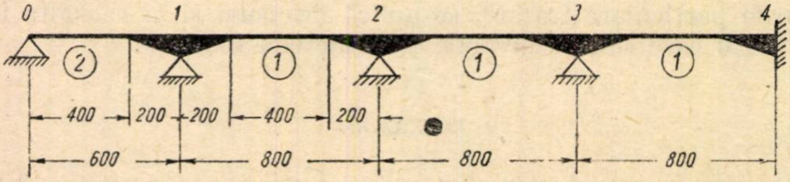


Fig. 1

— lungimea relativă a vutei :

a) în prima deschidere

$$\lambda_2 = \frac{2,00}{6,00} = 0,333,$$

b) în celelalte deschideri

$$\lambda_1 = \frac{2,00}{8,00} = 0,250.$$

2. Coeficienții de secțiune variabilă :

a) în prima deschidere

$$C_2' = 0{,}987, \quad C_2'' = 0{,}596, \quad C_2 = 0{,}890,$$

b) în celelalte deschideri

$$C_1' = C_1'' = 0{,}676, \quad C_1 = 0{,}869.$$

Luînd ca necunoscute momentele de pe reazeme, sistemul de ecuații de tip Clapeyron scris în forma (3) este :

$$2\,\frac{C_2'' + C_1'}{C_1}\cdot M_1 + M_2 + K_1 = 0,$$

$$M_1 + \frac{4C_1'}{C_1}\cdot M_2 + M_3 + K_2 = 0,$$

$$M_2 + \frac{4C_1'}{C_1}\cdot M_3 + M_4 + K_3 = 0,$$

$$M_3 + \frac{2C_1'}{C_1}\cdot M_4 + K_4 = 0.$$

Rezultă

$$n = 4,$$

$$\gamma = \frac{4C_1'}{C_1} = 3{,}12, \qquad \delta' = \gamma' - \gamma = -0{,}20,$$

$$\gamma' = 2\cdot\frac{C_2'' + C_1'}{C_1} = 2{,}92, \qquad \delta'' = \gamma'' - \gamma = -1{,}56.$$

$$\gamma'' = \frac{\gamma}{2} = 1{,}56.$$

3. Calculul determinanților D_i cu formula (6)

D_0	D_1	D_2	D_3	D_4
1	3,12	8,75	24,1	66,7

4. Calculul expresiilor A_i' și A_i'' cu formulele (8)

A_0'	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'
1	2,92	8,13	22,3	61,9

A_0''	A_1''	A_2''	A_3''	A_4''
1	1,56	3,90	10,5	29,0

5. Calculul determinantului $\overline{D}_n$ cu formula (7)

$$\overline{D}_4 = A'_4 + \delta'' \cdot A'_3 = 26{,}9.$$

6. Scrierea soluţiei generale a sistemului de ecuaţii cu formula (16)

$$M_1 = -\frac{10{,}5\ K_1 - 3{,}90\ K_2 + 1{,}56\ K_3 - K_4}{26{,}9},$$

$$M_2 = -\frac{-3{,}90\ K_1 + 2{,}92\ (3{,}90\ K_2 - 1{,}56\ K_3 + K_4)}{26{,}9},$$

$$M_3 = -\frac{1{,}56\ (K_1 - 2{,}92\ K_2) + 8{,}13\ (1{,}56\ K_3 - K_4)}{26{,}9},$$

$$M_4 = -\frac{-K_1 + 2{,}92\ K_2 - 8{,}13\ K_3 + 22{,}3 \cdot K_4}{26{,}9},$$

sau

$$M_1 = -0{,}391 \cdot K_1 + 0{,}144 \cdot K_2 - 0{,}058 \cdot K_3 + 0{,}037 \cdot K_4,$$

$$M_2 = +0{,}144\ K_1 - 0{,}423\ K_2 + 0{,}169\ K_3 - 0{,}108\ K_4,$$

$$M_3 = -0{,}058\ K_1 + 0{,}169\ K_3 - 0{,}472\ K_3 + 0{,}301\ K_4,$$

$$M_4 = +0{,}037\ K_1 - 0{,}108\ K_2 + 0{,}301\ K_3 - 0{,}830\ K_4.$$

Precizarea încărcării înseamnă implicit precizarea caracteristicilor K_i şi deci şi a valorilor efective ale momentelor.

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1959.

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ С МАТРИЦЕЙ ТИПА ЯКОБИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе доказывается свойство рекуррентности решения системы уравнений упругого равновесия с матрицей типа Якоби при следующих особенностях такой системы:

— равенство всех коэффициентов, нерасположенных на основной диагонали определителя системы;

— равенство коэффициентов, расположенных на основной диагонали определителя системы, за исключением двух коэффициентов, находящихся на концах диагонали, которые могут быть различными.

Предлагаемый метод позволяет решить ряд задач как в строительной механике, так и в других областях, решение которых сводится

к решению системы уравнений рассматриваемого типа, причем преимущество предлагаемого метода заключается в непосредственной записи неизвестных значений.

Приводится пример расчета, иллюстрирующий способ произведения вычислений.

SOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE À MATRICES DU TYPE DE JACOBI

RÉSUMÉ

L'auteur démontre la propriété de récurrence de la solution du système d'équations d'équilibre élastique, à matrices du type de Jacobi, caractérisé par :

— l'égalité de tous les coefficients non situés sur la diagonale principale du déterminant du système ;

— l'égalité des coefficients situés sur la diagonale principale du déterminant du système, à l'exception des deux coefficients situés aux extrémités de la diagonale, qui peuvent être différents.

La solution présentée permet de résoudre une série de problèmes du domaine de la Mécanique des constructions et d'autres domaines, problèmes dont la solution se réduit à la résolution d'un système d'équations du type considéré, ayant l'avantage de pouvoir écrire directement les valeurs des inconnues.

L'auteur donne un exemple de calcul illustrant la manière de mener les calculs.

REZISTENȚA MATERIALELOR —
ELASTICITATE — PLASTICITATE

ASUPRA ECHILIBRULUI ELASTIC AL ÎNVELITORILOR SUBȚIRI DE ROTAȚIE, CU APLICAȚIE LA CATENOIDUL DREPT DE ROTAȚIE

DE

V. MAGER

O largă categorie de învelitori subțiri utilizată în construcții este constituită de acelea a căror suprafață mediană este o suprafață de rotație. Fiind o suprafață cu dublă curbură inversată, nedesfășurabilă, pericolul de flambaj este redus. Ele pot fi întrebuințate pentru a rezolva anumite ansambluri arhitectonice cum ar fi : cupole, turnuri de răcire etc.

Studiul lor static, în cadrul teoriei cu momente este efectuat, pînă acum, doar pentru anumite încărcări în special simetrice, care permit a se simplifica mult sistemul ecuațiilor statico-geometrice.

În această lucrare sînt studiate învelitorile subțiri de rotație — avînd drept aplicație directă catenoidul drept — luîndu-se în considerare efectul momentelor și al forțelor tăietoare. Ecuațiile statico-geometrice sînt date cu o eroare de ordinul lui h/l față de unitate, calculele intermediare admițînd erori de ordinul lui h^2/l^2 față de unitate *).

Au fost întrebuințate următoarele notații :

N_ρ , N_θ — tensiunile,
$N_{\rho\theta}$, $N_{\theta\rho}$ — forțele de alunecare,
Q_ρ , Q_θ — forțele tăietoare,
M_ρ , M_θ — momentele încovoietoare,
$M_{\rho\theta}$, $M_{\theta\rho}$ — momentele de torsiune,
u, v, w, — deplasările după direcțiile lui ρ, θ, n,
X, Y, Z — proiecțiile încărcării după direcțiile ρ, θ, n,
μ — coeficientul lui Poisson,
E — coeficientul de elasticitate al materialului învelitorii,
ε_ρ , ε_θ — deformații elastice de tensiune după direcțiile lui ρ și θ
ω — deformație elastică de alunecare,

---

*) Prin l se înțelege o lungime avînd același ordin de mărime cu R — raza de curbură a suprafeței.

γ_ρ , γ_θ — rotiri ale suprafeţei mediane în planele ce conţin pe ε_ρ şi ε ,
χ_ρ , χ_θ — deformaţii elastice de încovoiere date de M_ρ şi M_θ,
τ — deformaţie elastică de torsiune,
R_ρ , R_θ — razele de curbură ale liniilor de coordonate,
$2h$ — grosimea învelitorii subţiri.

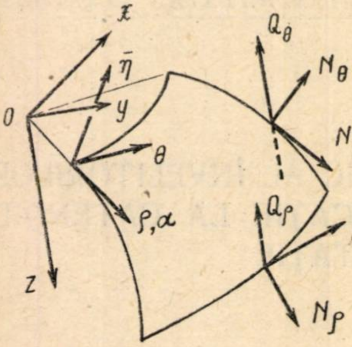

x
$\bar{\eta}$
y
0
θ
ρ,α
z
Q_θ
N_θ
$N_{\theta\rho}$
Q_ρ
$N_{\rho\theta}$
N_ρ

Fig. 1

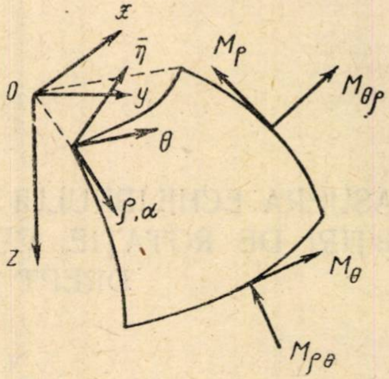

x
$\bar{\eta}$
0
y
M_ρ
$M_{\theta\rho}$
θ
ρ,α
z
M_θ
$M_{\rho\theta}$

Fig. 2

În figurile 1 şi 2 sînt date sensurile eforturilor, momentelor şi încărcărilor în raport cu sistemul de coordonate ataşat suprafeţei mediane a învelitorii.

I. ELEMENTELE GEOMETRICE ALE SUPRAFEŢEI MEDIANE

Ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe de rotaţie exprimate în linii de curbură, ortogonale, sînt

$$x = \rho \cos \theta\, , \quad y = \rho \sin \theta\, , \quad z = f(\rho). \tag{1.1}$$

Pătratul lungimii elementului de arc are valoarea

$$ds^2 = [1 + f'^2(\rho)]d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

încît lungimile elementelor de arc ale liniilor de coordonate vor avea drept expresii

$$ds_\rho = \sqrt{1 + f'^2(\rho)} = A(\rho)\, , \quad ds_\theta = \rho = B(\rho)\cdot \tag{1.2}$$

Trebuie remarcat că, teoretic, expresia pătratului lungimii elementului de arc poate fi exprimată, printr-o schimbare de variabile independente

$$\alpha = \int \left[\frac{1 + f'^2(\rho)}{\rho^2}\right]^{1/2} d\rho\, , \quad \theta = \theta, \tag{1.3}$$

astfel încît să rezulte lungimi egale în lungul celor două familii de linii de coordonate.

Se observă că atît lungimile liniilor de coordonate cît şi curburile lor sînt funcţii de o singură variabilă.

II. ECUAŢIILE STATICO-GEOMETRICE ALE ÎNVELITORILOR SUBŢIRI DE ROTAŢIE

Aceste ecuaţii sînt obţinute din [1] şi [2], prin particularizare, presupunînd pentru început, că lungimile celor două familii de linii de coordonate nu sînt egale. Cazul egalităţii lor va atrage o considerabilă simplificare a scrierii care se va putea obţine uşor făcînd $A(\alpha) = B(\alpha)$, în rezultatele obţinute pentru cazul general.

Ecuaţiile de echilibru static sînt

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \rho}(BN_\rho) - A\frac{\partial N_{\theta\rho}}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \rho}N_\theta - AB\frac{Q_\rho}{R_\rho} + ABX = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \rho}(BN_{\rho\theta}) + A\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \rho}N_{\theta\rho} - AB\frac{Q_\theta}{R_\theta} + ABY = 0, \\
AB\left(\frac{N_\rho}{R} + \frac{N_\theta}{R_\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho}(BQ_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(AQ_\theta) + ABZ = 0, \qquad (2.1) \\
\frac{\partial}{\partial \rho}(BM_{\rho\theta}) - A\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \rho}M_{\theta\rho} + ABQ_\theta = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \rho}(BM_\rho) + A\frac{\partial M_{\theta\rho}}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \rho}M_\theta - ABQ_\rho = 0, \\
N_{\rho\theta} + N_{\theta\rho} + \frac{M_{\rho\theta}}{R_\rho} + \frac{M_{\theta\rho}}{R_\theta} = 0, \text{*)}
\end{gathered}$$

la care adăugăm ecuaţiile de continuitate ale deformaţiei transcrise în eforturi

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \rho}(M_\rho + M_\theta) - (1+\mu)Q_\rho + \frac{h^2}{3}\cdot\frac{1}{R_\rho}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \rho}(N_\rho + N_\theta) + (1+\mu)X\right] = 0, \\
\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \theta}(M_\rho + M_\theta) - (1+\mu)Q_\theta + \frac{h^2}{3}\cdot\frac{1}{R_\theta}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \theta}(N_\rho + N_\theta) + (1+\mu)Y\right] = 0, \\
\left(\frac{1}{R_\rho} + \frac{1}{R_\theta}\right)(M_\rho + M_\theta) - (1+\mu)\left(\frac{M_\rho}{R_\rho} + \frac{M_\theta}{R_\theta}\right) - \qquad (2.2) \\
-\frac{h^2}{3}\cdot\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \rho}(N_\rho + N_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \theta}(N_\rho + N_\theta) + (1+\mu)\left[\frac{\partial(BX)}{\partial \rho} + \right.\right. \\
\left.\left. + \frac{\partial(AY)}{\partial \theta}\right]\right\} = 0,
\end{gathered}$$

---

*) În cele ce urmează vom considera eforturile de alunecare duale. Eroarea astfel introdusă este de ordinul lui h^2/l^2 faţă de unitate.

precum şi ecuaţia

$$M_{\rho\theta} + M_{\theta\rho} + \frac{N_{\rho\theta}}{R_\rho} + \frac{N_{\theta\rho}}{R_\theta} = 0 \ ^{*)} \tag{2.3}$$

dedusă de asemenea în lucrarea [1].

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii statico-geometrice, vom utiliza, metodă propusă de V. Visarion [2], două necunoscute auxiliare

$$\mathfrak{M} = M_\rho + M_\theta, \ \mathfrak{N} = N_\rho + N_\theta. \tag{2.4}$$

Cu ajutorul lor se vor putea exprima eforturile şi momentele.

Din primele două ecuaţii de continuitate se obţin forţele tăietoare

$$\begin{aligned} Q_\rho &= \frac{1}{(1+\mu)A}\left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \rho} + \frac{h^2}{3}\frac{1}{R_\rho}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \rho}\right] + \frac{h^2}{3}\frac{X}{R_\rho}, \\ Q_\theta &= \frac{1}{(1+\mu)B}\left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} + \frac{h^2}{3}\frac{1}{R_\theta}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \theta}\right] + \frac{h^2}{3}\frac{Y}{R_\theta}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

O dată ele cunoscute, introducîndu-le în a treia ecuaţie de echilibru şi ţinînd seama de (2.4), vor rezulta tensiunile

$$\begin{aligned} N_\rho &= -\frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho} - \dfrac{1}{R_\theta}}\left[\frac{\mathfrak{N}}{R_\theta} + \frac{1}{1+\mu}\frac{1}{AB}\Delta^* \mathfrak{M}\right] - \Phi_1, \\ N_\theta &= \frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho} - \dfrac{1}{R_\theta}}\left[\frac{\mathfrak{N}}{R_\theta} + \frac{1}{1+\mu}\frac{1}{AB}\Delta^* \mathfrak{M}\right] + \Phi_1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

n care am notat

$$\Phi_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho} - \dfrac{1}{R_\theta}}\left[Z + \frac{h^2}{3}\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{BX}{R_\rho} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{AY}{R_\theta}\right)\right].$$

Aici şi în ceea ce urmează

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \theta},$$

reprezintă un operator care, cu ajutorul schimbării de variabile (1.3) devine operatorul lui Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

---

*) În continuare, se consideră $M_{\rho\theta}$ şi $M_{\theta\rho}$ duale.

Din a treia ecuație de continuitate rezultă momentele încovoietoare

$$
\begin{aligned}
M_\rho &= \frac{1}{1+\mu}\frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho}-\dfrac{1}{R_\theta}}\left[\left(\frac{1}{R_\rho}-\frac{\mu}{R_\theta}\right)\mathfrak{M}-\frac{h^2}{3}\frac{1}{AB}\Delta^\star\mathfrak{N}\right]-\Phi_2 \\
M_\theta &= -\frac{1}{1+\mu}\frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho}-\dfrac{1}{R_\theta}}\left[\left(\frac{1}{R_\theta}-\frac{\mu}{R_\rho}\right)\mathfrak{M}-\frac{h^2}{3}\frac{1}{AB}\Delta^\star\mathfrak{N}\right]+\Phi_2
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

unde

$$\Phi_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho}-\dfrac{1}{R_\theta}}\left[\frac{\partial(BX)}{\partial\rho}+\frac{\partial(AY)}{\partial\theta}\right]\frac{h^2}{3}\frac{1}{AB}.$$

Din prima ecuație de echilibru, ținînd seama de dualitatea lor, rezultă expresia efortului de lunecare

$$N_{\rho\theta} = -N_{\theta\rho} = -\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{A}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\rho}(B^2N_\rho)-\frac{\partial B}{\partial\rho}\mathfrak{N}-AB\frac{Q_\rho}{R_\rho}+ABX\right]d\theta \qquad (2.8)$$

iar din a cincea ecuație de echilibru se obține momentul de torsiune

$$M_{\rho\theta} = -M_{\theta\rho} = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{A}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\rho}(B^2M_\rho)-\frac{\partial B}{\partial\rho}\mathfrak{M}-ABQ_\rho\right]d\theta, \qquad (2.9)$$

bazîndu-ne pe dualitatea momentelor $M_{\rho\theta}$, $M_{\theta\rho}$.

Din primele două ecuații de echilibru eliminînd, pe baza dualității lor, eforturile de lunecare, se obține o primă ecuație diferențială cu derivate parțiale în $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$,

$$
\begin{aligned}
&\Delta^\star\frac{B^2R_\rho\mathfrak{N}}{R_\rho-R_\theta}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{B^2}{A}\frac{\partial B}{\partial\rho}\mathfrak{N}\right)-AB\frac{\partial^2\mathfrak{N}}{\partial\theta^2}- \\
&-\frac{1}{1+\mu}\left[\Delta^\star\frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho}-\dfrac{1}{R_\theta}}\frac{B}{A}\Delta^\star\mathfrak{M}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{B}{A}\frac{B^2}{R_\rho}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{A}{B}\frac{B^2}{R_\theta}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\theta}\right)\right]= \\
&=\Delta^\star\frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho}-\dfrac{1}{R_\theta}}A^2Z+\frac{\partial(AB^2Y)}{\partial\theta}-\frac{\partial(B^3X)}{\partial\rho}.
\end{aligned}
$$

În mod cu totul analog, eliminîndu-se — pe baza dualității lor — momentele de torsiune, din a patra și a cincea ecuație de echilibru, obținem o a doua ecuație diferențială cu derivate parțiale în $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$

$$\Delta^{\star} \frac{B^2 R_\rho \mathfrak{M}}{R_\rho - R_\theta} - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{B^2}{A}\frac{\partial B}{\partial \rho}\mathfrak{M}\right) - AB\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{h^2}{3(1-\mu)}\left[\Delta^{\star} \frac{1}{\frac{1}{R_\rho} - \frac{1}{R_\theta}} \frac{B}{A} \Delta^{\star} \mathfrak{N} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{B}{A}\frac{B^2}{R_\rho}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \rho}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{A}{B}\frac{B^2}{R_\theta}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \theta}\right)\right] =$$

$$= \Delta^{\star} \frac{1}{\frac{1}{R_\rho} - \frac{1}{R_\theta}} \frac{B}{A}\left[\frac{\partial (BX)}{\partial \rho} + \frac{\partial (AY)}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{AB^2 Y}{R_\theta}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{B^3 X}{R_\rho}\right).$$

Pentru a integra acest sistem de două ecuații cu două necunoscute se întrebuințează următorul artificiu *) : la prima ecuație o adăugăm pe a doua amplificată cu $i\,\frac{h}{3}\sqrt{\frac{1-\mu}{3(1+\mu)}}$ $(i = -1)$. Introducînd drept funcție necunoscută, funcția de mai jos

$$\mathfrak{S}(\rho,\theta) = \mathfrak{N}(\rho,\theta) + i\,\frac{h}{3}\sqrt{\frac{1-\mu}{3(1+\mu)}}\;\mathfrak{M}(\rho,\theta), \qquad (2.10)$$

se obține o singură ecuație diferențială cu derivate parțiale, funcția necunoscută fiind *efortul complex* $\mathfrak{S}$,

$$\Delta^{\star} \frac{B^2 R_\rho \mathfrak{S}}{R_\rho - R_\theta} - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{B^2}{A}\frac{\partial B}{\partial \rho}\mathfrak{S}\right) - AB\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \theta^2} -$$

$$- \frac{ih}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left[\Delta^{\star} \frac{1}{\frac{1}{R_\rho} - \frac{1}{R_\theta}} \frac{B}{A} \Delta^{\star} \mathfrak{S} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{B}{A}\frac{B^2}{R_\rho}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \rho}\right) - \right. \qquad (2.11)$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{A}{B}\frac{B^2}{R_\theta}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \theta}\right)\right] = F(\rho,\theta),$$

---

*) V. V. Novojilov în [3] este primul care întrebuințează acest artificiu. Abia în lucrarea [4] este justificat acest artificiu, demonstrîndu-se că *efortul complex* $\mathfrak{S}$ este un semiinvariant al analogiei statico-geometrice a lui A. L. Goldenweizer [1]. După cum se vede, acest artificiu a permis să se obțină o ecuație de ordinul patru, în loc de una de ordinul opt cum s-ar fi obținut în mod normal prin eliminarea uneia din necunoscute.

unde, am notat

$$F(\rho,\theta) = \Delta^{*} \frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho} - \dfrac{1}{R_\theta}} A^2 Z + \frac{\partial (AB^2 Y)}{\partial \theta} - \frac{\partial (B^3 X)}{\partial \rho} +$$

$$+ ih \sqrt{\frac{1-\mu}{3(1+\mu)}} \left\{ \Delta^{*} \frac{1}{\dfrac{1}{R_\rho} - \dfrac{1}{R_\theta}} \cdot \frac{B}{A} \left[\frac{\partial (BX)}{\partial \rho} + \frac{\partial (AY)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{AB^2 Y}{R_\theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B^3 X}{R_\rho} \right) \right\}.$$

În cazul particular $A(\alpha) = B(\alpha)$, ecuația (2.11) devine

$$\Delta \frac{A^2 R_\alpha \mathcal{E}}{R_\alpha - R_\theta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A \frac{\partial A}{\partial \alpha} \mathcal{E} \right) - A^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta^2} -$$

$$- \frac{ih}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left[\Delta \frac{1}{\dfrac{1}{R_\alpha} - \dfrac{1}{R_\theta}} \Delta \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A^2}{R_\alpha} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A^2}{R_\theta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} \right) \right] = F(\alpha, \theta), \tag{2.12}$$

în care formă este dată, pentru prima oară, de V. Visarion în [2].

III. INTEGRAREA ECUAȚIEI (2.11) SAU (2.12)

În general, ecuațiile (2.11) sau (2.12) au coeficienții variabili, însă funcții de o singură variabilă independentă, fapt care ne conduce la a căuta soluția acestor ecuații de forma

$$\mathcal{E}(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n(\rho) e^{i\lambda_n \theta}, \tag{3.1}$$

care ne permite a reduce studiul ecuațiilor menționate, la acel al integrării unui șir de ecuații diferențiale ordinare.

Dacă învelitoarea are reazemele distribuite simetric pe contur, iar încărcările sînt de asemenea simetrice, vom putea căuta soluția sub forma unei funcții depinzînd de o singură variabilă independentă

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{U}(\rho) + i \mathcal{V}(\rho). \tag{3.2}$$

Atît în primul cît și în al doilea caz, se obțin ecuații diferențiale ordinare, cu coeficienții, în general variabili, a căror soluții vor depinde de patru constante complexe arbitrare, adică, în realitate de opt constante reale arbitrare. Separînd, în (3,1) sau (3,2), partea reală de cea imaginară se obțin, exceptînd un factor constant cunoscut, expresiile lui $\mathfrak{R}$ și $\mathfrak{M}$.

IV. CALCULUL DEPLASĂRILOR

Relațiile între deplasări, deformații și eforturi sînt obținute, prin particularizare, din lucrarea deja citată [1]. Aceste relații sînt redate în tabela 1.

Tabela 1

Deformații	În funcție de deplasări (ρ, θ)	În funcție de deplasări (α, θ)	În funcție de eforturi
$\varepsilon_{\rho.\alpha}$	$\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{w}{R_\rho}$	$\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{w}{R_\alpha}$	$\frac{1}{2Eh}(N_\rho-\mu N_\theta)$
ε_θ	$\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{w}{R_\theta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \rho}u$	$\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{w}{R_\theta}+\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha}u$	$\frac{1}{2Eh}(N_\theta-\mu N_\rho)$
ω	$\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{v}{B}\right)$	$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{A}\right)$	$\frac{1+\mu}{Eh}N_{\rho\theta}=-\frac{1+\mu}{Eh}N_{\theta\rho}$
$\gamma_{\rho.\alpha}$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\theta \rho}-\frac{u}{R_\rho}$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}-\frac{u}{R_\alpha}$	—
γ_θ	$-\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \theta}-\frac{v}{R_\theta}$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \theta}-\frac{v}{R_\theta}$	—
$\chi_{\rho.\alpha}$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho}$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha}$	$-\frac{3}{2Eh^3}(M_\rho-\mu M_\theta)$
χ_θ	$-\frac{I}{B}\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta}-\frac{I}{AB}\frac{\partial B}{\partial \rho}\gamma_\rho$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta}-\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha}\gamma_\alpha$	$-\frac{3}{2Eh^3}(M_\theta-\mu M_\rho)$
τ			$\frac{3(1+\mu)}{2Eh^3}M_{\rho\theta}=-\frac{3(1+\mu)}{2Eh^3}M_{\theta\rho}$

În ceea ce urmează presupunem că încărcările şi deplasările permit dezvoltările trigonometrice, absolut şi uniform convergente pentru orice $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$ şi $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$,*)

$$\begin{aligned} X(\rho, \theta) &= \Sigma\, X_n^*(\rho)\cos\lambda_n\theta + X_n^{**}(\rho)\sin\lambda_n\theta, \\ Y(\rho, \theta) &= \Sigma\, Y_n^*(\rho)\cos\lambda_n\theta + Y_n^{**}(\rho)\sin\lambda_n\theta, \\ Z(\rho, \theta) &= \Sigma\, Z_n^*(\rho)\cos\lambda_n\theta + Z_n^{**}(\rho)\sin\lambda_n\theta, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \Sigma\, u_n^*(\rho)\cos\lambda_n\theta + u_n^{**}(\rho)\sin\lambda_n\theta, \\ v(\rho, \theta) &= \Sigma\, v_n^*(\rho)\cos\lambda_n\theta + v_n^{**}(\rho)\sin\lambda_n\theta, \\ w(\rho, \theta) &= \Sigma\, w_n^*(\rho)\cos\lambda_n\theta + w_n^{**}(\rho)\sin\lambda_n\theta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se observă din tabela 1, că pentru a avea omogenitate din punct de vedere trigonometric, trebuie să considerăm două grupe paralele de cantități, astfel încît într-o relație oarecare, nu pot să figureze decît elemente aparținînd aceleiași grupe. Acestea sînt

---

*) Pretutindeni, în cele ce urmează, avînd o funcție de două variabile, dezvoltată în serie simplă Fourier cu coeficienții funcție de o variabilă, îi vom nota cu aceeaşi literă ca şi funcția de dezvoltat, prevăzuți cu un asterisc dacă multiplică pe cosinus şi cu doi dacă multiplică pe sinus.

$$\begin{gathered} u_n^*,\ v_n^{**},\ w_n^*,\ \varepsilon^*_{\rho_n}\, \varepsilon^*_{\theta_n},\ \omega_n^{**}, \\ u_n^{**},\ v_n^*,\ w_n^{**},\ \varepsilon^{**}_{\rho_n},\ \varepsilon^{**}_{\theta_n},\ \omega_n^*. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Din primele trei relații ale tabelei 1, eliminîndu-se deplasările v și w, se deduce ecuația diferențială

$$\begin{gathered} \frac{d^2u_n}{d\rho^2}\frac{R_\rho}{R_\theta}\frac{1}{A} + \frac{du_n}{d\rho}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_\rho}{R_\theta}\frac{1}{A}\right) - \frac{1}{AB}\frac{dB}{d\rho}\right] - \\ - u_n\left[\lambda_n^2\frac{A}{B^2} + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{AB}\frac{dB}{d\rho}\right)\right] = \pm\,\lambda_n\frac{A}{B}\,\omega_n + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_\rho}{R_\theta}\varepsilon_{\rho_n} - \varepsilon_{\theta_n}\right), \end{gathered} \tag{4.4}$$

unde, cînd se înlocuiesc cantitățile primului grup din (4.3) se ia semnul plus, iar pentru al doilea se ia semnul minus.

O dată u și $du_n/d\rho$ cunoscute, din prima relație din tabela 1, rezultă

$$w_n = R_\rho\left(\frac{1}{A}\frac{du_n}{d\rho} - \varepsilon_{\rho_n}\right) \tag{4.5}$$

avîndu-se în vedere regula de la (4.3).

În sfîrșit, din cea de-a doua relație a tabelei 1, avem

$$v_n = \pm\frac{B}{\lambda_n}\left(\varepsilon_{\theta_n} - \frac{1}{AB}\frac{dB}{d\rho}\ u_n + \frac{w_n}{R_\theta}\right),\quad \lambda_n \neq 0 \tag{4.6}$$

ținînd mereu seama de regula stabilită la (4.3) — minusul luîndu-se pentru prima grupă și plusul pentru cea de-a doua.

V. CAZUL SOLUȚIEI FUNCȚIE DE O SINGURĂ VARIABILĂ

Ne mai rămîne a studia cazul cînd funcția necunoscută E depinde de o singură variabilă independentă. Acest caz intervine cînd există o simetrie a sarcinilor și a modului de rezemare pe conturul învelitorii; de asemenea el intervine în cazul general, la calculul primei aproximații. Expresiile eforturilor și momentelor vor deveni mai simple, în particular

$$Q_\theta = \frac{h^2}{3R_\theta}\ Y_0{}^*, \tag{5.1}$$

$$N_{\rho\theta} = -\frac{1}{B^2}\int_{\rho_0}^{\rho} AB^2 Y_0^*\, d\rho = -N_{\theta\rho}, \tag{5.2}$$

$$M_{\rho\theta} = -\frac{h^2}{3B^2}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{AB^2}{R_\theta}Y_0^*\, d\rho = -M_{\theta\rho}, \tag{5.3}$$

care se deduc direct din sistemul (2.1) și (2.2). În cazul unei simetrii radiale a încărcării : $Y_0{}^* = 0$, astfel încît eforturile de mai sus devin nule.

În ceea ce privește deformațiile, din primele două relații din tabela 1 prin eliminarea lui w, se obține

$$R\rho \frac{du_0^*}{d\rho} - \frac{dB}{d\rho}\frac{R_\theta}{B} u_0^* = A\,(R_\rho\, \varepsilon_{\rho_0}^* - R_\theta\, \varepsilon_{\theta_0}^*). \tag{5.4}$$

Tot din tabela 1 se mai obțin

$$w_0^* = R_\theta \left[\frac{1}{AB}\frac{dB}{d\rho} u_0^* - \varepsilon_{\theta_0}^*\right], \tag{5.5}$$

și

$$v_0^* = \frac{1+\mu}{E\,h}\, B \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{A}{B} N_{\rho 0}\, d\,\rho. \tag{5.6}$$

Deplasările o dată determinate se pot obține cu ușurință acele deformații care se exprimă prin intermediul lor.

Se vede cu ușurință, că întrucît deplasările, deformațiile și eforturile se exprimă cu ajutorul lui $\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{N}$ ele vor depinde de opt constante arbitrare, ceea ce ne va permite a pune opt condiții pe marginile învelitoarei. Dacă lungimile elementului de arc în lungul celor două familii de curbe coordonate sînt egale, în formulele stabilite pentru cazul general, înlocuindu-se ρ și B prin α și A, se obțin formulele, mai simple, ale acestui caz. Bineînțeles că acum prin A notăm lungimea comună a celor două familii de linii de coordonate, iar R_α și R_θ reprezintă respectivele lor raze de curbură.

VI. APLICAȚIE LA CATENOID *)

Ecuațiile parametrice ale suprafeței minime de rotație (fig. 3) catenoidul, sînt, în linii de curbură

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta, \tag{6.1}$$
$$z = a \ln\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a},$$

de unde se deduce metrica pe suprafață

$$ds^2 = \rho^2\left(\frac{d\rho^2}{\rho^2 - a^2} + d\theta^2)\right).$$

Efectuîndu-se schimbarea de variabile definită prin egalitățile

$$\rho = a\,\mathrm{ch}\,\alpha,$$
$$\theta = \theta, \tag{6.2}$$

lungimile liniilor de coordonate vor fi egale.

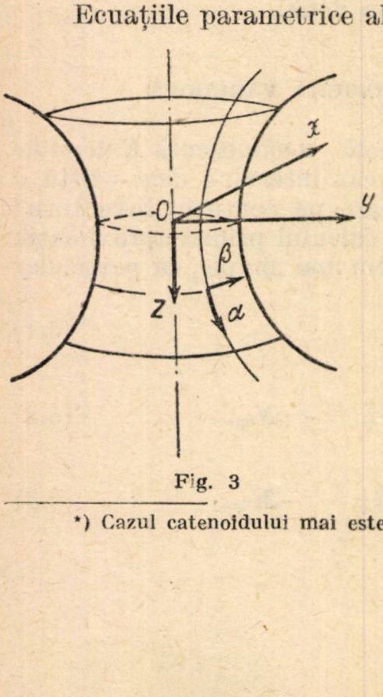


Fig. 3

---

*) Cazul catenoidului mai este tratat în [5] și [6].

În acest sistem de coordonate, ecuațiile (6.1) devin

$$x = a\,\mathrm{ch}\alpha \cos\theta,\; y = a\,\mathrm{ch}\,\alpha\, \sin\theta,\; z = a\alpha, \tag{6.1'}$$

cu metrica pe suprafață

$$ds^2 = a^2\,\mathrm{ch}^2\,\alpha\,(d\alpha^2 + d\theta^2),$$

rezultă deci următoarele expresii pentru lungimile liniilor de coordonate

$$A(\alpha) = B(\alpha) = a\,\mathrm{ch}\,\alpha \tag{6.3}$$

iar pentru curburile lor

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{a\mathrm{ch}^2\alpha},\; \frac{1}{R_\theta} = -\frac{1}{a\mathrm{ch}^2\alpha}. \tag{6.4}$$

O dată aceste elemente stabilite, efectuînd cîteva calcule simple, se obține următoarea expresie pentru ecuația (2.12)

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\mathcal{E} + 4\mathrm{th}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\Delta\mathcal{E} + \left[4 - i\frac{a}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}\right]\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\alpha^2} + \\ + \left[4 + i\frac{a}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}\right]\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\theta^2} - 2i\frac{a}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}\,\mathrm{th}\alpha\frac{d\mathcal{E}}{\partial\alpha} = \\ = -2i\frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{ah\,\mathrm{ch}^2\alpha}F(\alpha,\theta),\end{aligned} \tag{6.5}$$

unde expresia lui F, depinzînd de încărcare, va avea următoarea valoare :

$$\begin{aligned}F(\alpha,\theta) = 2a^3\Delta(Z\cdot\mathrm{ch}^4\alpha) + a^3\frac{\partial}{\partial\theta}(Y\,\mathrm{ch}^3\alpha) - a^3\frac{\partial}{\partial\alpha}(X\,\mathrm{ch}^3\alpha) + \\ + ia^2h\sqrt{\frac{1-\mu}{3(1+\mu)}}\left\{2\Delta\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(X\mathrm{ch}\alpha) + \frac{\partial}{\partial\theta}(Y\,\mathrm{ch}\,\alpha)\right]\mathrm{ch}^2\alpha - \right. \\ \left. -\mathrm{a}^2\frac{\partial}{\partial\alpha}(X\,\mathrm{ch}\alpha) - \mathrm{a}^2\frac{\partial}{\partial\theta}(Y\,\mathrm{ch}\alpha)\right\}.\end{aligned}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale cu derivate parțiale o vom căuta de forma (3.1) sau (3.2).

Să introducem, mai întîi, în primul membru al ecuației (6.5), soluția de forma de la (3.1); observăm, că deoarece $\mathcal{E}(\alpha, \theta + 2n\pi) = \mathcal{E}(\alpha,\theta)$, trebuie să avem $\lambda_n = n$. Se obține șirul de ecuații diferențiale ordinare

$$\begin{aligned}\frac{d^4\mathcal{E}_n}{d\alpha^4} + 4\mathrm{th}\alpha\frac{d^3\mathcal{E}_n}{d\alpha^3} + (4 - iK - 2n^2)\frac{d^2\mathcal{E}_n}{d\alpha^2} - 2(iK + 2n^2)\,th\alpha\frac{d\mathcal{E}_n}{d\alpha} + \\ + n^2(n^2 - 4 - iK)\,\mathcal{E}_n = -F_n(\alpha)\frac{2iK}{a^2\mathrm{ch}^2\alpha}\end{aligned} \tag{6.6}$$

unde, pentru simplitatea scrierii, am pus

$$K = \frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}, \tag{6.7}$$

iar $F_n(\alpha)$ este coeficientul Fourier al funcției $F(\alpha, \theta)$,

$$\begin{gathered} F(\alpha, \theta) = \sum_n F_n(\alpha) e^{in\theta}, \\ F_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha, \theta) e^{-in\theta} \, d\theta. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Soluția ecuațiilor (6.6) se determină, în general, doar prin metode aproximative.

Un caz particular, cînd soluția generală a ecuațiilor (6.6) poate fi exprimată cu ajutorul funcțiilor elementare este acela al coeficienților constanți. Obținem acest caz presupunînd că $\operatorname{th}\alpha = 1$: pentru aceasta este suficient ca α să fie suficient de mare, adică să satisfacă condiției

$$\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty \tag{6.9}$$

(cu o aproximație suficientă pentru practică vom lua pentru α_0 valoarea $1{,}6 \div 1{,}7$). Acest caz corespunde regiunii de mică curbură a suprafeței mediane a catenoidului. Acest caz ar putea fi util pentru o construcție asemănătoare aceleia considerate în [7]. O dată acestea precizate, să ne situăm în ipoteza (6.9); atunci trebuie să considerăm

$$\operatorname{th}\alpha = 1, \quad \operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh}\alpha = \frac{1}{2} e^{\alpha}$$

și ecuația (6.6) devine

$$\begin{gathered} \frac{d^4 \mathcal{E}_n}{d\alpha^4} + 4 \frac{d^3 \mathcal{E}_n}{d\alpha^3} + (4 - iK - 2n^2) \frac{d^2 \mathcal{E}_n}{d\alpha^2} - 2(iK + 2n^2) \frac{d \mathcal{E}_n}{d\alpha} + \\ + n^2 (n^2 - 4 - iK) \mathcal{E}_n = -\frac{8 e^{-2\alpha} K}{a^2} F_n(\alpha), \end{gathered} \tag{6.10}$$

expresia lui $F_n(\alpha)$ modificîndu-se de asemenea.

Ecuația caracteristică, corespunzătoare ecuației diferențiale (6.10) este

$$\begin{gathered} r^4 + 4r^3 + (4 - iK - 2n^2) r^2 - 2(iK + 2n^2) r + \\ + (n^2 - 4 - iK) n^2 = 0, \end{gathered} \tag{6.11}$$

unde dacă facem substituția

$$r = \bar{r} - 1, \tag{6.12}$$

vom obține ecuația bipătrată

$$\bar{r}^4 - (2 + 2n^2 + iK) \bar{r}^2 + 1 + iK + n^2 (n^2 - 2 - iK) = 0, \tag{6.11'}$$

cu rădăcinile

$$\bar{r}_j = \pm (a_j + ib_j) \qquad j = 1,2.$$

Se obține deci, următoarea formă pentru rădăcinile ecuației inițiale (6.11)

$$r = -1 \pm (a_j + ib_j) \qquad j = 1,2. \tag{6.13}$$

Soluțiile, liniar independente, ale ecuației diferențiale omogene (6.10) sînt de forma

$$e^{[-1 \pm (a_j + ib_j)]\alpha} \qquad j = 1,2.$$

Pentru a le utiliza, le vom pune sub o altă formă, mai convenabilă aplicațiilor practice

$$f_n^{j,1}(\alpha) = e^{-\alpha}(\operatorname{ch} a_j\alpha \cos b_j\alpha + i \operatorname{sh} a_j\alpha \sin b_j\alpha),$$

$$f_n^{j,3}(\alpha) = e^{-\alpha}(\operatorname{sh} a_j\alpha \cos b_j\alpha + i \operatorname{ch} a_j\alpha \sin b_j\alpha),$$

$$j = 1,2,$$

precum și alte patru, obținute din primele prin înmulțire cu $-i$

$$f_n^{j,2}(\alpha) = e^{-\alpha}(\operatorname{sh} a_j\alpha \sin b_j\alpha - i \operatorname{ch} a_j\alpha \cos b_j\alpha),$$

$$f_n^{j,4}(\alpha) = e^{-\alpha}(\operatorname{ch} a_j\alpha \sin b_j\alpha - i \operatorname{sh} a_j\alpha \cos b_j\alpha),$$

$$j = 1,2.$$

Soluția generală a ecuației (6.10) va fi deci

$$\mathcal{E}_n(\alpha) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{4} C_n^{j,k} f_n^{j,k}(\alpha) + \varphi_n(\alpha) + i\,\psi_n(\alpha), \tag{6.14}$$

unde $\varphi_n(\alpha) + i\,\psi_n(\alpha)$ reprezintă soluția particulară a ecuației complete (6.10). $\mathfrak{N}$ și $\mathfrak{M}$ vor fi, exceptînd un factor constant, tocmai partea reală respectiv imaginară a soluției (6.14).

Eforturile și momentele vor avea următoarele expresii :

$$Q_\alpha = \frac{2e^{-\alpha}}{a(1+\mu)}\left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \alpha} + \frac{4h^2 e^{-2\alpha}}{3a}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \alpha}\right] + \frac{4h^2 e^{-2\alpha}}{3a} X,$$

$$Q_\theta = \frac{2e^{-\alpha}}{a(1+\mu)}\left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \theta} - \frac{4h^2 e^{-2\alpha}}{3a}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \theta}\right] - \frac{4h^2 e^{-2\alpha}}{3a} Y,$$

$$N_\alpha = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{N} - \frac{1}{a(1+\mu)}\Delta\mathfrak{M}\right] - \Phi_1, \quad N_\theta = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{N} + \frac{1}{a(1+\mu)}\Delta\mathfrak{M}\right] + \Phi_1, \tag{6.15}$$

$$\Phi_1 = \frac{a}{8} e^{2\alpha} Z + \frac{h^2}{3a}\left(\frac{\partial(e^{-\alpha}X)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(e^{-\alpha}Y)}{\partial \theta}\right),$$

$$M_\alpha = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{M} - \frac{h^2}{3a(1+\mu)}\Delta\mathfrak{N}\right] - \Phi_2,\ M_\theta = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{M} + \frac{h^2}{3a(1+\mu)}\Delta\mathfrak{N}\right] + \Phi_2,$$

$$\Phi_2 = \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial(e^\alpha X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^\alpha Y)}{\partial\theta}\right),$$

$$N_{\alpha\theta} = -N_{\theta\alpha} = \frac{1}{a(1+\mu)}\int\left(4e^{-2\alpha}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha} + \Delta\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\Delta\mathfrak{M} - \frac{a(1+\mu)}{2}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\alpha}\right)d\theta +$$

$$+\frac{a}{2}e^\alpha\int\left(e^\alpha Z + \frac{e^\alpha}{4}\frac{\partial Z}{\partial\alpha} - X\right)d\theta + \frac{h^2}{3a}e^{-\alpha}\frac{\partial Y}{\partial\alpha},$$

$$M_{\alpha\theta} = -M_{\theta\alpha} = \frac{1}{1+\mu}\int\left[\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha} + \frac{h^2}{3a}\left(4e^{-2\alpha}\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\alpha} + \Delta\mathfrak{N} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Delta\mathfrak{N}\right)\right]d\theta +$$

$$+\frac{h^2}{3}\int\left[2e^{-\alpha}X - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(e^\alpha X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^\alpha Y)}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial(e^\alpha X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^\alpha Y)}{\partial\theta}\right)\right]d\theta.$$

Deplasările se obțin din:

$$\frac{d^2u_n}{d\alpha^2} + (n^2+1)u_n = \frac{ae^\alpha}{2}\left[\frac{(1-\mu)}{2Eh}\frac{d\mathfrak{N}}{d\alpha} \pm n\frac{(1+\mu)}{Eh}N_{\alpha\theta}\right], \tag{6.16}$$

$$w_n = \frac{e^\alpha}{2}\frac{du_n}{d\alpha} - \frac{ae^{2\alpha}}{16Eh}\left[(1-\mu)\mathfrak{N} - \frac{1}{a}\Delta\mathfrak{M}\right] + \frac{ae^{2\alpha}}{8Eh}(1+\mu)\Phi_1, \tag{6.17}$$

$$v_n = \mp\left[\frac{ae^\alpha}{8nEh}\left((1-\mu)\mathfrak{N} + \frac{1}{a}\Delta\mathfrak{M}\right) + \frac{ae^\alpha}{4nEh}(1+\mu)\Phi_1 - \frac{u_n}{n} + \frac{2e^{-\alpha}w_n}{n}\right], \tag{6.18}$$

particularizînd formulele (4.4), (4.5) și (4.6) avîndu-se în vedere regulile stabilite la punctul 4.

Din tabela 1, prin particularizare și ținînd seama de rezultatele obținute deja, avem pentru deformații expresiile

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{4Eh}\left[(1-\mu)\mathfrak{N} - \frac{1}{a}\Delta\mathfrak{M}\right] - \frac{1+\mu}{4Eha}\left[\frac{a^2e^{2\alpha}}{4}Z + \frac{2h^2}{3}\left(\frac{\partial(e^{-\alpha}X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^{-\alpha}Y)}{\partial\theta}\right)\right],$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{4Eh}\left[(1-\mu)\mathfrak{N} + \frac{1}{a}\Delta\mathfrak{M}\right] + \frac{1+\mu}{4Eha}\left[\frac{a^2e^{2\alpha}}{4}Z + \frac{2h^2}{3}\left(\frac{\partial(e^{-\alpha}X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^{-\alpha}Y)}{\partial\theta}\right)\right],$$

$$\omega = \frac{1+\mu}{Eh}N_{\alpha\theta}, \tag{6.19}$$

$$\chi_\rho = -\frac{3}{4Eh^3}\left[(1-\mu)\mathfrak{M} - \frac{h^2}{3a}\Delta\mathfrak{N}\right] + \frac{(1+\mu)}{8Eh}\left[\frac{\partial(e^\alpha X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^\alpha Y)}{\partial\theta}\right],$$

$$\chi_\theta = -\frac{3}{4Eh^3}\left[(1-\mu)\mathfrak{M} + \frac{h^2}{3a}\Delta\mathfrak{N}\right] - \frac{(1+\mu)}{8Eh}\left[\frac{\partial(e^\alpha X)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(e^\alpha Y)}{\partial\theta}\right],$$

$$\tau = \frac{3(1+\mu)}{2Eh^3}M_{\alpha\theta},$$

$$\gamma_\rho = -\frac{2e^{-\alpha}}{a}\frac{dw}{d\alpha} - \frac{4e^{-2\alpha}}{a}u, \quad \gamma_\theta = -\frac{2e^{-\alpha}}{a}\frac{dw}{d\theta} + \frac{4e^{-2\alpha}}{a}u.$$

Mai rămîne să remarcăm, că întrucît deplasările, deformaţiile şi eforturile depind de opt constante arbitrare, vom putea pune opt condiţii la marginile învelitorii.

VII. CAZUL SIMETRIEI RADIALE

Acest caz, este tratat, pe altă cale, de către A. N. Alumiaz [5]. El intervine dacă încărcările şi rezemările se bucură de o simetrie radială. Vom căuta soluţia ecuaţiei (6.5) de forma unei soluţii depinzînd de o singură variabilă

$$\mathfrak{S}(\alpha) = \mathfrak{N}(\alpha) + i\frac{3}{h}\sqrt{\frac{1-\mu}{3(1+\mu)}}\,\mathfrak{M}(\alpha). \tag{7.1}$$

Se obţine ecuaţia diferenţială ordinară

$$\mathfrak{S}^{\mathrm{IV}} + 4\,\mathfrak{S}''' + (4 - iK)\,\mathfrak{S}'' - 2iK\,\mathfrak{S}' = F(\alpha), \tag{7.2}$$

a cărei ecuaţie caracteristică este

$$r^4 + 4\,r^3 + (4 - iK)\,r^2 - 2iKr = 0, \tag{7.3}$$

care, cu $r = \bar{r} - 1$, devine o ecuaţie bipătrată, astfel încît rădăcinile ecuaţiei algebrice (7.3) sînt

$$r_1 = 0,\ r_2 = -2,\quad r_3 = -1 + a_1 + ib_1,\quad r_4 = -1 - a_1 - ib_1, \tag{7.4}$$

unde am notat

$$\pm\sqrt{1 + iK} = \pm\,(a_1 + ib_1).$$

Deci, soluţia ecuaţiei (7.2) va fi

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\alpha) = {} & C_1 + iC_2 + (C_3 + iC_4)\,e^{-2\alpha} + C_5\,e^{-\alpha}(\operatorname{ch} a_1\alpha\cos b_1\alpha + \\ & + i\operatorname{sh} a_1\alpha\sin b_1\alpha) + C_6\,e^{-\alpha}(\operatorname{sh} a_1\alpha\sin b_1\alpha - i\operatorname{ch} a_1\alpha\cos b_1\alpha) + \\ & + C_7\,e^{-\alpha}(\operatorname{sh} a_1\alpha\cos b_1\alpha + i\operatorname{ch} a_1\alpha\sin b_1\alpha) + \\ & + C_8\,e^{-\alpha}(\operatorname{ch} a_1\alpha\sin b_1\alpha - i\operatorname{sh} a_1\alpha\cos b_1\alpha) + \varphi(\alpha) + i\,\psi(\alpha),\end{aligned} \tag{7.5}$$

unde $\varphi(\alpha) + i\psi(\alpha)$ este soluţia particulară a ecuaţiei complete (7.2). Ţinînd seama de egalitatea (7.1), obţinem

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(\alpha) = {} & C_1 + C_3 e^{-2\alpha} + C_5 e^{-\alpha}\operatorname{ch} a_1\alpha\cos b_1\alpha + C_6 e^{-\alpha}\operatorname{sh} a_1\alpha\sin b_1\alpha \\ & + C_7 e^{-\alpha}\operatorname{sh} a_1\alpha\cos b_1\alpha + C_8 e^{-\alpha}\operatorname{ch} a_1\alpha\sin b_1\alpha + \varphi(\alpha),\end{aligned} \tag{7.6}$$

şi

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\alpha) = {} & \frac{h}{3}\sqrt{\frac{3(1+\mu)}{1-\mu}}\,[-C_2 - C_4 e^{-2\alpha} + C_5 e^{-\alpha}\operatorname{ch} a_1\alpha\cos b_1\alpha - \\ & - C_6 e^{-\alpha}\operatorname{sh} a_1\alpha\sin b_1\alpha + C_7 e^{-\alpha}\operatorname{sh} a_1\alpha\cos b_1\alpha - \\ & - C_8 e^{-\alpha}\operatorname{cha} a_1\alpha\sin b_1\alpha + \psi(\alpha)\,].\end{aligned} \tag{7.7}$$

Aceste elemente determinate, ținînd seama de formulele de la (6.15) se obțin eforturile și momentele, exceptînd Q_θ, $N_{\alpha\theta}$, $M_{\alpha\theta}$, care sînt nule.

Deplasările u și w se obțin din

$$\frac{du}{d\alpha} + u = \frac{e^\alpha}{4\,hE}(1 - \mu)\,\mathfrak{N}\,, \tag{7.8}$$

$$w = -\frac{a\,e^{2\alpha}}{4}\varepsilon_\theta + \frac{e^\alpha}{8}u, \tag{7.9}$$

deplasarea v fiind nulă.

Deformațiile se obțin din (6.19), cu observația că ω τ, γ_2 sînt nule.

În anexa 1 sînt date valorile rădăcinilor ecuației caracteristice (7.3) pentru diferite valori ale lui a/h.

VIII. APLICAȚII NUMERICE

În acest paragraf sînt date rezultatele numerice obținute pentru două învelitori subțiri în formă de catenoid. Aceste calcule au fost efectuate de Drăghicescu și Ardeleanu, pentru prima, respectiv a doua învelitoare. Elementele geometrice ale celor două invelitori sînt

Raza cercului de la bază $\alpha = \alpha_0$	2,97 m	5,00 m
Raza cercului de sus $\alpha = \alpha_1$	23,00 m	30,00 m
Înălțimea maximă	3,00 m	3,92 m
Grosimea medie	0,10 m	0,12 m

Ambele învelitori au fost presupuse perfect încastrate la bază ceea ce se exprimă că pentru $\alpha = \alpha_0$ trebuie să avem

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \gamma_1 = 0$$

sau

$$N_\beta - \mu\,N_\alpha = 0,\ \mu\,M_\alpha - M_\beta = 0$$

și libere la partea superioară, fapt exprimat că pentru $\alpha = \alpha_1$ avem îndeplinite condițiile

$$N_\alpha = 0,\ M_\alpha = 0.$$

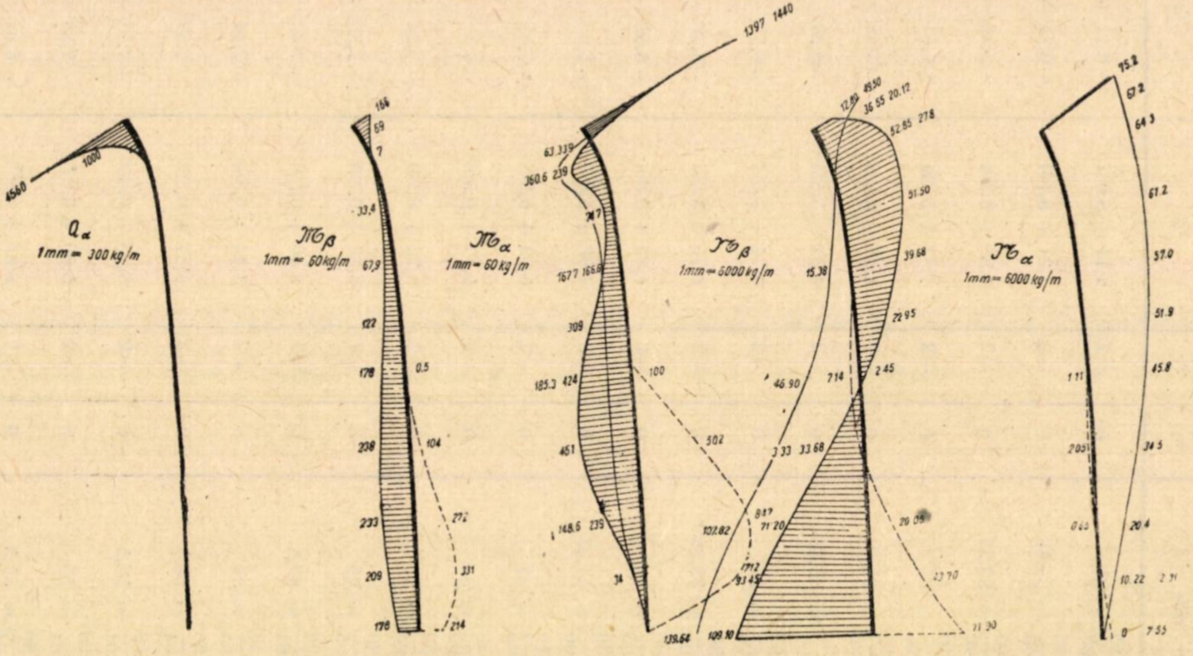
Diagramele de eforturi și momente, pentru cele două învelitori considerate, sînt reprezentate în anexele 2 și 3. În aceleași figuri sînt reprezentate, punctat, rezultatele obținute prin teoria de membrană, combinată cu teoria efect-simplu de contur. Se constată că teoria de membrană (fără momente) combinată cu teoria efectului de contur, dă rezultate foarte apropiate de metoda exactă, însă numai pentru regiunea din spre cercul de bază al învelitorii, rezultatele fiind mult diferite la cealaltă extremitate, ceea ce indică netemeinicia folosirii ei în calculele practice. Acest lucru a mai fost observat de V. Visarion în lucrarea asupra învelitorilor în formă de elicoid [8].

Primită la redacție la 6 martie 1959.

Anexa 1

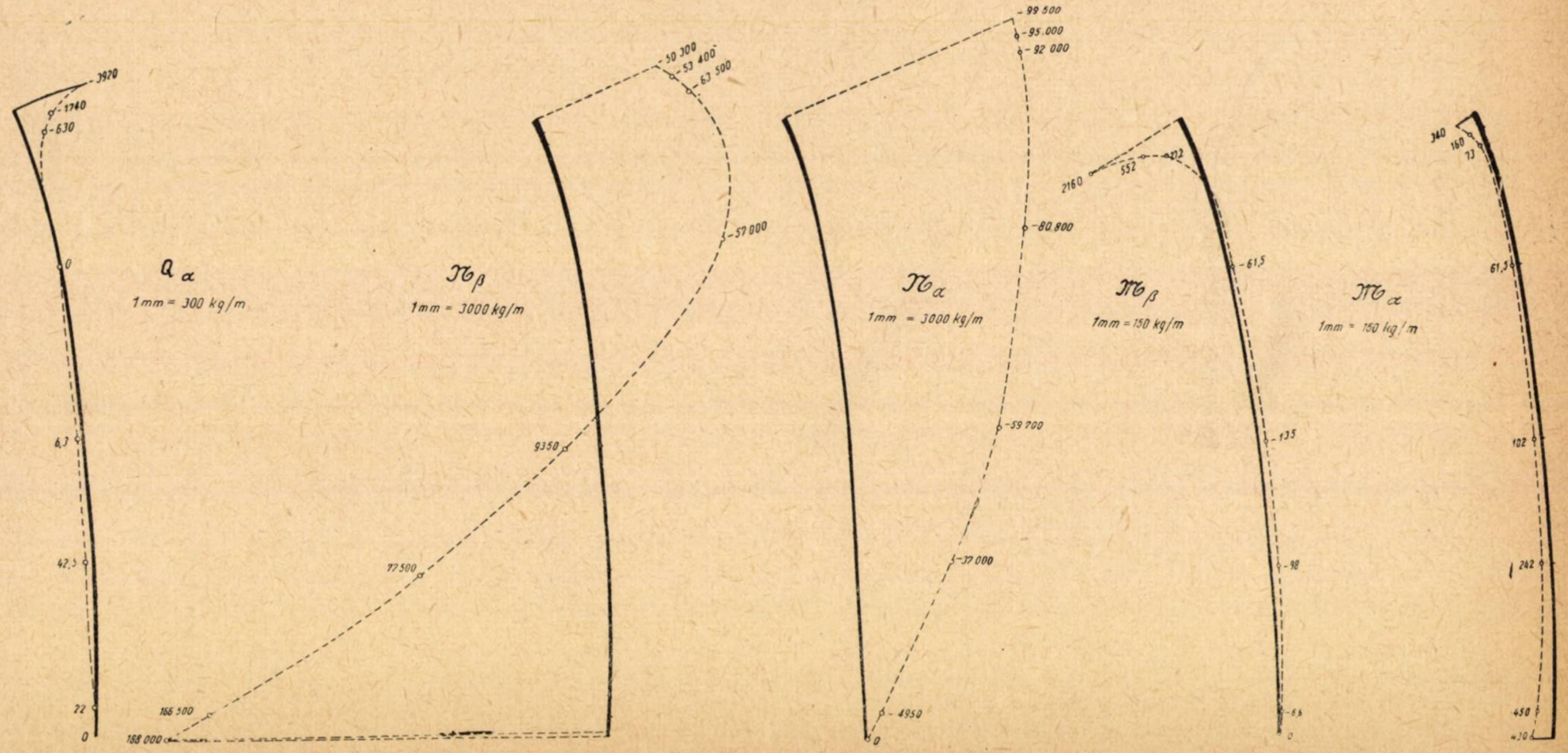
a/h	r_1	r_2	r_3	r_4
$\frac{1,80}{0,06} = 30$	0	-2	$4,11 + 5,01i$	$-6,11 - 5,01i$
$\frac{1,90}{0,06} = 31,66$	0	-2	$4,24 + 5,16i$	$-6,24 - 5,16i$
$\frac{2,00}{0,06} = 33,33$	0	-2	$4,38 + 5,29i$	$-6,38 - 5,29i$
$\frac{2,10}{0,06} = 35$	0	-2	$4,51 + 5,42i$	$-6,51 - 5,42i$
$\frac{1.80}{0,05} = 36$	0	-2	$4,58 + 5,50i$	$-6,58 - 5,50i$
$\frac{2.20}{0,06} = 36,66$	0	-2	$4,64 + 5,55i$	$-6,64 - 5,55i$
$\frac{1.90}{0,05} = 38$	0	-2	$4,74 + 5,65i$	$-6,74 - 5,65i$
$\frac{2.30}{0,06} = 38,33$	0	-2	$4,76 + 5,67i$	$-6,76 - 5,67i$
$\frac{2.00}{0,05} = 40$	0	-2	$4,88 + 5,80i$	$-6,88 - 5,80i$
$\frac{2.50}{0,06} = 41,33$	0	-2	$4,98 + 5,90i$	$-6,98 - 5,90i$
$\frac{2.10}{0,05} = 42$	0	-2	$5,03 + 5,94i$	$-7,03 - 5,94i$
$\frac{2,20}{0,05} = 44$	0	-2	$5,17 + 6,09i$	$-7,17 - 6,09i$
$\frac{1,80}{0,04} = 45$	0	-2	$5,24 + 6,14i$	$-7,24 - 6,14i$
$\frac{2,30}{0,05} = 46$	0	-2	$5,30 + 6,22i$	$-7,30 - 6,22i$
$\frac{1,90}{0,04} = 47,5$	0	-2	$5,40 + 6,33i$	$-7,40 - 6,33i$
$\frac{2,40}{0,05} = 48$	0	-2	$5,44 + 6,36i$	$-7,44 - 6,36i$
$\frac{2.00}{0,04} = 50$	0	-2	$5,57 + 6,50i$	$-7,57 - 6,50i$
$\frac{2,10}{0,04} = 52,5$	0	-2	$5,73 + 6,66i$	$-7,73 - 6,66i$
$\frac{2.20}{0,04} = 55$	0	-2	$5,89 + 6,81i$	$-7,89 - 6,81i$
$\frac{2.30}{0,04} = 57,5$	0	-2	$6,04 + 6,97i$	$-8,04 - 6,97i$
$\frac{2.40}{0,04} = 60$	0	-2	$6,19 + 7,12i$	$-8,19 - 7,12i$
$\frac{2.50}{0,04} = 62,5$	0	-2	$6,34 + 7,27i$	$-8,34 - 7,27i$

Anexa 2



Q_α
1mm = 300 kg/m
4560
1000
$\mathcal{M}_\beta$
1mm = 60 kg/m
166
69
7
33.4
67.9
122
178
0.5
238
104
233
272
209
331
178
214
$\mathcal{M}_\alpha$
1mm = 60 kg/m
1397 1440
63.339
360.6 239
247
1677 166.6
309
185.3 424
100
451
502
148.6 239
34
$\mathcal{T}_\beta$
1mm = 6000 kg/m
12.80 49.50
36.55 20.12
52.85 278
51.50
39.68
15.38
22.95
46.90
714
2.45
3.33 33.68
847
107.82
71.20
20.05
1712
93.45
23.70
139.64
109.10
71.90
$\mathcal{T}_\alpha$
1mm = 6000 kg/m
75.2
67.2
64.3
61.2
57.0
51.9
1.11
45.8
2.05
34.5
0.65
20.4
10.22
2.71
0
7.55

Anexa 3



3920
-1740
-630
0
6,3
42,5
22
0
Q α
1mm = 300 kg/m
50 300
-53 400
-63 500
-57 000
9350
77 500
166 500
188 000
N β
1mm = 3000 kg/m
-99 500
-95.000
-92 000
-80.800
-59 700
-37 000
-4950
0
N α
1mm = 3000 kg/m
2160
552
272
-61,5
-135
-98
-6,6
0
M β
1mm = 150 kg/m
340
160
73
61,5
102
242
450
430
M α
1mm = 150 kg/m

c. 2921

ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРЯМОМУ КАТЕНОИДУ ВРАЩЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе исследуется упругое равновесие тонких оболочек вращения, а в качестве практического применения приводятся результаты, полученные при исследовании тонких оболочек катеноидной формы. Даются выражения, при помощи которых можно определить усилия, моменты применения и деформации как в общем случае тонкостенных оболочек вращения, так и в случае катеноида. Эти элементы зависят от двух функций, являющихся действительной (2,11), и соответственно мнимой (6,10) частями, решения дифференциального уравнения четвертого порядка. Эти функции, зависящие от восьми произвольных постоянных, позволяют поставить столько же условий на краях оболочки. Прилагаемые диаграммы поокасывают несостоятельность полученных при помощи безмоментной теории результатов, даже если они корректированыпри помощи теории краевого эффекта.

SUR L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE DES VOÛTES MINCES DE ROTATION, AVEC APPLICATION AU CATÉNOÏDE DROIT DE ROTATION

RÉSUMÉ

L'auteur étudie dans ce travail l'équilibre élastique des voûtes minces de rotation et donne, comme application, les résultats obtenus pour une voûte mince ayant la forme d'un caténoïde. Les expressions qui permettent de déterminer les efforts, les moments, les déplacements et les déformations sont données tant pour le cas général des voûtes de rotation que pour le caténoïde. Ces éléments dépendent de deux fonctions qui sont la partie réelle et, respectivement, imaginaire de la solution d'une équation différentielle d'ordre quatre, (2,11), respectivement (6,10). Ces fonctions, qui dépendent de huit constantes arbitraires, permettent de poser autant de conditions aux bords de la voûte. Les diagrammes donnés en annexe démontrent que les résultats, obtenus par la théorie sans moment, ne sont pas valables, même corrigés par la théorie de l'effet de contour.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Л. ГОЛДЕНВЕЙЗЕР, *Теория упругих тонких оболочек.* Гостехиздат, Москва, 1953.
2. V. VISARION, *On a method for solving the problem of thin schells.* Revue de mécanique appliquée, **II**, *2*, 1957.
3. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек.* Судпромгиз, Москва-Ленинград, 1951.
4. V. VISARION, *Etudes des semiinvariants de l'analogie statico-géométrique pour les enveloppes élastiques minces en matériaux isotropes et orthotropes.* Acta Tehnica Hungaricae (sub tipar).
5. А. Н. АЛУМИАЗ, *О критическом значении осесимметричного безмоментного наряжения состояния длинной катеноидной оболочки.* Прикладная математика и меканика, **16**, *6*, 649 (1952).
6. K. FEDERHOFER, *Zur Stabilität der Katenoidschale.* Ber. Akad. Wiss. Wien, Math. — Naturw. Kl., Abt. **II**, **148**, *1/2* (1939).
7. M. ANDRAULT, *Proiet de marché couvert à Sceaux.* Documents d'architecture, Cahiers du centre scientifique et technique du bâtiment. Paris, *27* (1956).
8. V. VISARION, *Calculul elastic al învelitorilor subțiri în formă de elicoid drept.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, VII, *4* (1956).

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

CONTRIBUȚII ÎN LEGĂTURĂ CU GEOMETRIA CUȚITELOR PENTRU PRELUCRAREA ROȚILOR DINȚATE CONICE CU DANTURA CIRCULARĂ

DE

ION LĂZĂRESCU și ANTON BOGDÁN

1. PRINCIPIUL GENERĂRII DANTURII CIRCULARE

Execuția danturii circulare a roților conice se face, după cum se știe, pe mașina sovietică tip 527 și 528 sau pe mașini Gleason. Sculele acestora materializează roata plană, respectiv dintele generator al roții plane — care, prin rularea cu semifabricatul, generează dinții acestuia din urmă (fig. 1).

Materializarea roții plane, de către sculă, impune anumite condiții, legate de necesitatea, ca aceasta din urmă, după reascuțire, să descrie un dinte generator constant ; iar, pe de altă parte, parametrii de așchiere să rămînă de asemenea neschimbați față de valorile optime alese inițial. Aceste condiții sînt :

I. Tăișul principal al cuțitelor exterioare și interioare să se suprapună profilului normal al dintelui roții plane.

II. Diametrele generatoare exterioare, D_e și interioare D_i, să rămînă constante (fig. 1).

III. Unghiurile de așezare să aibă valori optime de-a lungul profilului (III*a*), valori care să rămînă constante prin reascuțire (III*b*).

2. STABILIREA GEOMETRIEI FEȚELOR DE AȘEZARE A CUȚITELOR

Forma optimă a fețelor de așezare a cuțitelor rezultă ca o expresie matematică a celor trei condiții menționate mai sus.

Se va considera profilul normal al dintelui roții plane ca fiind trapezoidal, cu unghiuri de profil α_e și α_i (fig. 1). În acest caz, fețele laterale ale cuțitelor trebuie să aibă generatoare rectilinii, 1 *a*, înclinate la unghiurile de profil $\alpha_{s_e} = \alpha_e$ și $\alpha_{s_i} = \alpha_i$ (fig. 1), constante după reascuțire, 1 *b*.

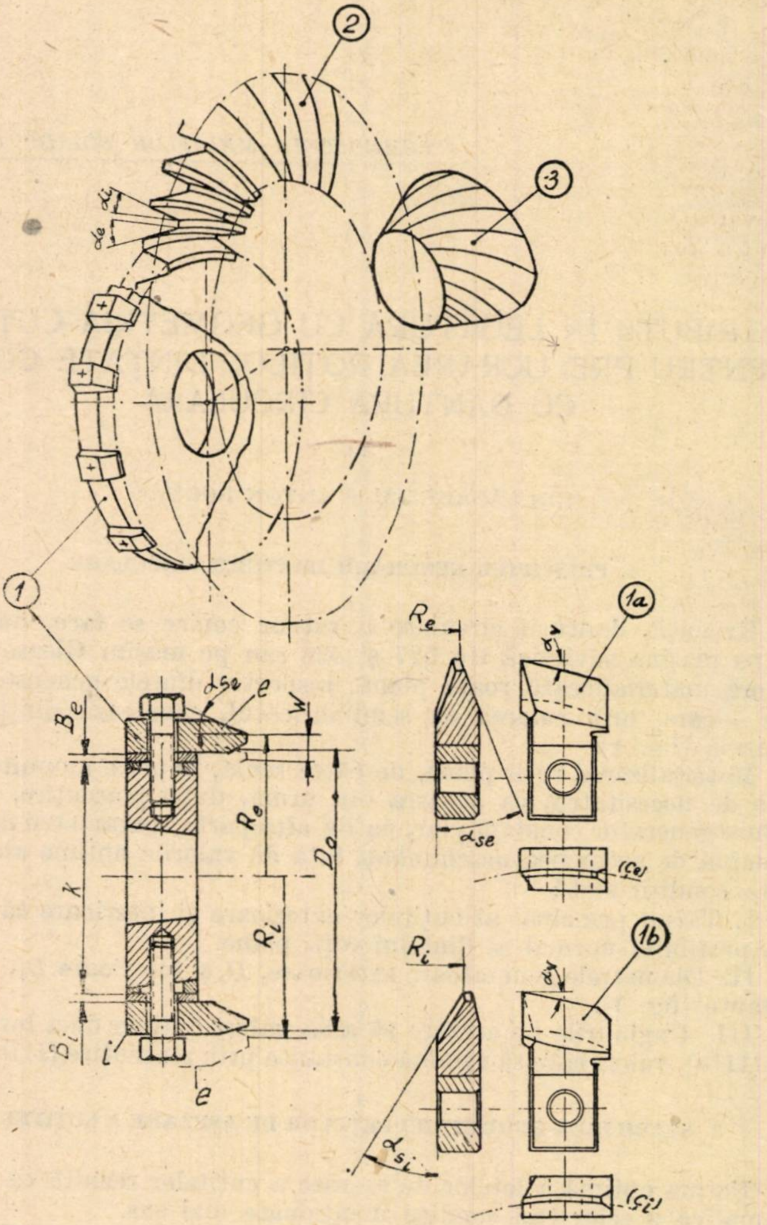

2
3
αi
αe
1
Be
αse
e
W
Re
Da
k
Ri
Bi
i
e
1a
Re
αv
αse
(ςe)
1b
Ri
αv
αsi
(ςi)

Fig. 1. — Principiul generării danturii circulare

1 — Capul port-cuțite ; 1 *a* — cuțit exterior ; 1 *b* — cuțit interior ; 2 — roată plană ; 3 — semifabricatul.

Pe de altă parte , profilul sculei, definit mai sus, este conţinut de un plan ce trece prin axa instantanee de rotaţie a capului port-cuţite (care, în cazul maşinilor considerate, este chiar axa capului port-cuţite — deoarece rostogolitoarea este redusă la un punct).

Fie

$$u = u(\varphi), \qquad (1)$$

ecuaţia curbei exterioare (C_e) sau interioare (C_i), care limitează secţiunea transversală a cuţitului exterior, respectiv interior (fig. 1).

Ca rezultat al celor de mai sus, feţele laterale ale cuţitelor vor fi generate de dreptele (G_e) şi (G_i) — definite de condiţiile 1 *a* şi 1 *b*, analog cu suprafeţele conoide, avînd ca directoare curbele (C_e) şi (C_i), definite de (1).

Cele două generatoare vor avea ecuaţiile (fig. 2 *a* respectiv fig. 2 *b*) :

$$(G_e) \qquad z = (r - OM_0)\cdot \mathrm{ctg}\ \alpha_{s_e}, \qquad (2)$$

$$(G_i) \qquad z = (OM_0 - r)\cdot \mathrm{ctg}\ \alpha_{s_i}. \qquad (3)$$

Dacă ordonata la origine OM_0 se consideră egală cu raza vectoare curentă a curbei directoare (1), atunci în oricare plan axial (ce trece prin axa Oz), determinat de parametrul curent φ, va apare profilul definit mai sus, în poziţia determinată de curba directoare, adică

$$z = (r - u)\ .\ \mathrm{ctg}\ \alpha_{s_e}, \qquad (4)$$

$$z = (u - r)\ .\ \mathrm{ctg}\ \alpha_{s_i}. \qquad (5)$$

Aceste două ecuaţii reprezintă două conoide. Forma acestora este similară cu ecuaţia generală a elicoizilor închişi, cu generatoare rectilinii. Deci condiţia I impune ca feţele laterale ale cuţitelor să fie elicoizi închişi, cu generatoare rectilinii.

Pentru satisfacerea condiţiilor II şi III, rămîne ca element încă nedefinit funcţia $u = u(\varphi)$. Se va considera, în primul rînd, condiţia III şi anume III *b*.

Pe baza relaţiilor date de geometria diferenţială, unghiurile de aşezare laterale, $\alpha_{l_{e,i}}$, sînt definite de expresia

$$\mathrm{tg}\ \alpha_{l_{e,i}} = \frac{\dfrac{du}{d\varphi}}{u}, \qquad (6)$$

în care $r = u(\varphi)$ este raza vectoare curentă a secţiunii transversale din planul în care s-a considerat unghiul de aşezare (secţiunea Z—Z, din fig. 2*a* şi 2*b*).

În cele ce urmează, se va considera faţa laterală interioară a cuţitului interior. Rezultatele obţinute vor fi similare şi pentru faţa laterală exterioară a cuţitului exterior.

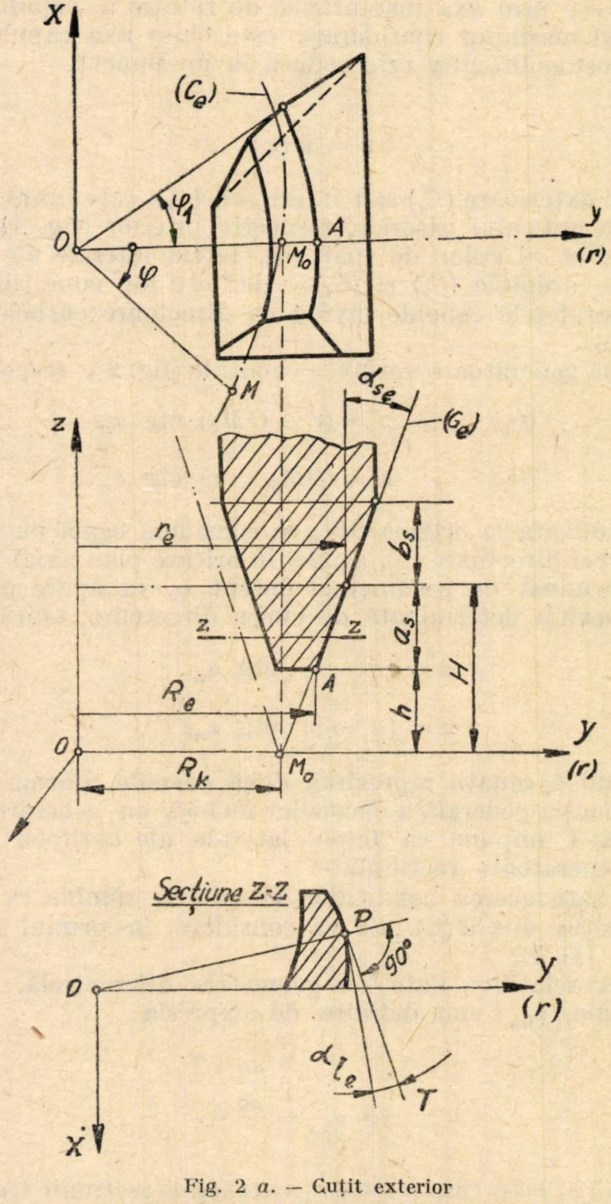

X
(C_e)
φ_1
y
(r)
O
A
M_0
φ
M
α_{se}
(G_e)
z
r_e
b_s
a_s
H
z
z
A
R_e
h
y
O
R_k
M_0
(r)
Secțiune Z-Z
P
90°
y
O
(r)
α_{le}
T
X

Fig. 2 *a*. — Cuțit exterior

$_e$ — curba directoare a feței laterale exterioare (cuprinsă în planul y); G_e — generatoarea exterioară (cuprinsă într-un plan ce trece prin O_z); O_z — axa capului port-cuțite; PT — tangentă la traiectoria cuțitului; α_s — unghiul de așezare lateral exterior.

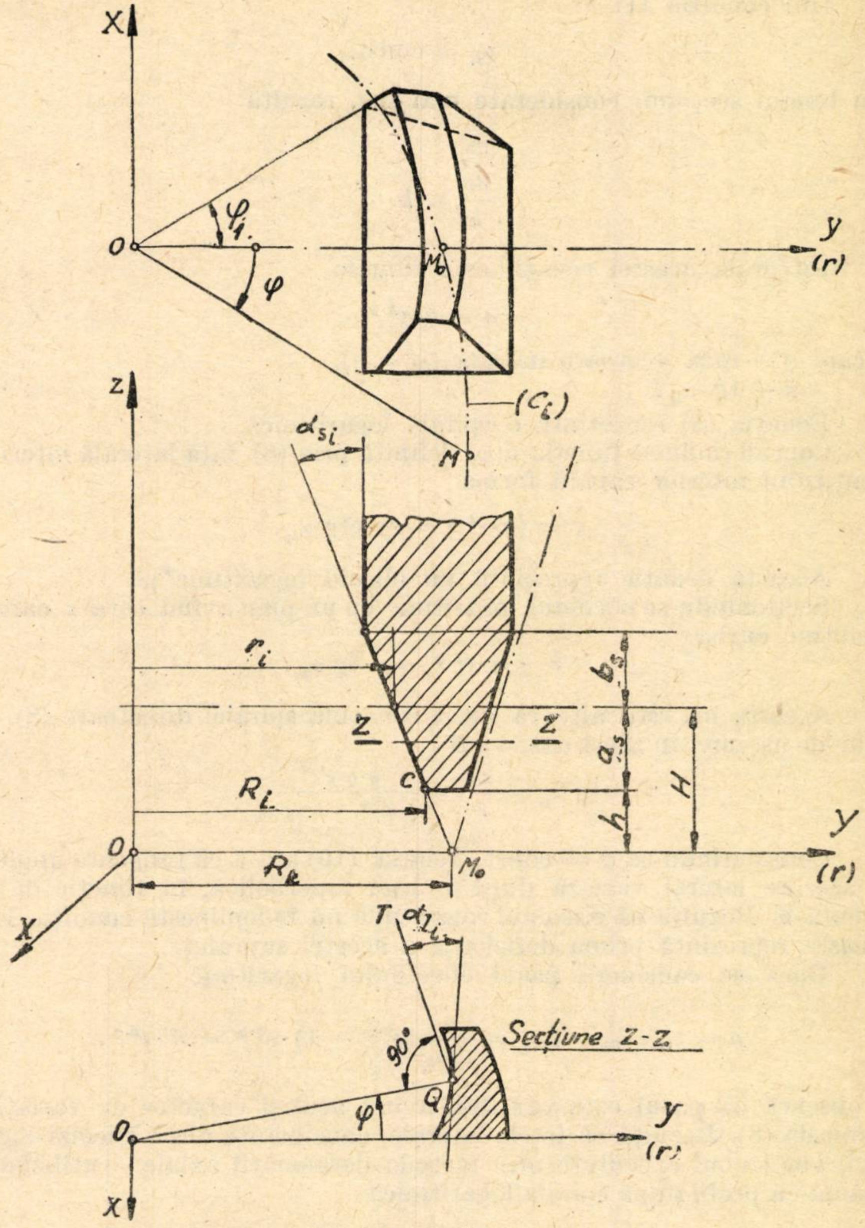

X
φ₁
O
φ
y
(r)
M₀
(Cᵢ)
z
αsᵢ
M
rᵢ
Z
Z
bs
as
H
h
c
Rᵢ
Rk
O
M₀
y
(r)
X
T
α1ᵢ
90°
Secțiune z-z
Q
φ
O
y
(r)
X

Fig. 2 *b*. — Cuțit interior

C_i – curba directoare a feței laterale interioare (cuprinsă în planul xOy); G_i – generatoarea interioară (cuprinsă într-un plan ce trece prin O_z); O_z – axa capului port-cuțite; QT – tangenta la traiectoria cuțitului; α_{si} – unghiul de așezare lateral-interior.

Din condiția III *b*

$$\alpha_{l_i} = \text{const.},$$

de-a lungul secțiunii considerate mai sus, rezultă

$$\frac{\frac{du}{d\varphi}}{u} = k. \tag{7}$$

Integrala acestei ecuații este funcția

$$u = q \cdot e^{k \cdot \varphi}, \tag{8}$$

în care q — raza vectoare inițială ($\varphi = 0$),
k — tg α_{l_i}.

Ecuația (8) reprezintă o spirală logaritmică.

Considerîndu-se funcția $u(\varphi)$ definită prin (8), fața laterală interioară a cuțitului interior capătă forma

$$z = (q \cdot e^{k \cdot \varphi} - r) \cdot \text{ctg}\, \alpha_{s_i}. \tag{9}$$

Această ecuație reprezintă un elicoid logaritmic*).

Secționîndu-se elicoidul logaritmic cu un plan avînd cota z oarecare se obține curba

$$r = q \cdot e^{k \cdot \varphi} - z \cdot \text{tg}\, \alpha_{s_i}.$$

Aceasta nu este altceva decît concoida spiralei directoare (8). Unghiul de așezare, în acest caz, va fi

$$\text{tg}\, \alpha_{l_i} = \frac{r'}{r} = \frac{k \cdot q \cdot e^{k \cdot \varphi}}{q \cdot e^{k \cdot \varphi} - z \cdot \text{tg}\, \alpha_{s_i}}. \tag{10}$$

Considerîndu-se $\varphi = \text{const.}$, relația (10) arată că tangenta unghiului de așezare lateral variază după o lege hiperbolică, în funcție de cota curentă z. Rezultă că elicoidul logaritmic nu îndeplinește condiția III *a*. Aceasta reprezintă prima deficiență a acestei suprafețe.

Dacă se consideră pasul elicoidului logaritmic

$$p = z_{(\varphi + 2\pi)} - z_{(\varphi)} = \frac{q}{\text{tg}\, \alpha_{s_i}} (e^{2\pi k} - 1) \cdot e^{k \cdot \varphi} = A \cdot e^{k \cdot \varphi}, \tag{11}$$

se observă că pasul este variabil, avînd același caracter de variație ca și spirala (8). Rezultă că fețele laterale, considerate după elicoizi logaritmici, vor trebui executate prin metoda detalonării axiale — utilizîndu-se o camă cu profil după spirala logaritmică

$$r_c = r_k \cdot e^{k \cdot \theta},$$

în care r_k — raza minimă a camei,
θ — parametrul unghiular curent al spiralei de pe camă.

---

*) Denumire adoptată de autori.

Trasarea şi prelucrarea profilului camei, după spirala logaritmică este dificilă. Aceasta constituie a doua deficienţă a elicoidului logaritmic. În concluzie, elicoidul logaritmic prezintă, pentru cazul de faţă numai un interes teoretic. Din această cauză, nu se va mai continua cu examinarea sa, ci se vor examina ecuaţiile (4) şi (5) în continuare.

Dacă se ia în considerare condiţia II, se găseşte că singura suprafaţă ale cărei intersecţii cu elicoizii (4) şi (5) — adică arcul de vîrf exterior şi interior — dau raze vectoare constante (proiecţiile acestora pe un plan normal la axa Oz să fie cercuri concentrice) este elicoidul cu plan director :

$$z = [h \cdot \operatorname{tg} \alpha_{s_{e,i}} \pm (u - u_0)] \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{s_{e,i}}, \tag{12}$$

în care u — are semnificaţia arătată mai sus,

u_0 — raza vectoare iniţială (pentru $\varphi = 0$) a directoarei feţelor laterale,

h — cota vîrfului cuţitului (fig. 2 *a* şi 2 *b*).

Semnul de sus, *minus* şi indicele *e* se referă la cuţitul exterior.

Într-adevăr, dacă se consideră arcul de vîrf exterior, avînd ca ecuaţii sistemul (4), (12) şi se elimină z, se obţine raza vectoare curentă a proiecţiei

$$r = u_0 + h \cdot \operatorname{tg} \alpha_{s_e}. \tag{13}$$

În mod analog se găseşte că proiecţia arcului de vîrf interior, avînd ca ecuaţii sistemul (5) şi (12), este cercul

$$r = u_0 - h \cdot \operatorname{tg} \alpha_{s_i}. \tag{14}$$

Cele trei suprafeţe, cu directoare nedefinite (4), (5) şi (14), satisfac condiţiile I şi II. Directoarele, după cum s-a văzut, pot fi spirale logaritmice — în care caz, unghiurile de aşezare laterale sînt variabile de-a lungul tăişurilor, rămînînd constante pe măsura reascuţirii (pentru un acelaşi punct de pe tăiş). Analog, se poate demonstra că şi în cazul cînd directoarele sînt spirale ale lui Arhimede, evolvente circulare sau curbele de variaţie ale tangentei trigonometrice, în coordonate polare (în care caz cama de detalonare are un profil rectiliniu) sau alte curbe, în toate cazurile (adică $u(\varphi)$ fiind oricare din funcţii), se obţin unghiuri de aşezare laterale, variabile de-a lungul tăişului, avînd un caracter hiperbolic de variaţie — ca şi în cazul considerat.

Această proprietate a elicoizilor închişi, cu generatoare rectilinie, se poate demonstra considerîndu-se o secţiune transversală (planul $z =$ const.) a elicoidului (5)

$$r = u - z \cdot \operatorname{tg} \alpha_{s_i}. \tag{15}$$

Ecuaţia (15), cu variabilele independente r şi φ, şi parametru cota z oarecare, reprezintă o familie de concoide a directoarei $r = u(\varphi)$. Unghiul de aşezare lateral are valoarea

$$\operatorname{tg} \alpha_{l_i} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r} = \frac{\frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi}}{u - z \cdot \operatorname{tg} \alpha_{s_i}} = \frac{\frac{du}{d\varphi}}{u - z \cdot \operatorname{tg} \alpha_{s_i}}. \tag{16}$$

Considerîndu-se unghiul tangent inițial al directoarei ($\varphi = 0, u_{(\varphi)}=u_0$) adică

$$\operatorname{tg}\alpha_{l_{i0}} = \frac{1}{u_0}\cdot\frac{du}{d\varphi},$$

expresia (16) devine

$$\operatorname{tg}\alpha_{l_i} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{l_{i0}}}{1 - \frac{z}{u_0}\cdot\operatorname{tg}\alpha_{s_i}}. \tag{17}$$

Relația (17) arată că tangenta unghiului de așezare lateral variază după aceeași lege hiperbolică, în funcție de cota z (de-a lungul tăișului), oricare ar fi directoarea plană a elicoidului.

Rezultă că toți acești elicoizi nu admit plan tangent de-a lungul generatoarei, deci nu se pot genera cu ajutorul unui plan generator —ceea ce înseamnă că nu pot fi obținuți prin rectificare cu disc abraziv plan, ci numai prin prelucrare cu tăișuri rectilinii care să materializeze dreapta generatoare.

În concluzie, curbele enumerate mai sus se comportă la fel din punct de vedere al uzurii și anume vor prezenta o uzură inegală a tăișului cuțitului ; în schimb, se deosebesc sub aspectul execuției, precum și din punct de vedere al variației unghiurilor de așezare laterale, după reascuțire.

Dacă se înlocuiește z din (16) cu expresia (12), se va găsi

$$\operatorname{tg}\alpha_{l_i} = \frac{\frac{du}{d\varphi}}{u - [h.\operatorname{tg}\alpha_{s_i} + (u - u_0)]},$$

adică

$$\operatorname{tg}\alpha_{l_i} = \frac{\frac{du}{d\varphi}}{u_0 - h\cdot\operatorname{tg}\alpha_{s_i}}. \tag{18}$$

Expresia (18) arată variația unghiului de așezare α_{l_i} de-a lungul arcului de vîrf, în funcție de φ.

Dacă se consideră numitorul expresiei (18), adică constanta ($u_0 - h\cdot\operatorname{tg}\alpha_{s_i}$) ca un parametru, variabil de-a lungul tăișului (în care h va avea valori cuprinse între 0 și $H + b_s$, vezi fig. 2*b*), atunci relația (18) va da toată gama unghiurilor de așezare, de-a lungul tăișurilor laterale.

Se poate pune condiția ca gama unghiurilor de așezare laterale de-a lungul profilului să nu se schimbe prin ascuțiri. În acest caz, dacă se ține seama de expresia (18), trebuie ca

$$\frac{du}{d\varphi} = k = \text{const.} \tag{19}$$

Integrala acestei ecuații diferențiale este funcția

$$u = q.\varphi + a, \tag{20}$$

în care q — constantă, în funcție de unghiul de așezare inițial al directoarei,
a — constantă arbitrară de integrare.

Ecuația (20) reprezintă o concoidă a spiralei lui Arhimede. Rezultă că singura directoare care admite condiția (III *b*) este spirala lui Arhimede — iar elicoizii generați pe baza acesteia se numesc elicoizi ai lui Arhimede.

Transformîndu-se ecuația (20), se găsește succesiv

$$u = q\left(\varphi + \frac{a}{k}\right) = q(\varphi + \varepsilon),$$

în care $\varepsilon = \frac{a}{k} = \text{const.}$

Se observă cum concoidele spiralei lui Arhimede sînt identice cu spirala directoare — fiind niște curbe rotite în jurul centrului acesteia în diverse poziții determinate de unghiul ε, unghi proporțional cu parametrul a al familiei de concoide.

Din geometria analitică se știe că ecuația spiralei lui Arhimede are forma

$$r = q \cdot \varphi. \tag{21}$$

Pasul acestei spirale este dat de relația

$$t = 2\pi q = 2\pi R_x \cdot \operatorname{tg} \alpha_{l_x}, \tag{22}$$

iar unghiul tangent are forma

$$\operatorname{tg} \alpha_{l_x} = \frac{1}{\varphi_x} \cdot \tag{23}$$

Înlocuindu-se (23) în (20), se găsește:

$$r . \operatorname{tg} \alpha_{l_x} = q \tag{24}$$

în care q — constanta de pas a spiralei,
t — pasul spiralei,
R_x — raza vectoare a punctului x oarecare, de pe spirală (care are coordonata φ_x),
α_{l_x} — unghiul tangent în punctul x.

Se observă că unghiul tangent al spiralei lui Arhimede, respectiv unghiul de așezare obținut după reascuțiri, variază după o hiperbolă echilaterală, în funcție de raza vectoare corespunzătoare.

În concluzie, singura suprafață care îndeplinește condițiile I, II și III *b* este elicoidul lui Arhimede — care, practic, se execută cel mai ușor la toți elicoizii enumerați. Se justifică astfel utilizarea acestuia, din punct de vedere teoretic cît și practic. Iată de ce, în cele ce urmează, se va insista asupra acestuia.

Se poate găsi și o suprafață care să admită unghi de așezare constant de-a lungul tăișului (unghi tangent constant de-a lungul generatoarei) — adică care să răspundă condiției III *a*. Această suprafață va avea ca directoare o curbă de așa fel încît concoidele acesteia să fie curbe echidistante față de directoare, respectiv să admită un plan tangent de-a lungul generatoarei. Forma suprafeței se va determina pe baza condițiilor

I, II și III, considerîndu-se ecuația (15) a elicoidului. Pentru ca expresia

$$\frac{\dfrac{dr}{d\varphi}}{r}$$

să nu fie funcție de z, trebuie ca funcția u din (15) să se anuleze, adică

$$\operatorname{tg} \alpha_{l_i} = \frac{\dfrac{d(u = o)}{d\varphi}}{u - z \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_i}} = 0.$$

Cu această transformare ecuația (15) devine ecuația unui con circular, coaxial cu axa capului port-cuțite Oz, avînd ecuația

$$r = \pm z \,.\, \operatorname{tg} \alpha_{l_{s_{e,i}}}. \tag{25}$$

Conul găsit îndeplinește primele două condiții ; iar în ceea ce [illegible]ește condiția III, el admite un unghi de așezare constant de-a lungul tăișului III *a*, precum și după reascuțire III *b*, dar nu de valoare finită, ci un unghi de așezare nul.

Ținîndu-se seamă de execuția ușoară a conului, această suprafață este necesar a se lua în considerare ; iar pentru a se obține un unghi de așezare diferit de zero, conul se va deplasa convenabil — astfel încît să îndeplinească condiția III (se va vedea). Se pot găsi astfel o serie de poziții ale conului, care să îndeplinească aproximativ toate condițiile puse, iar erorile rezultate să fie în limitele admise.

În cele ce urmează, se va lua în considerare atît elicoidul lui Arhimede, cît și suprafața conică.

3. CUȚITE DETALONATE DUPĂ ELICOIDUL LUI ARHIMEDE

3.1. Considerații analitice. Fie curba directoare spirala lui Arhimede

$$(C_e) \quad u = R_0 - q_e \varphi, \tag{26}$$

$$(C_i) \quad u = R_0 + q_i \varphi. \tag{27}$$

Înlocuindu-se în (4) și (5), se obțin ecuațiile elicoizilor lui Arhimede

$$z = (r + q_e \cdot \varphi - R_0) . \operatorname{ctg} \alpha_{se}, \tag{28}$$

$$z = (R_0 + q_i \cdot \varphi - r) . \operatorname{ctg} \alpha_{si}, \tag{29}$$

$$z = \frac{p}{2\pi} \varphi + h. \tag{30}$$

Ultima ecuație reprezintă elicoidul corespunzător tăișului de trecere de la vîrful cuțitului.

Nu se va mai insista asupra considerațiilor anterioare, în legătură cu îndeplinirea condițiilor I, II și III, deoarece ecuațiile elicoizilor lui Arhimede sînt consecințe ale elicoizilor cu directoare oarecare, asupra cărora s-a discutat.

Cei trei elicoizi (28), (29) și (30), vor trebui să aibă pasul egal — pentru ca intersecția lor să rezulte elice cilindrice, adică arcele de vîrf să aibă drept proiecții cercuri concentrice; așadar

$$\frac{p}{2\pi} = q_e \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{s_e} = q_i \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{s_i}. \qquad (31)$$

Elicoidului (30), dacă i se adaugă ecuația cilindrului director al elicei

$$R_x = \text{const.}, \qquad (32)$$

se obține o familie de elice cilindrice, la care raza R_x constituie parametrul familiei.

Desfășurarea în plan a familiei se obține prin transformarea

$$\varphi = \frac{s}{R_x} \qquad (33)$$

în care caz, ecuația (30) devine

$$z = \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{s}{R_x} + h. \qquad (34)$$

Expresia (34) reprezintă o familie de drepte, înclinate la unghiurile de înfășurare ale curbelor familiei de elice; ele sînt tocmai elicele desfășurate în plan. Pe de altă parte, unghiurile de înfășurare ale acestora vor fi egale cu unghiurile de așezare de la tăișul de trecere, adică

$$\operatorname{tg} \alpha_{v_x} = \frac{p}{2\pi R_x} = \frac{q_e \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{s_e}}{R_x} = \frac{q_i \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{s_i}}{R_x}, \qquad (35)$$

în care R_x — raza vectoare, valabilă între limitele R_e și R_i (fig. 2 *a* și *b*).

Din (35) rezultă că unghiul de așezare de la vîrful cuțitului, α_{vx} este variabil și scade pe măsură ce R_x crește.

Cunoscîndu-se razele vectoare ale punctelor curente de pe tăișul exterior (R_{e_x}) respectiv tăișul interior (R_{i_x}), se pot calcula unghiurile de așezare laterale cu ajutorul relației (24):

$$\operatorname{tg} \alpha_{l_{e_x}} = \frac{q_e}{R_{e_x}}, \qquad (36)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{l_{i_x}} = \frac{q_i}{R_{i_x}}. \qquad (37)$$

Se poate observa că unghiul de așezare minim va fi în punctul de rază maximă, iar unghiul de așezare maxim va corespunde punctului de rază minimă a tăișurilor.

Dacă se adoptă valoarea minimă a unghiului de aşezare lateral (de ex. 3...5°), atunci se pot determina imediat constantele elicoizilor şi elementele detalonării. Din (36), rezultă

$$q_e = (R_e + h_s \,.\, \mathrm{tg}\ \alpha_{se}).\ \mathrm{tg}\ \alpha_{l_{e_{min}}}, \tag{38}$$

în care R_e — raza cercului vîrfurilor exterioare (fig. 2 *a*),
h_s — înălţimea totală a profilului cuţitului,
$\alpha_{l_{e_{min}}}$ — valoarea adoptată pentru unghiul de aşezare lateral minim (3...5°).

Dacă se notează

$$R_B = R_e + h_s \cdot \mathrm{tg}\alpha_{se}, \tag{39}$$

atunci (38) devine

$$q_e = R_B \cdot \mathrm{tg}\alpha_{l_{e_{min}}}. \tag{38'}$$

Din (31), se va deduce

$$q_i = R_B \cdot \frac{\mathrm{tg}\ \alpha_{s_i}}{\mathrm{tg}\alpha_{s_e}} \cdot \mathrm{tg}\alpha_{l_{e_{min}}}. \tag{40}$$

Iar din (35) rezultă

$$\mathrm{tg}\alpha_{v_k} = \frac{R_B}{R_k} \cdot \frac{\mathrm{tg}\ \alpha_{l_{e_{min}}}}{\mathrm{tg}\ \alpha_{s_e}}, \tag{41}$$

în care α_{v_k} — unghiul de aşezare în punctul de rază R_k al tăişului de trecere

$$R_k = \frac{R_e \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_{s_i} + R_i \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_{s_e}}{\mathrm{tg}\ \alpha_{s_i} + \mathrm{tg}\ \alpha_{s_e}}. \tag{42}$$

Expresia (42) se calculează cu ajutorul triunghiurilor formate în figurile 2 *a* şi *b*.

Un alt element care trebuie precizat, la capul port-cuţite, este diametrul nominal al acestuia, D_0. Diametrul nominal va diferi de 2 R_k şi va avea valoarea

$$D_0 = R_e + R_i. \tag{43}$$

În ceea ce priveşte raza vîrfurilor exterioare şi interioare, aceasta se poate determina considerîndu-se pasul cuţitelor *w* (fig. 1) care se dă la proiectarea angrenajului prelucrat :

$$R_e = R_i + w. \tag{44}$$

Pe baza rezultatelor obţinute mai sus, se poate trece la elaborarea desenului de execuţie al cuţitelor (în fig. 3 se dă numai cazul cuţitului exterior). Elementele constructive normalizate se pot lua din literatura de specialitate*).

3.2. Execuţia feţelor de aşezare. După cum s-a indicat anterior, elicoizii închişi, cu generatoare rectilinii, nu se pot înfăşura cu ajutorul unui plan generator. În consecinţă, elicoizii lui Arhimede — care se consideră

---

*) De ex. G. I. Granovskii, *Metallorejuşcii instrument*, Maşghiz, 1954.

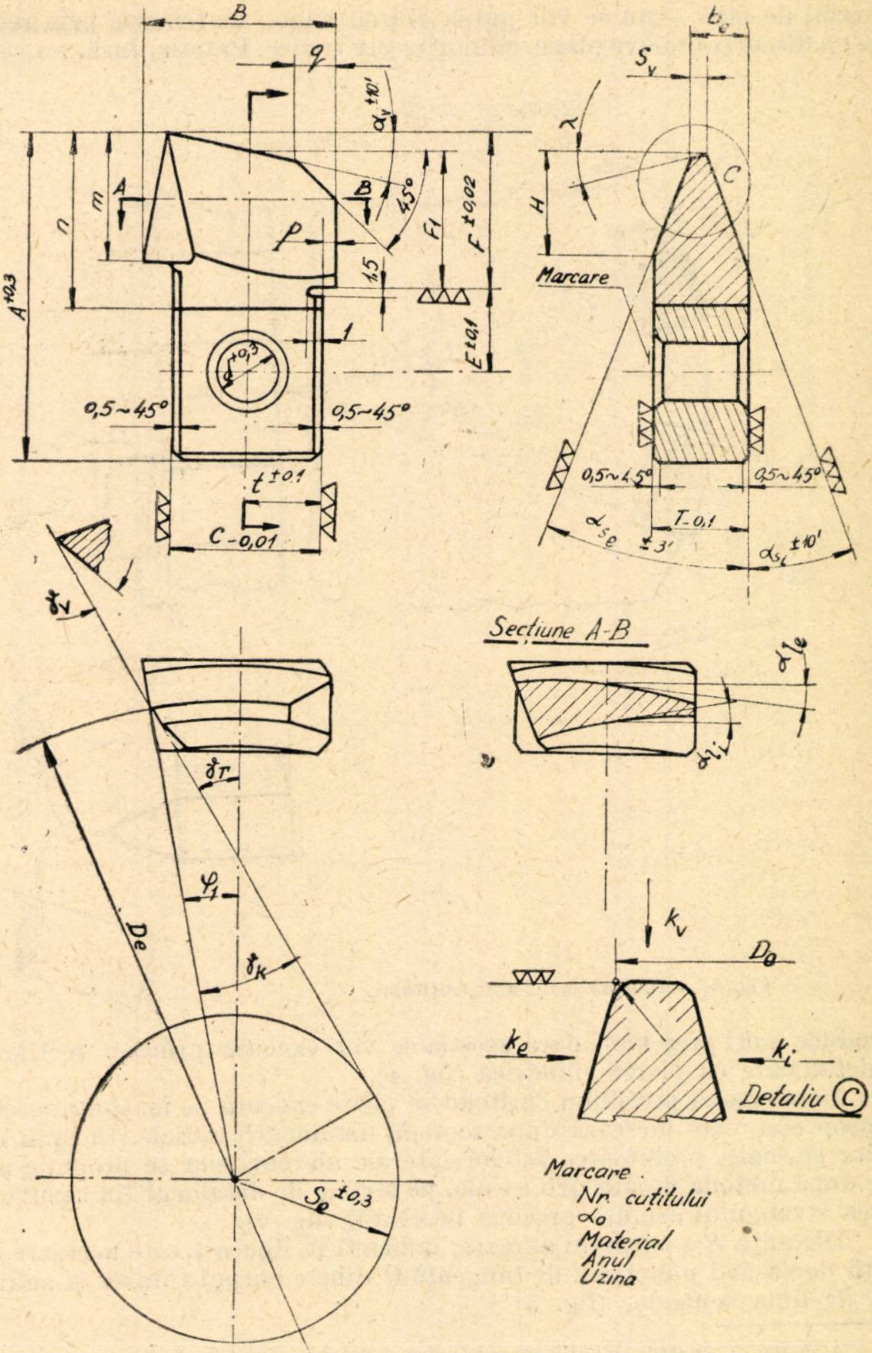

B
q
$\alpha_v^{\pm 10'}$
45°
A
B
m
n
P
F1
$F^{\pm 0,02}$
1,5
$A^{\pm 0,3}$
1
$E^{\pm 0,1}$
$d^{+0,3}$
0,5~45°
0,5~45°
$t^{\pm 0,1}$
C-0,01
b_e
S_v
λ
H
C
Marcare
0,5~45°
0,5~45°
T-0,1
α_{s_e} ±3'
$\alpha_{s_i}^{\pm 10'}$
γ_v
Secțiune A-B
γ_e
γ_i
γ_r
φ_1
De
γ_k
$S_e^{\pm 0,3}$
k_v
D_0
k_e
k_i
Detaliu Ⓒ
Marcare
Nr. cuțitului
α_0
Material
Anul
Uzina

Fig. 3. — Cuțit exterior.

în cazul de față — nu se vor putea obține exact matematic prin rectificare cu discuri abrazive plane, cilindrice sau conice. Practic, însă, nu se vor

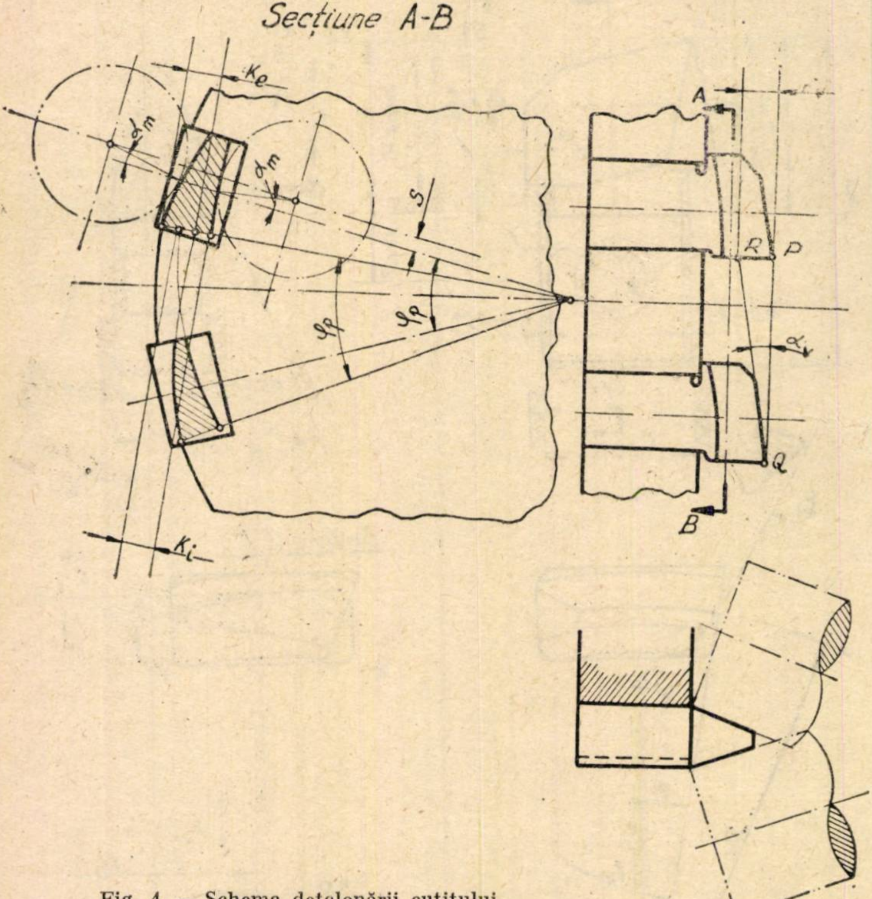


Fig. 4. — Schema detalonării cuțitului,

introduce erori prea mari dacă aceștia se vor executa printr-o rectificare de detalonare cu piatră cilindrică (fig. 4).

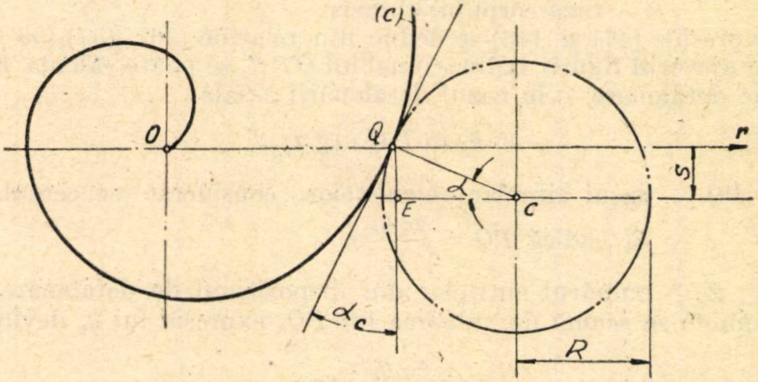
Detalonarea profilului cuțitelor se poate executa pe mașinile speciale Gleason etc., care lucrează după metoda detalonării radiale. În lipsa mașinilor speciale, prelucrarea fețelor laterale ale cuțitelor se propune a se face după metoda detalonării axiale, pe strung de detalonat (în cazul cînd starea strungului asigură precizia necesară) (fig. 4).

Distanța *S* a corpului abraziv, indicată în figura 4, este necesară datorită deplasării punctului de tangență *Q* dintre corpul abraziv și spirală, față de linia centrelor (fig. 5)*).

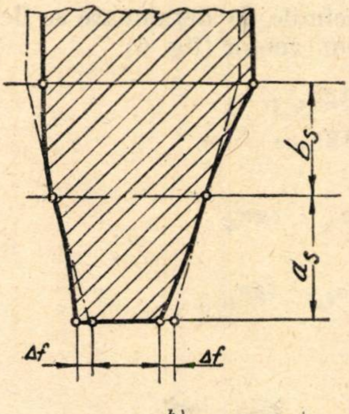
---

*) În figură, pentru simplificare, secțiunea eliptică a corpului abraziv s-a reprezentat printr-un cerc.

Prin deplasarea cu dimensiunea S a axei corpului abraziv, se micşorează eroarea Δf a profilului (fig. 5 *b*). Totuşi, forma tăişurilor principale ale cuţitului rămîn curbilinii — datorită, după cum s-a anticipat, rectificării cu corp abraziv cilindric (metodă ce nu materializează precis generatoarea elicoidului cu profil rectiliniu).



a)



b)

Fig. 5 *a*. — Contactul între corpul abraziv şi spirală.

Fig. 5 *b*. — Profilul real al cuţitului, rectificat prin detalonare.

Deplasarea S a corpului abraziv se poate calcula din triunghiul QEC (fig. 5)

$$S = R .\sin \alpha_m , \tag{45}$$

în care

$$\alpha_m = \frac{1}{2}\left(\alpha_{le_m} + \alpha_{li_m}\right), \tag{46}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha_{le_m} = \frac{R_B}{R_e} \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_{le_{min}}, \tag{47}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha_{li_m} = \frac{R_B}{Ri} \cdot \frac{\mathrm{tg}\ \alpha_{s_i}}{\mathrm{tg}\ \alpha_{s_e}} \cdot \mathrm{tg}\ \alpha_{le_{min}}, \tag{48}$$

$\alpha_{l_{e_m}}$, $\alpha_{l_{i_m}}$ — unghiurile de aşezare laterale medii (din punctele tăişurilor care descriu cercurile generatoare, cu razele r_e şi r_i — fig. 2 *a* şi *b*),

R — raza corpului abraziv.

Expresiile (47) şi (48) se deduc din relaţiile (36), (37) (38′) şi (40).

Cu ajutorul figurii 4, din triunghiul QPR, se poate calcula înălţimea camei de detalonare — în cazul detalonării axiale

$$k_v = PQ \cdot \operatorname{tg} \alpha_{v_k},$$

în care PQ — pasul circular al cuţitelor, considerat pe cercul de rază R_k, adică $PQ = \frac{2\pi R_k}{Z_s}$,

Z_s — numărul cuţitelor din dispozitivul de detalonare.

Ţinîndu-se seamă de valoarea lui PQ, expresia lui k_v devine

$$k_v = \frac{2\pi R_k}{Z_s} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{v_k}. \tag{49}$$

În cazul detalonării radiale, adîncimile de detalonare se deduc prin proiectarea mărimii k_v, considerată ca un vector (fig. 6)

$$k_e = k_v \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_e},$$

$$k_i = k_v \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_i},$$

adică

$$k_e = \frac{2\pi R_k}{Z_s} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{v_k} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_e}, \tag{50}$$

$$k_i = \frac{2\pi R_k}{Z_s} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{v_k} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_i}. \tag{51}$$

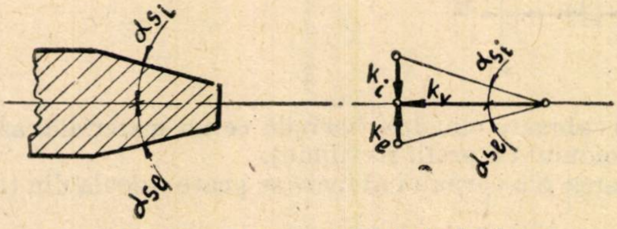


Fig. 6. — Determinarea adîncimii de detalonare.

Luîndu-se în considerare expresiile (35), (36) şi (37), şi introducîndu-se indicii corespunzători vîrfului exterior şi interior al profilului, se va obţine

$$\operatorname{tg}\alpha_{v_k} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_e} = \frac{R_e}{R_k} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{l_{e_v}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{v_k} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{s_i} = \frac{R_i}{R_k} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{l_{i_v}}$$

care, înlocuite în (50) şi (51), dau*)

$$K_e = \frac{2\pi\ R_e}{Z_s} \cdot \mathrm{tg}\alpha_{l_{e_v}} \qquad (50')$$

$$k_i = \frac{2\pi\ R_i}{Z_s} \cdot \mathrm{tg}\alpha_{l_{i_v}}. \qquad (51')$$

Mai sus, $\alpha_{l_{e_v}}$ şi $\alpha_{l_{i_v}}$ nu sînt altceva decît unghiurile de aşezare de la vîrful exterior respectiv interior al profilului.

4. CUŢITE PREVĂZUTE CU FEŢE DE AŞEZARE CONICE

4.1. Consideraţii analitice. Datorită faptului că, din punct de vedere tehnologic, detalonarea prezintă unele dezavantaje, este indicat să se examineze şi cazul cînd feţele laterale ale cuţitului sînt suprafeţe conice.

Din examinarea diferitelor cazuri posibile ale aşezării conului, se poate constata că o poziţie avantajoasă este situarea conului cu vîrful pe axa capului port-cuţite, în origine şi avînd axa înclinată la unghiul ε faţă de axa capului (fig. 7).

Situarea conului, aşa cum s-a indicat , prezintă unele avantaje faţă de alte poziţii :

— tăişul perfect rectiliniu,

— unghiul de aşezare lateral constant de-a lungul tăişului.

Din această cauză se va considera, în cele ce urmează, această aşezare a conului.

Dacă se transformă ecuaţia (25) în coordonate carteziene (x_1, y_1, z_1), aplicîndu-se transformarea

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \cdot \cos\varepsilon - z \cdot \sin\varepsilon, \\ y_1 &= y, \\ z_1 &= x \cdot \sin\varepsilon + z \cdot \cos\varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

se obţine

$$(x \cdot \cos\varepsilon - z \cdot \sin\varepsilon)^2 + y^2 - (x \cdot \sin\varepsilon + z \cdot \cos\varepsilon)^2 . \mathrm{tg}^2\,\delta = 0. \qquad (53)$$

Ecuaţia (53) va reprezenta suprafeţele corespunzătoare feţelor de aşezare laterale ale cuţitelor (din fig. 7).

Faţa corespunzătoare vîrfului cuţitului se va adopta plană (planul $V-V$ din fig. 7), de ecuaţia

$$z = \pm\ h_{e,i} - x \cdot \mathrm{tg.}\ \alpha_v. \qquad (54)$$

Prin aceasta, execuţia va fi simplă, iar erorile obţinute la diametrul vîrfurilor, după reascuţiri, vor fi mici.

---

*) Relaţiile, sub această formă, au fost publicate şi de F. Baran (R. P. Polonă) într-un articol din Fertigungstechnik, *6* (1956).

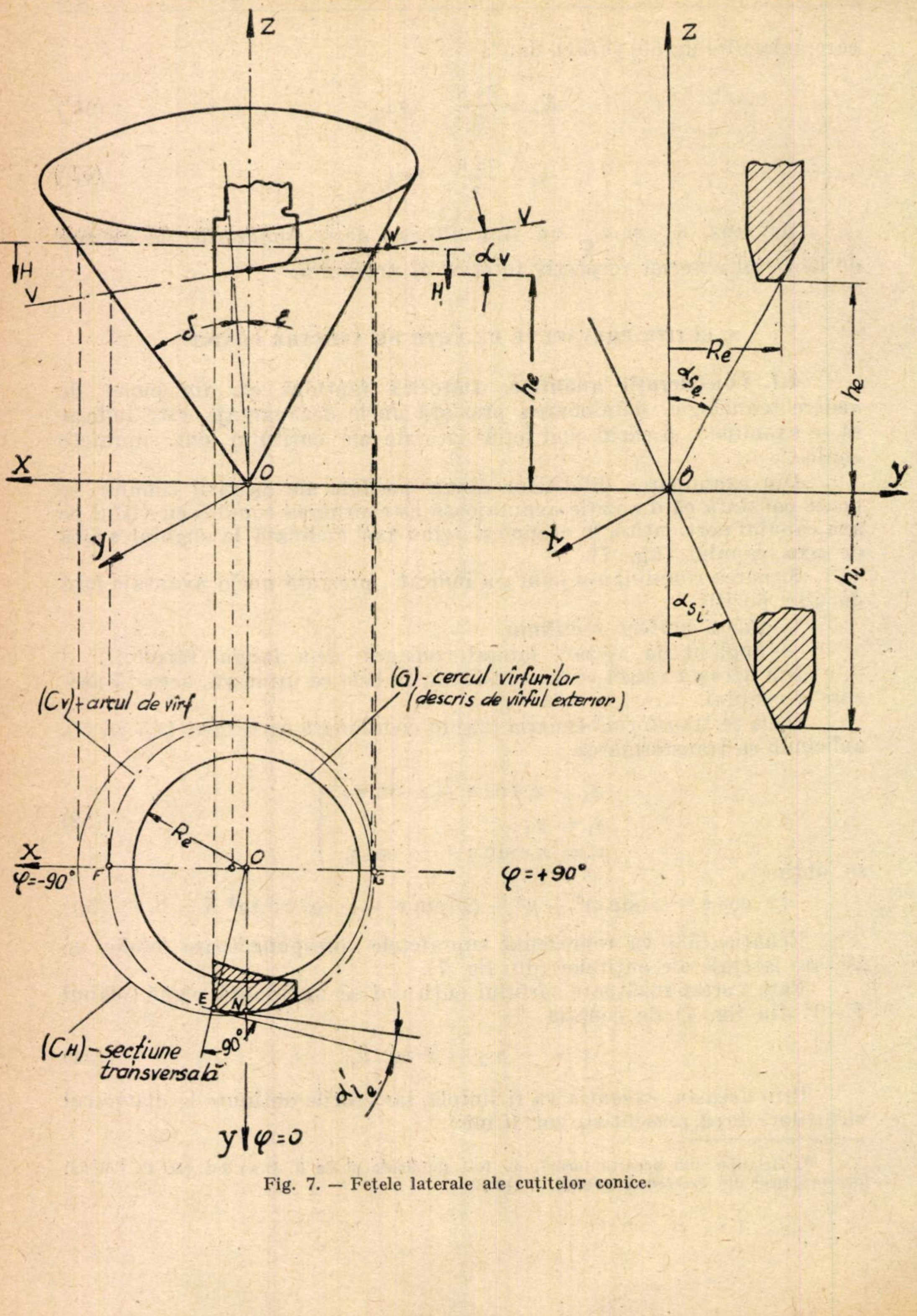

Z
Z
H
V
W
V
α_v
H
δ
ε
h_e
X
O
Y
O
y
X
R_e
α_{s_e}
h_e
h_i
α_{s_i}
(G) - cercul vîrfurilor
(descris de vîrful exterior)
(Cv) - arcul de vîrf
R_e
X
$\varphi=-90°$
F
O
G
$\varphi=+90°$
E
N
A
90°
(CH)-secțiune transversală
α_{ie}
y $\varphi=0$

Fig. 7. — Fețele laterale ale cuțitelor conice.

Trecîndu-se la coordonate cilindrice, cu transformarea

$$\left.\begin{aligned} x &= -r\cdot\sin\,\varphi,\\ y &= r\cdot\cos\,\varphi,\\ z &= z, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

conul (53) devine

$$a\cdot r^2 + 2\,b\,z\,r - c\,z^2 = 0, \tag{56}$$

în care

$$a = \frac{\cos^2\delta - \sin^2\varepsilon\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\delta},$$

$$b = \frac{\sin\,\varepsilon\cdot\cos\,\varepsilon\cdot\sin\,\varphi}{\cos^2\,\delta},$$

$$c = \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\delta} - 1.$$

Profilul obţinut după reascuţire, pentru un φ oarecare, se deduce din (56) considerîndu-se $\varphi = \text{const.}$

$$r = z\,\frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 + ac}}{a}. \tag{56'}$$

Ecuaţia (56′) reprezintă două drepte concurente. Rezultă că, după reascuţire, tăişurile vor fi rectilinii.

În ceea ce priveşte unghiurile de profil ale cuţitului, acestea vor corespunde coeficienţilor unghiulari ai dreptelor de mai sus, adică — înlocuindu-se şi valorile lui a, b şi c

$$\operatorname{tg}\alpha'_{s_{e,i}} = \frac{\pm\sqrt{\sin^2\delta - \sin^2\varepsilon\cdot\cos^2\varphi}\cdot\cos\,\delta - \sin\,\varepsilon\cdot\cos\,\varepsilon\cdot\sin\,\varphi}{\cos^2\delta - \sin^2\varepsilon\cdot\sin^2\varphi}. \tag{57}$$

Pentru a se obţine valoarea unghiurilor de profil din secţiunea mijlocie (care trece prin mijlocul cuţitului), se va lua $\varphi = 0°$ şi din (57) rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha_{s_{e,i}} = \frac{\pm\sqrt{\sin^2\delta - \sin^2\varepsilon}}{\cos\,\delta}, \tag{58}$$

care se transformă în

$$\cos\delta = \cos\alpha_{s_{e,i}}\cdot\cos\varepsilon. \tag{59}$$

Înlocuindu-se (59) în (57) , se obţine

$$\operatorname{tg}\alpha'_{s_{e,i}} = \frac{\pm\sqrt{f}\cdot\cos\,\alpha_{s_{e,i}} - q}{1 - f}, \tag{60}$$

în care

$$q = \operatorname{tg}\,\varepsilon.\ \sin\,\varphi,$$
$$f = \sin^2\,\alpha_{s_{e,i}} + q^2.$$

Din (60), se vede că unghiul de profil este variabil pe măsura reascuțirii, adică în funcție de φ — deci nu se respectă condiția I. Abaterea rezultată se poate exprima cu formula

$$\Delta\, \alpha_{s_{e,i}} = \alpha'_{s_{e,i}} - \alpha_{s_{e,i}}, \tag{61}$$

în care unghiul de profil din secțiunea mijlocie, $\alpha_{s_{e,i}}$, se consideră adoptat, conform relațiilor precizate la condiția I.

Abaterea dată de formula (61) se poate exprima cu o precizie suficientă pentru practică (eroarea maximă fiind $\pm\, 2''$), cu formula aproximativă

$$\Delta\, \alpha^{*}_{s_{e,i}} = \pm \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi \tag{62}$$

(pentru $\alpha_s \leqslant 20°$, $\varepsilon \leqslant 1°20'$ și $\varphi \leqslant 10°$).

Dacă se consideră, în locul valorii date de (59), valoarea aproximativă

$$\delta \cong \alpha_{s_{e,i}},$$

atunci se obține pentru unghiul de profil o abatere dată de expresia

$$\mu = \alpha_{s_{e,i}} - \operatorname{arc} \cos \left[\frac{\cos \alpha_{s_{e,i}}}{\cos \varepsilon}\right], \tag{63}$$

care nu depășește valoarea de $0°1'30''$.

În figura 8, se reprezintă abaterea μ, pentru cazul $\varphi = 0$ (secțiunea $A - A$) și cazul $\varphi = \varphi_1$ *).

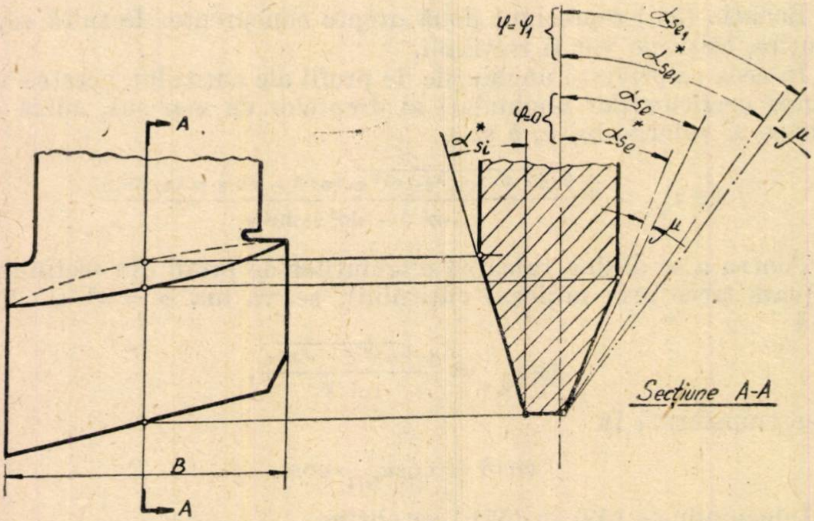


Fig. 8. — Abaterea unghiului de profil, pentru $\varphi = 0$ și $\varphi = \varphi_1$.

Drept element determinant pentru erorile $\Delta\, \alpha^{*}_{s_{e,i}}$ ale unghiurilor de profil, este necesar să se considere lățimea B a cuțitului (fig. 3 și 8).

---

*) Rezultă că abaterea u nu se adună cu eroarea $\Delta\, \alpha^{*}_{s_{e,i}}$ — adică nu o mărește, ci provoacă o deplasare a cîmpului de variație (prin reascuțiri) a unghiului de profil.

Se va putea reduce eroarea $\Delta\, \alpha^*_{s_{e,i}}$ prin reducerea unghiului φ_1, respectiv lățimea cuțitului B.

Unghiul de așezare lateral, într-o secțiune transversală oarecare (z = const.), se obține cu ajutorul relației (6) transformată

$$\operatorname{tg}\alpha'_{l_{e,i}} = \frac{p}{d\varphi}[\ln r], \tag{64}$$

în care r — raza vectoare variabilă a curbei, din secțiunea în care se determină unghiul de așezare.

Ținîndu-se seama de expresia (56′) a razei vectoare, precum și de valoarea explicită a coeficientului unghiular (60), în care $\alpha_{s_{e,i}}$ se modifică conform relației

$$\alpha^*_{s_{e,i}} = \alpha_{s_{e,i}} \mp \mu, \tag{65}$$

expresia (56′) devine

$$r = z\frac{\sqrt{f^*}\cdot\cos\,\alpha^*_{s_{e,i}} - q}{1 - f^*}. \tag{66}$$

În relația (66), variabilele independente sînt r și φ, iar z = const. Aplicîndu-se acestei relații formula (64), se obține

$$\operatorname{tg}\alpha'_{l_{e,i}} = q'\left[\frac{q\cdot\cos\alpha^*_{s_{e,i}} \mp \sqrt{f^*}}{f\cdot\cos\alpha^*_{s_{e,i}} \mp q\cdot\sqrt{f^*}} + \frac{2q}{1 - f^*}\right], \tag{67}$$

în care

$$q' = \frac{dq}{d\varphi} = \operatorname{tg}\varepsilon\cdot\cos\,\varphi,$$

$$f^* = \sin^2\alpha^*_{s_{e,i}} + q^2.$$

Expresia (67) arată că $\alpha'_{l_{e,i}}$ nu depinde de parametrul z, deci unghiul de așezare lateral este constant de-a lungul tăișului — condiția III *a* fiind îndeplinită și este variabil în funcție de φ — adică se schimbă după reascuțire, condiția III *b* nefiind îndeplinită.

Ca valoare constructivă se va adopta unghiul de așezare lateral corespunzător tăișului din secțiunea mijlocie a cuțitului. Valoarea acestuia se obține din (67), considerînd $\varphi = 0$

$$\operatorname{tg}\alpha_{l_{e,i}} = \frac{2\operatorname{tg}\varepsilon}{\sin 2\alpha^*_{s_{e,i}}}. \tag{68}$$

Adoptîndu-se $\alpha_{l_{e,i}}$, se poate calcula din (68) valoarea ε a unghiului de înclinație a conului.

Se poate examina „rapid" variația unghiului de așezare lateral, dacă în locul formulei (67) se consideră expresia aproximativă

$$\operatorname{tg}\alpha''_{l_{e,i}} = \operatorname{tg}\alpha_{l_{e,i}}\cdot\cos\,\varphi. \tag{69}$$

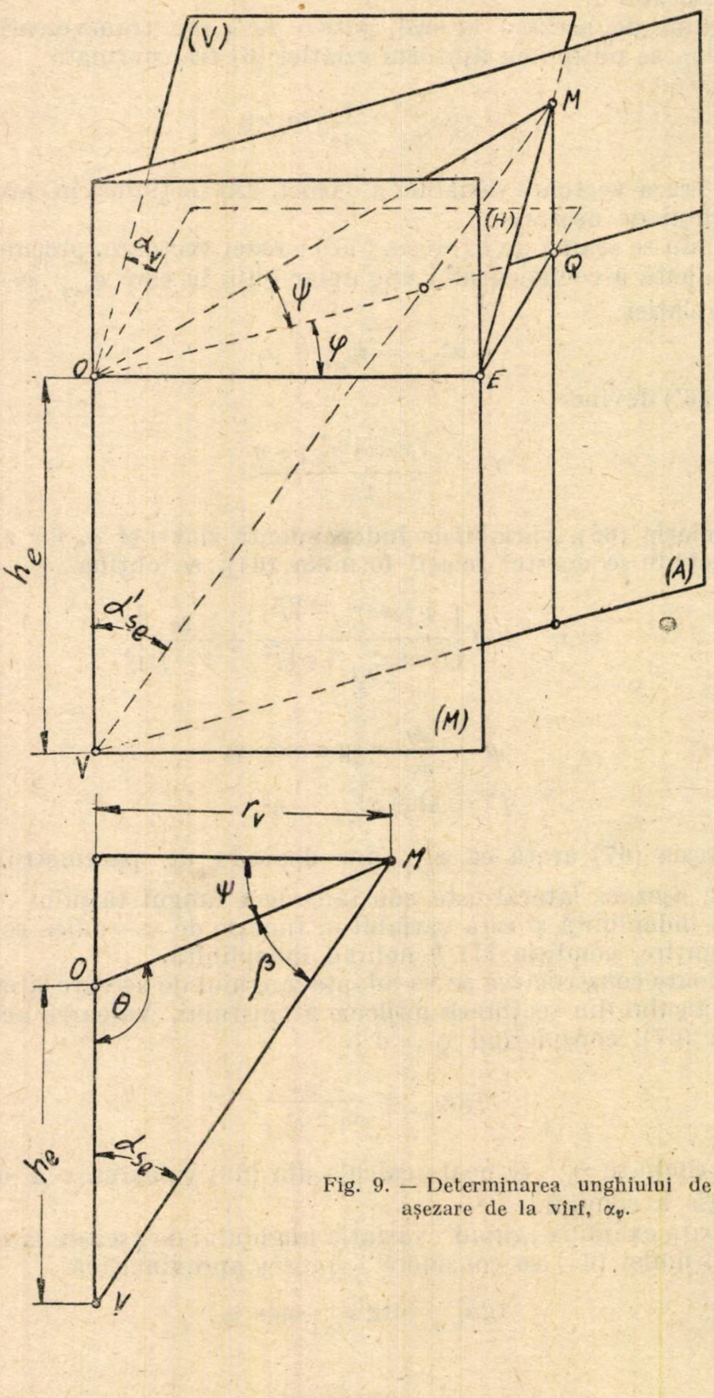

(V)
M
(H)
α_v
Q
ψ
φ
O
E
h_e
α'_{se}
(A)
(M)
V
r_v
M
ψ
O
θ
β
h_e
α_{se}
V

Fig. 9. — Determinarea unghiului de așezare de la vîrf, α_v.

În ceea ce priveşte unghiul de aşezare de la vîrf, α_v, valoarea acestuia se determină pe baza condiţiei ca proiecţia arcului de vîrf (o elipsă) să se suprapună aproximativ pe cercul descris de vîrful corespunzător. Raza vectoare curentă a arcului de vîrf, r_v, se determină din triunghiul OMV (fig. 9), în funcţie de $\alpha'_{s_{e,i}}$ cunoscut

$$r_v = h_e \frac{\sin \alpha'_{s_{e,i}} \cdot \cos \psi}{\sin \beta}. \tag{70}$$

Din figura 9, se deduce

$$\sin \beta = \cos (\alpha'_{s_{e,i}} \pm \psi), \tag{71}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha_v \cdot \sin \varphi. \tag{72}$$

Din figura 7, se obţine

$$h_{e,i} = \frac{R_{e,i}}{\operatorname{tg} \alpha^*_{s_{e,i}}}. \tag{73}$$

Înlocuindu-se în (70) aceste valori, se găseşte

$$r_v = R_{e,i} \frac{\sin \alpha'_{s_{e,i}} \cdot \cos \psi}{\operatorname{tg} \alpha^*_{s_{e,i}} \cdot \cos (\alpha'_{s_{e,i}} \pm \psi)}. \tag{74}$$

Condiţia pusă mai sus impune ca pentru $\varphi = \varphi_1$, să existe egalitatea $r_v = R_{e,i}$. Deci

$$\frac{\sin \alpha'_{s_{e,i}} \cdot \cos \psi}{\operatorname{tg} \alpha^*_{s_{e,i}} \cdot \cos (\alpha'_{s_{e,i}} \pm \psi)} = 1, \tag{75}$$

din care, ţinîndu-se seamă de (72), rezultă*)

$$\operatorname{tg} \alpha_v = \frac{\sin (\alpha^*_{s_{e,i}} - \alpha'_{s_{e,i}})}{\sin \alpha^*_{s_{e,i}} . \sin \alpha'_{s_{e,i}} \cdot \sin \varphi_1}, \tag{76}$$

în care

$$\sin \varphi_1 \cong -\frac{B - (t + p)}{R_e}$$

(vezi fig. 3).

4.2. Execuţia feţelor de aşezare. Feţele de aşezare laterale se vor rectifica pe o maşină universală, de rectificat rotund, cu piatră cilindrică utilizîndu-se de exemplu pentru rectificarea cuţitelor exterioare, dispozitivul din figura 10. Pentru rectificarea cuţitelor interioare, dispozitivul este similar.

---

*) În expresiile (72), (66) şi (76), se consideră φ_1 negativ. Acest lucru este important din punct de vedere al calculelor numerice.

Elementele de bază ale dispozitivului, precum şi dimensiunile de control, se stabilesc cu ajutorul figurii 11.

Distanţa fundului locaşelor se ia

$$\begin{cases} G_e = k + 2\ B_e, \\ G_i = k + 2\ B_i, \end{cases} \tag{77}$$

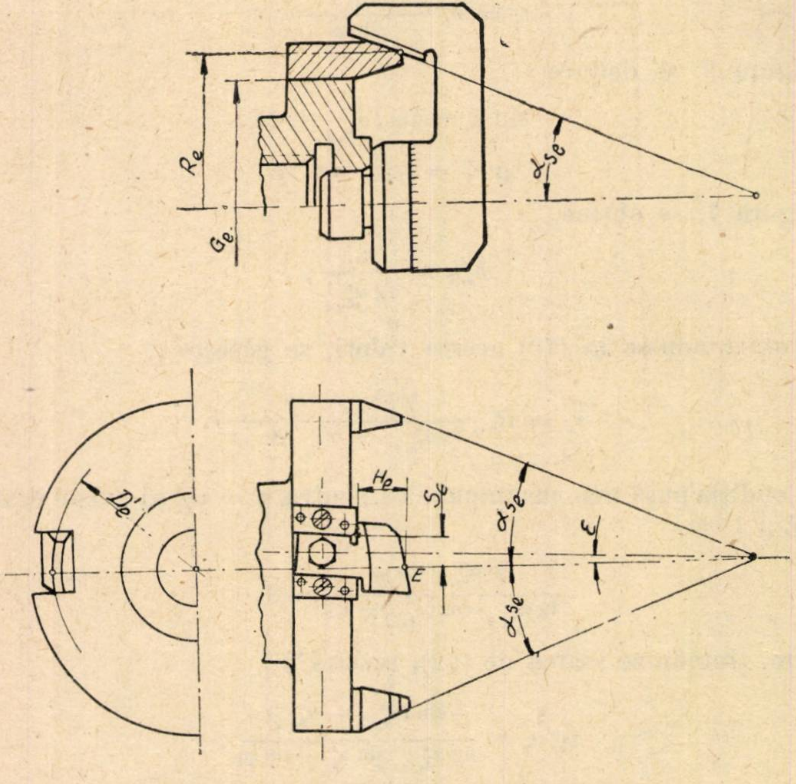


Fig. 10. — Dispozitiv de rectificat cuţitele exterioare.

în care k — distanţa dintre pene (fig. 1),

$B_{e,i}$ — grosimea penelor (fig. 1).

Diametrele

$$\begin{cases} D_e = 2\ R_e, \\ D_i = 2\ R_i. \end{cases} \tag{78}$$

Din triunghiul *VEK* (fig. 11), se deduce

$$f = R_e \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha^*_{s_e} \cdot \cos(\alpha_v - \varepsilon)},$$

$$q = t + f. \cos \alpha_v.$$

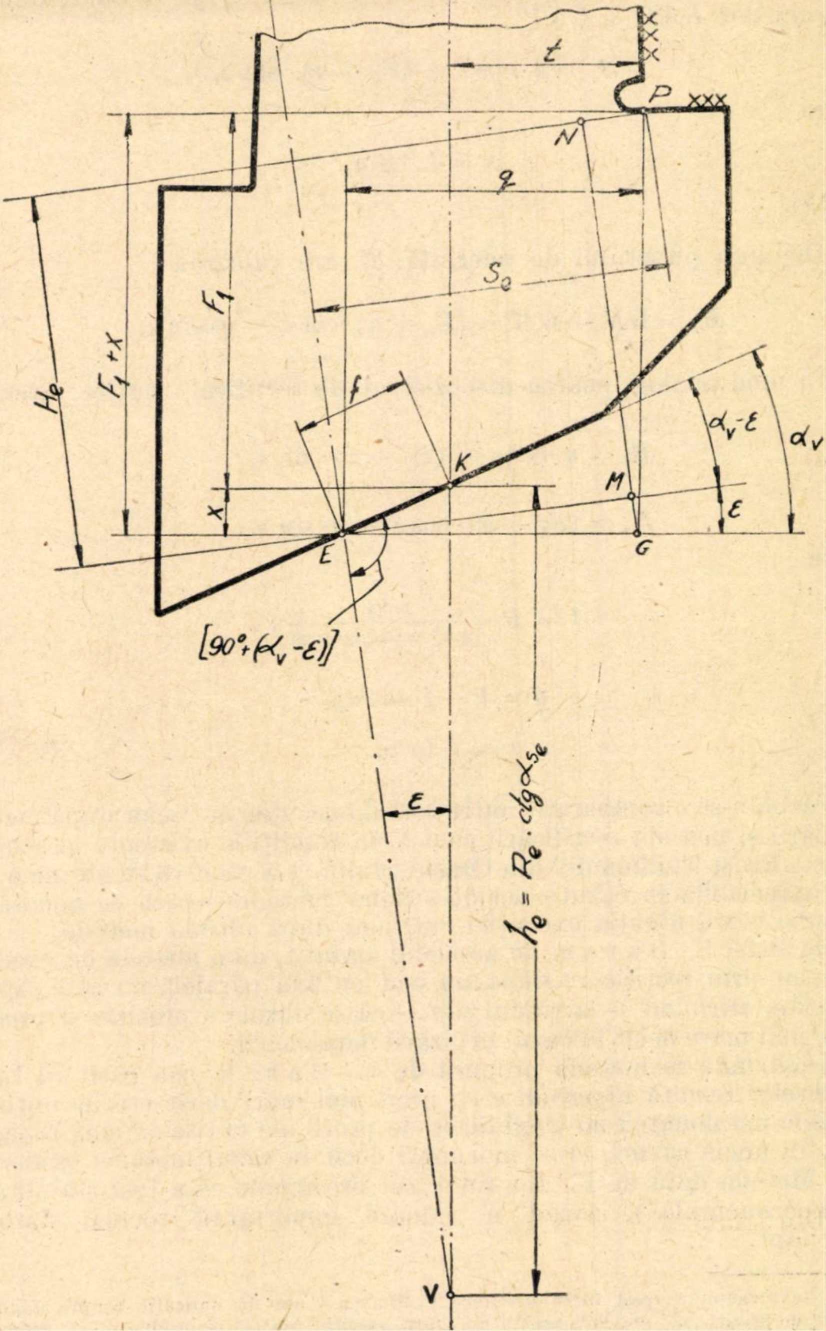

t
P
N
q
S_e
F_1
F_1+x
H_e
f
K
$\alpha_v-\varepsilon$
α_v
M
x
ε
E
G
$[90°+(\alpha_v-\varepsilon)]$
ε
$h_e = R_e \cdot ctg\alpha_{se}$
V

Fig. 11. — Calculul elementelor dispozitivului de rectificat cuțite exterioare.

Deplasarea tangențială, S_e, se obține dacă se proiectează ipotenuzele triunghiurilor EMG și GNP

$$S_e = q \cdot \cos \varepsilon + (F_1 + x) . \sin \varepsilon, \tag{79}$$

în care

$$x = f . \operatorname{tg} \alpha_v .$$

(fig. 11).

Distanța punctului de referință, E, are valoarea

$$H_e = GN - GM = (F_1 + x) \cdot \cos \varepsilon - q \cdot \sin \varepsilon . \tag{80}$$

În mod analog, pentru dispozitivul de rectificat cuțite interioare

$$S_i = q \cdot \cos \varepsilon + (F_1 - x) \cdot \sin \varepsilon, \tag{81}$$

$$H_i = (F_1 - x) \cdot \cos \varepsilon - q \cdot \sin \varepsilon, \tag{82}$$

în care

$$f = R_i \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha^*_{s_i} \cdot \cos (\alpha_v - \varepsilon)},$$

$$q = t - f \cdot \cos \alpha_v ,$$

$$x = f \cdot \operatorname{tg} \alpha_v .$$

Făcîndu-se o comparație între costul execuției cuțitelor după metoda detalonării și metoda rectificării conice, în condițiile existente la sculăria uzinelor „Ernst Thälmann" din Orașul Stalin, s-a găsit că se obține o economie apreciabilă în cazul celei de-a doua metode — ceea ce denotă că se impune toată atenția execuției cuțitelor după ultima metodă.

De altfel F. Baran, în articolul amintit, dă o metodă de execuție a cuțitelor prin rectificare după un con cu axa paralelă cu axa capului port-cuțite, afirmînd — la rîndul său — că se obține o precizie și productivitate mai mare decît în cazul utilizării detalonării.

Analizîndu-se metoda propusă de F. Baran, s-a găsit că tăișurile cuțitelor rezultă hiperbolice cu erori mai mari decît erorile obținute la cuțitele detalonate ; iar unghiurile de profil ale cuțitelor sînt variabile avînd , în unele cazuri, erori mai mari decît în cazul metodei expuse de autori. Metoda dată de F. Baran se presupune că a fost stabilită pe cale experimentală*), avînd o valoare importantă tocmai datorită acestui fapt.

---

*) Se presupune acest lucru deoarece F. Baran nu dă indicații asupra unghiului de așezare de la vîrf, α_v ; or, dacă acesta nu a fost adoptat optim, se produc erori însemnate în ceea ce privește diametrele vîrfurilor.

5. ASCUȚIREA CUȚITELOR

Ascuțirea cuțitelor se face pe mașini speciale Gleason, tip nr. 7 și nr. 12, fețele de degajare fiind rectificate cu fața frontală a unei pietre abrazive disc.

Parametrii ascuțirii sînt :

— deplasarea tangențială a feței pietrei, față de axa capului port-cuțite, $S_{c_{e,i}}$ (fig. 3 și fig. 12) — în scopul obținerii unghiului de degajare

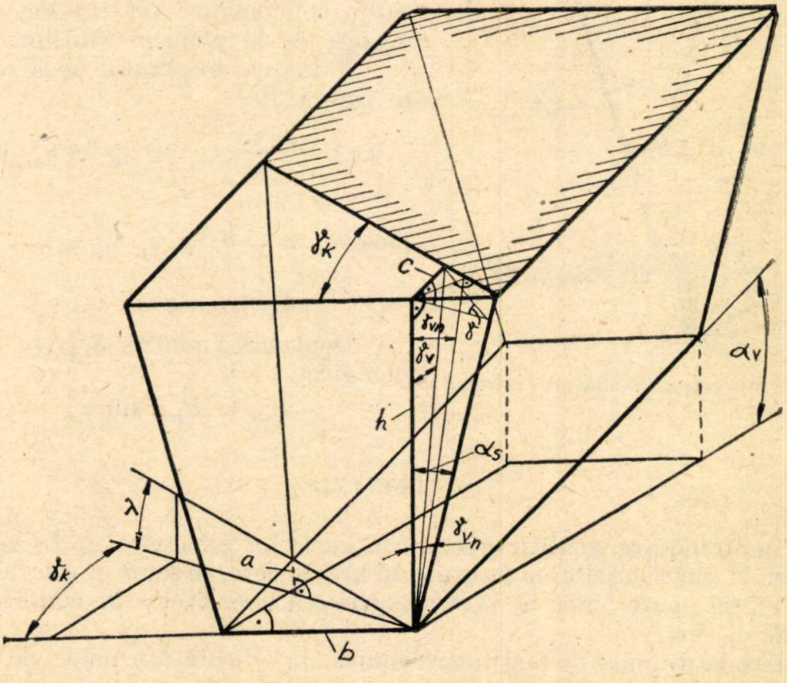


Fig. 12. – Determinarea parametrilor ascuțirii.

γ, — înclinarea γ_{v_n} a capului port-cuțite, pentru ca tăișurile să se situeze în planul axial.

Din figura 12, se găsește

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \frac{c}{h \cdot \operatorname{tg} \alpha_s},$$

$$c = h \cdot \sin \alpha_s \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \alpha_s, \tag{83}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \frac{c}{h},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_v = \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha_s, \tag{84}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{v_k} = \operatorname{tg} \gamma_v \cdot \cos \gamma_k. \tag{85}$$

Sau, ţinîndu-se seamă de (83), (84) şi (85)

$$\operatorname{tg} \gamma'_{v_n} = \operatorname{tg} \gamma \frac{\sin \alpha_s}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot \cos \alpha_s}}. \tag{86}$$

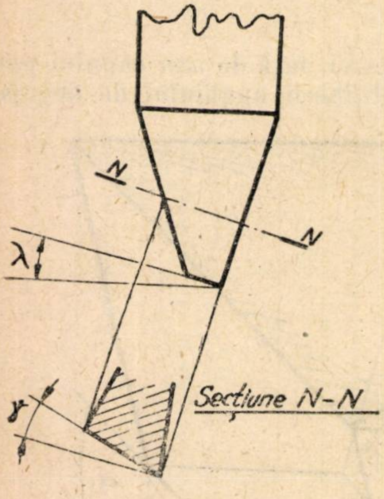


Fig. 13. — Înclinarea λ a tăişului de trecere.

Înclinarea λ a tăişului de trecere, provenită datorită ascuţirii la unghiul γ (fig. 13) are însemnătate din punctul de vedere al formei fundului golului dintre dinţii prelucraţi, adică are influenţă asupra concentrării tensiunilor de încovoiere de la piciorul dinţilor.

Valoarea unghiului λ se deduce din figura 12

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a}{\dfrac{b}{\cos \gamma_k}} = \cos \gamma'_k, \operatorname{tg} \gamma'_k, \operatorname{tg} \alpha_v$$

(deoarece $a = b \cdot \operatorname{tg} \gamma'_k, \operatorname{tg} \alpha_v$).

Deci

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \alpha_v, \sin \gamma_k. \tag{87}$$

Deplasarea pietrei $S_{e.i}$, se deduce din figura 3

$$S_{e.l} = R_{e.i}. \sin \gamma_k. \tag{88}$$

6. CONCLUZII

Cunoscîndu-se analitic geometria cuţitelor capetelor de frezat dinţi circulari, ai angrenajelor cu dantura în arc de cerc, precum şi erorile ce pot interveni, se poate trece la execuţia corectă a cuţitelor în condiţiile actuale de la noi.

Metoda propusă de rectificare conică, justificată din punct de vedere analitic şi economic, poate constitui punctul de plecare pentru o serie de cercetări experimentale în cadrul uzinelor de specialitate.

Primită la redacţie la 15 octombrie 1958.

ГЕОМЕТРИЯ РЕЗЦОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ КОНИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЕН С ЗАКРУГЛЕННЫМИ ЗУБЬЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В целях создания возможности правильного изготовления резцов для фрезерования дугообразных шестереночных зубьев необходимо аналитическое знание геометрии этих резцов, а также допустимых теоретических погрешностей.

В настоящей работе авторы исследуют форму поверхностей, лучше всего отвечающих требованиям, предъявляемым к резцам, рассматривая логарифмический геликоид, архимедов геликоид и конус. В результате аналитического исследования установлено, что последние две поверхности являются наиболее подходящими и могут изготовляться в условиях, существующих в РНР.

Авторы приходят к выводу, что необходимо уделить наибольшее внимание изготовлению резцов с коническими боковыми гранями как с точки зрения точности, так и с экономической точки зрения.

Работа содержит данные в связи с приспособлениями для изготовления резцов по обоим рассмотренным методам.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Принцип образования закругленных зубьев. 1 — резцовая головка; 1*a* — наружный (проходной) резец; 1*b* — внутренний (расточный) резец; 2 — плоское колесо; 3 — заготовка.

Рис. 2*a*. — Наружный (проходной) резец. C_e — направляющая кривая боковой наружной грани (расположенная в плоскости xOy); G_e — наружная образующая (расположенная в плоскости, проходящей через O_z); O_z — ось резцовой головки; PT — касательная к траектории резца; α_{s_e} — внешний боковой угол установки.

Рис. 2*b*. — Внутренний (расточный) резец. C_i — направляющая кривая боковой внутренней грани (расположенная в плоскости xOy); G_i — внутренняя образующая (расположенная в плоскости, проходящей через O_z); O_z — ось резцовой головки; QT — касательная к траектории резца; α_{s_i} — внутренний, боковой угол установки.

Рис. 3. — Наружный (проходной) резец.
Рис. 4. — Схема затыловки резца.
Рис. 5. — Контакт между шлифовальным кругом и спиралью.
Рис. 5*a*. — Реальный профиль резца после затылования.
Рис. 6. — Определение глубины затылования.
Рис. 7. — Боковые грани конических резцов.
Рис. 8. — Отклонение профильного угла при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$.
Рис. 9. — Определение вершинного угла установки α_v.
Рис. 10. — Приспособление для заточки проходных резцов.
Рис. 11. — Расчет элементов приспособления для заточки проходных резцов.
Рис. 12. — Определение параметров заточки.
Рис. 13. — Наклон λ проходного резца.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER WERKZEUGE ZUR BEARBEITUNG KONISCHER ZAHNRÄDER MIT KREISFÖRMIGER ZAHNUNG

ZUSAMMENFASSUNG

Für die korrekte Ausführung der Werkzeuge zum Fräsen kreisförmiger Zähne der Kreisbogen-Zahnradantriebe ist es notwendig die Geometrie dieser Werkzeuge und auch die eventuell zulässigen theoretischen Fehler zu kennen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Form der Flächen, die sich am besten für die den Werkzeugen entsprechenden Bedingungen eignen, untersucht, wobei die logarithmische Schraubenfläche, die Schraubenfläche des Archimedes und der Kegel in Betracht gezogen werden. Aufgrund des analytischen Studiums wird festgestellt, dass die letztgenannten beiden Flächen wichtig sind und unter den gegenwärtigen Bedingungen in der Rumänischen Volksrepublik ausgeführt werden können.

Die Verfasser kommen zu der Schlussfolgerung, dass die Ausführung von Werkzeugen mit konischen Auflageflächen vom Standpunkt sowohl der Präzision als auch der Wirtschaftlichkeit die vollste Beachtung verdient.

Die Arbeit enthält Angaben über die Vorrichtungen zur Herstellung der Werkzeuge nach den beiden hier untersuchten Verfahren.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN

Abb. 1. — Prinzip der Erzeugung der Kreiszahnung. 1 = Messerhalter; 1 *a* = äusseres Messer; 1 *b* = inneres Messer; 2 = ebenes Rad; 3 = Halbfabrikat.

Abb. 2 *a*. — Äusseres Messer. C_e = Richtkurve der äusseren Seitenfläche (in der Ebene xOy); G_e = äussere Erzeugungskurve (in einer Ebene die durch die Oz-Achse läuft); Oz = Achse des Messerhalters; PT = Tangente an der Bahn des Messers; α_{s_e} = äusserer Freiwinkel.

Abb. 2 *b*. — Innerers Messer. C_i = Richtkurve der inneren Seitenfläche (in der Ebene xOy); G_i = innere Erzeugungskurve (in einer Ebene die durch die Oz-Achse läuft); Oz = Achse des Messerhalters; QT = Tangente an der Bahn des Messers; α_{si} = innerer Freiwinkel.

Abb. 3. — Äusseres Messer.

Abb. 4. — Schema der Hinterdrehung des Messers.

Abb. 5. — Kontakt zwischen dem Schleifmittel und der Spirale.

Abb. 5 *a*. — Tatsächliches Profil des Messers, durch Hinterdrehung berichtigt.

Abb. 6. — Bestimmung der Hinterdrehtiefe.

Abb. 7. — Seitenflächen der konischen Messer.

Abb. 8. — Abweichung des Profilwinkels, für $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_1$.

Abb. 9. — Bestimmung des Spitzensetzwinkels α_v.

Abb. 10. — Vorrichtung zur Berichtigung der äusseren Messer.

Abb. 11. — Berechnung der Elemente der Vorrichtungen zur Berichtigung der äusseren Messer.

Abb. 12. — Bestimmung der Schleifparameter.

Abb. 13. — Neigung λ der Übergangsschneide.

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

MĂSURAREA ASPERITĂŢILOR ŞI A ROTUNJIRII TĂIŞULUI LA SCULELE AŞCHIETOARE

DE

A. KARDOS*)

Determinarea durabilităţii tăişului sculelor este cea mai importantă dintre încercările actuale în curs, privind aşchierea. Durabilitatea sculelor este definită ca fiind timpul de aşchiere necesar pentru producerea unei anumite uzuri admisibile. Valoarea uzurii admisibile este determinată de materialul sculei, de materialul pieselor de prelucrat şi de condiţiile de aşchiere.

La majoritatea încercărilor, uzura tăişului se defineşte prin uzura feţei de degajare. Aceasta se determină prin măsurarea distanţei dintre muchia uzată şi cea iniţială (fig. 1).

Astăzi, măsurarea uzurii de pe faţa de degajare poate fi considerată deja o operaţie obişnuită în cadrul încercărilor privind aşchierea. În ultimii ani s-au făcut cercetări referitoare la măsurarea calităţii şi a rotunjirii tăişului.

S-au elaborat diferite procedee pentru determinarea profilului tăişului sculelor.

B. Kosteţki [1] a făcut fotografii mărite de la 100 pînă la 500 ori ale feţelor laterale şi ale secţiunii sculelor cercetate, determinînd, cu ajutorul acestor fotografii, rotunjirea tăişului. E. N. Maslov [2], examinînd calitatea rectificării sculelor, a măsurat rotunjirea tăişului, mărind imaginea de 500 ori. P. S. Saharov [3] a comunicat date privitoare la asperităţile feţelor şi tăişului sculelor, iar A. Sadowski [4] date privitoare la efectul exercitat de asperităţile tăişului asupra asperităţilor suprafeţei prelucrate. P. E. Diacenko [5] a măsurat microgeometria tăişului sculei cu un palpator din oţel de scule călit, montat într-un profilometru Abbot. Pentru măsurarea asperităţilor tăişului, A. Heiss [6] a proiectat un palpator special, în formă de lopată cu tăişul de măsurare

---

*) Budapesti Müszaki Egyetem Gépgyártástechnológiai Tanszék.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1843

din safir, care a fost aplicat în aparatul Forster-Leitz pentru determinarea asperităților superficiale și a fotografiat asperitățile tăișului, mărindu-le de 1 000 de ori. P. E. Diacenko și Iakobson [7] au comunicat date privitoare la rotunjirea tăișului în funcție de unghiul la vîrf al sculelor, iar pentru determinarea calității tăișului au elaborat o formulă bazată pe datele obținute la măsurarea asperităților de pe fețele de degajare și de așezare. W. Dawihl și C. Dinglinger [8] au cercetat tăișul sculei din trei direcții (perpendicular pe fața de degajare, perpendicular pe fața de așezare și după bisectarea unghiului la vîrf) cu o mărire de 250 de ori. Din primele două fotografii au determinat asperitățile tăișului, iar din a treia, rotunjirea medie a acestuia.

Cercetările precedente s-au limitat în primul rînd la examinarea tăișului la sculele noi ascuțite. La Catedra de tehnologie a construcțiilor de mașini de la Institutul politehnic din Budapesta s-au întreprins cercetări [9] privind studiul modificării asperităților și rotunjirii în timpul așchierii la strunjirea aliajelor de aluminiu.

Asperitățile tăișului au fost măsurate cu un profilometru la care s-a montat un palpator special în locul vîrfului de diamant. Partea palpatorului care vine în contact cu tăișul sculei este o pană confecționată dintr-un material ceramic (palpatorul este compus din trei bucăți; greutatea sa este de aproximativ 1 g). Măsurarea se efectuează în același fel ca măsurarea suprafețelor plane : deplasînd palpatorul de-a lungul tăișului, aparatul măsoară asperitățile acestuia. Pentru conducerea palpatorului de-a lungul tăișului, dispozitivul este prevăzut cu un papuc alunecător. În figura 2 este arătată măsurarea cu acest aparat.

Etalonarea aparatului se face cu un etalon în formă de pană ($\beta=50°$) cu suprafața rectificată cu un disc cu granule de diamant. Asperitățile etalonului sînt $h_q = 8—10$ microinch. Utilizarea lui corespunde cu utilizarea etalonului de sticlă atașat la profilometru.

Experiențele prealabile efectuate pentru aprecierea calității ascuțirii sculelor au demonstrat că rectificarea sculelor din oțel rapid R3 cu un disc KA din electrocorund cu duritatea K, cu liant ceramic și cu granulație 80, asigură o ascuțire corespunzătoare. Astfel rezultă asperități cu $h_q = 20\text{-}30$, microinch. A fost cercetată variația modificărilor suferite de asperitățile tăișului în cursul așchierii, în funcție de timpul de așchiere, variația fiind reprezentată cu ajutorul curbelor de uzură.

Concomitent cu măsurarea asperităților tăișului, se determină și uzura feței de degajare și se reprezintă curbele de uzură. Se ia ca bază timpul care trece pînă la apariția unor porțiuni de uzură catastrofală pe curbele de uzură : 100% [10]. Cu ajutorul acestora, timpul la care se fac măsurările în cadrul experiențelor poate fi transformat din minute în procente și în modul acesta rezultatele mai multor măsurări pot fi reprezentate pe aceeași diagramă. Ca urmare, cu o parte din măsurări s-a realizat diagrama *asperitățile tăișului — timp de așchiere*, reprezentată în figura 3.

Din această diagramă se vede că asperitățile tăișului se accentuează în decursul așchierii. Forma curbelor ridicate în decursul experiențelor este similară cu forma curbelor de uzură. Corelația nu a putut fi încă matematic determinată (nu s-a reuşit încă să se găsească nici expresia matematică generală a curbelor de uzură). Se poate afirma însă că asperităţile tăişului şi uzura sculelor variază după legi similare. Cercetările viitoare vor trebui să răspundă la întrebarea în ce măsură poate fi influenţată uzura sculelor prin modificarea asperităţilor tăişului (de ex. prin rectificare).

Rotunjirea tăişului a fost măsurată cu un aparat Schmaltz pentru examinarea calităţii suprafeţelor (microscop dublu ; C. Zeiss Jena). Cu acest aparat, pe suprafaţa examinată se proiectează sub un unghi de 45°, un fascicul îngust de lumină. Asperităţile din porţiunea luminată a suprafeţei pot fi examinate perpendicular pe direcţia luminării, după o mărire corespunzătoare. Dacă scula care urmează să fie examinată este astfel aşezată pe măsuţa aparatului încît axa proiectorului cilindric să coincidă cu bisectoarea unghiului la vîrf a sculei, iar fasciculul de lumină să fie perpendicular pe tăişul sculei, în microscop apare ca neregularitate muchia sculei dintre faţa de degajare şi faţa de aşezare precum şi rotunjirea tăişului (fig. 4).

Conform experienţelor efectuate, rotunjirea tăişului corespunde unor curbe care pot fi înlocuite cu suficientă aproximaţie printr-un arc de cerc. Înlocuind micrometrul ocularului printr-o placă pe care s-au trasat arce de cerc de diferite raze, rotunjirile care apar în cîmpul vizual pot fi asimilate cu arce de cerc, deci pot fi măsurate.

În figura 5 se vede acea poziţie a arcelor de cerc care în cadrul experienţelor a fost găsită ca cea mai favorabilă. Cifrele notate lîngă arcele de cerc reprezintă dimensiunile razelor în sutimi de milimetri. Dimensiunile arcelor de cerc pot fi controlate cu un etalon prevăzut cu diviziuni din 0,01 mm, în 0,01 mm ataşat instalaţiei de măsurat. Din cauza unghiului de incidenţă de 45° a fasciculului luminos, rotunjirea reală a tăişului se calculează cu ajutorul razei de rotunjire, citită la microscop, cu formula de mai jos

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

în care ρ este raza de rotunjire a tăişului sculei iar r valoarea razei citită la microscop.

De asemenea, se poate determina exact, cu ajutorul imaginii din cîmpul vizual, valoarea reală a unghiului la vîrf β a sculei, utilizînd formula :

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2},$$

în care β este unghiul la vîrf determinat cu microscopul.

La măsurările efectuate cu această instalaţie, rotunjirea tăişului, etalonului menţionat mai înainte, folosit pentru măsurarea fineţei tăişului, a fost de 0,01 mm, iar rotunjirea tăişului sculelor, ascuţite în condiţiile descrise, a fost în medie de 0,02 mm.

Măsurarea şi reprezentarea variaţiei rotunjirii tăişului în cursul aşchierii s-a executat similar cu măsurarea calităţii tăişului, descrisă mai înainte. În figura 6 se vede că rotunjirea tăişului se măreşte în cursul aşchierii pînă într-un moment, care precede cu scurt timp sfîrşitul durabili-

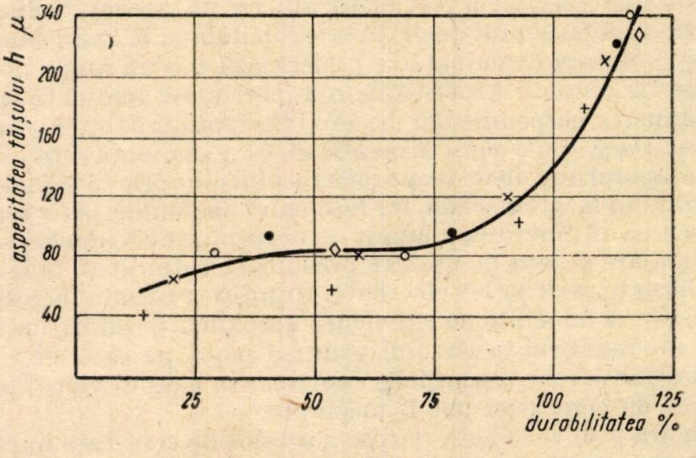

asperitatea tăișului h μ
340
200
160
120
80
40
25
50
75
100
125
durabilitatea %

Fig. 3

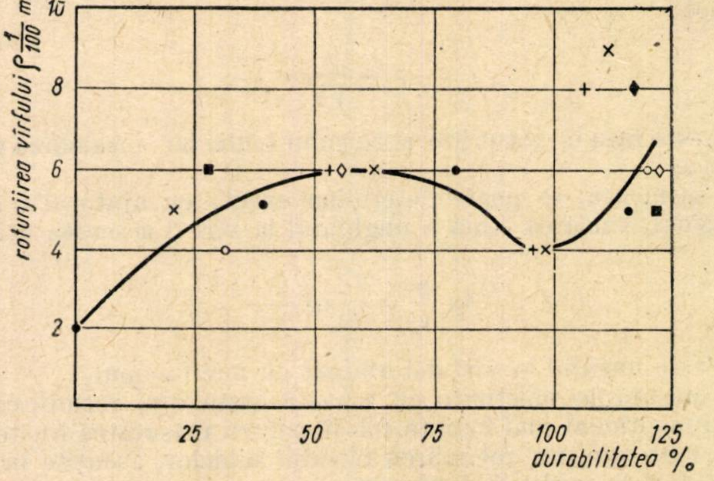

rotunjirea vîrfului ρ 1/100 mm
10
8
6
4
2
25
50
75
100
125
durabilitatea %

Fig. 6

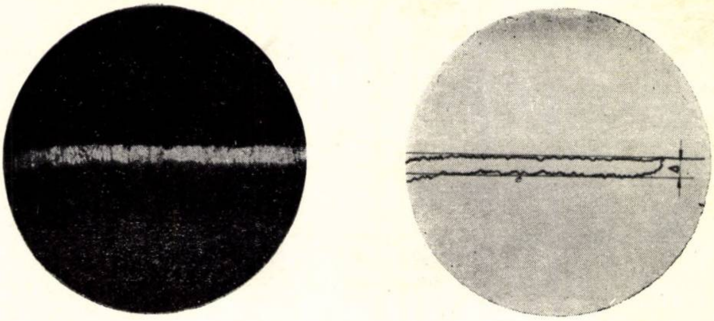


Fig. 1

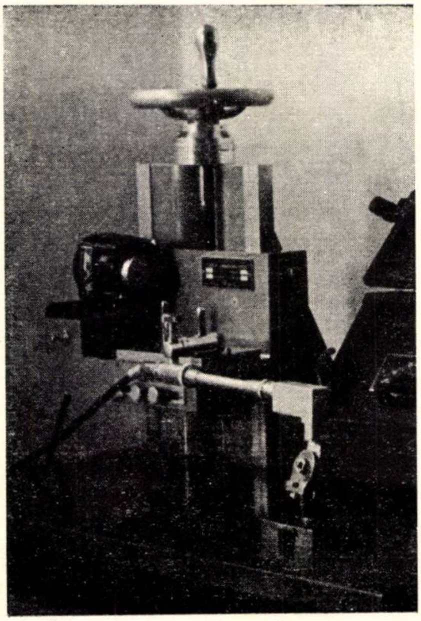


Fig. 2

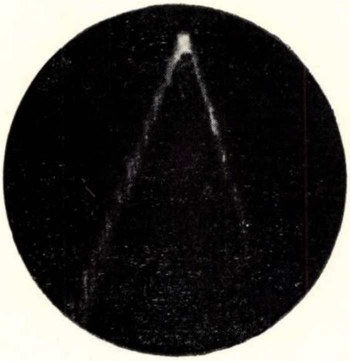
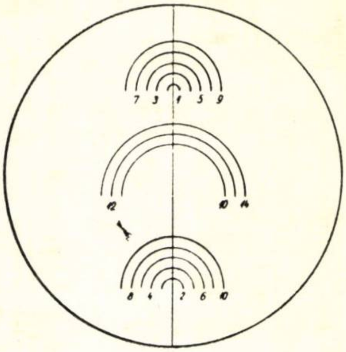


Fig. 4



7 3 1 5 9
12 10 14
8 4 2 6 10

Fig. 5

tății. În această ultimă perioadă, rotunjirea tăișului scade. În porțiunea de uzură catastrofală, valorile măsurate sînt foarte dispersate : în parte ele denotă o modificare neînsemnată a rotunjirii tăișului, în rest indică o creștere apreciabilă. Nu s-a reușit să se găsească o corelație matematică între rotunjirea tăișului și timpul de așchiere.

În fond, cercetările descrise au servit pentru determinarea modificărilor suferite de tăișul sculei în cursul așchierii. În bibliografie nu este menționată o serie completă de experiențe.

Din experiențele efectuate după metodele de mai sus [9], se pot trage concluzii importante privind modul cum evoluează uzura sculelor, iar prin extinderea experiențelor, cunoștințele noastre, referitoare la procesul așchierii, pot fi considerabil lărgite.

Primită la redacție la 31 decembrie 1958.

ИЗМЕРЕНИЕ ЗАЗУБРЕННОСТИ И СКРУГЛЕНИЯ РЕЖУЩЕЙ КРОМКИ МЕТАЛЛОРЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе рассматриваются некоторые виды износа токарных резцов в процессе резания.

Показывается влияние зазубренности режущей кромки и радиуса закругления передней грани на развитие износа.

Исходя из этих элементов изображается изменение зазубренности режущей кромки в зависимости от времени, причем получается кривая, подобная кривой износа. Эти же выводы справедливы и для кривых, изображающих изменение скругления передней грани резца.

Определения зазубренности режущей кромки производилось при помощи профилометра, а скругление передней грани было исследовано при помощи двойного микроскопа „Шмальц".

MESURE DES ASPÉRITÉS ET DU RAYON DE LA POINTE DES OUTILS DE TOUR

RÉSUMÉ

L'auteur analyse, dans ce travail, certains aspects de l'usure des outils au cours du processus de tournage.

Il relève l'importance des aspérités de l'arête coupante et celle du rayon de raccordement de la pointe de l'outil, pour l'évolution de son usure.

En partant de ces éléments, il représente les variations des aspérités du tranchant en fonction du temps et obtient une courbe similaire à la courbe de l'usure. Les mêmes conclusions sont valables pour les courbes représentant les variations du rayon de la pointe de l'outil.

La détermination des aspérités du tranchant a été faite à l'aide d'un profilomètre ; la variation du rayon de la pointe a été suivie au microscope double «Schmaltz».

BIBLIOGRAFIE

1. Б. И. КОСТЕЦКИЙ, *Стойкость режущих инструментов.* Машгиз, Москва, 1949.
2. Е. Н. МАСЛОВ, *Основы теории шлифования металлов.* Москва, Машгиз, 1952.
3. П. С. САХАРОВ, *Микрогеометрия режущего инструмента.* Станки и инструмент, март, 32 (1952).
4. A. SADOWSKI, *Gladkosc pavierzhni ostrzy marzedzi skrava jacych*, Mechanik Warsawa, ianuarie, *3* (1953).
5. П. Е. ДЬЯЧЕНКО, *Механизм образования неровностей на обработанной поверхности.* Станки и инструмент, сентябрь (1947).
6. A. HEISS, *Schartigkeit von Werkzeugschneiden*, Werkstattstechnik, Maschinenbau, iunie, 233 (1951).
7. P. E. DIACENKO, *Influenţa aşchierii asupra calităţii suprafeţei prelucrate ale metalelor.* Népszava, Budapesta (1953).
8. W. DAWIHL, E. DINGLINGER, *Handbuch der Hartmetallwerkzeuge*, Springer, Berlin (1953).
9. A. KARDOŞ, *Cercetarea posibilităţilor de prelucrare ale aliajelor de aluminiu* (Disertaţia de candidatură), Budapesta, 1956.
10. T. POGANY, *Metodele de examinare la aşchiere a plăcuţelor ceramice şi rezultatele obţinute cu calitatea L.C.*, Comunicatul Institutului tehnologic pentru industria de maşini, **13**, *5*, 3 (1953).

INSTALAȚIE CENTRALIZATOARE DE SISTEME DE MĂSURĂ PENTRU STUDIUL MAȘINILOR ȘI SCULELOR AȘCHIETOARE

DE

M. P. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU

În laboratorul de prelucrarea mediilor continue din Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., s-a realizat recent o stație centrală de măsură *). Această instalație complexă a fost impusă de o gamă întreagă de condiții ce trebuie îndeplinite riguros, de cei ce execută un studiu al așchierii. Cercetările ce se efectuează în acest domeniu sînt condiționate de o serie de măsurători ce privesc determinarea parametrilor procesului fizic al așchierii. Se urmărește astfel elucidarea unor aspecte teoretice privind corelația ce există între diferiții parametri ai așchierii metalelor.

O caracteristică a experiențelor ce se efectuează este necesitatea menținerii constant în timp, a unui anumit grup de parametri, atunci cînd unul dintre ei este variabil. Acest aspect impune efectuarea unor măsurători concomitente pentru diferiți parametri.

Instalația centralizată răspunde acestor cerințe. Pe un pupitru central, s-a montat aparatura specifică măsurării parametrilor turație, timp, putere etc.

Pentru comoditatea manipulării, pupitrul propriu-zis a fost realizat în formă de arc în interior stabilindu-se locul experimentatorului. Aparatura de măsură este fixată orizontal și vertical pe plăci de pertinax, asamblate cu aluminiu, în scheletul metalic al standului de măsură.

Așa cum rezultă din figura 1, aparatura a fost astfel repartizată ca să se asigure rapiditatea în executarea măsurătorilor și citirilor fiecărui parametru în parte.

În fața cercetătorului care efectuează măsurătorile se află instalată de asemenea și aparatura pentru măsurarea uzurii sculei așchietoare.

În partea dreaptă s-a montat, pe panoul vertical, aparatura de înregistrare a timpului, iar pe panoul orizontal aparatura pentru înregistrarea temperaturii. Tot aici se află instalația pentru măsurarea puterii pentru mașini-unelte grele (fig. 2).

În partea stîngă este instalată aparatura de măsurare a turației și cea pentru determinarea puterii mașinilor-unelte mijlocii. Manipularea este asigurată de semnalizatoare optice

---

*) Instalația a fost realizată cu concursul tehnicienilor V. Mereanu și P. Vasilescu.

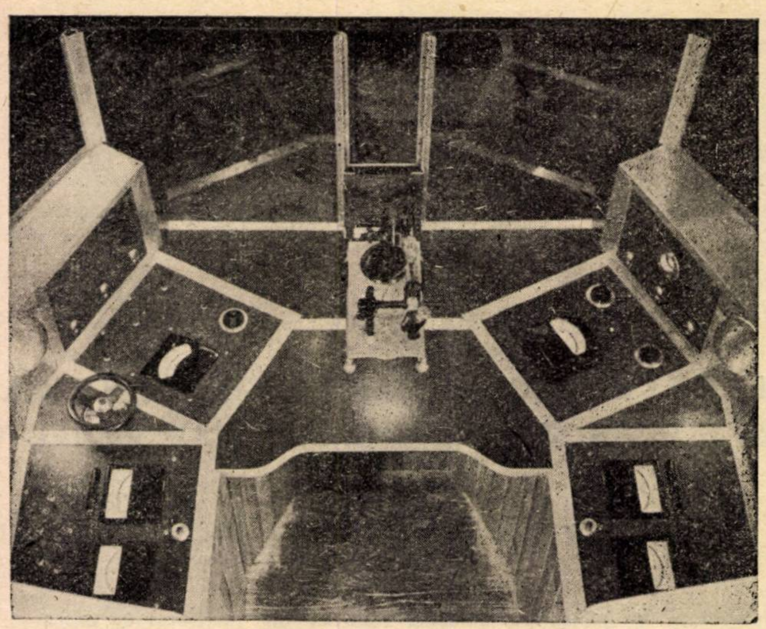


Fig. 1. — Vedere de ansamblu a instalației.

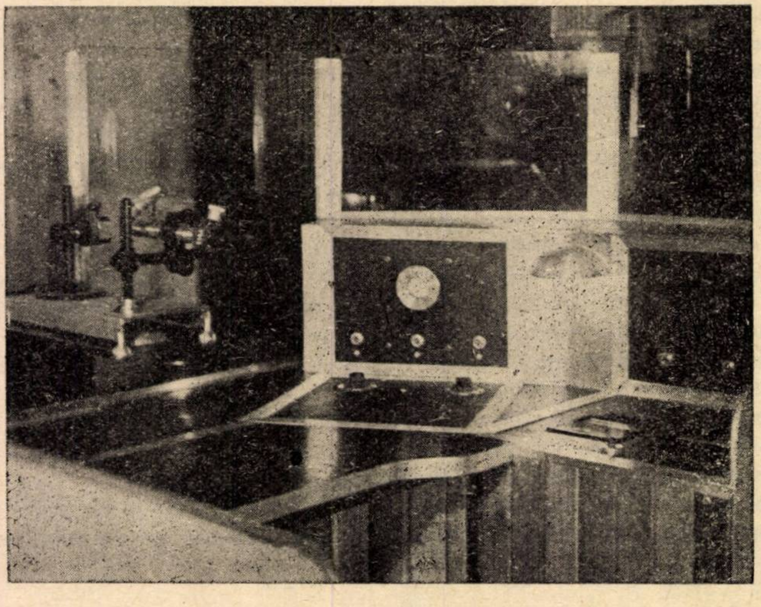


Fig. 2. — Detalii ale instalației.

plasate pe panourile verticale. Pe acelaşi panou s-a prevăzut spaţiu şi pentru instalarea aparaturii de măsurat forţele de aşchiere.

Menţionăm că pentru o parte din dispozitivele de măsură (putere, turaţie, timp) s-a prevăzut posibilitatea conectării pentru măsurători succesive la trei maşini-unelte.

Măsurarea turaţiei se execută cu un miliampermetru clasa 1,5 cu cinci scări, excitat de un generator de curent alternativ monofazat cuplat la axul principal al strungului. Cu ajutorul unei rezistenţe fixe se dublează numărul posibilităţilor de înregistrare a turaţiei.

Pentru măsurarea timpului, maşinile-unelte au fost prevăzute cu dispozitive de marcare a lungimii cursei cuţitului care comandă electric un cronometru cu ajutorul unui electromagnet plasat pe pupitru.

Măsurarea puterii se face prin metoda celor două wattmetre prin două punţi, pentru putere medie (cca. 10 kW) şi respectiv putere mare (cca. 30 kW). Pentru puterea medie, instalaţia permite comutarea punţii succesiv pe trei maşini, care funcţionează concomitent.

Măsurarea uzurii se face pe cale optică cu ajutorul unui microscop ce măsoară micronul, sistemul permiţînd mişcări care creează posibilitatea măsurării uzurii tuturor feţelor cuţitului.

Temperatura medie ce se dezvoltă în timpul procesului de aşchiere se determină utilizînd *termocuplul natural* ce se formează prin contactul piesă-cuţit, citirea făcîndu-se direct la un milivoltmetru.

În momentul de faţă măsurarea componentelor efortului de aşchiere se execută cu o instalaţie cu doze piezo-cuarţ. S-a prevăzut posibilitatea adaptării la instalaţia centrală de măsură şi a altor sisteme (rezistiv şi inductiv).

În concluzie, instalaţiile de cercetare ale laboratorului pentru studiul aşchierii metalelor, a fost dotat cu acest stand centralizator, care răspunde tuturor cerinţelor impuse de măsurarea întregei game de parametri ai aşchierii. El permite totodată selecţionarea fiecărui parametru, urmărirea centralizată a mai multor maşini prin citiri rapide şi comutări simple. În acest fel se înlătură pericolul conectărilor greşite, raţionalizîndu-se utilizarea atît a instrumentelor de măsură, cît şi a forţelor de cercetare.

Primită la redacţie la 8 aprilie 1959.

УСТАНОВКА ДЛЯ ЦЕНТРАЛИЗАЦИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ И ИНСТРУМЕНТОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе дается описание установки, предназначенной для выполнения и сводки измерений различных параметров резания металлов при исследованиях, проведенных в Институте прикладной механики имени Траяна Вуя.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Общий вид установки.
Рис. 2. — Детали установки.

BANC CENTRALISÉ DE SYSTÈMES DE MESURE POUR L'ÉTUDE DES MACHINES ET OUTILS DE COUPE

RÉSUMÉ

Le travail donne la description d'une installation destinée à effectuer et à concentrer les mesures des différents paramètres de coupe des métaux pendant les recherches entreprises à l'Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia».

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Vue d'ensemble de l'installation.
Fig. 2. — Détails de l'installation.

STUDIUL UNOR CUPLURI OPTIME CĂMAȘĂ-PISTON LA POMPELE DE EXTRACȚIE

ÎNCERCĂRI DE LABORATOR

DE

D. RAȘEEV *)

Importanța pentru producția de țiței a îmbunătățirii calității cuplului cămașă-piston a pompele de extracție este bine cunoscută. Ea rezultă din faptul că marea majoritate a țițeiului în țara noastră se extrage cu ajutorul pompelor de extracție, iar piesele ce se uzează cel mai repede sînt de obicei cămășile și pistoanele. Prelungirea duratei de funcționare a acestora va duce la creșteri importante a producției de țiței [1] și scăderea prețului de cost.

Factorul principal care reduce durata de funcționare a cuplului cămașa-piston este uzura. Într-adevăr conform clasificării sondelor din R.P.R. făcute de Institutul de cercetări foraje-extracție Cîmpina numărul sondelor clasificate în categoria celor corosive sau corosiv-abrazive este relativ mic. Problemele uzurii sînt în general foarte complexe, iar cele legate de cercetarea comportării cuplului menționat se complică și mai mult dacă se ține seamă de condițiile specifice legate de sondă, zăcămînt etc. În aceste condiții cercetarea problemei trebuie făcută pe diferite trepte (laborator, standuri de probă și schelă) etapele succesive canalizînd cercetarea pe celelalte trepte, lămurind întîi influența factorilor principali și apoi a celorlalți factori specifici, din ce în ce mai adînc și complet, proba supremă fiind controlul în practică.

În prezenta lucrare se prezintă etapa cercetării unor cupluri optime în condiții de laborator. Încercările s-au făcut pe mașina pentru încercat la uzură în mediu abraziv IPG-T-2: mașină de tipul celei utilizate în încercările lui E. L. Marhasin [2].

Această mașină deși nu reproduce exact condițiile de funcționare a cuplului cămașă-piston în condiții de sondă (acest lucru nici nu este posibil în laborator) permite studierea prin încercări de scurtă durată a influenței unor factori principali asupra uzurii tipice a cuplului studiat, permițînd obținerea unor date comparative valabile.

Principiul de funcționare a mașinei IPG-T-2. Mașina a fost proiectată și construită în așa fel ca să permită încercarea la uzură în mediu lichid abraziv sau coroziv a unor inele și pistoane fabricate special sau tăiate din cămășile și pistoanele pompelor de extracție.

---

*) Institutul de petrol, gaze și geologie, București.

Mașina construită a cărei schemă de principiu este dată în figura 1 se caracterizează prin următoarele :

1. Încercarea la uzură se poate face în mediu abraziv sau coroziv în cazul mișcării de translație a unui cuplu format dintr-un inel crestat și un piston de dimensiunile corespunzătoare. Cuplul de probă poate fi tăiat din cămașa și pistonul de dimensiuni uzuale a unei pompe de extracție sau fabricate special. Lățimea inelului poate fi pînă la 10 mm, iar lungimea pistonului pînă la 90...100 mm. Inelul trebuie să fie crestat și elastic. De aceea inelele tăiate din cămășile pompelor trebuie strunjite la exterior pentru a se micșora grosimea peretelui și a asigura elasticitatea dorită.

2. Presiunea specifică între inelul crestat și piston poate fi reglată prin modificarea tensiunii din fir. Pentru inele de 10 mm lățime se poate ajunge pînă la presiunea specifică 20 kg/cm² și chiar mai mult.

Inelul de același diametru cu piston se strînge prin tensionarea firului prin modificarea greutăților suspendate la capătul firului pînă se realizează un contact fără presiune între inel și piston. După aceea prin adăugare de greutăți se realizează tensiunea F din fir care dă naștere la o presiune specifică p între inel și piston. Ea se realizează fără a mai interveni deformarea inelului, putînd fi determinată din condiții de echilibru prin relația $p = \frac{2\pi F}{S}$ kgf/cm² (F — tracțiune în fir în kgf ; S — suprafața pieselor în contact în cm²).

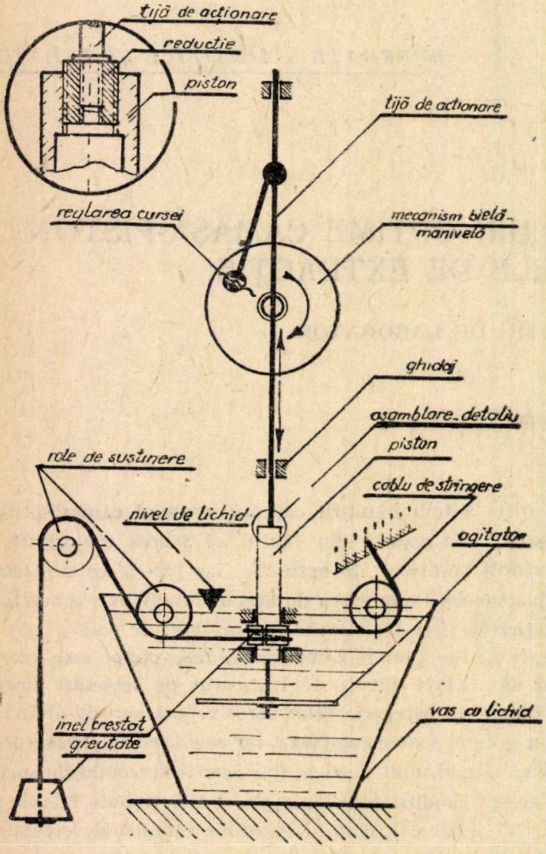


Fig. 1. — Schema de principiu a mașinii de laborator tip IPG-T-2 pentru încercări la uzură.

3. În timpul încercării, cuplul poate fi introdus într-un mediu lichid, care poate conține la nevoie în suspensie particule abrazive sau să conțină compuși corosivi.

4. În timpul încercării inelul este fix, iar pistonul exercită o mișcare de dute-vino. Cursa pistonului este reglabilă între 50...100 mm. Instalația este pusă în mișcare prin intermediul unui reductor de un motor de 1 kW și 1420 rot/min. Se poate realiza următoarea gamă de curse duble pe minut : 24, 38, 60 ; 95 ; 141 ; 215.

Uzura elementelor cuplului se determină prin cîntărire la o balanță analitică cu precizia de 0,1 mg.

Metode și condițiile de efectuare a încercărilor. Pentru stabilirea condițiilor optime de efectuare a încercărilor s-au făcut probe speciale, folosindu-se în același timp rezultatele obținute de E. L. Marhasin [2].

În privinţa *mediului lichid*, încercările [2] au stabilit că folosirea în locul ţiţeiului a apei sau a amestecului de produse petrolifere nu influenţează sensibil asupra uzurii. Acelaşi lucru a fost confirmat prin încercări preliminare pe maşina IPG-T-2. Mediul, suspensie de marşalită în apă, a fost folosit şi în cadrul cercetării [1].

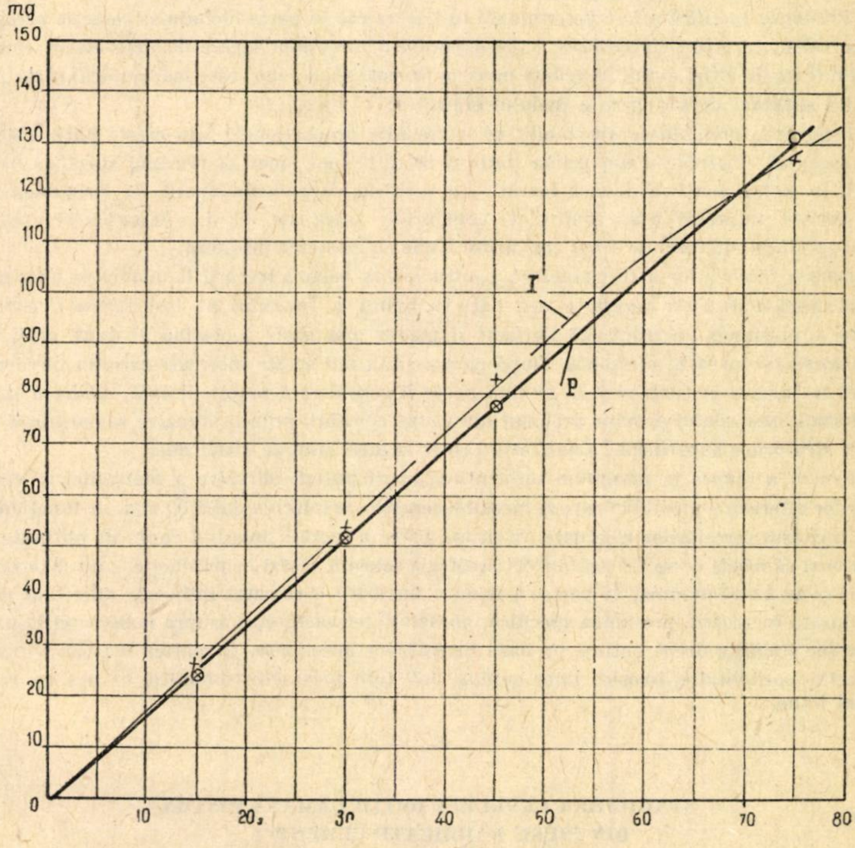


Fig. 2. — Variaţia uzurii în funcţie de timp
I — inel, *P* — piston.

Primele încercări de probă pe maşina IPG-T-2 efectuate în suspensie de marşalită în apă, au arătat însă că piesele în timpul probei pot rugini. De aceea, ţinînd seama de cele de mai sus s-a ales drept mediu un amestec de o parte motorină şi două părţi ulei de transformator.

Materialul abraziv folosit a fost marşalită de aceeaşi calitate cu cea folosită în încercările [1]. La amestecul de ulei şi motorină s-a adăugat 20% marşalită la greutate. S-a ales o concentraţie atît de ridicată a marşalitei cu scopul de a asigura o uzură rapidă a cuplului încercat prin aceasta a scurta încercările [2]. Pentru ca abrazivul să nu se decanteze, lichidul a fost agitat continuu.

Cuplurile încercate au fost inele şi pistoane tăiate în majoritatea cazurilor din cămăşile şi pistoanele pompelor de extracţie din fabricaţie curentă a uzinelor constructoare. Precizia pieselor corespunde clasei a 2-a după STAS, avînd gama de dimensiuni ce asigură un joc nominal de 25 μ. Tăierea inelelor crestate şi a pistoanelor pentru încercare din piese executate atît de precis, a asigurat păsuirea corectă a suprafeţelor în frecare.

O presiune mai uniformă s-ar putea realiza în cazul eşantioanelor plane făcînd modificări în schema maşinii. În acest caz nu s-ar putea însă folosi eşantioanele corespunzătoare pieselor reale, ceea ce ar introduce erori importante.

Presiunea specifică a fost determinată în fiecare caz în parte făcîndu-se corecţia presiunii specifice calculate prin determinarea experimentală a corecţiilor legate de deformarea elastică a inelului (care de altfel avînd în vedere precizia executării pieselor, este foarte mică) şi de pierderile din sistemul de strîngere a inelului crestat.

Încercările preliminare au stabilit că uzura este proporţională sau creşte puţin cu presiunea specifică. Încercările din prima parte a lucrării s-au făcut la presiuni specifice de 6,5 kgf/cm^2. În cadrul părţii a doua a lucrării s-a verificat dependenţa uzurii de presiunea specifică. Aceste încercări n-au confirmat concluziile trase de E. L. Marhasin că la presiuni specifice mai mari de 1 kgf/cm^2 uzura scade cu creşterea presiunii.

Durata încercărilor a fost stabilită pentru prima parte a lucrării la 60 min pe baza unor încercări speciale ale căror rezultate sînt date în figura 2. Încercări au fost făcute în condiţii obişnuite — presiunea specifică 6,5 kgf/cm^2 şi mediu una parte motorină şi două părţi ulei de transformator cu 20% marşalită. După cum rezultă din aceste încercări variaţia pierderilor de uzură în funcţie de timp pînă la 90 min poate fi considerată practic liniară, scăderea uzurii spre sfîrşitul intervalului provine probabil din cauza epuizării puterii abrazive a marşalitei şi a ajustării straturilor superficiale. Cantitativ aceste scăderi sînt de altfel mici.

Pentru a reduce la minimum influenţa scăderii puterii abrazive a marşalitei în cadrul încercărilor ulterioare, mediul în care se făceau încercările se înlocuia după 60 min. de funcţionare.

În cadrul cercetărilor efectuate, în prima parte a lucrării folosind cuplurile obţinute din pistoanele şi cămăşile ce se fabrică după tehnologia folosită astăzi în producţie, s-au determinat cuplurile ce au uzură minimă. În partea a doua a lucrării s-a cercetat influenţa diferiţilor parametri (durata încercării, presiunea specifică, abrazivitatea mediului) asupra rezistenţei la uzură a cuplurilor stabilite drept optime pe baza încercărilor anterioare. În partea a treia a lucrării s-a cercetat posibilitatea folosirii unor cupluri noi (din piese electroborate) ce pot da rezultate mai bune.

★

I. STABILIREA CUPLULUI OPTIM CĂMAŞA-PISTON DIN PIESE FABRICATE CURENT*)

Au fost încercate inelele crestate şi pistoanele tăiate din cămăşile şi pistoanele fabricate de uzinele ce produc aceste piese de schimb.

Caracteristicile lor principale sînt următoarele:

Cămăşi cementate executate din oţel OLC 16 STAS 880-49; cementate la gaze la 880—920°C timp de 10...12 ore cu răcire la aer călire întîi la 860—880°C cu răcire în ulei şi după aceea la 760—780°C cu răcire la apă; detensionate la 160—200°C în baie de ulei. După cementare se rectifică. Grosimea stratului cementat 0,8—1,5 mm; duritatea $H_{RA} = 81-85$. Urme de cementită secundară în strat. Rugozitatea suprafeţei clasa a 8-a, după GOST 2789-51 ($\nabla\nabla\nabla 8$).

Cămăşi nitrurate executate din oţel 35 XI-IOA GOST 4543-48; îmbunătăţite prin călire la 900—850°C răcire în ulei cu revenire la 600—650°C cu răcire în ulei. După strunjire detensionate la 550°. Înainte de nitrurare se rectifică iar după nitrurare 65—70 ore la 505—520°C se rectifică a doua oară.

---

*) La partea experimentală a colaborat A. Popovici.

Grosimea stratului nitrurat 0,2 mm, duritate $H_{RA} = 83-85$. Rugozitatea suprafeţei clasa a 8-a după GOST 2789-51 ($\nabla\nabla\nabla 8$).

Pistoane cromate executate din oţel OLT 65 STAS 2881-51. Călire prin curenţi de înaltă frecvenţă, rectificate şi după aceea cromate dur în baie de anhidridă cromică la 45—50°C.

Intensitatea curentului 45—50 A/dm^2. După cromare fierbere în baie de ulei la 160—200°C.

Grosimea stratului de crom 60—100 μ. Rugozitatea suprafeţei clasa 8-a după GOST 2789-51 ($\nabla\nabla\nabla 8$).

Pistoanele cementate şi nitrurate s-au executat după tehnologii similare cu cămăşile respective şi au avut cifre calitative şi caracteristice comparabile.

Pentru stabilirea cuplului optim încercările s-au făcut pe probe tăiate din cămăşile şi pistoanele pompei P. 2 × 1.1/4 (tabela 1).

Tabela 1

Nr. probei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inel	C_2	N_4	$OL60_6$	C_1	N_3	$OL60_5$	C_7	N_9	C_8	N_{10}
Piston	Cr_4	Cr_4	Cr_4	C_5	C_5	C_5	Cr_0	Cr_0	C_2	Cr_3

Notaţie. OL60 — inel confecţionat din STAS 500—49 OL60 recopt.
C — inel sau piston tăiat din piesa corespunzătoare cementată.
N — inel tăiat din cămaşa nitrurată.
Cr — piston tăiat din piston cromat.

După cum rezultă din această tabelă un piston a fost folosit pentru executarea a două sau trei probe cu inele diferite. Avînd în vedere uzura mică a pistonului în decursul unei probe, acest lucru nu introduce erori din cauza uzurii accentuate a pistonului. În schimb se asigură o comparabilitate mai bună a uzurii diferitelor cupluri.

Deşi cămăşi din OL 60 nu se folosesc în schelă, inelul din acest material a fost încercat pentru comparaţie.

Măsurarea durităţilor înainte şi după efectuarea probelor a arătat variaţii neînsemnate. Rezultă deci că uzurile n-au depăşit limitele admisibile.

Încercările s-au făcut în următoarele condiţii :

Mediu : o parte motorină şi două părţi ulei de transformator la care s-a adăogat 20% în greutate marşalită.

Presiunea specifică 6 kgf/cm^2. Numărul de curse duble pe minut 60. Lungimea pistonului 90 mm. Lăţimea inelului $h = 9{,}9 \ldots 10{,}3$ mm. Suprafaţa inelului $S = c.h = (\pi d - i)\, h$ (în care i — mărimea crestăturii).

Raportul între lăţimea inelului h şi cursa pistonului L $K = \frac{h}{L} = 0{,}125$. Durata încercării 60 minute.

Rezultatele încercărilor sînt date în tabela 2. Pentru cuplurile identice sînt date valorile medii. Este de notat că pentru aceleaşi cupluri s-a obţinut o împrăştiere destul de mare a rezultatelor.

Pentru comparaţia cuplurilor se poate folosi suma pierderilor în greutate pe minut a inelului şi pistonului ($I + P$) mg/min sau criteriul propus de E. L. Marhasin [2] şi anume

Tabela 2

	Proba nr.	1/7	2/8/10	3	4/9	5	6
Inel	Material	C	N	OL60	C	N	OL60
	Pierderi de greutate pe oră mg/oră	57,2	57,4	130,7	193,05	98,8	373,6
	Pierderi de greutate pe minut, I mg/min	0,95	0,95	2,8	3,22	1,62	6,2
	Pierderi de greutate pe min pe unitate de suprafaţă, I' $I' = \frac{I}{S}$ mg/cm² min	0,10	0,10	0,29	0,33	0,17	0,65
Piston	Material	Cr	Cr	Cr	C	C	C
	Pierderi de greutate pe oră mg/oră	34	42,9	51,7	173	99,2	412,7
	Pierderi de greutate pe minut, P mg/min	0,57	0,72	0,86	2,88	1,66	6,86
	Pierderi de greutate pe min pe unitate de suprafaţă activă, P' $P' = \frac{P}{C \cdot L} = K \frac{P}{S}$ mg/cm² min	0,007	0,009	0,011	0,036	0,021	0,09
Cuplul	Pierdere de greutate pe minut $I + P$ mg/min	1,52	1,67	3,66	6,10	3,28	12,06
	Pierdere de greutate pe minut raportată la unitatea de suprafaţă $I' + P'$ mg/cm² min	0,107	0,11	0,30	0,366	0,19	0,74
	Raportul pierderilor de greutate $\frac{P}{I}$	0,60	0,75	0,31	0,90	1,02	1,11

pierderea de greutate totală pe minut raportată la unitate de suprafaţă a cuplului $(I' + P')$ mg/cm²min care ne dă creşterea jocului cuplului încercat, în ipoteza că uzura la greutate este proporţională cu uzura volumetrică. Totodată pentru caracteristica comportării unui cuplu prezintă interes raportul între pierderile prin uzură a pistonului şi inelului crestat $\frac{P}{I}$.

În tabela 3 sînt date valorile comparative între diferitele cupluri pe baza criteriilor de mai sus luîndu-se ca bază de comparaţie cuplul inel nitrurat piston cromat.

Tabela 3

Cuplul	Inel	N	C	N	OL60	C	OL60
	Piston	Cr	Cr	C	Cr	C	C
Pierdere de greutate raportată la cuplul N/Cr		1	0,91	1,97	2,2	3,66	7,24
Pierdere de greutate pe unitate de suprafaţă raportată la cuplul N/Cr		1	0,97	1,73	2,73	3,32	6,73

Din examinarea rezultatelor se pot trage următoarele concluzii :

1. Încercarea este sensibilă şi permite diferenţierea pe baza rezistenţei la uzură în mediu abraziv a diferitelor cupluri. Cele două criterii folosite, pierderea totală de greutate pe minut şi pierderea de greutate pe minut raportată la unitatea de suprafaţă dau cifre comparative apropiate şi stabilesc aceeaşi ordine în ceea ce priveşte rezistenţa la uzură în mediu abraziv a cuplurilor.

2. Cuplurile care au dat rezultate optime sînt cuplurile cămaşa (inel) nitrurată sau cementată piston cromat ceea ce concordă cu rezultatele altor cercetări [1]. Cuplul curent folosit în schelă, cămaşa cimentată-piston cementat, nu dă rezultate satisfăcătoare. Trebuie considerat ca raţional înlocuirea pistoanelor cementate cu cele cromate.

3. Pistonul cromat are uzură mai mică cînd este în cuplu cu cămaşa cementată, ceea ce a fost constatat şi la standul de probă pentru încercări semiindustriale IPG-T-1 [1].

4. Încercări pe ambele maşini IPG-T-1 şi IPG-T-2 dau în general rezultate comparabile numai calitativ, deoarece condiţiile de încercare nu sînt absolut identice. De asemenea, trebuie avut în vedere că rapoartele între lungimile cămăşilor, pistoanelor şi cursele pistoanelor sînt diferite şi diferă de ale pompelor de extracţie reale. De aceea în cazul comparaţiei rezultatelor trebuie introduse corecţiunile respective.

5. Încercarea pe maşina IPG-T-2 durează circa 60 min, iar pe maşina IPG-T-1 200...400 ore. Încercările pe maşina IPG-T-2 pot fi recomandate ca probe rapide în vederea stabilirii comparative a comportării diferitelor cupluri de cămăşi-pistoane ale pompelor de extracţie. Ele trebuie eventual completate cu încercări pe maşina IPG-T-1 [1] şi cu încercări la sondă pe pompe reale pentru stabilirea comportării în diferite condiţii de exploatare a cuplurilor optime găsite. O astfel de metodologie de încercare pe două sau trei etape succesive cu eliminarea treptată a soluţiilor necorespunzătoare şi precizare în ultima etapă a cuplului optim pentru anumite condiţii de exploatare reale prezintă avantaje indiscutabile.

II. INFLUENŢA PRESIUNII SPECIFICE, A DURATEI DE ÎNCERCARE ŞI A CANTITĂŢII DE ABRAZIV ASUPRA COMPORTĂRII CUPLULUI INEL-PISTON

Cercetarea influenţei diferiţilor parametri asupra rezistenţei la uzură în mediul abraziv al cuplului inel-piston s-a făcut pe cuplurile ce au dat rezultate optime şi anume pe cuplul inel nitrurat sau cementat-piston cromat.

Încercările s-au făcut pe piesele tăiate din cămăşile şi pistoanele pompei P. 21/2 × 1.3/4 (tabela 4).

Tabela 4

Nr. probei	A11	A12	A13	B21	B22	B23	B31	B32	B33
Inel	N_{14}	N_{14}	N_{14}	N_{13}	N_{13}	N_{13}	N_{13}	N_{13}	N_{13}
Piston	Cr_{11}	Cr_{11}	Cr_{11}	Cr_{12}	Cr_{12}	Cr_{12}	Cr_{12}	Cr_{12}	Cr_{12}
Nr. probei	C11	C12	C13	D21	D22	D31	D32	—	—
Inel	C_{12}	C_{12}	C_{12}	C_{11}	C_{11}	C_{11}	C_{11}	—	—
Piston	Cr_{13}	Cr_{13}	Cr_{13}	Cr_{15}	Cr_{15}	Cr_{15}	Cr_{15}	—	—

Încercările s-au făcut în următoarele condiţii :

Mediul o parte motorină şi două părţi ulei de transformator la care s-a adăogat 20% în greutate marşalită.

Tabela 5

	Proba nr.	A11	A12	A13	B21	B22	B23	B31	B32	B33	C11	C12	C13	D21	D22	D31	D32
	Presiunea specifică kgf/cm²	6,5			3,25			1,62			6,5			3,25		1,62	
Inel	Material	Oțel nitrurat									Oțel cementat						
	Pierderi de greutate mg/oră	94	76,8	56,1	37	42	24,5	19,9	19,2	15,8	116	64,8	34,2	40,7	35,5	24,4	22,1
	Pierderi de greutate pe minut I mg/min	1,56	1,28	0,93	0,62	0,7	0,41	0,33	0,32	0,26	193	1,08	0,57	0,68	0,59	0,44	0,37
	Pierderi de greutate/min pe unitate de suprafață $I' = I/S$ mg/cm² min	0,2344	0,192	0,140	0,095	0,108	0,063	0,051	0,049	0,040	0,298	0,167	0,088	0,105	0,091	0,068	0,057
Piston	Material	Oțel cromat															
	Pierderi de greutate mg/oră	36,5	32,4	23,6	19,1	13,3	7,6	8	10	5,2	35,5	7,3	7,5	8,4	9,3	3,7	3,1
	Pierderi de greutate pe minut P mg/min	0,61	0,54	0,39	0,32	0,22	0,13	0,13	0,17	0,09	0,59	0,12	0,12	0,14	0,16	0,06	0,05
	Pierderi de greutate/min și unitate de suprafața activă $P' = \frac{P}{CL} = K\frac{P}{S}$ mg/cm²min	0,009	0,008	0,006	0,005	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001	0,009	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001
Cuplul	Pierderi de greutate pe oră mg/oră	130,5	109,2	79,7	56,1	55,3	32,1	27,9	29,2	21,0	151,5	72,1	41,7	49,1	44,8	29,1	25,2
	Pierderi de greutate de min $I + P$ mg/min	2,17	1,82	1,32	0,94	0,92	0,54	0,46	0,49	0,35	2,52	1,20	0,69	0,82	0,75	0,50	0,42
	Pierderi de greutate/min raportate la unitatea de suprafață $I' + P'$ mg/cm² min	0,243	0,200	0,146	0,100	0,111	0,065	0,055	0,051	0,041	0,307	0,169	0,090	0,107	0,093	0,069	0,058
	Raportul pierderilor de greutate $\frac{P}{I}$	0,39	0,42	0,42	0,52	0,31	0,32	0,39	0,52	0,35	0,30	0,19	0,23	0,21	0,27	0,14	0,14

Numărul de curse duble pe minut 60. Lăţimea inelului $h = 4{,}7 \ldots 4{,}8$ mm. Suprafaţa inelului $S = c \cdot h = (\pi\, d - i)\, h$ în care i este mărimea crestăturii. Raportul între lăţimea inelului h şi cursa pistonului L este $K = \dfrac{h}{L} = 0{,}095$.

Încercările s-au făcut la presiuni specifice variabile de 6,5 ; 3,25 şi 1,64 kgf/cm^2.

Rezultatele încercărilor sînt date în tabela 5 în care sînt indicate şi condiţiile de presiune specifică la care s-au făcut încercările. Fiecare încercare a durat 60 min. Folosirea în continuare a aceloraşi cupluri a permis să se obţină rezultatele în ceea ce priveşte comportarea cuplurilor după durata de încercare de 60 ; 120 ; 180 min.

Pentru comparaţia rezultatelor s-au folosit aceleaşi criterii adică suma pierderilor prin greutate a inelului şi pistonului $I + P$ mg/min, pierderile de greutate totală pe minut raportată la unitate de suprafaţă a cuplului $I' + P'$ mg/cm^2 min şi raportul între pierderile prin uzură a pistonului şi inelului crestat $\dfrac{P}{I}$.

Pe baza datelor obţinute s-au construit curbele care indică variaţia uzurii inelului şi pistonului şi a cuplului în cazul inelului nitrurat şi a pistonului cromat în funcţie de timp (fig. 3 şi 4) şi în funcţie de presiunea specifică (fig. 5 şi 6) precum şi curbele identice pentru inelul cementat şi pistonul cromat (fig. 7, 8, 9 şi 10).

În tabela 6 sînt date valorile comparative între diferite cupluri pe baza aceloraşi criterii ca în tabela 3. Pentru fiecare presiune specifică sînt date valorile medii ale încercărilor efectuate.

Tabela 6

Cuplul Inel-Piston	Nitrurat Cromat			Cementat Cromat		
Presiunea specifică kgf/cm^2	6,5	3,25	1,62	6,5	3,25	1,62
Pierderi de greutate raportate la cuplul N/Cr	1	0,45	0,24	0,83	0,44	0,26
Pierderi de greutate pe unitate de suprafaţă raportată la cuplul N/Cr	1	0,47	0,24	0,96	0,51	0,32

În cadrul încercărilor efectuate, cantitatea de abraziv a fost de 20%. Alegerea acestui procent de abraziv a fost determinată de asigurarea unei uzuri rapide. Ea corespunde *saturaţiei* băii. La un conţinut mai mare de abraziv acesta nu se mai poate menţine în suspensie nici în cazul unei agitaţii continue şi se decantează parţial. Totodată după 60 min amestecul abraziv a fost schimbat deoarece el îşi pierde calităţile abrazive.

Din examinările rezultatelor se pot trage următoarele concluzii :

1. Schimbarea dimensiunilor probelor duce la schimbarea valorii indicativelor $(I + P)$ sau $(I' + P')$ folosite pentru aprecierea rezistenţei la uzură a cuplurilor. De aceea ele pot fi folosite numai pentru aprecierea comparativă a rezistenţei la uzură a diferitelor cupluri în cadrul unei serii de încercări făcute de cupluri de aceleaşi dimensiuni. Dependenţa pierderilor prin uzură de dimensiunile cuplurilor, cursa pistonului etc. sînt mult mai complexe decît cele redate de indicativele folosite.

2. Uzura cuplurilor scade în timp (fig. 3, 4, 7, 8). Această scădere este mai mare la cupluri inel cementat-piston cromat ca la cuplul inel cementat-piston cromat. Ea poate fi explicată prin ajustarea celor două suprafeţe în frecare (mediul abraziv s-a schimbat la fiecare 60 min)

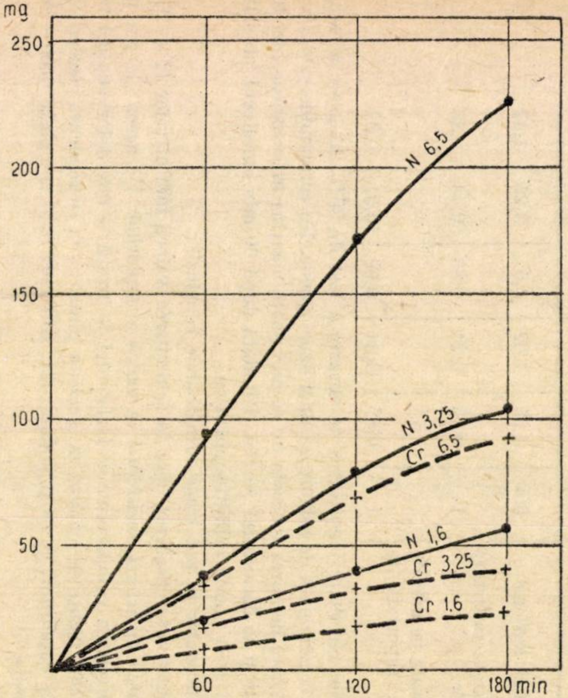


Fig. 3. — Uzura inelului şi pistonului cuplului inel nitrurat-piston cromat în funcţie de timp

N 6,5 uzura inelului nitrurat, presiune specifică 6,5 kgf/cm^2; N 3,25 idem; presiunea specifică 3,1 kgf/cm^2; N 1,6 idem; presiunea specifică 1,6 kgf/cm^2; Cr 6,5 uzura pistonului cromat; presiunea specifică 6,5 kgf/cm^2; Cr 3,25 idem; presiunea specifică 3,2 kgf/cm^2; Cr 1,6 idem; presiunea specifică 1,6 kgf/cm^2

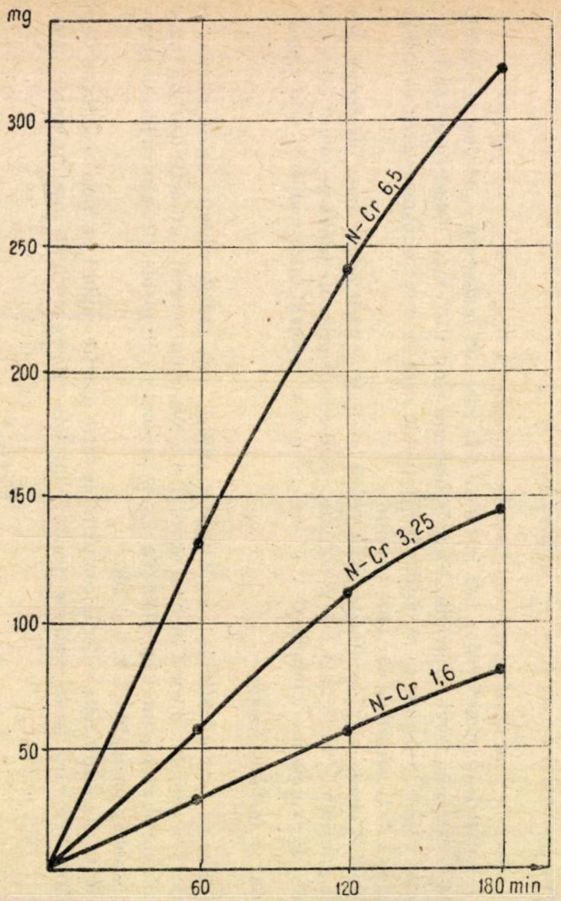


Fig. 4. — Uzura cuplului inel nitrurat-piston cromat în funcţie de timp

N—Cr 6,5 presiunea specifică 6,5 kgf/cm^2; N— Cr 3,25 presiunea specifică 3,25 kgf/cm^2; N — Cr 1,6 presiunea specifică 1,6 kgf/cm^2.

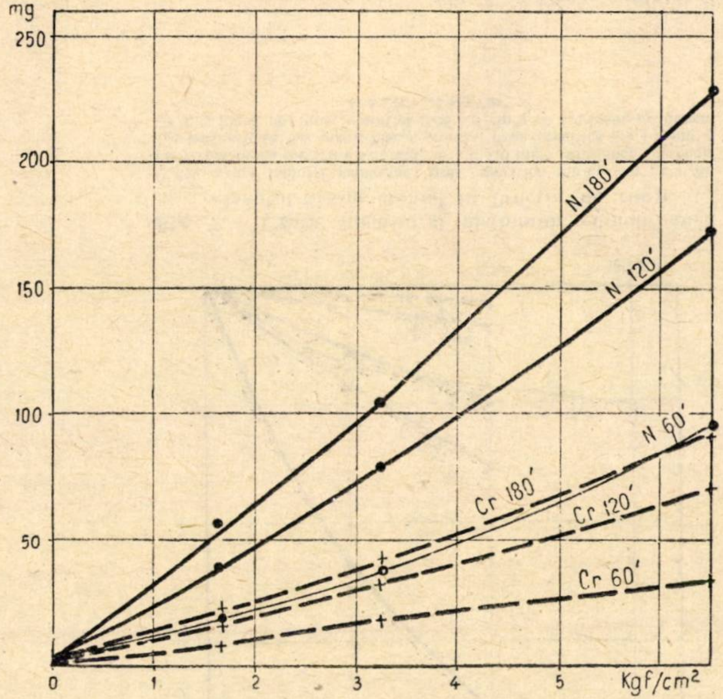
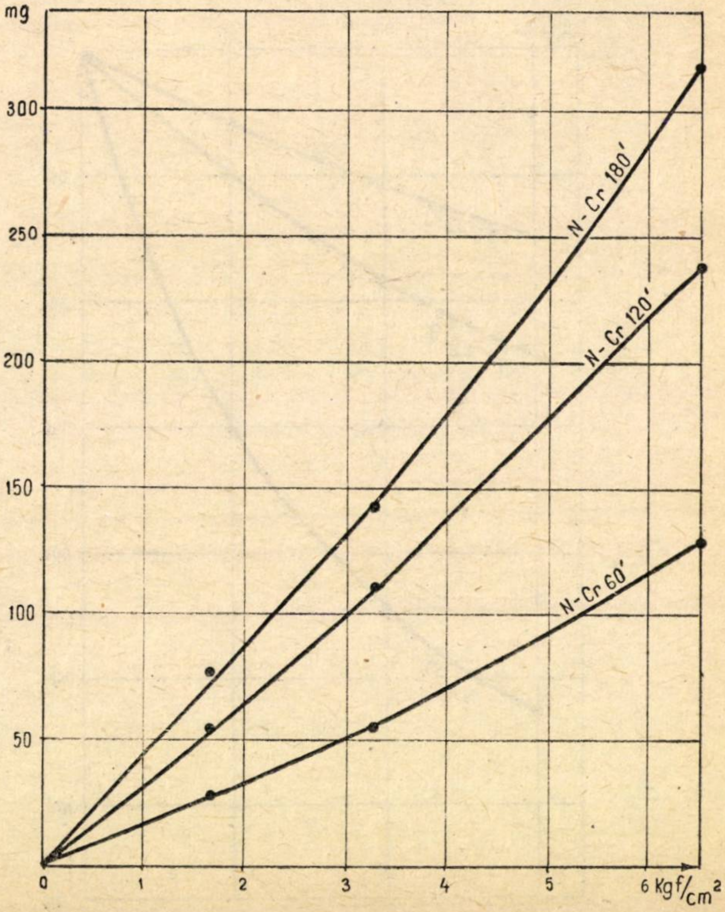


Fig. 5. — Uzura inelului şi pistonului cuplului inel nitrurat-piston cromat în funcţie de presiunea specifică,

N 180' uzura inelului nitrurat; durata încercării 180'; N 120' idem, durata încercării 120'; N 60' idem, durata încercării 60'; Cr 180' uzura pistonului cromat; durata încercării 180'; Cr 120' idem; durata încercării 120'; Cr 60' idem; durata încercării 60'.

Fig. 6. — Uzura cupului inel nitrurat-piston cromat în funcţie de presiunea specifică

N-Cr 180' durata încercării 180'; N-Cr 120' durata încercării 120'; N-Cr 60' durata încercării 60'.



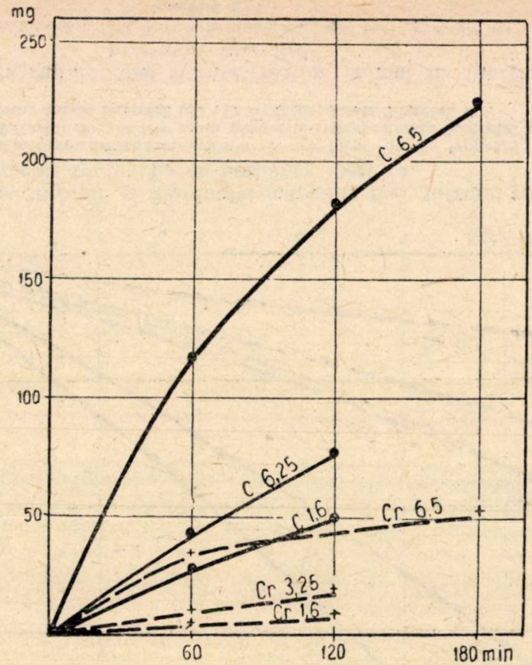


Fig. 7. — Uzura inelului şi pistonului cuplului inel cementat-piston cromat în funcţie de timp

C 6,5 uzura inelului cementat; pres. specifică 6,5 kgf/cm^2; C 6,25 idem, presiunea specifică 3,25 kgf/cm^2; C 1,6 idem, presiunea specifică 1,6 kgf/cm^2; Cr 6,5 uzura piston cromat, pres. specifică 6,5 kgf/cm^2; Cr 3,25 idem, presiunea specifică 3,25 kgf/cm^2; Cr 1,6 idem, presiunea specifică 1,6 kgf/cm^2.

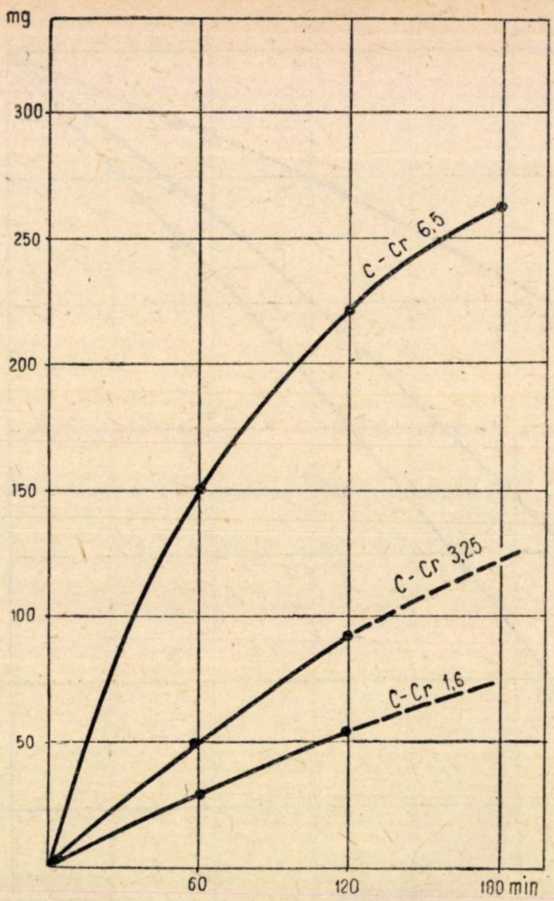


Fig. 8. — Uzura cuplului inel cementat-piston cromat în funcţie de timp

C-Cr 6,5 presiunea specifică 6,5 kgf/cm^2; C-Cr 3,25 presiunea specifică 3,25 kgf/cm^2; C-Cr 1,6 presiunea specifică 1,6 kgf/cm^2.

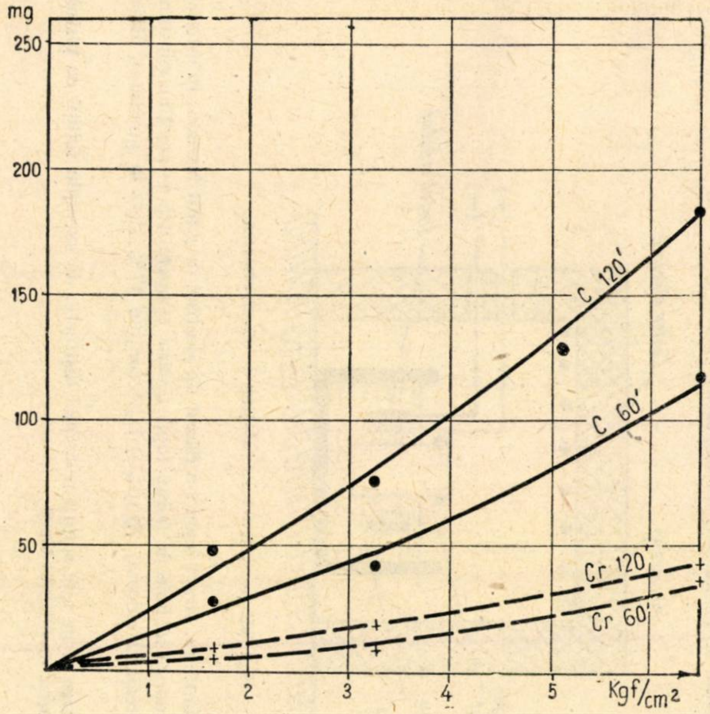
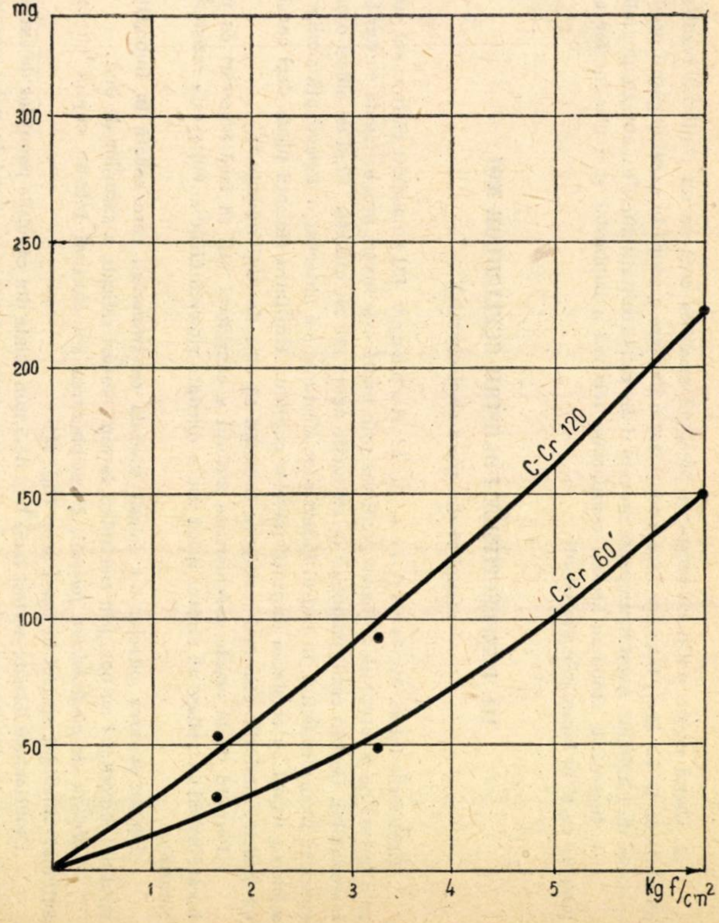


Fig. 9. — Uzura inelului și pistonului cuplului inel cementat-piston cromat în funcție de presiunea specifică

C 120' uzura inel cementat; durata încercării 120; C 60' idem, durata încercării 60'; Cr 120' uzura piston cromat; durata încercării 120'; Cr 60' idem; durata încercării 60'.

Fig. 10. — Uzura cuplului inel cementat-piston cromat în funcție de presiunea specifică

C-Cr 120' durata încercării 120'; C-Cr 60' durata încercării 60.



3. Uzura creşte puţin cu creşterea presiunii specifice ceea ce nu confirmă rezultatele obţinute de E. L. Marhasin care a constatat o limitare a uzurii în cazul depăşirii presiunii specifice de 1 kgf/cm^2. Acest lucru poate proveni şi din cauza calităţii diferite a abrazivului folosit.

4. Încercările stabilesc aceeaşi comportare relativă a cuplurilor şi a pieselor lor componente ca şi în încercările precedente.

III. PERSPECTIVELE FOLOSIRII CUPLURILOR NOI

(cupluri din piese electroborate)

Cercetările lui M. M. Hruşciov, M. A. Babucev [3] au stabilit că în cazul uzurii prin frecare pe o suprafaţă abrazivă pierderea prin uzură este invers proporţională cu duritatea materialului. Deşi în cazul pompelor de extracţie uzura are alt caracter, fiind de obicei o uzură abrazivă în mediu lichid, în cadrul încercărilor efectuate s-a observat o dependenţă similară — scăderea uzurii cu creşterea durităţii pieselor cuplului. Duritatea ridicată poate deci constitui un indiciu, cuplurile cele mai rezistente trebuind să aibe durităţi ridicate *).

Pornind de la aceste considerente autorul a considerat util să facă încercări cu piese borate avînd în vedere că stratul borat are o duritate ridicată ($H_{RC} = 60$) şi este rezistent la coroziune.

Pentru borarea pieselor s-a folosit metoda electroborării care constă în îmbogăţirea stratului superficial cu bor prin electroliză la temperaturi ridicate a sărurilor de bor.

Metoda de electroborare folosită. Electroborarea s-a efectuat într-un cuptor cu reglaj automat amenajat special în acest scop (fig. 11).

Eşantioanele folosite au fost inele late de 5 mm tăiate din cămăşile pompelor de extracţie P.21/2 × 1.3/4. Eşantionul se prinde într-un dispozitiv special şi se leagă la polul negativ a unei surse de curent continuu. Drept anod s-a folosit un electrod de grafit introdus în interiorul inelului. Totul se introduce în baie de borax topit a cărei temperatură se menţine constantă. Boraxul trebuie în prealabil calcinat ($Na_2B_4O_7 \cdot H_2O$ conţine 47% H_2O la greutate). Baia a

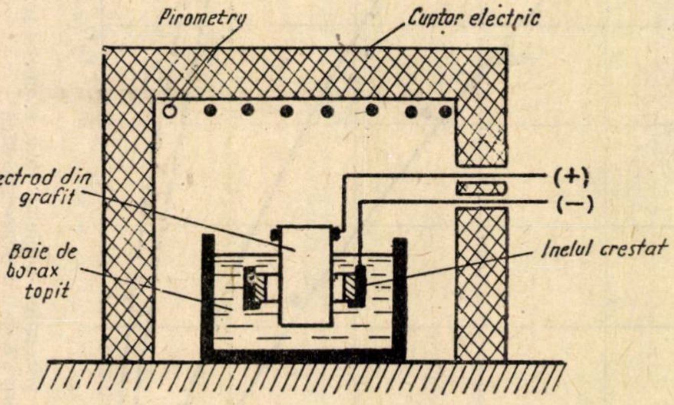


Fig. 11. — Schema instalaţiei de electroborare.

---

*) Se poate merge şi pe alte soluţii principial distincte, de exemplu soluţii cu pistoane cauciucate ce se încearcă în ultimul timp.

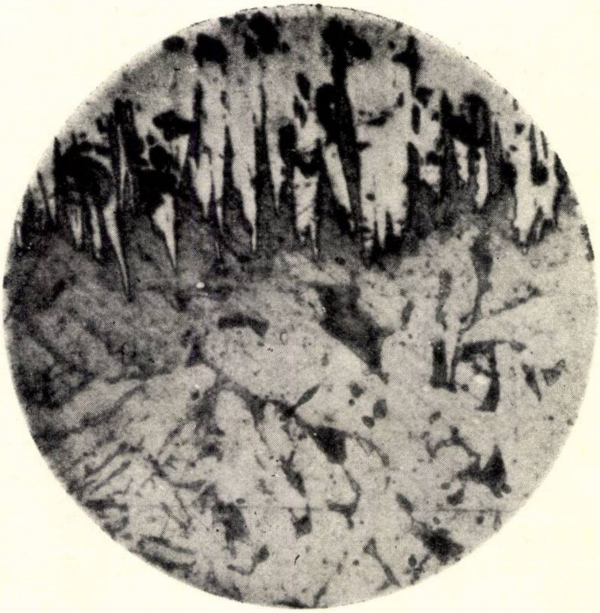


Fig. 12. — Microstructura stratului borat. Atac nital × 150.

fost executată din oțel anticorosiv austenitic tip 18% Cr și 8% Ni. Pentru a se micșora corodarea ei ea trebuie în prealabil borată după același regim după care se borează eșantioanele.

Pot fi folosite și alte instalații de exemplu borare în baie cu strat interior din borax netopit utilizată de A. A. Golovanov [4].

Schema procesului de electroborare este următoarea :

Prin topire, boraxul $Na_2B_4O_7$ disociază termic

$$Na_2B_4O_7 = Na_2O + 2\ B_2O_3$$

Prin trecerea curentului se produce și o disociere electrolitică

$$Na_2B_4O_7 = \underset{\text{se depune pe catod}}{2\ Na} + \underset{\text{se depune pe anod}}{B_4O_7}$$

La anod anionul B_4O_7 se descompune cu degajare de oxigen

$$2\ B_4O_7 = 4\ B_2O_3 + O_2$$

Sodiul metalic ce se depune pe catod, parțial se ridică la suprafață și arde, parțial descompune B_2O_3

$$B_2O_3 + 6\ Na = 3\ Na_2O + B_2$$

Borul degajat se absoarbe pe suprafața piesei supuse borării și difuzează spre interior

S-a folosit următorul regim de electroborare :

Temperatura băii 950°C (temperaturi mai mari dau strat fragil). Curent 0,7 A/cm² (se poate folosi și un curent de 0,2—0,3 A/cm²). Durata borării 250 minute.

S-au obținut următoarele caracteristici ale stratului borat :

Materialul	Oțel OLC 16 recopt	Oțel OLC 16 cementat
Adîncimea stratului	0,35—0,40	0,20

Stratul borat nu prezintă fragilitatea ridicată.

Microstructura stratului este dată de figura 12. De remarcat structura aciculară a stratului borat orientată perpendicular pe suprafața exterioară a piesei. Ea indică difuzia borului într-o structură monofazică (austenită). În timpul răcirii în stratul exterior nu se produc transformări de faze.

Din încercările efectuate rezultă duritatea mare a stratului superficial ($H_{RC} = 65$) și deci utilitatea folosirii borării pentru creșterea rezistenței la uzură. Deși tratamentul a durat numai aproximativ 4 ore s-a obținut un strat suficient de adînc. De remarcat că creșterea conținutului de carbon al oțelului de la aproximativ 0,2 la 0,9% C micșorează aproape pe jumătate adîncimea stratului borat.

Încercări la uzură. S-a făcut verificarea rezistenței la uzură în mediu abraziv a inelului borat în cuplu cu un piston cromat pe aceeași mașină IPG-T-2.

Încercările s-au făcut în condițiile identice cu cele executate în partea a II-a a lucrării.

Presiunea specifică a fost de 6 kgf/cm² durata încercării 60 min, $K = 0,1$.

Rezultatele obținute sînt date în tabela 7.

Tabela 7

Cuplul	Inel			Piston	
Inel/piston	Pierderi de greut./oră mg/oră	Pierderi de greut./min. I mg/min	Pierderi de greut./min. şi unit. de suprafaţă $I' = \frac{I}{S}$ mg/cm^2 min	Pierderi de greutate mg/oră	Pierderi de greut. pe min. P mg/min
Br/Cr	9,6	0,16	0,027	54,4	0,91

Piston	Cuplul			
Pierderi de greut./min. şi unit. de suprafaţă activă $P' = \frac{P}{CL} = K \frac{P}{S}$ mg/cm^2 min	Pierderi de greut. pe oră mg/min	Pierderi de greut. pe min. $I + P$ mg/min	Pierderi de greut./min şi unit. de suprafaţă $I' + P'$ mg/cm^2 min	Raportul pierderilor de greutate $\frac{P}{I}$
0,015	63,0	1,07	0,042	5,7

Din examinarea rezultatelor se pot trage următoarele concluzii :

1. Rezistența la uzură a cuplului format din inel borat și piston cromat este mult mai ridicată ca a cuplului optim realizabil din piesele actualmente folosite curent în industria petroliferă.

2. Luînd ca bază cuplul de referință inel nitrurat-piston cromat, uzura cuplului inel borat-piston cromat este de 1,7 ori mai mică dacă se ia drept criteriul de comparație pierderea de greutate ($I + P$) și de 4,7 ori mai mică dacă se ia drept criteriu de comparație pierderea de greutate pe unitate de suprafață ($I' + P'$). Diferența atît de mare între cifrele comparative obținute pe baza celor două criterii se explică prin faptul că la cuplul inel borat piston cromat se uzează mai ales pistonul.

3. Inelul borat are uzură de 7,85 ori mai mică ca cel nitrurat. În schimb, pistonul cromat în cuplu cu inel borat are uzura de 1,7 ori mai mare ca în cuplul cu inel nitrurat.

Uzura mică a inelului borat în raport cu pistonul cromat în cadrul cuplului respectiv rezultă și din raportul $PL = 5{,}7$.

Pentru creșterea rezistenței la uzură și la coroziune a pistoanelor cromate este indicat ca după cromare să se aplice cementare parțială a stratului cromat.

★

Folosind mașina IPG-T-2 s-au putut obține date interesante privind comportarea cuplurilor cămașa-piston la pompele de extracție.

Rezultatele obținute pe baza cercetărilor efectuate trebuie continuate prin încercări pe ștanduri de probă și în schele pentru stabilirea comportării relative în diferite condiții de de exploatare. Încercările făcute pînă în prezent în această direcție confirmă concluziile trase pe baza încercărilor de laborator expuse.

Folosind cuplurile cămașa-piston din piesele actualmente fabricate se vor obține rezultate optime în cadrul folosirii cămășilor nitrurate sau cementate și a pistonului cromat. Rezultate mult mai bune se vor obține folosind cămăși borate și pistoane cromate. De aceea trebuie să se treacă la fabricația cămășilor de pompe de extracție borate și să se folosească aceste cămăși în condiții de exploatare grele.

Primită la redacție la 10 mai 1958.

ИСЛСЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАР ГИЛЬЗА-ПОРШЕНЬ НЕФТЕНАСОСОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется износоустойчивость в абразивной среде пары кольцо-поршень, воспроизводящей движение пары гильза-поршень нефтенасоса. Испытания проводились на лабораторной машине IPG-T-2, позволяющей изменять величину испытуемых деталей, удельное давление трущихся поверхностей, ход поршня, число ходов в минуту, продолжительность испытания и абразивность среды.

Проведенные испытания при использовании пар, обычно применяемых в производстве, показали, что оптимальной парой является азотированное или цементированное кольцо и хромированный поршень. Цементированные поршни, обычно используемые на нефтепромыслах, не дают достаточно износоустойчивых пар и должны быть заменены хромированными.

Наибольшая износоустойчивость получается при использовании вновь предложенной пары — борированная гильза-хромированный поршень. Рекомендуется испозьзование этой пары и проведение производственных испытаний для определения поведения в различных эксплуатационных условиях.

В работе устанавливаются тякже влияние удельного давления, продолжительности испытания и других параметров на износоустойчивость.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Принципиальная схема лабораторной машины типа IPG-T-2 для испытаний на износ.

Рис. 2. — Изменения износа в зависимости от продолжительности испытания; *I* — кольцо; *P* — поршень.

Рис. 3. — Износ кольца и поршня пары: азотированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от продолжительности испытания. N 6,5 — износ азотированного кольца; удельное давление 6,5 кГ/см^2; N 3,25 — то же; удельное давление 3,1 кГ/см^2. N 1,6 — то же; удельное давление 1,6 кГ/см^2. Cr 6,5 — износ хромированного поршня, удельное давление 6,5 кГ/см^2. Cr 3,25 — то же; удельное давление 3,2 кГ/см^2. Cr 1,6 — то же; удельное давление 1,6 кГ/см^2.

Рис. 4. — Износ пары: азотированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от продолжительности испытания. N — Cr 6,5 — удельное давление 6,5 кГ/см^2. N — Cr 3,25 — удельное давление 3,25 кГ/см^2. N — Cr 1,6 — удельное давление 1,6 кГ/см^2.

Рис. 5. — Износ кольца и поршня пары: азотированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от удельного давления. N 180′ — износ азотированного кольца; продолжительность испытания 180′, N 120′ — та же продолжительность испытания 120′. N 60′ — то же; продолжительность испытания 60′. Cr 180′ — износ хромированного поршня; продолжительность испытания 180′. Cr 120′ — то же; продолжительность испытания 120′. Cr 60′ — то же; продолжительность испытания 60′.

Рис. 6. — Износ пары: азотированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от удельного давления: N — Cr 180′ — продолжительность испытания 180′; N — Cr 120′ — продолжительность испытания 120′; N — Cr 60′ — продолжительность испытания 60′.

Рис. 7. — Износ кольца и поршня пары: цементированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от продолжительности испытания. C 6,5 — износ цементированного кольца; удельное давление 6,5 кГ/см^2; C 3,25 — то же; удельное давление

3,25 кГ/см². С 1,6—то же; удельное давление 1,6 кГ/см². Cr 6,5 — износ хромированного поршня; удельное давление 6,5 кГ/см². Cr 3,25 — то же; удельное давление 3,25 кГ/см²; Cr 1,6 — то же; удельное давление 1,6 кГ/см².

Рис. 8. — Износ пары: цементированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от продолжительности испытания. C—Cr 6,5 — удельное давление 6,5 кГ/см²; C—Cr 3,25 — удельное давление 3,25 кГ/см²; C—Cr 1,6 — удельное давление 1,6 кГ/см².

Рис. 9. — Износ кольца и поршня пары: цементированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от удельного давления. C 120′ — износ цементированного кольца; продолжительность испытания 120′; C 60′ — то же; продолжительность испытания 60′; Cr 120′ — износ хромированного поршня; продолжительность испытания 120′; Cr 60′ — то же; продолжительность испытания 60′.

Рис. 10. — Износ пары: цементированное кольцо — хромированный поршень в зависимости от удельного давления. C—Cr 120′—продолжительность испытания 120′; C—Cr 60′ — продолжительность испытания 60′.

Рис. 11. — Схема установки для электроборитирования.

Рис. 12. — Микроструктура борированного слоя. Травление спиртным раствором азотной кислоты. × 150.

ÉTUDE DE QUELQUES COUPLES OPTIMA CHEMISE-PISTON DANS LES POMPES D'EXTRACTION

RÉSUMÉ

L'auteur étudie la résistance à l'usure, dans un milieu abrasif, du couple segment — piston, qui reproduit les mouvements du couple chemise — piston, dans les pompes d'extraction (en usage sur les chantiers pétroliers). Les essais ont été exécutés à la machine de laboratoire IPG-T-2, où l'on peut faire varier les dimensions des pièces, la pression spécifique des surfaces de frottement, la course du piston, le nombre de course par minute, la durée de l'essai et l'abrasivité du milieu.

Il résulte des essais effectués sur des couples de pièces habituellement utlisées à l'usine que le meilleur couple est le suivant : segment nitruré, ou cémenté, — piston chromé. Les pistons cémentés, couramment employés sur les chantiers pétroliers, ne donnent pas des couples assez résistants à l'usure et doivent être remplacés par des pistons chromés.

La résistance la plus élevée à l'usure est obtenue à l'aide du nouveau couple proposé : chemise borée — piston chromé. L'emploi de ce couple est recommandé en même temps que des essais pratiqués sur place, sur les chantiers pétroliers, afin de déterminer son comportement dans des conditions variées d'exploitation.

Au cours du travail, l'auteur établit également l'influence de la pression spécifique, de la durée de l'essai et celle de certains autres paramètres, sur la résistance à l'usure.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma de principe de la machine de laboratoire du type IPG-T-2, pour essais à l'usure.

Fig. 2. — Variation de l'usure en fonction du temps ; I = segment ; P = piston.

Fig. 3. — Usure du segment et du piston, du couple segment nitruré — piston chromé, en fonction du temps. N 6,5 = Usure du segment nitruré ; pression spécifique, 6,5 kgf/cm² ; N 3,25 = idem ; pression spécifique, 3,1 kgf/cm² ; N 1,6 = idem ; pression spécifique, 1,6 kgf/cm² ;

Cr 6,5 = usure du piston chromé ; pression spécifique, 6/5 kgf/cm^2 ; Cr 3,25 = idem ; pression spécifique, 3,2 kgf/cm^2 ; Cr 1,6 = idem ; pression spécifique, 1,6 kgf/cm^2.

Fig. 4. — Usure du couple segment nitruré — piston chromé, en fonction du temps. N—Cr 6,5 = Pression spécifique, 6,5 kgf/cm^2 ; N—Cr 3,25 = pression spécifique, 3,25 kgf/cm^2 ; N—Cr 1,6 = pression spécifique, 1,6 kgf/cm^2.

Fig. 5. — Usure du segment et du piston du couple segment nitruré — piston chromé, en fonction de la pression spécifique. N 180′ = Usure du segment nitruré ; durée de l'essai, 180′ ; N 120′ = idem ; durée de l'essai, 120′ ; N 60′ = idem ; durée de l'essai, 60′ ; Cr 180′ = usure du piston chromé ; durée de l'essai, 180′ ; Cr 120′ = idem ; durée de l'essai, 120′ ; Cr 60′ = idem ; durée de l'essai, 60′.

Fig. 6. — Usure du couple segment nitruré — piston chromé, en fonction de la pression spécifique. N—Cr 180′ = Durée de l'essai, 180′ ; N—Cr 120′ = durée de l'essai. 120′ ; N—Cr 60′ = durée de l'essai, 60′.

Fig. 7. — Usure du segment et du piston du couple segment cémenté — piston chromé, en fonction du temps. C 6,5 = Usure du segment cémenté ; pression spécifique, 6,5 kgf/cm^2 ; C 6,25 = idem ; pression spécifique, 3,25 kgf/cm^2 ; C 1,6 = idem ; pression spécifique, 1,6 kgf/cm^2 ; Cr 6,5 = usure du piston chromé ; pression spécifique, 6,5 kgf/cm^2 ; Cr 3,25 = idem ; pression spécifique, 3,25 kgf/cm^2 ; Cr 1,6 = idem ; pression spécifique, 1,6 kgf/cm^2.

Fig. 8. — Usure du couple segment cémenté — piston chromé, en fonction du temps. C—Cr 6,5 = Pression spécifique, 6,5 kgf/cm^2 ; C—Cr 3,25 = pression spécifique, 3,25 kgf/cm^2 ; C—Cr 1,6 = pression spécifique, 1,6 kgf/cm^2.

Fig. 9. — Usure du segment et du piston du couple segment cémenté — piston chromé, en fonction de la pression spécifique. C 120′ = Usure du segment cémenté ; durée de l'essai, 120′ ; C 60′ = idem ; durée de l'essai, 60′ ; Cr 120′ = usure du piston chromé ; durée de l'essai, 120′ ; Cr 60′ = idem ; durée de l'essai, 60′.

Fig. 10. — Usure du couple segment cémenté — piston chromé, en fonction de la pression spécifique. C—Cr 120′ = Durée de l'essai, 120′ ; C—Cr 60′ = durée de l'essai, 60′.

Fig. 11. — Schéma de l'installation d'électro-borage.

Fig. 12. — Microstructure de la couche borée. Attaque au nital ; 150 ×.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Raşeev, V. Ralea, I. Kell, Al. Popovici, Gh. Florea, *Studiul cuplului optim cămaşă-piston la pompele de extracție.* Lucrările Institutului de petrol, gaze şi geologie, **III**, Bucureşti, 1957.
2. Е. Л. Мархасин, *Исследования абразивного изнашивания деталей глубинных нефтяных насосов. Трение и износ в машинах.* Изд. Акад. Наук, **V**, Москва, 1950.
3. М. М. Хрущев, М. А. Бабучев, *Исследование изнашивания стали при трении об абразивную поверхность. Трение и износ в машинах.* **IX**, Изд. Акад. Наук, Москва, 1954.
4. А. А. Голованов, Вестник машиностроения, *7* — *8* (1944).

RECENZII

MIHAIL D. HANGAN, *Betonul armat. Construcţii industriale*. Ed. tehnică, Bucureşti 1958, 651 pag. cu anexa *Betonul armat. Studii, schiţe, detalii*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1957, 16 pag. + XXX planşe.

Cartea profesorului M. Hangan este o lucrare de sinteză asupra utilizării betonului armat în construcţii industriale, lucrare a cărei lipsă se resimţea în literatura originală de specialitate. De altfel, asemenea lucrări sînt rare şi în literatura străină.

Problemele pe care le pune industria inginerului constructor, sînt deosebit de multe şi de variate. În afara unui calcul static şi de rezistenţă obişnuit, intervin chestiuni de vibraţii (sarcini dinamice), temperaturi înalte, temperaturi variabile, impermeabilizări etc. În toate aceste cazuri trebuie studiate mai multe variante, deoarece soluţia statică cea mai simplă, nu este totdeauna corespunzătoare.

În lucrare, autorul a căutat să dea caracteristicile necesare calculului şi proiectării unui număr cît mai mare şi mai variat de construcţii industriale, evitînd totuşi, să dea o extindere mai mare decît cea necesară.

Ultimul capitol, mai dezvoltat, tratează problema halelor industriale (hale în cadre, grinzi şi plăci, hale acoperite cu bolţi subţiri, hale prefabricate etc.). Menţionăm că se iau în consideraţie şi problema tipizării, precum şi diferite probleme de amănunt : acoperirea halelor, luminarea şi ventilarea lor, izolarea termică etc.

În capitolele II, III şi IV se tratează problema amenajării unor spaţii care să folosească la diverse depozitări. Magaziile şi depozitele de diferite tipuri (depozite acoperite, cu unul sau două etaje, depozite deschise lateral, sau nu, depozite descoperite) sînt studiate pe larg. De asemenea, găsim probleme de garaje şi remize la suprafaţa pămîntului sau subteran. Un alt gen de construcţii care interesează este cel al hangarelor de avioane.

Capitolele V şi VI cuprind construcţiile de buncăre şi silozuri. Se dau principiile de alcătuire, precum şi elementele de calcul şi de execuţie. Autorul dă diferite amănunte în legătură cu probleme specifice acestui gen de construcţii.

Capitolele VII şi VIII se ocupă cu rezervoarele de beton armat pentru lichide şi cu castelele de apă. În afara diferitelor probleme de calcul mai deosebite care se pun (de exemplu : probleme de stabilitate dinamică la castelele de apă), intervin şi diferite probleme constructive : etanşarea, izolarea etc.

În capitolele IX şi X se tratează coşurile de fum şi turnurile de răcire. Din punctul de vedere al calculului unele din problemele cele mai interesante puse aici, sînt cele de tensiuni din variaţia de temperatură.

Apoi, în capitolele XI, XII şi XIII se prezintă diferite construcţii : turnuri de extracţie suporţi pentru linii de transport şi împrejmuiri de beton armat.

La fiecare din construcţiile industriale studiate, se dau date istorice şi se fac diferite consideraţii economice.

Lucrarea este însoţită de numeroase exemple de construcţii executate sau proiectate în ţara noastră. Planuri detaliate, probleme de armare etc., se găsesc în anexa la acest volum, apărută anterior.

Volumul acesta este al treilea dintr-un ciclu de trei volume, intitulat *Betonul armat* din care a mai apărut pînă acum volumul I.

Cartea apărută, care are de altfel un caracter de sine stătător, are proporţiile unui tratat, reprezentînd şi o bogată şi foarte interesantă experienţă personală acumulată de autor. Lucrarea este utilă atît pentru învăţămîntul superior cît şi pentru toţi inginerii constructori, care lucrează în proiectare sau cercetare ştiinţifică, îmbogăţind considerabil literatura noastră tehnică.

P. P. Teodorescu

П. Е. ДЬЯЧЕНКО, *Применение радиоактивных изотопов в технике* (Folosirea izotopilor radioactivi în tehnică). Машгиз, Москва, 1958, 215 pag.

Cartea profesorului dr. P. E. Diacenko se adresează cercetătorilor, inginerilor şi tehnicienilor din institutele de cercetări tehnice sau din laboratoarele uzinelor.

Deşi cu multă modestie se indică că s-au făcut doar „cîţiva paşi", totuşi această lucrare aduce o contribuţie importantă pentru că în ea se reflectă rezultatele originale dobîndite în acest domeniu în U.R.S.S. după o muncă de peste 10 ani, atît de autor, de colectivul condus de el de la IMAŞ al Academiei de Ştiinţe al U.R.S.S. cît şi de cercetătorii şi tehnicienii de la institute departamentale ca NAMI şi NATI.

Lucrarea examinează diferitele forme de utilizare a izotopilor radioactivi în măsurătorile şi cercetările tehnice atît din laboratoarele institutelor cît şi în practica unităţilor industriale.

Se remarcă că s-a pus accentul în special pe diferite aspecte legate de studiul uzurii pieselor de maşini şi al mecanismului uzurii, domeniu deosebit de important şi actual în construcţia de maşini.

În primele 4 capitole se prezintă o serie de cunoştinţe necesare legate de utilitatea izotopilor radioactivi, metodele noi de înregistrare şi metode de introducere a izotopilor radioactivi în procesele studiate. Chiar în această parte a lucrării sînt introduse şi rezultate interesante obţinute pe baza unei experienţe de mai mulţi ani.

În capitolele următoare (5—11) se prezintă diferite metode şi exemple de aplicare a izotopilor radioactivi în trei direcţii principale:

a) Utilizarea proprietăţii materialelor, de a putea amortiza radiaţia radioactivă, din care derivă posibilitatea studiilor defectoscopice gamma, măsurătorilor de grosimi mari sau straturi subţiri, determinări de niveluri etc.

b) Studiul deplasării atomilor marcaţi; trasorii radioactivi urmăresc cercetările de uzură la maşină şi aşchierea metalelor, semnalizarea automată, difuzie, plasticitate, descoperirea fisurilor etc.

c) Modificarea însuşirii materialelor prin bombardament radioactiv, fie în ansamblul volumului piesei sau materialului, fie în straturi superficiale.

Lucrarea se încheie cu un capitol (12) privind tehnica protecţiei în lucrul cu izotopi radioactivi, în cazul cercetărilor tehnice.

Se remarcă de asemenea bibliografia lucrării.

D. Pavelescu

JAROSLAV KOZESNIK, *Dynamika Stroju* (*Vybrané stati*) (Dinamica mașinilor. Lucrări alese). Státni Nakadatelstvi Technike Literatury, Praga, 1958, 334 pag.

Cu toate că în titlu se menționează *Lucrări alese*, cartea cuprinde aproape toate problemele importante din dinamica mașinilor. După o scurtă introducere mecanico-matematică asupra maselor rotative se începe studiul oscilațiilor de rotație și încovoiere ale arborilor în diverse situații și sub diferite influențe din cele mai variate; devierea planului discului de rotație, rotația neuniformă, moment de inerție variabil, rigiditatea reazemelor, sarcini variabile, șoc etc., întregite prin calculul turațiilor critice. Se dezvoltă de asemenea oscilațiile de torsiune și longitudinale ale arborilor și barelor într-o mare varietate de cazuri întîlnite frecvent în practică; arbori cu secțiune variabilă, arbori de transmisie și ramificații, arbori cotiți, precum și mijloacele de atenuare a vibrațiilor periculoase. Un capitol cuprinde echilibrarea forțelor de inerție și momentelor lor, ale mașinilor cu mai mulți cilindri în linie sau în stea, alt capitol tratează despre fundațiile de mașini, oscilațiile blocului de fundație, fundații în cadre și plăci, propagarea undelor de tensiune și deformație în patul elastic etc.

Cartea se încheie cu un capitol despre mecanismele cu came, cu aplicație în special la motoarele cu combustie internă. O deosebită importanță se dă calculului turațiilor critice, exemplificîndu-se și metodele de aproximație precum și corecțiile lor.

Justificările matematice sînt clare și metodele de calcul, deși moderne, sînt puțin pretențioase — calcul matricial și uneori utilizarea transformării Laplace.

Astfel, cartea este accesibilă unui cerc larg de cititori, de la studenții începători la cercetătorii din institutele de specialitate. O bogată bibliografie ușurează cititorului pătrunderea mai profundă a diverselor probleme din construcția de mașini.

Chr. Pelecudi

И. И. ЛЕВИ, *Движение речных потоков в нижних бьефах гидротехнических сооружений* (Mișcarea curenților fluviali în bieful aval al construcțiilor hidrotehnice). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1955, 256 стр.

După cum rezultă din primul capitol, scopul urmărit de această lucrare este să generalizeze un bogat bagaj de date experimentale și de teren acumulate și să pună la îndemîna celor interesați metode de prognoză a regimurilor hidraulice în aval de baraje. Pe baza acestora, se poate alege o dispoziție favorabilă a ansamblului și se pot antedimensiona cu mai multă siguranță construcțiile de consolidare a albiei.

Tema propusă este de o mare însemnătate teoretică și practică; pentru a ne convinge de acest lucru este suficient să amintim că cel mai mare institut de cercetări hidrotehnice din U.R.S.S., Institutul Vedeneer din Leningrad, s-a specializat tocmai în aceste probleme.

Diverse aspecte ale problemelor mișcării curenților fluviali în bieful aval al construcțiilor hidrotehnice au mai fost studiate, însă lucrările publicate tratează unilateral procesele, deosebit de complexe de altfel, care au loc în aval de baraje.

Lucrarea prof. I. I. Levi urmărește o tratare multilaterală a ansamblului proceselor hidromorfologice.

Pentru realizarea scopului propus au fost folosite cele mai importante publicații de specialitate (sînt indicate 29 de titluri bibliografice); la acestea s-a adăugat o importantă contribuție a autorului, el însuși un eminent specialist în domeniul hidraulicei aplicate.

Dacă într-un trecut nu prea îndepărtat, se obișnuia ca elementele de consolidare în aval de evacuatori să fie fixate pe baza unor calcule sumare, în ultimii ani se manifestă tendința folosirii încercărilor pe modele reduse, ca unic mijloc de alegere a consolidării aval. I. I. Levi consideră, pe bună dreptate, că această cale empirică, deşi singură, are dezavantajul de a închide perspectiva unei cunoaşteri mai intime a fenomenelor din albii, sub aspectul lor general; el arată că generalizarea rezultatelor experimentale acumulate permite determinarea unei metodici analitice pentru prognoza regimurilor aval şi ia asupra sa sarcina obţinerii acesteia. Este adevărat că, în direcţia urmărită există o serie de dificultăţi obiective şi în primul rînd marele număr de factori variabili; condiţiile locale şi diversitatea schemelor constructive.

Un prim pas spre învingerea acestor dificultăţi este o sistematizare şi clasificare a numeroaselor tipuri de construcţii şi scheme de noduri fluviale, din punct de vedere al hidraulicei biefului aval. Această sistematizare formează obiectul capitolului II al lucrării recenzate. În acest mod, s-au definit cîteva categorii de noduri hidrotehnice fluviale şi s-au putut desprinde de problemele comune importante ale hidraulicii biefului aval.

Aceste probleme, tratate în celelalte capitole, sînt următoarele: aspectul fizic al disipării energiei, parametrii caracteristici ai fenomenului şi variaţia lor în funcţie de elementele geometrice; evazarea curenţilor în albia aval şi diferite forme de scurgere care pot apare, în particular vine călătoare; afuierile locale şi cele generale, apariţia şi calculul lor precum şi consecinţele pe care le provoacă. În sfîrşit, mai apare o categorie de probleme derivate din precedentele şi foarte importante pentru practică: alegerea lungimii frontului deversant şi manevrarea stavilelor la evacuatori.

În capitolul III sînt tratate diverse aspecte ale fizicii disipării energiei şi racordării biefurilor pentru diferite regimuri de conjugare (de fund, de suprafaţă). Se tratează atît problema plană, cît şi problema spaţială a racordării biefurilor, cu utilizarea critică a diferitelor rezolvări propuse şi în primul rînd a celor aparţinînd lui D. Kumîn.

Formulele sînt aduse pînă la expresii utilizabile în calcule numerice şi pot folosi la alegerea gabaritelor principale ale construcţiilor de consolidare.

În următoarele trei capitole sînt tratate problemele hidrocinematicii în albia, aval privită în ansamblul ei. După ce se stabilesc ecuaţiile diferenţiale ale mişcării pe risbermă şi se indică dificultăţile care apar la integrarea lor se descrie metoda de rezolvare grafoanalitică propusă de autor. Acesta porneşte de la construirea planului scurgerii prin metoda reţelelor (cu ipotezele lui Bernadski pentru studiul albiilor) şi adaptează această metodă în condiţiile unei strangulări sensibile a scurgerii în albie. Metoda a fost verificată experimental şi rezultatele s-au dovedit cu totul mulţumitoare.

Însă această metodă de determinare a caracteristicilor hidrocinematice este aplicabilă numai în cazul unor evazări uniforme: ori s-a dovedit că în anumite condiţii, care apar frecvent în practică (mărirea debitelor specifice pe un front îngust, neuniformitatea debitelor specifice pe lăţimea albiei, un anumit joc de nivel) se formează în aval o scurgere cu totul asimetrică, caracterizată prin existenţa unor vîne de mare curbură şi mare viteză şi a unor zone turbionare de mari proporţii. Astfel de scurgeri nu pot fi studiate cu aparatul analitic disponibil azi. De altfel ele sînt defavorabile din punct de vedere practic, aşa că trebuiesc luate măsuri pentru a evita apariţia lor. Analiza condiţiilor de apariţie ale acestor scurgeri precum şi măsurile constructive şi de exploatare pentru combaterea lor fac obiectul unui alt capitol al lucrării recenzate.

O atenţie deosebită se acordă, pe bună dreptate, problemei afuierilor în aval de evacuatori. Aceste afuieri apar ca rezultat al perturbării echilibrului hidromorfologic natural şi sînt de mai multe categorii: afuierile locale care apar la capătul consolidării rigide în special ca rezultat al energiei suplimentare de pulsaţie a curentului; afuierile în zona de evazare a curentului, unde vitezele medii însă sînt superioare celor din regim natural, şi afuierile generale ale albiei aval, care apar ca rezultat al măririi capacităţii de transport a curentului, limpezit în lacul amonte. Dacă afuierile locale se stabilizează rapid, afuierile generale sînt de durată.

Una din consecințele generalizării afuierilor și coborîrii cotei talvegului — fenomene constatate și de noi — o constituie așa numita recesie a nivelului apei. Într-un capitol special I. I. Levi indică o metodă originală, destul de laborioasă, pentru calculul recesiei nivelelor aval. În sfîrșit, sînt atacate două probleme de mare importanță practică : manevrarea stavilelor și alegerea frontului deversant, pentru care se dă acum o rezolvare pe baze mai științifice. De observat că problema manevrării stavilelor se rezolvă exclusiv pe criteriul regimului hidraulic din aval.

Toate cele 12 capitole ale lucrării sînt tratate la un înalt nivel științific. În tratarea fenomenelor se pornește de la analiza fizică a condițiilor în care ele se desfășoară. Acolo unde simplificările nu alterează sensul fizic al fenomenelor și numai acolo, aparatul matematic este aplicat, folosindu-se din plin toate avantajele pe care acesta le prezintă. În general, formulele de calcul sînt date în formă adimensională, indicîndu-se acolo unde este necesar, domeniul de aplicabilitate. Soluțiile teoretice sînt recomandate numai după verificare experimentală sigură. În toate problemele, considerațiile și formulele sînt duse pînă la expresii care permit utilizarea lor la cazuri concrete. Rezolvarea problemelor tipice este ilustrată prin exemple de calcul edificatoare.

De altfel, toate acestea sînt în general caracteristice școlii hidrotehnice sovietice.

Lucrarea cuprinde o însemnată contribuție originală a autorului, în aproape toate problemele tratate.

În încheiere, trebuie arătat că lucrarea își atinge din plin scopul propus, constituind un îndreptar prețios pentru specialiștii, care urmăresc să fie orientați în problemele hidraulicei biefului aval.

În același timp trebuie menționat că de la data apariției sale, s-au mai obținut o serie de rezultate importante în aceste probleme, în special în ceea ce privește risbermele elastice și construcția părții de capăt a consolidării aval.

Se înțelege că toate acestea nu știrbesc cu nimic calitățile cărții, care rămîne un model de prezentare a problemelor tehnice la un înalt nivel științific.

E. Răzvan

Г. М. ЛОМИЗЕ, А. В. НЕТУШИЛ, *Электроосмотическое водопонижение* (Coborîrea electroosmotică a nivelului apei subterane). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1958, 176 стр., 69 рис.

Deși se referă la o problemă mult dezbătută în literatura de specialitate din ultimii ani, lucrarea prof. G. M. Lomize și A. V. Netușil prezintă aproape exclusiv materiale originale, bazate pe studiile efectuate de catedrele de fundații și bazele teoretice ale electrotehnicii din Institutul energetic din Moscova, în colaborare cu mai multe unități de producție.

În capitolul introductiv, se expun cîteva considerente generale privind domeniul de aplicabilitate a diferitelor metode de coborîre a apei subterane, precum și o descriere succintă a diferitelor aplicații ale drenării electroosmotice menționate în literatura de specialitate. Se insistă asupra specificului comportării pămînturilor fine la acțiunea de coborîre a nivelului apei subterane. După cum remarca încă mai demult M. N. Gersevanov, în pămînturile fine, nestabile sub influența acțiunii hidrodinamice, dar totuși puțin permeabile și cu o capacitate accentuată de reținere a apei, coborîrea nivelului apei subterane reușește să înlăture fenomenele de nestabilitate datorită punerii sub tensiune a apei. Pămîntul devine stabil fără ca să fi fost evacuată o cantitate prea mare de apă. Asupra acțiunii pozitive de punere sub tensiune a apei subterane, care se obține și în cazul drenării electroosmotice, se revine și în celelalte capitole ale cărții.

Capitolul următor dedicat electroosmozei în pămînturi, începe cu o expunere a fenomenului de electroosmoză, ținîndu-se seama de prezența stratului difuz de contraioni și a apei adsorbite din miceliile de argilă. Analiza modului cum se dezvoltă deplasarea electroosmotică a apei prin pămînt duce pe autori la concluzia că se pot deosebi trei feluri de mișcări :

— în pămînturile mai grăunțoase (nisipuri mijlocii și mari) deplasarea electroosmotică a apei se dezvoltă intens în lungul pereților solizi ai scheletului mineral și mult mai lent spre centrul porilor ;

— în pămînturile mai fine (argile prăfoase ușoare, în stare mai afînată, nisipuri fine), curentul electroosmotic cuprinde întreaga secțiune a porilor ;

— în pămînturile fine (argile prăfoase și argile) dezvoltarea curentului electroosmotic devine mai complexă datorită dimensiunilor reduse a porilor și puternicei influențe a fenomenelor de suprafață care duc la o neuniformitate accentuată a concentrației de ioni și gradului de adsorbție a apei în secțiunea porilor.

Pe baza unor considerente de analiză dimensională se stabilesc corelații între coeficienții de permeabilitate electroosmotică și caracteristicele apei și pămîntului pentru primele două tipuri de mișcări menționate mai sus. Se insistă în mod deosebit asupra influenței porozității și dimensiilor particulelor solide asupra coeficientului de permeabilitate electroosmotică (k_e) și se prezintă date experimentale care confirmă relațiile stabilite.

Pentru pămînturile argiloase se insistă numai asupra creșterii proporționale a coeficientului de permeabilitate electroosmotice (k_e) cu porozitatea, demonstrată experimental.

Comparația valorilor lui k_e indicate în diferite studii de specialitate scoate în evidență faptul, menționat și de alți cercetători, că acest coeficient variază în limite relativ strînse (raportul valorilor extreme egal cu 10—15).

Drept un al doilea coeficient caracteristic de mare importanță pentru electroosmoză este prezentată conductibilitatea electrică a pămîntului.

Autorii țin să sublinieze că electroosmoza nu produce îndesarea pămîntului, deoarece efectul de antrenare hidrodinamică a curentului electroosmotic (frecarea dintre curentul de apă și pereții solizi ai porilor) este contrabalansat de presiunea egală și de sens contrar datorită electroforezei.

Analizînd deplasarea apei din pămînt sub acțiunea simultană a unui cîmp electric și al unui cîmp hidromecanic de forțe, autorii se opresc în mod deosebit asupra anumitor aspecte ale procesului.

— Caracteristic pentru influența electroosmozei asupra posibilității de punere în mișcare a apei din pămînt este raportul k dintre coeficientul de permeabilitate electroosmotică (k_E) și cel de permeabilitate hidromecanică (k_Φ)

$$k = \frac{k_E}{k_\Phi}.$$

Se consideră că acțiunea electroosmotică prezintă un interes practic numai pentru pămînturile la care raportul k depășește valoarea 10.

— În pămînturile argiloase, datorită acțiunii cîmpului electric asupra echilibrului de forțe din complexul de adsorbție, electroosmoza influențează și asupra permeabilității hidraulice a pămîntului. De aceea, coeficientul k își mărește valoarea cînd filtrația hidromecanică are loc simultan cu electroosmoza, ajungînd la valoarea $k_{\Phi E}$. Coeficientul *efectului de filtrație al electroosmozei* ($\Phi = k_{\Phi E}/k_\Phi$) ajunge în experiențele ale căror rezultate sînt prezentate în lucrare, pînă la valoarea 15. În cadrul acestor încercări s-a constatat că Φ începe să crească cînd gradientul electric atinge valori de ordinul $E = 0{,}20 - 0{,}25$ V/cm, atingînd o valoare maximă pentru $E = 0{,}5 - 0{,}75$ V/cm apoi rămîne constant.

Coeficientul Φ atinge valori care pot prezenta un interes practic numai în pămînturile cu un caracter argilos. În celelalte, creşterea lui este neglijabilă şi se poate considera că acţiunile celor două cîmpuri (electric şi hidromecanic) se sumează direct, fără a se interinfluenţa.

Electroosmoza poate fi însoţită, în cazul în care anoda nu este în contact cu apa în exterior, de apariţia unei presiuni negative în apa din pămînt. Cîtă vreme această presiune rămîne inferioară unei anumite valori critice (p_{cr}), apa rămîne în contact cu anoda. După atingerea ei, apa începe să se îndepărteze de la anodă şi, simultan se produce îndesarea pămîntului. În cazul în care anoda comunică cu atmosfera, în încercările la care se referă autorii, valoarea lui p_{cr} a atins 0,3–0,8 atm.

Capitolul al treilea al lucrării se ocupă cu modelarea şi calculul coborîrii electrice a nivelului apei subterane. Principala cale de rezolvare preconizată în lucrare este metoda analogiei electro-hidrodinamice. Se studiază cazul în care acţiunile cîmpului electric şi hidrodinamic se sumează direct

$$V_t = V_E + V_\Phi = -k_E \text{ grad } \varphi - k_\Phi \text{ grad } h,$$

φ = potenţialul electric,

h = potenţialul hidromecanic.

Coeficienţii de permeabilitate şi conductibilitate sînt constanţi, anoda nu este alimentată cu apă din exterior, iar compresibilitatea pămîntului poate fi neglijată, deci

$$\text{div } V_t = 0.$$

În felul acesta problema se descompune în două probleme distincte:

— studiul cîmpului electric şi al efectului lui, conform ecuaţiei

$$\nabla^2 \varphi = 0;$$

— studiul cîmpului hidromecanic şi al efectului lui conform ecuaţiei

$$\nabla^2 h = 0.$$

Sînt prezentate pentru cazurile curent întîlnite în practică condiţiile de margine necesare rezolvării celor două ecuaţii.

Rezolvarea se face în două etape, prin două modelări succesive. Se modelează mai întîi masivul de pămînt în vederea studiului cîmpului electric şi se determină liniile echipotenţiale şi celelalte elemente caracteristice. Apoi se trece la al doilea model pentru cîmpul hidromecanic, folosind în ceea ce priveşte condiţia de margine de la anodă, datele obţinute din modelul precedent (dat fiindcă anoda nu este alimentată cu apă din exterior, la anod $V_E = - V_\Phi$).

Datele finale se obţin prin sumarea rezultatelor indicate de cele două modele.

Deoarece creşterea intensităţii curentului electric duce la încălzirea pămîntului, dăunînd procesului de electroosmoză, se studiază influenţa intensităţii curentului asupra temperaturii pămîntului şi se indică o relaţie semi-empirică pentru limitarea acestei intensităţi.

Modelarea spaţială a filtraţiei electroosmotice întîmpină unele dificultăţi care fac să fie preferat o modelare plană. Se studiază posibilităţile de trecere de la problema spaţială la cea plană. Pornindu-se de la comparaţia dintre spectrele cîmpurilor electrice generate de un şir de electrozi izolaţi şi de o placă-electrod continuă, se stabilesc anumite rezistenţe care trebuie incluse în circuitul electric al plăcii pentru ca să se obţină un cîmp electric aproximativ echivalent cu cel al şirului de electrozi izolaţi. Sînt indicate valorile acestor rezistenţe atît pentru cazul în care anozii şi catozii sînt dispuşi separat, în două şiruri paralele, cît şi în cazul aşezării lor alternat, anod-catod în acelaşi rînd. Cu ajutorul acestor rezistenţe suplimentare, problemele spaţiale pot fi studiate prin intermediul unor scheme plane.

Un paragraf special se ocupă cu problema modelării coborîrii electroosmotice a apei în mediile anizotrope (pămînturi stratificate, electrozi înconjuraţi de un strat filtrant cu caracteristici net deosebite de cele ale restului masivului de pămînt).

Deoarece modelarea nu constituie totdeauna o soluţie comodă pentru inginerii proiectanţi, se indică o metodă de calcul pentru două cazuri curent întîlnite în practica de coborîre electroosmotică a nivelului apei subterane (incintă înconjurată de un şir de anode şi unul de catode, paralele unul cu altul, alimentată cu apă lateral sau de jos în sus). Calculul cuprinde două etape principale: determinarea rezistenţei electrice a şirurilor de electrode şi stabilirea înălţimii de presiune în cîteva puncte caracteristice (la electrode şi în centrul incintei).

Formulele prezentate permit rezolvarea rapidă a problemei.

Ultimul capitol prezintă o serie de considerente de ordin practic şi de indicaţii privind aplicarea coborîrii electroosmotice a nivelului apei subterane, folosind drept catode filtre aciculare vacuumate.

Se dau indicaţii cu privire la domeniul de aplicare al metodei şi schemele de dispunere a electrodelor şi filtrelor. Se arată modul cum se pot determina coeficienţii caracteristici necesari proiectării lucrării. Se reia sub formă schematizată problema calculului coborîrii nivelului apei prin electroosmoză şi se dau exemple de calcul. Sînt prezentate date privind organizarea lucrărilor şi utilajul necesar.

Cartea profesorilor Lomize şi Netuşil contribuie la aprofundarea cunoaşterii fenomenului de electroosmoză în pămînturi şi la rezolvarea problemelor privind aplicarea lui în practică, printr-o serie de elemente noi şi extrem de interesante: prin analiza multilaterală a coeficienţilor electroosmotici şi efectului acţiunii simultane a cîmpurilor electrice şi hidromecanice, prin extinderea factorilor care condiţionează deplasarea electroosmotică a apei prin pămînt şi introducerea în calcul a presiunii negative în zona anodică şi a efectului gradientului de umiditate, prin prezentarea unei metode practice pentru calculul analitic sau pe bază de modelare, a coborîrii electroosmotice a apei subterane etc. Materialele prezentate deschid noi perspective în ceea ce priveşte studiul electroosmozei, constituind o dovadă în plus că această problemă, atît de mult dezbătută, este încă departe de a fi epuizată.

R. J. Bally

* * * *ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ* (Fundaţii şi terenuri de fundaţie).

Научно-технический бюллетень, 21, Москва, 1958, Академия Строительства и Архитектуры СССР, Научно-исследовательский Институт Оснований и подземных сооружений.

Primul articol al Buletinului, dedicat celui de-al 4-lea Congres Internaţional de geotehnică şi fundaţii este scris de doi membri ai delegaţiei sovietice la congres, R. A. Tokar directorul Institutului de cercetări ştiinţifice din Moscova pentru terenul de fundaţie şi construcţii subterane şi prof. D. D. Barkan de la acelaşi institut. Articolul cuprinde prezentarea detaliată pe secţii şi probleme a materialului expus la congres, atrăgîndu-se atenţia asupra deosebitului interes cu care au fost privite comunicările sovietice referitoare la lucrările teoretice ale Acad. V. V. Sokolovski şi colaboratorilor lui asupra stării de echilibru limită al masivelor de pămînt, precum şi la experienţa sovietică în aplicarea vibraţiilor pentru înfigerea în pămînt a palplanşelor, tuburilor, piloţilor şi executarea forajelor de prospecţiune geologică. În încheiere, se face o scurtă apreciere asupra concluziilor care se pot trage în lumina discuţiilor de la congres, cu privire la activitatea de specialitate din U.R.S.S. Se atrage atenţia asupra faptului că specialiştii sovietici sînt sensibil în avans în ceea ce priveşte o serie de probleme teoretice, precum şi în efectuarea de experienţe pe teren la scară mare.

Sînt însă şi domenii în care realizările obţinute în alte ţări prezintă foarte mult interes : marea atenţie dată în străinătate pentru o foarte bună utilare a laboratoarelor de specialitate, pentru aplicarea curentă a metodelor empirice, simple, standardizate, de determinări de caracteristice pe teren. Un avantaj important îl constituie faptul că utilajul geotehnic este executat de fabrici specializate. De mare interes este buna organizare a schimbului de informaţii (documentării) de specialitate şi existentă în mai multe ţări a unor periodice pentru probleme de geotehnică şi fundaţii.

O. J. Sehter prezintă o metodă teoretică de transpunere în calcul a mişcării unui vibrator inelar cu oscilaţii verticale pentru înfigerea piloţilor în pămînt. Vibratorul se îmbracă în jurul capului pilotului şi este prevăzut cu un dispozitiv automat care prinde pilotul cînd vibratorul coboară în jos şi îl eliberează cînd se ridică în sus. Cu ajutorul relaţiilor obţinute se examinează pentru un caz particular domeniul de utilizare al vibratorului în funcţie de caracteristicele lui şi de rezistenţă la înfigere a terenului; se prezintă diverse corelaţii între caracteristicele vibratorului şi pămîntului, pe de o parte, şi comportarea vibratorului pe de altă parte, precum şi cîteva date experimentale.

Articolul lui R. V. Serebrianîi constituie o tratare matematică pur teoretică a calculului plăcilor de fundaţie legate prin articulaţii şi aşezate pe un strat elastic de grosime finită. Interesul practic al studiului este legat de extinderea aplicării în construcţii a fundaţiilor prefabricate şi, în general, a industrializării execuţiei. În articol este prezentată deducţia matematică a formulelor generale pentru calculul a două plăci semiinfinite, articulate în lungul unei drepte infinite de legătură, aşezate pe un mediu elastic de grosime finită. Autorul utilizează rezultatele şi unele indicaţii de metodă de calcul cuprinse într-un studiu anterior al lui O. I. Sehter pentru o placă infinită solicitată de o sarcină concentrată verticală, dînd însă o dezvoltare originală cazului deosebit de care se ocupă. Relaţiile generale obţinute sînt examinate în încheiere pentru un caz particular (cele două plăci solicitate de o sarcină verticală concentrată aşezată pe dreapta de joncţiune, în ipoteza mediului elastic semiinfinit).

M. I. Gorbunov Posadov şi S. I. Sinelşikov caută să stabilească prin metode statistice, corelaţia dintre coeficientul de compresibilitate al pămînturilor şi alţi coeficienţi caracteristici geotehnici. Pe baza examinării caracteristicelor a 437 probe de pămînturi foarte diferite, stabilite cu o metodă unică de determinarea coeficienţilor, se ajunge la concluzia că, în primul rînd porozitatea pămîntului, apoi caracteristicele lui de plasticitate influenţează în suficientă măsură coeficientul de compresibilitate pentru ca să se poată indica valori medii ale acestui coeficient, pentru diferite porozităţi şi indici de plasticitate, indiferent de natura pămîntului (compoziţia granulometrică nu are o influenţă specifică asupra coeficientului de compresibilitate. Influenţa ei se resimte prin intermediul porozităţii). Între coeficientul de compresibilitate determinat în edometru şi cel măsurat direct pe teren există o mare deosebire, care însă poate fi apreciată pe baza unor studii empirice anterioare. În concluzie, se prezintă un tabel de valori ale modulului de deformaţie a pămînturilor în funcţie de porozitatea şi indicele lor de plasticitate.

V. S. Sarov propune tratarea argilei ca un corp macro-molecular solubil în apă. În prezenţa apei, argila se desface în macroanioni înconjuraţi de cationii schimbabili desprinşi de pe suprafaţa particulelor de argilă, cu molecule de apă orientate în jurul lor. Amestecul apă-argilă ar avea deci o alcătuire similară cu soluţiile corpurilor cu structură moleculară (de ex.

ClNa) sau molecular-asociativă (de ex. săpun). Acceptarea acestei concepţii permite aplicarea la studiul argilelor a legilor valabile pentru soluţii, de exemplu tratarea absorbţiei apei ca un fenomen de osmoză. Examinînd din acest punct de vedere circulaţia electroosmotică a apei prin pămînt, în cazul anodului înecat (sub apă), Sarov deduce următoarea lege de electroosmoză : dintr-o probă de argilă îmbibată cu apă, străbătută de un Faraday, cu anodul înecat, se drenează la catod o cantitate de apă egală cu cantitatea de apă orientată în jurul a un gram — echivalent de cationi — schimbabili din pămînt. Aceeaşi concepţie permite explicarea coeziunii foarte ridicate a argilei umezite şi apoi uscate prin evaporare. Prin umezirea argilei suprafaţa particulelor se dizolvă, cationii schimbabili se desprind şi se răspîndesc în apă, ceea ce le permite să se apropie unii de alţii la distanţe foarte mici. Prin uscare, cationii se apropie pînă la distanţe de ordinul amstrongilor şi se orientează, asigurînd astfel o coeziune moleculară pămîntului.

Buletinul mai conţine cîteva articole scurte despre : *Termenul de pămînt argilos macroporic* de I. M. Abelev; *Coeficientul „n" din formula lui Gersevanov pentru stabilirea capacităţii portante a piloţilor* de P. R. Tikunov; *Legătura între coeficientul de presiune laterală şi cel de deformaţie laterală* de M. V. Malîşev; *O metodă simplificată de calculul tasărilor pămînturilor de umplutură care conţin şi incluziuni organice* de V. I. Krutov.

Rubrica de informaţii conţine date despre umplerea camerelor de lucru ale chesoanelor, maşini vibratorii pentru îndesarea de suprafaţă a pămînturilor, aplicarea în construcţia podurilor a unui nou tip de fundaţii de adîncime, influenţa suprafeţelor încărcate asupra tasării fundaţiilor învecinate, consfătuirea cu privire la fundarea pe pămînturi veşnic îngheţate şi înfiinţarea unei staţii-laborator la Iakuţk pentru studiul fundării pe astfel de pămînturi.

O rubrică specială este consacrată enumerării publicaţiilor Institutului de cercetări ştiinţifice din Moscova pentru pămînturi de fundaţii şi construcţii subterane, colocviilor ţinute în cadrul Institutului precum şi informării asupra unor evenimente mai deosebite din activitatea cercurilor de specialitate (hotărîri ale Prezidiului Academiei de construcţii şi arhitectură din U.R.S.S. privind problemele de geotehnică şi fundaţii, conferinţe ştiinţifice în diferite institute etc.).

Buletinul îşi încetează apariţia în anul 1958. El va fi înlocuit în anul 1959 cu o revistă periodică (6 numere pe an) cu titlul *Osnovanii fundamentî i mehanika gruntov.*

R. J. Bally

M. DONEL, *Zur Bestimmung der Grenzen bei Poreninjektionen mit Zement und Chemikalien bei Verfestigungs- und Abdichtungsarbeiten im Bergbau und Baugewerbe* (Cu privire la determinarea limitelor de aplicabilitate a injecţiilor cu ciment şi substanţe chimice pentru întărire şi impermeabilizarea rocilor în lucrările miniere şi de construcţii). Freiburger Forschungshefte A 105. Bergbau. Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 64 pag., 24 fig.

Scopul lucrării este aducerea unei contribuţii în problema determinării domeniului de aplicare a diferitelor metode de injectare utilizate în lucrările miniere şi de construcţii pentru întărirea şi impermeabilitatea rocilor. Sînt analizate diferite metode chimice de consolidare a rocilor prin injectare (diverse tipuri de silicatizări) şi în special injecţiile cu ciment, cu sau fără adaosuri de alte materiale.

Lucrarea se bazează, pe de o parte, pe datele existente în literatură, pe de altă parte, pe experienţele efectuate de autor în condiţii de laborator, completate cu o experienţă la scară relativ mare pe teren, şi pe concluziile observaţiilor efectuate la unele aplicaţii efective ale acestor metode realizate anterior.

Atenția autorului este îndreptată în mod deosebit asupra posibilității extinderii domeniului de aplicare al injecțiilor cu ciment. Se ajunge la concluzia că, prin utilizarea cimentului mai fin măcinat, de tipul celor denumite *cimenturi de injecții*, se pot aplica injectările cu ciment în nisipuri mari. Dat fiind că există posibilitatea practică a obținerii unor cimenturi și mai fin măcinate, se poate spera în extinderea aplicabilității injecțiilor cu ciment și la nisipurile mijlocii.

În lucrare se insistă asupra analizei comparative între limitele de aplicabilitate ale injecțiilor cu ciment sau substanțe chimice indicate în literatură și cele deduse pe baza propriilor experiențe ale autorului. Considerentele deduse din această analiză permit explicarea unora dintre neconcordanțele care se constată între indicațiile existente cu privire la aceste limite precum și precizarea unor aspecte utile pentru cercetări ulterioare. În orice caz, pentru evitarea greșelilor în aplicarea consolidărilor prin injectări este bine ca în fiecare caz în parte să se verifice prin încercări prealabile indicațiile privind aplicabilitatea diverselor tipuri de injecții cuprinse în diferite îndreptare.

Exemplele analizate în lucrare dau indicații cu privire la intensitatea efectului de întărire obținut prin injecții chimice, la diferența dintre intensitatea întăririi obținute în condiții de laborator și pe șantier, la durabilitatea efortului de întărire.

În cazul injecțiilor cu ciment autorul atrage atenția că nu sînt concludente comparațiile între rezistențele probelor întărite în condiții de laborator sau pe șantier.

R. J. Bally

Н. И. ПРИГОРОВСКИЙ, А. К. ПРЕЙСС, *Исследование напряжений и жесткости деталей машин на тензометрических моделях.* (Cercetarea tensiunilor și rigidității organelor de mașini pe modele prin tensometrie). Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1958, 232 стр.

Lucrarea se ocupă în principal cu metodica de cercetare experimentală a tensiunilor și deformațiilor pe modele în organele de mașini și în elementele de construcții, în cazul cînd încărcările sînt cunoscute, în funcție de forma și dimensiunile piesei studiate; în a doua parte a lucrării se dau exemple de probleme practice rezolvate pe această cale.

Importanța domeniului studiat rezultă în mod deosebit din faptul că apar din ce în ce mai frecvent organe de mașini și elemente de construcții complicate, la care proiectarea necesită o cantitate mare de calcule dificile și uneori chiar de nerezolvat, dacă facem abstracție de perspectiva deschisă de mașinile electronice de calcul și modelare.

Autorii au folosit în loc de modele din metal, modele din mase plastice, care se prelucrează mult mai ușor și, avînd un modul de elasticitate redus, asigură o precizie foarte bună la măsurătorile tensometrice.

Încercările se fac în condiții de laborator fără instalații complicate pentru solicitarea modelelor. Metodica de cercetare pe modele de masă plastică în limitele proporționalității, a fost prelucrată și pusă la punct de autori în Laboratorul pentru studiul tensiunilor și deformațiilor din Institutul de mașini ale Academiei de științe din U.R.S.S. Subliniem cu acest prilej că în țara noastră a fost pusă la punct o metodă pentru studiul construcțiilor pe modele de masă plastică dincolo de limita de proporționalitate *cromoplasticitatea**).

---

*) St. Bălan, S. Răutu, M. Arcan și V. Petcu, *Studiul comportării construcțiilor prin încercări pe modele din masă plastică,* Studii și cercetări de mecanică aplicată, X, *1* (1959).

Lucrarea pe care o examinăm trece pe rînd în revistă principalele probleme ridicate de folosirea modelelor de masă plastică și face o analiză științifică a aspectelor ce apar: condiții de similitudine, influența coeficientului lui Poisson, materialele pentru modele, metodica de executare și solicitare a modelelor etc. Dintre acestea merită a fi subliniate capitolele privitoare la metodica de executare și solicitare a modelelor ce reprezintă o sinteză a experienței bogate pe care o au autorii, sinteză de mare ajutor pentru laboratoarele similare,cu atît mai mult cu cît asemenea date se publică foarte rar.

În continuare, tot în prima parte a lucrării (*Metodica de cercetare*), se dau capitolele privitoare la metodele de măsurare utilizate de autori: metoda lacurilor casante, tensometria, rozeta tensiunilor, măsurarea deplasărilor etc., precum și unele aplicații la probleme simple modelate cu ajutorul materialelor avînd un modul de elasticitate redus. Cităm printre acestea: determinarea centrului de încovoiere la unele profile, studiul unui cadru cu sarcini perpendiculare pe planul său etc., care prezintă în afară de interesul referitor la metodică, și unul cu caracter didactic ce poate fi util catedrelor de rezistența materialelor.

În partea a doua a lucrării, după cum am arătat, se dau exemple de probleme practice cercetate de laboratorul citat: structura de rezistență a unor turbine hidraulice, a unor rotoare de turbine, a unor prese hidraulice, a unor baraje de beton armat etc.

Exemplele prezentate dau o imagine a amploarei lucrărilor necesitate de aceste studii, precum și a complexității problemelor pe care le ridică încercările pe modele. Ele vor constitui un ajutor deosebit atît pentru constructori cît și pentru laboratoarele de specialitate.

În ansamblu, lucrarea răspunde multor întrebări pe care le ridică proiectanții și cercetătorii din institute și prezintă un pas înainte în domeniul studiat.

M. Arcan

J. BRILLA, *Anizotropické steny* (Grinzi pereți anizotrope). Vyd. slovenskej Akad. Vied, Bratislava, 1958, 290 pag.

La Secția de științe tehnice a Academiei slovace de științe se studiază cu deosebit succes unele probleme de elasticitate pentru corpuri anizotrope. În cadrul acestor preocupări a apărut cartea dr. ing. J. Brilla care se ocupă de problema plană a elasticității pentru asemenea corpuri.

După o trecere în revistă, în capitolul I, a ecuațiilor fundamentale ale elasticității corpurilor anizotrope, se formulează în capitolul II problema plană și se indică modul practic de rezolvare a ei.

Capitolele III și IV se ocupă de cazul plăcilor plane cu contur dreptunghiular care se pot rezolva prin polinoame cu ajutorul metodei semiinverse și de cazul semiplanului elastic acționat de sarcini periodice sau locale, folosind dezvoltări în serie Fourier sau integrale Fourier.

În capitolul V se tratează problema de contact plană, în diferite ipoteze de calcul: *a*) neglijarea forțelor de frecare, *b*) luarea în considerare a forțelor de frecare, *c*) luarea în considerare a compatibilității legăturii. Se ia în considerare o ștanță rigidă de formă dreptunghiulară, acționată de o forță concentrată (la mijloc sau excentric) sau de un moment concentrat.

Capitolele VI, VII și VIII cuprind problema generală a plăcii plane cu contur dreptunghiular. Se studiază cazul în care toate cele patru laturi sînt aruncate la infinit (cazul planului elastic), sub acțiunea unor sarcini locale, cazul în care două laturi opuse sînt aruncate la infinit (banda elastică), sub acțiunea unor sarcini locale sau periodice, precum și cazul unei grinzi pereți cu contur dreptunghiular. În acest din urmă caz se generalizează rezultatele obținute pentru corpuri izotrope sub acțiunea unei încărcări oarecare.

În capitolul IX se dau rezultate cu privire la concentrările de eforturi în jurul unei găuri de formă eliptică sau circulară, în placa considerată infinită. În cazul unei variații liniare a tensiunii normale se folosește cu succes algoritmul alternant al lui Schwartz.

Capitolul X tratează pe scurt plăcile plane de formă eliptică sau circulară.

Studiile intreprinse de autor privesc, în primul rînd, cazul unei anizotropii generale. Se fac particularizări pentru tipuri speciale de anizotropii întîlnite în practică, în special pentru cazul ortotrop (cu cele trei tipuri ale lui). Se dau rezultate care pot fi aplicate practic, conducîndu-se problemele — de multe ori — pînă la rezultate numerice și diagrame care pot fi folosite în practică.

Multe din rezultatele prezentate în acest volum aparțin autorului, fiind expresia studiilor întreprinse în cadrul Academiei slovace de științe. Remarcăm, în special, rezultatele cu privire la problema de contact a corpurilor anizotrope precum și rezultatele privind grinzile pereți cu contur dreptunghiular.

Cartea dr. ing. J. Brilla, avînd un cuprins interesant, bazată fiind pe o bogată bibliografie și prezentînd în mare parte rezultate noi, reprezintă o contribuție importantă în domeniul elasticității corpurilor anizotrope.

P. P. Teodorescu

И. А. СИМВУЛИДИ, *Расчет балок на сплошном упругом основании* (Calculul grinzilor așezate pe un mediu elastic continuu). Изд. Советская Наука, Москва. 1958, 304 pag., 100 fig.

Lucrarea este destinată calculului grinzilor așezate pe medii liniar deformabile (pentru care este valabilă legea lui Hooke generalizată).

La baza metodei de calcul propusă stă cunoscuta ecuației a axei deformate a grinzii

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \psi(x) - p(x), \tag{1}$$

în care

EI = rigiditatea grinzii,

y = săgeata în punctul de abscisă x,

$\psi(x)$ = încărcarea pe care trebuie să o transmită grinda pămîntului,

$p(x)$ = reacțiunea pămîntului.

Pentru a evita dificultățile de calcul rezultate din discontinuitatea sarcinilor $\psi(x)$ (forțe concentrate, momente, forțe distribuite numai pe anumite porțiuni ale grinzii), autorul recurge la operatorii introduși de N. N. Gersevanov, numiți *întrerupători* („prerîvateli"):

— întrerupătorul unilateral

$$\Gamma = \frac{1}{\pi}\lim_{\substack{\eta \not< 0 \\ \eta\to 0}} \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x-a}, \tag{2}$$

egal cu 0 pentru $x < a$, cu $\frac{1}{2}$ pentru $x = a$, cu 1 pentru $x > a$;

— întrerupătorul bilateral

$$\Gamma_a^b = \Gamma_a - \Gamma_b \tag{3}$$

egal cu 0 pentru $x < a$, cu $\frac{1}{2}$ pentru $x = a$ și $x = b$, cu 1 pentru $a < x < b$;

— întrerupătorul instantaneu de ordinul I

$$\Gamma'_a = -\frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\eta < 0 \\ \eta \to 0}} \frac{\eta}{(x-a)^2 + \eta^2}, \tag{4}$$

egal cu 0 pentru toate valorile lui x, exceptînd valoarea a;

— întrerupătorul instantaneu de ordinul II

$$\Gamma''_a = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\eta < 0 \\ \eta \to 0}} \frac{2\eta (x-a)}{[(x-a)^2 + \eta^2]^2}, \tag{5}$$

de asemenea egal cu 0 pentru toate valorile lui x, exceptînd a.

Cu ajutorul acestor operatori, sarcinile preluate de grindă se pot transcrie în felul următor: forță concentrată P, aplicată în punctul de abscisă a

$$P\Gamma'_a; \tag{6}$$

moment M aplicat în punctul de abscisă a

$$M\Gamma''_a; \tag{7}$$

forța distribuită $f(x)$ aplicată în intervalul delimitat de abscisele a, b

$$f(x)\Gamma^b_a. \tag{8}$$

Cu ajutorul lor, încărcarea $\psi(x')$ se scrie

$$\psi(x) = \sum \Gamma^{l_{fi}}_{l_{ii}} f(x) + \sum \Gamma''_{l_{mi}} M_i + \sum \Gamma'_{pi} P_i. \tag{9}$$

Această formă are avantajul că redă încărcarea $\psi(x)$ printr-o expresie unică, formal derivabilă și integrabilă după reguli similare regulilor aplicabile funcțiilor continui, valabilă pe întreaga grindă. În felul acesta nu mai este necesară fragmentarea grinzii în funcție de discontinuitățile sarcinilor $\psi(x)$, ceea ce duce la o importantă simplificare a calculului.

Autorul introduce o primă aproximație în calcul admițînd pentru reacțiunea $p(x)$ o distribuție de tipul unui polinom algebric de ordinul n

$$p(x) = a_0 + \frac{2a_1}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{4a_2}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{8a_3}{L^3}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + \frac{16a_4}{L^4}\left(x - \frac{L}{2}\right)^4 + \ldots, \tag{10}$$

în care $a_0 \ldots a_n$ reprezintă coeficienți constanți necunoscuți, a căror valoare urmează să fie determinată din calcul.

Se menționează că este indicat să se limiteze polinomul (10) la puterea 3 sau 4, de preferință puterea a 3-a. Limitarea respectivă este justificată în modul următor:

— dacă se recurge la puteri mai mari, crește prea mult numărul necunoscutelor și se complică excesiv formulele de calcul;

— pentru puteri mai mari, la capetele grinzii apar eforturi exagerat de mari, necorespunzătoare realității.

Prin integrarea ecuației (1), în care $\psi(x)$ s-a înlocuit cu expresia (9) formată din elemente cunoscute iar $p(x)$, cu expresia (10), cuprinzînd $(n + 1)$ necunoscute, se determină tangenta la axa deformată, momentul încovoietor și forța tăietoare, precum și săgeată într-un punct oarecare al grinzii. Prin integrare, mai apar 4 constante necunoscute de integrare.

Rezultă astfel, în total $n + 5$ necunoscute.

Rezultă patru condiții pentru determinarea lor, din cele două condiții de echilibru și două condiții de capăt (momente nule la capetele grinzii).

Pentru celelalte $(n + 1)$ condiții necesare se recurge la condiții parțiale de contact între grindă și teren (de exemplu, autorul admite, în cazul $n = 3$, următoarele condiții :

— egalitatea săgeții și tasării la capătul stîng al grinzii,

— egalitatea săgeții și tasării la mijlocul grinzii,

— egalitatea pantei suprafeței terenului și axei deformate a grinzii în mijlocul ei,

— egalitatea suprafețelor determinate de o orizontală și suprafața terenului sau axa deformată a grinzii.

Eventual, ultima condiție se înlocuiește cu condiția egalității săgeții grinzii și tasării pămîntului la capătul din dreapta al grinzii.

Rezultă astfel o a doua aproximație dat fiind că se pune condiția de contact numai parțial și nu pe întreg traseul grinzii.

O a treia aproximație apare la stabilirea relației dintre presiunile $p(x)$ pe suprafața terenului și tasările respective. Pentru calculul tasărilor se presupune că ele se dezvoltă în condițiile problemei plane de deformație și se recurge la relația lui Flamant (calculul exact ar fi cerut să se recurgă la problema spațială, respectiv la relația lui Boussinesq).

Cu ajutorul relațiilor și condițiilor menționate, autorul deduce valorile celor 8, respectiv 9 necunoscute (în cazul $n = 3$, respectiv $n = 4$) și expresiile pentru $y, \frac{dy}{dx}$, M și Q în forma lor generală (pentru orice tip de încărcare).

Pentru $n = 3$, formulele generale sînt particularizate corespunzător unui mare număr de tipuri de încărcări (forțe concentrate și momente, izolate sau perechi simetrice, încărcări distribuite uniform sau trapezoidal pe porțiuni de grindă etc.).

În lucrare sînt incluse un mare număr de tabele referitoare la cazul în care grinzile sînt încărcate cu sarcini concentrate, momente sau sarcini uniform distribuite pe o porțiune din grindă. Aceste tabele permit reducerea calculului grinzii la cîteva operații aritmetice elementare.

Cu ajutorul materialului cuprins în carte se pot rezolva un mare număr de probleme practice (grinzi de fundații obișnuite, tălpile-console ale zidurilor de sprijin, radierele canalelor etc.).

Tot cu caracter de aplicație practică, se indică o metodă pentru stabilirea modulului de deformație liniară al pămîntului, prin încercări pe teren.

Autorul compară rezultatele obținute prin metoda propusă de el, aplicată la cîteva cazuri particulare, cu rezultatele obținute în aceleași cazuri cu metode propuse de alți autori, tot în ipoteza mediilor liniar deformabile. Diferența dintre aceste rezultate se menține în limite admisibile.

Metoda expusă în lucrarea recenzată prezintă mult interes prin faptul că permite un calcul rapid și comod în cazuri pentru care alte metode duc la calcule dificile. Se insistă însă prea puțin în ceea ce privește analiza efectului aproximațiilor incluse în calcul asupra rezultatelor finale. În cazul în care efectul acestor aproximații se dovedește neglijabil, metoda prezentată constituie un foarte bun ajutor pentru proiectarea grinzilor pe medii continue.

R. J. Bally

I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDYAYEW, *Taschenbuch der Mathematik* (Agendă matematică). Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1958, 548 pag. și 427 fig.

Această lucrare reprezintă traducerea în limba germană a celei de-a VI-a ediții a cărții Справочник по Математике, Moscova, 1956 de I. N. Bronstein și K. A. Semendyayew.

Ediția germană a fost completată cu un paragraf tratînd calculul variațional, redactat de prof. Miller de la Școala superioară de transporturi din Dresda.

Lucrarea în cele șase capitole în care este împărțită, oferă un bogat material matematic de primă necesitate.

Primul capitol conține tabelele de valori ale funcțiilor mai des întîlnite, logaritm, funcții trigonometrice, exponențiale etc., precum și ale unor funcții speciale (polinoamele Legendre, funcțiile gama și Bessel, integrala de probabilitate). În plus, acest capitol mai conține și reprezentările grafice ale unor funcții mai des utilizate în practică, polinomiale, raționale, iraționale, trigonometrice, hiperbolice, curbe de gradul trei și patru, precum și diverse alte curbe.

Cel de-al doilea capitol, prezintă calculul aproximativ și rezultatele matematicilor elementare (algebra, geometria, trigonometria plană, sferică și hiperbolică).

Cel de-al treilea capitol al lucrării se referă la geometria analitică și la geometria diferențială. Sînt expuse metodele și formulele curente ale geometriei analitice, sînt studiate analitic proprietățile figurilor geometrice plane și în spațiu; de asemenea, sînt studiate conicele și cuadricele. În partea din acest capitol, rezervată geometriei diferențiale, sînt prezentate proprietățile diferențiale ale curbelor plane și în spațiu (raportate la triedrul lui Frenet), ale suprafețelor (în baza studiului primelor două forme fundamentale) și ale curbelor pe suprafețe.

Capitolul patru, reprezintă o introducere în analiză. Este prezentat un succint studiu al seriilor și al proprietăților funcțiilor precum și formulele de bază ale calculului diferențial și integral. Urmează apoi studiul ecuațiilor diferențiale și al sistemelor de ecuații diferențiale liniare, al ecuațiilor cu derivate parțiale de primul și al doilea ordin, indicîndu-se proprietăți și metode de rezolvare clasice și moderne (bazate pe metode operaționale).

Capitolul cinci continuă cu prezentarea altor rezultate ale analizei. Un prim paragraf se referă la studiul funcțiilor de variabilă complexă; urmează apoi un paragraf conținînd un studiu al algebrei vectoriale, analizei vectoriale și al teoriei cîmpului. În paragraful următor, este studiată dezvoltarea în serie Fourier, studiu completat cu tabele de coeficienți Fourier pentru funcțiile curente.

Capitolul se încheie printr-o prezentare a calculului variațional. Se stabilesc condițiile de extremum pentru funcționalele de o variabilă; se definește și se dă soluția pentru problema variațională inversă. Rezultatele sînt generalizate la funcționalele de mai multe variabile independente, la funcționale care depind și de funcția necunoscută și de primele ei n derivate, la funcționale cu integrale multiple. Se studiază, de asemenea, problema extremalelor cu legături cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange. Este indicat și procedeul lui Ritz de calcul aproximativ al extremalei.

Ultimul capitol, al șaselea, conține studiul problemei prelucării erorilor de observație. După ce se expun noțiunile fundamentale ale calculului probabilităților și teoriei erorilor de observație, sînt indicate metode de interpolare și de stabilire a formulelor empirice.

În tot cuprinsul ei, cartea prezintă sub o formă concisă și clară un material foarte bogat. Aproape fiecare teoremă sau formulă mai importantă este ilustrată printr-unul sau mai multe exemple a căror rezolvare este complet făcută.

Această lucrare constituie un prețios ajutor pentru inginerii, fizicienii și matematicienii care lucrează în diverse ramuri aplicative ale științei și tehnicii.

Adriana Năstase

CARŢI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

⁂ *Odinnadţataia i dvenadţataia naucino-tehniceskie konferenţii* 1956—1957. Gostoptehizdat, Leningrad, 1958, 318 pag.

N. N. IVAŞCENCO, *Avtomaticeskoe regulirovanie. Teoria i elementî sistem.* Maşghiz, Moscova, 1958, 531 pag.

Din : *Trudî moskovskogo Instituta Injenerov Jeleznodorojnogo Transporta imeni I. V. Stalina*, Moscova.

⁂ *Issledovania rabotî uzlov mehaniceskoi ciasti elektropodvijnogo sostava.* Vîpusk 96, 1957, 167 pag.

⁂ *Usoverşenstvovanie tehnologhii proisvodstva detalei podvijnogo sostava.* Vîpusk 93, 1957, 202 pag.

⁂ *Issledovania Maşin i Mehanizmov dlia gruzovîh rabot.* Vîpusk 97, 1958, 278 pag.

⁂ *Voprosî konstrukţii, dinamiki i elektrooborudovaniia elektropodvijnogo sostava.* Vîpusk 103, 1958, 173 pag.

⁂ Z. O. Karakaşian, *Teoria rabotî mehanizmov avtosţepok tipa SA-3.* Vîpusk 98, 1957, 167 pag.

⁂ *Aleksandr Mitrofanovici Terpigorev.* Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1958, 82 pag.

⁂ *Ivan Ivanovici Tolstoi* (1880—1954). Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1958, 45 pag.

⁂ *Lev Dmitrievici Şeviakov.* Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1958, 79 pag.

⁂ *Petr Aleksandrovici Rebinder*, Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1958, 123 pag.

⁂ *Aleksei Aleksandrovici Balandin.* Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1958, 72 pag.

OTTO KRAEMER, *Getriebelehre.* Ed. a II-a. G. Braun, Karlsruhe, 1959, 264 pag.

A. BETZ, *Einführung in die Theorie der Strömungsmaschinen.* G. Braun, Karlsruhe, 1959, 272 pag.

S. M. G. DOS SANTOS, *Kippe ou flambagem transversal.* Rio de Janeiro, 1956, 123 pag.

⁂ *Laboratoires d'Hydraulique et de Mécanique des Fluides. Travaux et Publications.* Année 1958. École Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique et d'Hydraulique, Toulouse, 1958, 120 pag.

H. G. GARNIR, *Les problèmes aux limites de la physique mathématique.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1958, 234 pag.

G. DOETSCH, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1958, 300 pag.

G. PRIKEL, *Tiefbohrtechnik.* Springer-Verlag, Wien, 1959, 414 pag.

M. GIQUEAUX, *Ecoulements subsonique et transsonique d'un fluide parfait.* Centre d'Études Supérieures de Mécanique. Section des Fluides Compressibles, Paris, 1958, 148 pag.

M. BILLION, *Dynamique du vol.* Centre d'Études Supérieures de Mécanique. Section des Fluides Compressibles, Paris, 1959, 181 pag.

C. ROY-POCHON ş.a., *Traité pratique de technique du vide.* Association Nationale de la Recherche Technique, Paris, 1958, 347 pag.

Din : TRANSACTIONS OF THE ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, Stockholm :

H. NYLANDER, *Torsion, Bending and Lateral Buckling of I-Beams. 102* (1956), 140 pag.

E. SANDSTRÖM, *Creep Buckling of Cylindrical Shells. 115* (1957), 31 pag.

H. O. KREISS, *Über sachgemässe Cauchyprobleme für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen. 128* (1958), 17 pag.

AL X-lea CONGRES DE MECANICĂ APLICATĂ

Intre 31 august și 17 septembrie 1960 va avea loc la Stresa-Italia al X-lea Congres de mecanică aplicată.

Lucrările Congresului se vor desfășura în cadrul următoarelor două secții:

— *Dinamica fluidelor (hidrodinamica și aerodinamica)*,

— *Mecanica solidelor (dinamica corpului rigid, vibrații, elasticitate, plasticitate și teoria structurilor)*.

Se menționează că termodinamica și metodele de calcul ca atare nu sînt incluse. Se vor primi însă lucrări cuprinzînd aplicații specifice ale metodelor de calcul, în măsura în care sînt legate de problemele cuprinse în secțiile de mai sus.

Rezumatele comunicărilor propuse trebuie trimise pînă la 30 decembrie 1959 pe adresa:

The Secretary of the International Committee
Prof. Mekelweg 2, Delft, Netherlands

Rezumatele vor fi dactilografiate la două rînduri, în 4 exemplare și nu vor depăși două pagini. Se recomandă ca rezumatele se fie redactate în două din limbile oficiale ale Congresului (engleză, franceză, germană și italiană).

Orice corespondență în afară de trimiterea lucrărilor va fi adresată:

The Italian Organizing Committee
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Officio Relazioni Internazionali
Piazzale delle Scienze 7, ROMA

LUCRĂRI DIN DOMENIUL MECANICII APLICATE PUBLICATE ÎN „STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ" ÎN 10 ANI DE APARIŢIE

AEROMECANICĂ

	Tom	nr.	pag.	anul
Andrei Şt., Antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter în zborul la punct fix	X	2	393	1959
Andrei Şt., Nomograme pentru calculul pierderilor interne în palele rotorului de elicopter antrenat pneumatic	X	3	663	1959
Carafoli E., Stroescu I., Cămărăşescu N., Acţiunea vîntului asupra obstacolelor permeabile cu aplicaţii la problema perdelelor forestiere de protecţie agricolă.	IV		207	1953
Carafoli E., Influenţa unui suflu axial suplimentar asupra aripii de anvergură finită	V	1–2	155	1954
Carafoli E., Ionescu M., Rezistenţa aripilor triunghiulare dublu conice, cu pantă variabilă în curent supersonic. . .	V	3–4	285	1954
Carafoli E., Dumitrescu L., Asupra aripii delta subţiri, dublu-conice cu incidenţă variabilă în curent supersonic. . .	VI	3–4	237	1955
Carafoli E. şi colaboratori, Asupra aripii unghiulare avînd discuri axiale cu incidenţă antisimetrică	VII	2	307	1956
Carafoli E., Dumitrescu L., Rezistenţa de undă a unei clase de aripi delta subţiri dublu-conice, cu incidenţă variabilă, în curent supersonic	VII	3	581	1956
Carafoli E., Săndulescu S., Influenţa bracajului aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii triunghiulare în regim supersonic	VII	4	815	1956
Carafoli E., Ionescu M., Scurgeri conice de ordin superior în jurul aripilor triunghiulare subţiri sau de grosime simetrică (o teorie generală unitară)	VIII	3	677	1957
Carafoli E. şi colaboratori, Scurgerea supersonică omogenă de ordin superior în jurul unei aripi unghiulare prevăzută cu placă normală	VIII	4	959	1957
Carafoli E., Ionescu M., Teoria generală a aripii triunghiulare cu distribuţie de presiuni dată (problema indirectă). . .	IX	2	267	1958
Carafoli E. şi colaboratori, Probleme mixte ale aripilor triunghiulare prevăzute cu placă normală în curent supersonic (aripi cruciforme)	IX	4	819	1958

	Tom	nr.	pag.	anul
Carafoli E., Năstase Adriana, Studiul aripilor triunghiulare subţiri cu simetrie forţată în curent supersonic.	IX	4	833	1958
Carafoli E., Săndulescu S., Caracteristicile aerodinamice ale aripioarelor avînd o mişcare oscilatorie armonică în regim supersonic.	X	1	7	1959
Carafoli E., Mateescu Dan, Scurgerea supersonică în jurul sistemului portant aripă-fuselaj conic	X	2	335	1959
Constantinescu V. N., Consideraţii asupra vriei permanente a avioanelor.	VI	1–2	73	1955
Constantinescu V. N., Asupra extinderii problemei Tsienscurlock la mişcări axial simetrice	VII	2	323	1956
Constantinescu V. N., Consideraţii asupra arderii laminare în camere de secţiune variabilă	VII	4	851	1956
Darie Gh. N., Aplicarea metodei Carafoli la calculul rezistenţei de undă a aripii delta dublu conice cu pantă dublă. . . .	VIII	3	725	1957
Dumitrescu L., Calculul lungimii elementelor componente ale unui tub de şoc, pentru o durată de funcţionare dată. . .	VII	2	337	1956
Dumitrescu L., Determinarea efectului de ejecţie la profile cu volet fluid (jet-flap)	VIII	2	357	1957
Dumitrescu L., Profile aerodinamice cu jet în prezenţa solului. .	IX	1	43	1958
Dumitrescu L., Asupra regimului optim de funcţionare a rachetelor	IX	2	285	1958
Dumitrescu L., Comănescu T., Influenţa regimului de tracţiune asupra performanţelor unei rachete lansate tangenţial de pe un satelit artificial	IX	3	537	1958
Dumitrescu L., Asupra transferului de căldură în scurgerile liber moleculare	X	2	379	1959
Hacker T., Contribuţii la studiul stabilităţii longitudinale a avionului în evoluţiile cele mai defavorabile.	VI	3–4	269	1955
Hacker T., Despre comportarea avionului în zbor în atmosferă agitată	VIII	4	983	1957
Hacker T., Despre stabilitatea longitudinală a avionului în cazul perturbaţiilor repetate	X	1	69	1959
Hacker T., Stabilitatea avionului cu un număr redus de grade de libertate	X	3	655	1959
Ionescu M., Darie Gh., Caracteristicile aerodinamice ale unei clase de aripi subţiri în scurgerea omogenă de ordin superior.	X	2	367	1959
Ionescu M., Darie Gh., Asupra rezistenţei de undă şi momentului de ruliu ale aripilor cu borduri de atac supersonice. .	X	3	683	1959
Marinescu Al., Influenţa efectului giroscopic al rotorului în stabilitatea longitudinală a elicopterului.	V	3–4	325	1954
Marinescu Al., Săvulescu Şt., Cercetări experimentale asupra repartiţiei circulaţiei de-a lungul anvergurii pe aripa eliptică dreaptă şi în săgeată	VI	1–2	39	1955
Marinescu Al., Asupra stabilităţii dinamice a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative	VII	1	29	1956
Marinescu Al., Problema stabilităţii elicopterului cu rotor antrenat prin jet în zbor la punct fix	VI	3–4	299	1955
Marinescu Al., Stabilitatea dinamică în zbor vertical ascendent şi la punct fix a două tipuri frecvente de elicopter . .	VII	3	617	1956
Marinescu Al., Formulele undei mixte pentru sistemele lineare stabile	VII	4	841	1956

	Tom	nr.	pag.	anul
MARINESCU AL., Stabilitatea dinamică în zbor orizontal al elicopterelor avînd rotoare cu pale prinse elastic de butuc. .	IX	1	63	1958
MARINESCU AL., Vibrațiile forțate ale rotoarelor de elicopter cu pale Cantilever	IX	2	297	1958
MARINESCU AL., Asupra vibrațiilor consolei anticuplu la elicopterele cu un singur rotor	X	1	77	1959
MARINESCU AL., SILVEANU E., Încovoierea dinamică a fuselajului de elicopter	X	2	415	1959
NEDELESCU I., Determinarea experimentală a distribuției presiunii datorită vîntului pe acoperișuri de tribune	VI	1–2	59	1955
OROVEANU T., NEDELESCU I., Determinarea experimentală a distribuției presiunii datorită vîntului pe acoperișuri de tribună	V	1–2	163	1954
OROVEANU T., Determinarea circulației pentru o aripă în prezența unui suflu axial de secțiune circulară	V	3–4	307	1954
OROVEANU T., Cercetări asupra scurgerii unui curent de aer printr-un strat de cereale cu aplicații la ventilația cerealelor din silozuri	VII	3	605	1956
PALOȘ M. M., Calculul analitic al unei clase de efuzoare supersonice plane, cu panta mică în vecinătatea colului sonic. .	IX	3	545	1958
PANTAZOPOL D., Determinarea aproximativă a repartiției de presiuni în lungul unui obstacol situat în curent supersonic de gaz	VIII	3	737	1957
PATRAULEA N. N., Determinarea scurgerilor în jurul ecranelor permeabile date	V	3–4	315	1954
PATRAULEA N. N., STĂNESCU C., Teoria mișcărilor subsonice cu dîră aproape rectilinie	VI	3–4	259	1955
PATRAULEA N. N. și COLABORATORI, Aripi de anvergură infinită suflate	VII	3	599	1956
PATRAULEA N. N., Calculul deflecțiunii vînei și al vitezelor induse pe discul rotorului de elicopter	VIII	1	13	1957
PATRAULEA N. N., Profil cu volet fluid în prezența unor singularități date	VIII	2	313	1957
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L., POPESCU C., CĂPRIȚĂ D., GAB H., Cercetări experimentale asupra profilelor aerodinamice suflate	VIII	2	319	1957
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L., Influența pereților asupra încercărilor de aripi toroidale în suflerii circulare. . .	VIII	3	703	1957
PATRAULEA N. N., Indicații asupra mărimii coeficientului de calitate al elicelor propulsive	VIII	3	711	1957
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L., CĂPRIȚĂ D., Caracteristicile aerodinamice ale profilelor cu volet fluid.	IX	1	13	1958
PATRAULEA N. N., Asupra deflectării unei vîne libere de curent. .	IX	1	51	1958
PATRAULEA N. N., Asupra rezolvării problemei lui Prandtl generalizată. Nota 1	IX	3	525	1958
PATRAULEA N. N., Elice tandem antagoniste	X	1	41	1959
PATRAULEA N. N., O metodă simplificată pentru calculul aripii cu volet fluid	X	2	351	1959
PAVELESCU D., OLARU D., Cu privire la determinarea unor parametri ai rachetelor auxiliare	VIII	1	23	1957
RADO GH., Contribuții la studiul coeficientului de umplere al pulsoreactoarelor	VI	3–4	315	1955

	Tom	nr.	pag.	anul
Săndulescu S., Caracteristicile aerodinamice ale aripilor triunghiulare în mişcarea oscilatorie armonică în regim supersonic	X	3	711	1959
Săvulescu Şt., Asupra determinării caracteristicilor stratului limită prin utilizarea unor profile tip de viteze şi temperaturi	VIII	2	341	1957
Săvulescu Şt., Aplicarea metodei profilelor tip de viteze şi temperaturi la calculul stratului limită de pe un corp de revoluţie	VIII	4	975	1957
Săvulescu Şt., Consideraţii asupra unor soluţii din cazul stratului limită compresibil nepermanent	IX	4	867	1958
Săvulescu Şt., Comportarea unor soluţii ale stratului limită tridimensional în ipoteza profilelor tip de viteze şi temperaturi	X	3	695	1959
Tască D., Nedelescu I., Căpriţă D., Determinarea experimentală a distribuţiei presiunii datorite vîntului pe acoperişuri de peroane	IV		181	1953
Tipei N., Studiul traectoriilor orizontale ale unui avion	III	1—2	27	1952
Tipei N., Calculul aerodinamic al aeromotorilor	III	3—4	177	1952
Tipei N., Guţă C., Asupra mişcării avionului pe o traectorie dată	IX	4	855	1958

HIDROMECANICĂ

	Tom	nr.	pag.	anul
Arhanghelski V. A., Filtrarea şi scurgerea prin conducte a fluidelor în mai multe faze	IX	2	319	1958
Carafoli E., Determinarea debitului de scurgere prin orificii şi deversoare	I		19	1950
Codreanu D., Cristea N., O nouă metodă de prevedere a comportării zăcămintelor de ţiţei cu împingere parţială de apă	VII	2	355	1956
Dumitrescu D., Zarea Şt., Toth R., Studii asupra disipatorilor de energie aşezaţi în serie	V	3—4	483	1954
Dumitrescu D., Georgescu P., Studii şi încercări pe modele de descărcători de ape mari	V	3—4	503	1954
Dumitrescu D., Ionescu D., Asupra mişcării turbulente a unui lichid greu într-o conductă circulară netedă	VI	3—4	323	1955
Dumitrescu D., Ionescu V., Toth R., Aplicarea metodei reţelelor la studiul mişcării fluidelor grele cu suprafaţa liberă	VI	3—4	339	1955
Dumitrescu D., Ionescu V., Iancu C., Contribuţii teoretice şi experimentale la studiul mişcării peste deversoare	IX	3	595	1958
Dumitrescu D., Olănescu G., Iamandi C., Streja M., Un nou tip de cisto-sfincterometre	IX	3	631	1958
Dumitrescu D., Ionescu D. Gh., Metode numerice pentru studiul mişcărilor axial-simetrice ale fluidelor perfecte	IX	4	919	1958
Escande L., Transformarea condiţiilor de funcţionare a marilor lucrări hidrotehnice prin aspirarea stratului limită	IX	3	559	1958
Escande L., Cercetări asupra evacuatorilor de ape mari	IX	4	881	1958
Hîncu S., Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării turbulente a fluidelor în canale largi şi conducte circulare sub presiune	IX	4	973	1958

	Tom	nr.	pag.	anul
HÎNCU S., Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării fluidelor cu suprafaţă liberă în canale largi cu fund orizontal	X	1	109	1959
HÎNCU S., Pierderi de energie minimă la amestecul a doi curenţi sub presiune	X	3	723	1959
MANEA V., Calculul masei aparente pentru carene alungite	VIII	2	547	1957
MATEESCU CR. şi colaboratori, Studiul mişcării aluviunilor în regim uniform	VIII	3	757	1957
MATEESCU CR., Metode noi de determinare a distribuţiei vitezelor în mişcarea uniformă a fluidelor vîscoase	VIII	4	991	1957
OROVEANU T., Asupra unei probleme de scurgere spre sondă în cazul unei variaţii oarecare a permeabilităţii	VI	3–4	333	1955
OROVEANU T., PASCAL H., Scurgerea staţionară plan-radială a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros	VII	2	387	1956
OROVEANU T., Cîteva probleme de scurgere printr-un mediu poros cu variaţii unidimensionale a permeabilităţii	VII	4	875	1956
OROVEANU T., O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii staţionare plan-radiale a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros	VIII	2	541	1957
OROVEANU T., Asupra scurgerii nestaţionare a unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros	VIII	3	779	1957
OROVEANU T., Soluţii particulare ale ecuaţiei scurgerii prin medii poroase neomogene	IX	1	83	1958
OROVEANU T., PASCAL H., Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros	IX	3	625	1958
OROVEANU T., Asupra unei clase de scurgeri prin medii poroase neomogene	IX	4	937	1958
OROVEANU T., O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii spre sonde în medii poroase neomogene	X	1	87	1959
PASCAL H., O metodă aproximativă pentru studiul dislocuirii ţiţeiului de către apă în regim nestaţionar	IX	4	945	1958
POPOV M., Încercări pe modele cu pulverizarea fluidelor	VII	1	9	1956
SAVARENSKI A. D., Problemele cercetărilor ştiinţifice în domeniile hidrotehnicii şi resurselor de apă, în legătură cu amenajarea marilor construcţii hidrotehnice	II		19	1951
SELEŞTEANU AL., Problema loviturilor de berbec în conducte	I		55	1950
SELEŞTEANU AL., Injecţia motoarelor cu combustie internă	III	1–2	15	1952
SMIRNOV L. P., PAVLIHINA M. A., Urma turbionară în cazul scurgerii în jurul cilindrilor în vibraţie	IX	2	307	1958
STĂNESCU CHR., DUMITRESCU L., Mişcarea unidimensională a două fluide vîscoase grele separate printr-o suprafaţă plană	VII	4	891	1956
VASILESCU GR., Transformarea braţului Sulina în canal maritim, soluţie care conduce la asigurarea ieşirii la mare şi la valorificarea bogăţiilor Deltei Dunării	VIII	1	233	1957
VLADIMIRESCU I., Un caz particular de mişcare ascensională a pînzei freatice	VII	2	375	1956
VLADIMIRESCU I., Calculul debitelor de viitură a bazinelor mici prin hidrograful indicial în a doua aproximaţie	IX	4	957	1958

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

	Tom	nr.	pag.	anul
Constantinescu V. N., Considerații asupra calculului lagărelor fără joc radial	V	3—4	425	1954
Constantinescu V. N., Considerații asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze	VI	3—4	377	1955
Constantinescu V. N., Considerații asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze	VII	1	81	1956
Constantinescu V. N., Considerații asupra calculului lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze, compuse din suprafețe plane	VII	3	741	1956
Constantinescu V. N., Calculul lagărelor fără joc radial supuse la forțe și viteze variabile	VIII	3	789	1957
Constantinescu V. N., Tanasiciuc C., Grabari V., Determinarea experimentală a sarcinii pe osiile vagoanelor de cale ferată	VIII	4	1051	1957
Constantinescu V. N., Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant	IX	1	103	1958
Constantinescu V. N., Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent	IX	1	139	1958
Constantinescu V. N., Considerații asupra lubrificației cu gaze în regim turbulent	IX	2	369	1958
Constantinescu V. N., Lubrificația lagărelor în regim turbulent supuse la forțe și viteze variabile	IX	3	657	1958
Constantinescu V. N., Stabilitatea mișcării lagărelor circulare lubrificate în regim turbulent	IX	4	997	1958
Constantinescu V. N., Asupra stabilității mișcării lagărelor circulare lubrificate cu gaze	X	1	117	1959
Constantinescu V. N., Calculul lagărelor compuse din suprafețe plane, lubrificate în regim turbulent	X	3	755	1959
Isăcescu D., Vasilca Gh., Calcan V., Nica Al., Unele proprietăți funcționale ale unui material plastic pe bază de furfurol-fenol, ca material pentru lagăre	IX	4	983	1958
Nica Al., Considerații asupra cinematicii lagărelor de rostogolire cu role în cazul ungerii hidrodinamice	X	2	449	1959
Pavelescu D., Iliuc I., Studiul prin metode radioactive a influenței viscozității asupra grosimii filmului de lubrifiant	IX	3	641	1958
Sebeșan Șt., Uzura bandajelor și a șinelor	V	3—4	403	1954
Stratilescu Al., Contribuții la unificarea uleiurilor pentru autovehicule	IV		145	1953
Stratilescu Al., Determinarea perioadelor de schimb ale uleiurilor la autovehicule	V	1—2	49	1954
Tipei N., O metodă generală pentru studiul mișcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafețe de dimensiuni finite	II		27	1951
Tipei N., Calculul lagărelor cu alunecare supuse la forțe variabile	IV		125	1953
Tipei N., Lagăre cu elemente geometrice variabile	V	1—2	33	1954
Tipei N., Încercări experimentale pe lagăre cu alunecare	VI	1—2	89	1955
Tipei N., Mișcarea fluidelor vîscoase între pereți solizi, cu o deplasare relativă oarecare	VII	1	45	1956
Tipei N., Nica Al., Asupra condițiilor la limită în problema lubrificației	VIII	1	63	1957

	Tom	nr.	pag.	anul
Tipei N., Lubrificaţia suprafeţelor cilindrice cu mişcare de rostogolire şi de alunecare	VIII	4	1039	1957
Tipei N., Nica Al., Presiunile şi caracteristicele globale în lubrificaţia suprafeţelor cilindrice cu mişcare de rostogolire şi de alunecare	IX	2	359	1958
Tipei N., Nica Al., Cercetări asupra regimurilor de funcţionare a lagărelor. I. Influenţa variaţiei viscozităţii	X	3	737	1959
Vasilca Gh., Asupra utilităţii caracteristicii $p = f(v)$ la lagărele circulare de alunecare	VII	2	499	1956
Vasilca Gh., Freund P., Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare	VII	3	773	1956
Vasilca Gh., Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor $p = g(v)$	VIII	1	75	1957
Vasilca Gh., Nica Al., Asupra regimului termic optim de funcţionare al unui material antifricţiune la lagărele circulare cu alunecare	IX	1	163	1958
Vasilca Gh., Nica Al., Cercetări asupra caracteristicilor de funcţionare a lagărelor construite din materiale diferite	IX	2	377	1958

TEORIA MECANISMELOR

	Tom	nr.	pag.	anul
Bogdan R., Pelecudi Chr., Bugaievski E., Calmaciuc L., Studiu asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane	VIII	3	663	1957
Bogdan R., Pelecudi Chr., Sinteza mecanismelor cu patru elemente pe baza analizei armonice	X	1	141	1959
Bogdan R., Pelecudi Chr., Calmaciuc L., Antonescu Gr., Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor	X	3	771	1959
Bugajevski E., Bogdan R., Pavelescu D., Pelecudi Chr., Lezer A., Consideraţii asupra posibilităţilor de mărire a vitezei de lucru la maşinile circulare automate de tricotat	VII	2	393	1956
Bugaievski E., Bogdan R., Pelecudi Chr., Contribuţii la clasificarea mecanismelor spaţiale	VIII	2	407	1957
Mangeron D., Drăgan C., Svijevschi Vl., O nouă metodă de studiu interesînd teoria mecanismelor şi a maşinilor	VIII	1	51	1957
Pîrvulescu N., Influenţa lungimii balansierului asupra echilibrării unităţii de pompare	X	3	785	1959
Seleşteanu Al., Bogdan R., Marcu V., Studiu asupra preciziei ghidajului suportului portcuţit la strunguri	V	1—2	17	1954
Volmer J., Cazurile particulare ale curbei centrelor Burmester, cu punct dublu şi importanţa lor pentru teoria mecanismelor	X	2	425	1959

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

	Tom	nr.	pag.	anul
Florian V. N., Cinematica sapelor cu role conice	VIII	3	637	1957
Hacker T., Buracu A., Un procedeu de cercetare a mişcării perturbate a avionului în faza fugoidă, cînd mişcarea de bază este nepermanentă	VIII	3	629	1957

	Tom	nr.	pag.	anul
NIȚĂ M. M., Studiu asupra mișcării sateliților artificiali în mediu rezistent	IX	2	337	1958
ONICESCU O., Mecanica solidului rigid	IX	3	519	1958
TIPEI N., Asupra mișcării de cădere a rachetelor	VIII	3	619	1957
VÎLCOVICI V., Asupra legăturilor olonome și neolonome	IX	4	811	1958

ELASTICITATE — PLASTICITATE — REZISTENȚA MATERIALELOR

ARCAN M., NICOLAU ED., Metodă grafică pentru separarea tensiunilor principale în fotoelasticitate	VI	3—4	491	1955
ARCAN M., STOENESCU F., MIHAIL R., Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în plasticitate : Dinox F. 110	VIII	4	1131	1957
BĂLAN ȘT., RĂUTU S., ARCAN M., PETCU V., Studiul comportării construcțiilor prin încercări pe modele din masă plastică	X	1	151	1959
BĂLAN ȘT., RĂUTU S., PETCU V., În legătură cu calculul, de ordinul II al capacității portante a cadrelor	X	2	457	1959
BELEȘ A., MIHĂILESCU M., Ecuațiile de echilibru în coordonate oblice la învelitorile subțiri de grosime constantă	VII	3	631	1956
BODNĂRESCU D., Asupra combinării prăjinilor în pompajul de adîncime din industria de petrol, după criterii de rezistență la oboseală	VII	1	107	1956
BUZDUGAN GH., Studiu comparativ între diverse metode pentru calculul fundațiilor masive de mașini	VIII	2	437	1957
CALCAN V., IONESCU I., GOLDENBERG N., Mase plastice pe bază de furfurol și derivați. V. Influența tratamentului termic asupra comportării față de apă și ulei a textolitului cu rășină furfurol-fenolică	VIII	3	847	1957
DINCĂ FL., BOICU N., Asupra torsiunii unor bare cilindrice cu secțiune dublu conexă	IX	3	733	1958
DINCĂ FL., MANEA V., Asupra unor probleme de stabilitate a barelor elastice în mișcare plană	X	2	511	1959
DUMITRESCU L., STĂNESCU C., Torsiunea unei bare cilindrice neomogene	VIII	1	111	1957
GELLER M., Despre unele încercări pentru stabilirea efectului simultan al oboselii și coroziunii asupra prăjinilor de foraj ecruisate	IV		89	1953
GELLER M., Despre unele încercări pentru stabilirea influenței crestăturilor și a coroziunii asupra rezistenței la oboseală a prăjinilor de foraj ecruisate	V	3—4	393	1954
HANGAN M., O metodă de calcul prin aproximații succesive a structurilor multiplu nedeterminate în domeniul plastic	X	3	795	1959
IONESCU I., CALCAN V., GOLDENBERG N., Mase plastice pe bază de furfurol și derivați. IV. Influența tratamentului termic asupra rezistenței la eforturi progresive, la rupere ale testolitului cu rășină furfurol-fenolică	VIII	1	171	1957
ISĂCESCU D., CALCAN V., Studiul contracției unor materiale plastice pe bază de rășină furfurol-fenolică	IX	3	679	1958
KORCINSKI N., Gradul de încastrare la flambaj	II		151	1951
LIBRESCU L., O nouă formulare a problemei generale a învelitorilor subțiri elastice	VIII	2	511	1957

	Tom	nr.	pag.	anul
LIBRESCU L., Cîteva probleme ale teoriei unei clase de învelitori elastice, subțiri, neomogene	X	1	187	1959
LIBRESCU L., În legătură cu teoria structurilor elastice, subțiri alcătuite din straturi ortotrope, simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafața mediană	X	3	837	1959
MAGER V., Asupra echilibrului elastic al învelitorilor subțiri de rotație, cu aplicații la catenoidul drept de rotație	X	3	867	1959
MANEA GH., BUZDUGAN GH., FREUND P., Metode ameliorate de calcul la încovoiere pentru bare de fonte, cupru și alame, pe baza curbelor caracteristice ridicate experimental	V	3–4	341	1954
MANEA V., Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare	IX	2	423	1958
MANEA V., Torsiunea arborelui gol cu caneluri radiale exterioare sau interioare	IX	4	1035	1958
MANEA V., PROCOPOVICI E., O extindere a rezolvării problemei torsiunii unor palete de turbină	X	1	203	1959
MARCU V. și COLABORATORI, Studii asupra unor caracteristici ale straturilor obținute prin electro-metalizare	VII	2	465	1956
MAZILU P., Calculul spațial al cadrelor cu grinzi longitudinale principale și grinzi transversale secundare	III	1–2	85	1952
MIHAILESCU M., Studiu asupra învelitorilor subțiri cu două directoare și plan director în ipoteza de membrană	II		129	1951
MIHAILESCU M., Teoria de încovoiere la paraboloizii hiperbolici	VII	2	421	1956
MIHAILESCU M., MIHAILESCU Y., Aplicarea metodei relaxării la calculul învelitorilor subțiri	X	3	819	1959
MIȘICU M., Corpuri tubulare circulare încărcate simetric în raport cu axul	I		97	1950
MIȘICU M., Stabilitatea dinamică a construcțiilor rigide pe stîlpi sau piloți	III	3–4	255	1952
MIȘICU M., Echilibrul mediilor continue cu deformații mari	IV		31	1953
MIȘICU M., Notă asupra unei formulări a problemei spațiale în cazul dinamic al teoriei corpurilor elastice	VII	4	995	1956
MIȘICU M., Asupra problemelor dinamice ale lui Boussinesq și Hertz	X	2	467	1959
MORARU D., Stabilirea stării de efort în grinzi pereți prin metoda analogiei cu o rețea	VII	4	937	1956
NEMETI L., Starea elasto-plastică în tuburi fretate	IX	4	1023	1958
NICOLAU ED., Contribuții la utilizarea analogiei cu membrană în cercetarea tensiunilor la torsiune	VII	2	485	1956
NICOLAU ED., Cu privire la influența unui mediu elastic de încastrare asupra distribuției tensiunilor într-o consolă	VIII	2	525	1957
NICOLAU ED., Deformații la o consolă încastrată într-un mediu elastic	VIII	4	1145	1957
NICULESCU C., Asupra barelor solicitate la compresiunea axială	III	1–2	61	1952
OROVEANU T., Asupra torsiunii barelor de secțiune circulară cu crestături	V	1–2	99	1954
PANĂ GH., Folosirea lemnului alterat pentru construcții și industrie	VIII	1	155	1957
PETCU V., Asupra rezolvării sistemelor de ecuații de echilibru elastic cu matrice de tip Iacobi	X	3	855	1959
PETRE A., Flambajul barelor drepte prin șoc axial	VII	1	173	1956

	Tom	nr.	pag.	anul
Petre A., Stănescu C., Librescu L., Asupra structurilor ortotrope optime	VII	4	955	1956
Petre A., Librescu L., O teorie a structurilor subţiri ortotrope nesimetrice faţă de suprafaţa mediană	IX	1	201	1958
Petre A., Calculul de rezistenţă a palelor de elicopter de secţiune constantă sub o sarcină dată	IX	3	711	1958
Petre A., Bare curbe cu pereţii subţiri	IX	4	1013	1958
Pîrvu A., Problema plană a elasticităţii pentru o coroană circulară în cazul celei de-a doua probleme fundamentale la limită	VII	2	415	1956
Pîrvulescu N. S., Asupra instabilităţii tijelor verticale, grele, svelte şi în rotaţie. Ecuaţia diferenţială a liniei elastice	II		157	1951
Pîrvulescu N. S., Despre integrarea ecuaţiei liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele şi svelte	III	1—2	53	1952
Pîrvulescu N. S., Despre flambajul tijelor sub acţiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie	III	3—4	205	1952
Pîrvulescu N. S., Flambajul ţevilor sub acţiunea presiunilor laterale	IV		55	1953
Pîrvulescu N. S., Flambajul tijelor sub acţiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie	V	1—2	119	1954
Pîrvulescu N. S., Cazurile particulare ale unei clase de funcţii la flambajul tijelor	V	3—4	377	1954
Pîrvulescu N. S., Flambajul tijelor verticale încastrate la extremitatea inferioară şi adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare	VI	1—2	17	1955
Pîrvulescu N. S., Integrarea ecuaţiei liniei elastice în instabilitatea de rotaţie a tijelor verticale	VI	3—4	501	1955
Pîrvulescu N. S., Rezistenţa la încovoiere a prăjinilor grele încărcate axial cu o parte din greutatea proprie	VII	3	697	1956
Pîrvulescu N. S., Instabilitatea prăjinilor grele în rotaţie	VII	4	901	1956
Pîrvulescu N. S., Efectul forţei centrifuge asupra rezistenţei prăjinilor de foraj	VIII	3	805	1957
Pîrvulescu N. S., Rezistenţa îmbinării filetate cu conicitate pronunţată a ţevilor solicitate la tracţiune	IX	3	695	1958
Pîrvulescu N. S., Influenţa lungimii bielei asupra echilibrării unităţilor de pompare	X	1	173	1959
Pîrvulescu N. S., Formule de flambaj pentru bare grele	X	2	497	1959
Popovici C. C., O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor. Partea I	VII	3	677	1956
Popovici C. C., O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor. Partea II	VII	4	971	1956
Procopovici E., Asupra deformării transversale a unei bare solicitate prin şoc axial	VIII	1	141	1957
Procopovici E., Asupra deformării transversale a barelor elastice solicitate de o forţă axială impulsivă	VIII	3	839	1957
Răutu S., Dincă Fl., Asupra comportării barei drepte supusă la sarcini dinamice axiale	VIII	1	135	1957
Soare M., Teoria suprafeţelor subţiri de rotaţie	III	3—4	273	1952
Soare M., Studiul stării de eforturi în plăcile curbe subţiri în formă de suprafaţă cu două parabole directoare şi plan director în teoria de membrană	VI	3—4	513	1955

	Tom	nr.	pag.	anul
SOARE M., Asupra determinării stării de eforturi de membrană în plăcile curbe subţiri de rotaţie	X	2	521	1959
SOLOMON L., DRĂGHICESCU D., Asupra utilizării transformărilor conforme în problema plană a elasticităţii pentru domenii dublu conexe	VIII	4	1115	1957
STĂNESCU CHR., VISARION V., O metodă pentru calculul învelitorilor cilindrice de secţiune circulară cu ortotropie de material	VIII	4	1173	1957
STĂNESCU CHR., O problemă de tip mixt din încovoierea plăcilor elastice	IX	2	411	1958
STĂNESCU CHR., VISARION V., Extinderea analogiei statico-geometrice pentru învelitorile elastice subţiri cu anizotropie de material	X	3	829	1959
STOENESCU AL., Aplicarea criteriilor de plasticitate în cazul grinzilor încovoiate	III	1—2	77	1952
TANASICIUC CL., Tensometrul rezistiv	VII	3	729	1956
TEODORESCU P. P., O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii	VII	3	655	1956
TEODORESCU P. P., Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere	VIII	1	115	1957
TEODORESCU P. P., Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere	VIII	2	451	1957
TEODORESCU P. P., Asupra calculului semi-spaţiului elastic sub acţiunea unor sarcini periodice	VIII	3	831	1957
TEODORESCU P. P., Asupra unor probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii	VIII	4	1101	1957
TEODORESCU P. P., Asupra problemei plane a elasticităţii în coordonate oblice	IX	2	391	1958
TEODORESCU P. P., Asupra calculului de rezistenţă al plăcilor plane groase	IX	3	721	1958
VISARION V., Starea de eforturi şi de momente pure ale suprafeţei subţiri sferice	VI	3—4	535	1955
VISARION V., Învelitori subţiri în formă de paraboloid hiperbolic	VII	2	443	1956
VISARION V., Calculul elastic al învelitorilor subţiri în formă de elicoid drept	VII	4	925	1956
VISARION V., O metodă pentru calculul dinamic al tuburilor şi învelitorilor cilindrice circulare	VIII	2	491	1957
VOINEA R., Flambajul general al tălpii comprimate la podurile metalice cu grinzi cu zăbrele	I		75	1950
VOINEA R., BUCUR N., Contribuţii la studiul flambajului cadrelor cu noduri fixe	IV		73	1953
VOINEA R., Contribuţii la determinarea stării de tensiune şi a stabilităţii elastice a construcţiilor cu ajutorul vibraţiilor proprii	V	1—2	107	1954
VOINEA R., Observaţii asupra principiului lucrului mecanic virtual	VI	1—2	9	1955

VIBRAŢII

	Tom	nr.	pag.	anul
BUZDUGAN GH. şi COLABORATORI, Vibraţiile bielelor	II		85	1951
IFRIM M., Calculul dinamic al cadrelor elastice pe baza principiului conservării energiei	VIII	2	393	1957

	Tom	nr.	pag.	anul
IFRIM M., Precizări în legătură cu aplicarea formulei lui Geiger la calculul primei frecvențe proprii de vibrație a clădirilor în cadre	VIII	4	1197	1957
IFRIM M., Delimitarea intervalului de existență a frecvențelor fundamentale de oscilație la clădirile înalte supuse acțiunii seismice	IX	3	741	1958
IFRIM M., Calculul direct al frecvențelor proprii la clădirile acționate de cutremure	X	1	211	1959
MANEA V., PROCOPOVICI E., Asupra unei metode grafice pentru determinarea frecvențelor proprii ale vibrațiilor flexionale la grinzi libere cu distribuție neuniformă a rigidității și a masei	VIII	3	897	1957
MARCU V., LEZER A., Studiul metodei „Rîjcov" pentru eliminarea vibrațiilor la strunguri	VII	1	135	1956
MIȘICU M., Asupra determinării vibrațiilor proprii ale construcțiilor	VI	3–4	447	1955
NECȘULEA A., Încercări de combatere a zgomotului prin audioprotectori	V	1–2	85	1954
PETRE A., Aplicarea analogiilor electrice la studiul vibrațiilor mediilor elastice	VII	2	505	1956
PROCOPOVICI E., TANASICIUC CL., Analogiile electrice ale vibrațiilor mecanice	VI	3–4	473	1955
RĂUTU S., IFRIM M., Unele probleme ale vibrațiilor proprii la construcțiile cu mai multe etaje	VI	3–4	457	1955
RĂUTU S., Calculul vibrațiilor cadrelor prin aproximări succesive	VII	1	151	1956
RĂUTU S., IFRIM M., În legătură cu calculul frecvențelor vibrațiilor proprii ale cadrelor etajate	VII	3	785	1956
TONDL A., Mișcarea periodică a rotoarelor cu o caracteristică neliniară a reazemelor	VIII	1	35	1957
TONDL A., Rezonanța subarmonică a unui rotor cu o caracteristică neliniară a reazemelor	VIII	2	379	1957

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

	Tom	nr.	pag.	anul
CĂRARE T., AMZULESCU C., Calculul cadrelor tip shed prin ecuații cu diferențe finite	VIII	1	189	1957
DUMITRESCU I., Considerații asupra calculului grinzilor continue din beton precomprimat	VII	2	545	1956
DUMITRESCU I., VISARION V., Influența compoziției mineralogice a cimentului asupra comportării grinzilor de beton armat la încovoiere	VII	4	1013	1956
IFRIM M., Considerații în legătură cu un criteriu de pierdere a stabilității elastice a sistemelor de bare	VIII	1	213	1957
MIHAILESCU M., UNGUREANU I., Încercări la compresiune pe betoane confecționate cu trei tipuri de ciment	VI	3–4	545	1955
NICOLAU V., ARCAN M., RĂUTU S., Unele probleme ale cercetării științifice în domeniul mecanicii construcțiilor	IV		7	1953
PRIȘCU R., Efectul cutremurului asupra barajelor de greutate și în arc pur	II		111	1951
PRIȘCU R., Eforturi produse de cutremur în barajele de greutate	III	3–4	229	1952
PRIȘCU R., Asupra barajelor de greutate cu rosturi lărgite	V	3–4	537	1954

	Tom	nr.	pag.	anul
Prişcu R., Asupra profilului optim al barajelor de greutate. . .	IV		101	1953
Prişcu R., Contribuţii la problema determinării temperaturilor de calcul pentru barajele arcuite	VIII	2	585	1957
Prişcu R., Constantinescu M., O metodă de determinare a distribuţiei presiunii hidrostatice în secţiunea maestră a barajelor arcuite	VIII	3	887	1957
Prişcu R., Căciulescu Şt., Studiu asupra barajelor de greutate evidate	VIII	4	1205	1957
Prişcu R., Constantinescu M., Calculul barajelor arcuite prin metoda reţelelor	IX	4	1049	1958
Revici T., O metodă pentru simplificarea consolidării podurilor metalice	VII	1	179	1956
Vasilescu Karpen N., Aderenţa fierului la beton în betonul armat. Determinarea experimentală a aderenţei şi a contracţiei betonului	VII	4	1001	1956
Weissenberg M., Ciungu S., Influenţa compoziţiei mineralogice a cimentului asupra adeziunii dintre beton şi armătură	VI	3—4	571	1955
Weissenberg M., Ciungu S., Variaţia aderenţei dintre beton şi armătură în funcţie de lungimea de ancoraj	VII	2	527	1956
Weissenberg M., Ciungu S., Deformaţiile elementelor de beton armat şi precomprimat supuse la încovoiere cu armătura neaderentă	VIII	3	867	1957

MECANICA PĂMÎNTURILOR

	Tom	nr.	pag.	anul
Ghersevanov N. M., Stadiul actual şi problemele dezvoltării studiului terenurilor, al procedeelor de fundaţii pentru construcţii şi al geotehnicei	I		11	1950
Bally R., Antonescu I., Contribuţii la problema electrosilicatării pămînturilor.	VII	4	1037	1956
Bally R. J., Antonescu I., Aspecte caracteristice ale dezvoltării procesului de electro-osmoză în pămînturile compresibile	IX	3	759	1958

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

	Tom	nr.	pag.	anul
Florescu C. şi colaboratori, Cercetări asupra rezistenţei la penetrare a solului	VIII	3	925	1957
Lăzărescu I., Bogdan A., Contribuţii în legătură cu glometria cuţitelor pentru prelucrarea roţilor dinţate conice cu dantură circulară	X	3	887	1959
Kardos A., Măsurarea asperităţilor şi a rotunjirii tăişului la sculele aşchietoare	X	3	917	1959
Marcu V. şi colaboratori, Protecţia contra coroziunii prin straturi de metal pulverizat	IX	2	457	1958
Marcu V., Freund P., Cercetări asupra metalizării prin pulverizare a suprafeţelor concave	X	2	565	1959
Mitrică I., Asupra unui criteriu pentru determinarea zonei de presiune specifică maximă la laminarea metalelor. . .	IX	1	215	1958
Popov M., Mitrică I., Deciu E., Studiul presiunilor specifice pe suprafaţa de contact în procesul de laminare. . . .	VII	2	557	1956

	Tom	nr.	pag.	anul
POPOV M., PAVELESCU D., MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M., PASCU N., Cu privire la parametrii geometrici ai cuțitului armat cu plăcuțe din carburi metalice	VIII	2	423	1957
POPOV M., DECIU E., MITRICĂ I., Considerații asupra unei analogii hidrodinamice a laminării	VIII	3	905	1957
POPOV M., PAVELESCU D., MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M., PASCU N., Despre regimul optim de așchiere cu cuțite de strung armate cu plăcuțe din carburi metalice	VIII	3	915	1957
POPOV M., DECIU E., MITRICĂ I., Asupra unei condiții la limită în analogia hidrodinamică a laminării	VIII	4	1229	1957
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Studiu comparativ al parametrilor geometrici ai cuțitelor de strung armate cu plăcuțe mineralo-ceramice și din carburi metalice	IX	4	1077	1958
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Asupra regimurilor optime de așchiere cu cuțite de strung armate cu plăcuțe mineralo-ceramice și din carburi metalice	X	1	219	1959
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Studii asupra parametrilor așchierii cu cuțite de strung din oțel rapid romînesc . .	X	2	539	1959

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE ȘI TEHNOLOGIE

DUMITRESCU T., NICOLAID M., ILIESCU P., Studiu asupra comportării fontelor cu grafit nodular la temperaturi înalte . .	VI	1—2	127	1955
PANĂ GH. I., Contribuții la stabilirea influenței diferitelor tratamente higro și hidrotermice ale lemnului de fag . . .	VI	1—2	161	1955
PANĂ GH. I., Cercetări asupra puterii absorbite la tăierea lemnului prin așchiere, în funcție de temperatura și umiditatea sa	VI	3—4	607	1955
PANĂ GH. I., Contribuții la studiul penetrabilității lemnului de către lichide la diferite presiuni și temperaturi	VII	1	235	1956
PANĂ GH. I., DUPU M., OCSKAY S., Proprietățile fizice, mecanice și tehnologice ale lemnului speciilor exotice	VII	4	1057	1956

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

PAVELESCU D., PANTELIMON TH., Asupra înregistrării pe bandă magnetică a unor mărimi mecanice cu variații „lente”	VIII	4	1073	1957
PAVELESCU D., PANTELIMON TH., Canal „fix” pentru înregistrare-redare pe suport magnetic a fenomenelor cu variații lente	IX	1	187	1958
PAVELESCU D., PANTELIMON TH., Înregistrare magnetică simultană a două mărimi mecanice	X	2	575	1959

METODE DE CALCUL

PÎRVULESCU N. S., Rezolvarea ecuațiilor algebrice printr-o metodă de recurență și o metodă de iterație	VII	1	249	1956

NOTE

	Tom	nr.	pag.	anul
Dincă Fl., Boicu N., Asupra torsiunii unor bare cilindrice neomogene	X	1	265	1959
Librescu L., Asupra analogiei sarcinilor termice în problema termo-elastică a învelitorilor subțiri	IX	3	777	1958
Ionescu D. Gh., Sursa continuu repartizată situată într-o conductă circulară	X	1	249	1959
Ionescu P., Asupra exploatării simultane a unui sistem de strate printr-o singură sondă în regim elastic	X	1	253	1959
Korcinski N., Despre calculul fundației zidurilor de sprijin	I		147	1950
Năstase A., Asupra unor formule de recurență referitoare la calculul coeficienților vitezei axiale de perturbație pentru mișcările omogene de ordin superior	X	1	241	1959
Pelecudi Chr., Bogdan R., Considerații asupra metodei analitice de cercetare a mecanismelor plane pe baza variabilelor complexe	X	2	603	1959
Petre A., O verificare experimentată a metodei clasice de calcul la aripi de lemn	VIII	4	1303	1957
Săveanu N. L., Considerații asupra stabilității macaralelor rapide cu platforme rulante	III	1—2	133	1952
Soare M., Asupra posibilității stabilirii unor formule de dimensionare la flambaj	X	1	257	1959
Stoenescu Al., Asupra unei probleme de vibrații	I		155	1950
Vasilescu Karpen N., Energetica lansării sateliților. Randamentul motoarelor-ejectoare	X	2	603	1959
Voinea R. P., Distribuția accelerațiilor în mișcarea relativă a rigidului	VIII	4	1299	1957

REFERATE

	Tom	nr.	pag.	anul
Andrei Șt., Nomograme pentru calculul generatoarelor de gaze moto-compresoare utilizate la antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter	VIII	4	1241	1957
Arcan M., Nicolau Ed., Un aparat pentru studiul tensiunilor prin metoda optică	V	1—2	217	1954
Arcan M., Nicolau Ed., Determinarea exactă a diferenței tensiunilor principale prin fotoelasticimetrie cu compensatorul „Coker"	VI	1—2	181	1955
Bally R. J., Deformațiile pămînturilor argiloase (introducere în problemă)	IX	1	239	1958
Buzdugan Gh., Grinzi pe reazime elastice de lungime dată	IX	2	471	1958
Carafoli E., Tașcă D., Tipei N., Popescu C., Determinări experimentale ale presiunii vîntului pe modele de estacade	II		191	1951
Dincă Fl., Considerații asupra torsiunii unor bare cilindrice	VI	3—4	617	1955
Dumitrescu L., Tubul de șoc și aplicațiile sale	VII	1	283	1956
Dumitrescu L., Tubul de șoc pentru cercetări de aerodinamică	X	1	271	1959
Florescu C. și colaboratori, Penetrograf dinamic pentru sol cu acționare manuală tip IMA-II	VIII	3	935	1957
Geller M., Despre unele încercări pentru stabilirea influenței ecruisajului de tracțiune asupra rezistenței la oboseală a prăjinilor de foraj	III	3—4	389	1952

	Tom	nr.	pag.	anul
GHEORGHIU C., Studiul aeroplanului „A. Vlaicu II”, în comparaţie cu avioanele timpului său	VIII	4	1279	1957
HACKER T., PALOŞ M., Unele probleme asupra zborului în spirale la planoare	IX	2	481	1958
IONESCU M., Determinarea eforturilor în cupole sferice din sarcini nesimetrice	X	1	303	1950
MANGERON D., BOGDAN R., Studii, cercetări şi perspective în domeniul teoriei maşinilor şi mecanismelor în Republica Populară Romînă	IX	4	1093	1958
MANGERON D., BOGDAN R., A II-a Conferinţă unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor	X	2	615	1959
MARCU V., DRĂGAN G., Problema depunerilor de chiciură pe conductorii liniilor electrice aeriene	I		161	1950
MARCU V., PATRAULEA N., Chiciurograful tip IMA	V	1—2	261	1954
NECŞULEA A., Mijloace de protecţie colectivă contra zgomotului din industrie	V	3—4	589	1954
NEDELESCU I., Asupra unei suflerii supersonice cu funcţionare continuă în circuit deschis	X	1	287	1959
OROVEANU T., Aplicarea metodei lui Galerkin la studiul mişcării fluidelor compresibile	III	1—2	143	1952
OROVEANU T., Dezvoltarea cercetărilor de mecanica fluidelor şi aerodinamică în ţara noastră	VII	4	1073	1956
PAVELESCU D., Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate	VII	1	271	1956
PAVELESCU D., Cu privire la studiul uzurii cuţitelor de strung (iradiate) pentru determinarea parametrilor optimi de aşchiere	VIII	1	265	1957
PETRE A., Probleme actuale în legătură cu vibraţiile sistemului turbino-generator	III	3—4	397	1952
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Instalaţie centralizatoare de sisteme de măsură pentru studiul maşinilor şi sculelor	X	3	923	1959
RAŞEEV D., Studiul unor cupluri optime cămaşă-piston la pompele de extracţie	X	3	927	1959
SELEŞTEANU AL., Probleme ştiinţifice în construcţia de maşini	II		7	1951
STROESCU V., Un model nou de anemograf	VI	1—2	217	1955
TIPEI N., CONSTANTINESCU V., Consideraţii asupra clasificării lagărelor în vederea studiului lor termic	V	1—2	233	1954
VASILCA GH., NICA AL., Asupra preciziei de măsurare a momentului de frecare la lagărele circulare, cu ajutorul sistemelor mecanice tip paralelogram	IX	1	229	1958
VÎRLAN R. N., Un aparat de laborator pentru determinarea modulului de deformaţie al pămînturilor	VII	4	1087	1956

Intreprinderea Poligrafică nr. 2, strada Brezoianu, 23—25, Bucureşti, R.P.R. — c. 2921

54

VIII, 4j

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

4
ANUL X
1959

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL X

1959

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie Institutul de proiectări şi cercetări pentru construcţii şi materiale de construcţii (I.P.C.M.C.), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

APARE DE PATRU ORI PE AN

Redacţia: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

Str. Const. Mille 15, tel. 15.22.41

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul X, nr. 4 1959

SUMAR

STUDII

AEROMECANICĂ

Pag.

ELIE CARAFOLI şi ADRIANA NĂSTASE, Determinarea suprafeței unei aripi, cu muchie de separație a distribuției de presiuni, în curent supersonic 995

N. N. PATRAULEA şi N. CĂMĂRĂŞESCU, Asupra hipersustentației datorită aşezării elicelor pe extradosul aripii 1013

PETRE BRĂDEANU, Calculul rezistenței de frecare și al transferului de căldură în stratul limită laminar din apropierea punctului critic al unui profil diedric 1021

AUGUSTIN PETRE, Divergența aeroelastică la suprafețe portante în rotație și rototranslație 1041

AL. MARINESCU, Asupra vitezei unghiulare de rezonanță a palelor articulate ale rotoarelor de elicopter 1051

HIDROMECANICĂ

TEODOR OROVEANU și ELEONORA SILVEANU, Asupra creșterii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia 1059

H. PASCAL, O metodă pentru determinarea permeabilității unui mediu poros 1073

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

N. TIPEI și AL. NICA, Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor. II. Caracteristicile globale în cazul viscozității variabile 1079

V. N. CONSTANTINESCU, Considerații asupra lubrificației tridimensionale în regim turbulent 1093

TEORIA MECANISMELOR

RADU C. BOGDAN și CHR. PELECUDI, Contribuții la cinematica diadei Cebîşev 1113

G. BĂRĂNESCU, O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate 1125

N. S. PÎRVULESCU, Echilibrarea de frecvență multiplă a unităților de pompare de la adîncime 1155

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE Pag.

M. MIŞICU, Torsiunea dinamică a barelor elastice cu secţiune constantă . . . 1171

K. K. PONOMAREV, Folosirea teoriei matricelor la calculul sistemelor cu bare . 1209

RADU PRIŞCU, Nouă contribuţie la problema repartizării presiunii hidrostatice la barajele arcuite 1221

LIVIU LIBRESCU, Structuri subţiri de formă cilindrică circulară, construite din straturi elastice, izotrope 1235

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

C. I. FLORESCU şi colab., Vizualizarea unor fenomene fizico-mecanice ce au loc la penetrarea solului 1253

NOTE

M. IONESCU şi GH. DARIE, Asupra suprafeţei aripii corespunzătoare unei distribuţii de presiuni dată 1263

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

M. MARINESCU, Îmbunătăţirea comportării la uzură a materialelor prin modificări superficiale 1269

A. KARDOS, Dinamometru de aşchiere funcţionînd cu benzi pentru măsurarea lungirii 1283

ACAŢIU CSULAK şi MAROŞ D., Cercetarea unui reductor planetar cu dantură interioară şi raport mare de transmisie 1289

GH. MARIN Aparat pentru măsurat temperaturi 1305

— Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată . . . 1311

RECENZII 1313

CĂRŢI ŞI BROŞURI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1339

Index alfabetic 1343

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

— Studii originale *cu caracter fundamental de înalt nivel ştiinţific şi reflectare în practică.*

— Note *(lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

— Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată, descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.*

— Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

— *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*

— *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).*

— *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*

— *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*

— *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*

— *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de biliografie. Se va indica numele autorului , titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, ,,Traian Vuia", Bucureşti, str. C. Mille 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Журнал ,,РАБОТЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ“

публикует:

— Оригинальные исследования *на высоком уровне, представляющие всеобщий научный интерес, связанный с практикой.*

— Заметки *(краткие работы) оригинального характера, представляющие уточнение некоторых вопросов.*

— Научные и технические рефераты, *в которых излагаются современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике, описание приборов для научных исследований, разработанных в Институте прикладной механики.*

— Рецензии на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:

— Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термо-аэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).

— Гидромеханика (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

— Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).

— Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность,

— Вибрациа и удары, устойчивость, электрические и гидравлические акалогии.

— Статика и динамика сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и с этой целью принимает к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая больших введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, на одной стороне листа; формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики должны быть выполнены китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае абсолютной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная в тексте литература должна даваться общим списком в конце статьи, причем необходимо указывать инициалы и фамилию автора, наименование работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра необходимо представлять резюме на румынском языке, или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме не должно превышать одной страницы, напечатанной на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи посылаются в адресс: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том X, № 4 1959

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА Стр.

Е. КАРАФОЛИ и АДРИАНА НЭСТАСЕ, Определение поверхности крыла с ребром раздела распределения давлений в сверхзвуковом потоке 995
Н. Н. ПАТРАУЛЯ и Н. КЭМЭРЭШЕСКУ, Об увеличении подъемной силы благодаря расположению винтов на верхней поверхности крыла 1013
П. БРЭДЯНУ, Расчет сопротивления трения и теплопередачи в ламинарном пограничном слое вблизи критической точки двухгранного профиля 1021
А. ПЕТРЕ, Аэроупругая дивергенция при вращательном и вращательном-поступательном движении несущих поверхностей 1041
А. МАРИНЕСКУ, О резонансной угловой скорости шарнирных лопастей вертолетных несущих крыльев 1051

ГИДРОМЕХАНИКА

Т. ОРОВЯНУ и ЭЛЕОНОРА СИЛЬВЯНУ, О возрастании давления в скважине после ее закрытия 1059
Х. ПАСКАЛЬ, Метод определения проницаемости пористой среды . . . 1073

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ и А. НИКА, Исследование режимов работы подшипников II. Общие характеристики в случае переменной вязкости. . . . 1079
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Соображения о трехмерной смазке в турбулентном режиме 1093

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Р. БОГДАН и Х. ПЕЛЕКУДИ, К кинематике диады Чебышева . . . 1113
Г. БЭРЭНЕСКУ, Теория уравновешивания инерционных сил в рядных двухтактных многоцилиндровых двигателях с четным числом цилиндров и с равномерно распределенными зажиганиями . . . 1125
Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Уравновешивание на кратной частоте насосных агрегатов глубинной откачки 1155

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

Стр.
М. МИШИКУ, Динамическое кручение упругих стержней постоянного сечения 1171
К. К. ПОНОМАРЕВ, Использование теории матриц для расчета стержневых систем 1209
Р. ПРИШКУ, Новые соображения о распределении гидростатического давления в арочных плотинах 1221
Л. ЛИБРЕСКУ, Тонкие структуры круговой цилиндрической формы, состоящие из изотропных упругих слоев 1235

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

К. ФЛОРЕСКУ и сотрудники, Визуализация некоторых физико-механических явлений, происходящих при проникании в грунт 1253

ЗАМЕТКИ

М. ИОНЕСКУ и Г. ДАРИЕ, О поверхности крыла, соответствующей заданному распределению давлений 1263

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

М. МАРИНЕСКУ, Улучшение износоустойчивости материалов путем поверхностных изменений 1269
А. КАРДОШ, Динамометр для резания, работающий с полосками для измерения длины 1283
ЧУЛАК АКАЦИУ и МАРОШ Д., Исследование планетарного редуктора с внутренними зубцами и большим передаточным числом 1289
Г. МАРИН, Прибор для измерения температур 1305
— Юбилейная научная сессия Института прикладной механики . 1311
РЕЦЕНЗИИ 1313
КНИГИ И БРОШЮРЫ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ 1339
Алфавитный указатель за 1959 год 1343

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome X, n° 4 1959

SOMMAIRE

ÉTUDES Page

AÉROMÉCANIQUE

ELIE CARAFOLI et ADRIANA NĂSTASE, Détermination de la surface d'une aile, à arête de séparation de la distribution des pressions, en courant supersonique 995
N. N. PATRAULEA and N. CĂMĂRĂŞESCU, On the increased lift obtained by placing the propellers on the upper side of the wing 1013
PETRE BRĂDEANU, Calcul de la résistance de frottement et du transfert de chaleur dans la couche limite laminaire à proximité du point critique d'un profil diédrique 1021
AUGUSTIN PETRE, Aeroelastic divergence of lifting surfaces in rotation and rototranslation 1041
AL. MARINESCU, Sur la vitesse de résonance des pales articulées des rotors d'hélicoptère 1051

HYDROMÉCANIQUE

TEODOR OROVEANU et ELEONORA SILVEANU, Sur la remontée de pression dans un puits après sa fermeture 1059
H. PASCAL, Une méthode de détermination de la perméabilité d'un milieu poreux 1073

LUBRIFICATION—FROTTEMENT—USURE

N. TIPEI and AL. NICA, Investigations on the operating conditions of journal bearings II. Global characteristics in the case of variable viscosity. . . 1079
V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur la lubrification tridimensionnelle en régime turbulent 1093

THÉORIE DES MÉCANISMES

RADU C. BOGDAN and CHR. PELECUDI, Contributions to the kinematics of Chebychev's dyad 1113
G. BĂRĂNESCU, A theory of the balancing of inertia forces for in-line multi cylinder two-stroke engines with even number of cylinders and uniformly distributed ignition 1125
N. S. PÎRVULESCU, L'équilibrage de fréquence multiple des installations profondes de pompage 1155

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX—ÉLASTICITÉ

Page

M. MIŞICU, Torsion dynamique des barres élastiques à section constante . . . 1171

K. K. PONOMAREV, Use of the matrix theory to the computation of bar systems 1209

RADU PRIŞCU, Nouvelle contribution au problème de la répartition de la pression hydrostatique dans les barrages-voûtes 1221

LIVIU LIBRESCU, Structures minces de forme cylindrique circulaire, constituées de couches élastiques, isotropes 1235

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

C. I. FLORESCU und Mitarb., Sichtbarmachung einiger physikalisch-mechanischer Erscheinungen bei der Bodendurchdringung 1253

NOTES

M. IONESCU et GH. DARIE, Sur la surface de l'aile correspondant à une distribution de pressions donnée 1263

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

M. MARINESCU, Improved behaviour of material to wear by surface modifications 1269

A. KARDOS, Banddynamometer für Dehnungsmessungen bei spanabhebender Bearbeitung 1283

ACAŢIU CSULAK et D. MAROŞ, Untersuchung eines Umlauf-Getriebes mit Innenverzahnung und hohem Übersetzungsverhältnis 1289

GH. MARIN, Appareil de mesure des températures 1305

— Session scientifique anniversaire de l'Institut de Mécanique Appliquée. 1311

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1313

LIVRES REÇUS À LA RÉDACTION 1339

Index alphabétique 1343

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

Le périodique «STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APLIQUÉE)

publie :

— *des* études originales, *des recherches fondamentales d'un caractère hautement scientifique, orientées vers l'activité pratique ;*

— *des* notes *(communications brèves) d'un caractère général, ou représentant une mise au point d'une certaine question ;*

— *des* rapports scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème en soulignant son aspect nouveau, des remarques et discussions au sujet de certains travaux de mécanique appliquée, la description des appareils de recherche scientifique, construits à l'Institut de Mécanique Appliquée ;*

— *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

— Aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs) ;

— hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes).

— constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus) ;

— mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques) ;

— statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction) ;

— technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultrasons et des isotopes radio-actifs en technique).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, raionul Gh. Gheorghiu-Dej, Roumanie.

AEROMECANICĂ

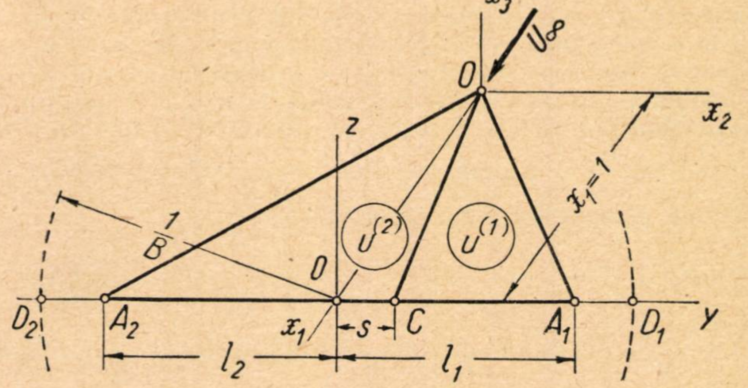
DETERMINAREA SUPRAFEŢEI UNEI ARIPI, CU MUCHIE DE SEPARAŢIE A DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI, ÎN CURENT SUPERSONIC

DE

ELIE CARAFOLI şi ADRIANA NĂSTASE

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

În lucrarea de faţă ne propunem să determinăm suprafaţa unei aripi subţiri plasate în curent supersonic care are proiecţia pe planul de referinţă $O\,x_1$, x_2 triunghiulară (vezi figura) şi pe care sînt date două regimuri de presiune separate printr-o muchie. Dacă notăm cu Z cota suprafeţei aripii faţă de planul său de referinţă incidenţa aripii are următoarea expresie



$$\alpha = \frac{\partial Z}{\partial x_1} = \frac{w}{U_\infty}\,. \tag{1}$$

Problema găsirii cotei Z este deci echivalentă cu aceea a determinării vitezei verticale de perturbaţie w, deoarece Z se poate obţine printr-o integrare în raport cu x_1

$$Z(x_1, x_2) = \int \frac{\partial Z}{\partial x_1}\, dx_1 + f_{(x_2)} = \frac{1}{U_\infty} \int w\, dx_1 + f_{(x_2)}, \tag{2}$$

unde (fx_2) este o funcţie arbitrară de x_2 supusă însă la condiţiile ca aripa să capete o formă geometrică compatibilă cu aplicaţiile şi ca mişcarea să rămînă în cadrul teoriei micilor perturbaţii.

Pe de altă parte, coeficientul de presiune poate fi definit prin viteza axială de perturbaţie u, de care este legat prin relaţia

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty}. \tag{3}$$

Vom reprezenta viteza axială de perturbaţie u prin superpoziţia unor serii de polinoame omogene în x_1 şi x_2 de ordine $0, 1, 2, \ldots (n-1)$. În cele ce urmează, vom considera o scurgere conică de ordin n în jurul unei aripi prevăzută cu o muchie care o separă în două regiuni cu regimuri diferite de viteze axială şi anume

$$u^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_2^q \tag{4}$$

pe suprafaţa OA_1C şi

$$u^{(2)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(2)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_2^q, \tag{5}$$

pe suprafaţa OA_2C.

Acest studiu se efectuează în special pentru efectul de muchie şi pentru a face unele observaţii interesante legate de cazul în care aripa prezintă o muchie pe centru. Înainte de a trece la calculul efectiv, vom indica variabilele curente, planele şi notaţiile utilizate în cursul lucrării. Astfel, raportîndu-ne la figură, vom considera planul fizic Oyz de coordonate. $y = \frac{x_2}{x_1}$ $z = \frac{x_3}{x_1}$; planul auxiliar $w\eta\zeta$ obţinut din cel fizic prin transformarea geometrică a lui Busemann,

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \theta = \theta, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2);$$

şi planul $x = y + iz$ dedus din planul lui Busemann prin transformarea

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2},$$

care are proprietatea de a reproduce aripa în adevărată mărime.

De asemenea, fie

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ potenţialul vitezelor de perturbaţie, care este o funcţie omogenă de ordinul n.

$\Phi_{p,q,r}$ derivata de ordin $p + q + r = n$ a potențialului, $F_{n-q-r,q,r} = \Phi_{n-q-r,q,r} + i\,\Phi'_{n-q-r,q,r}$, funcție analitică, reprezentînd un potențial fictiv ; vom avea mai departe

$$(n-1)!\,u = x_1^{n-1}\,\mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\,x^q\,F_{n-q,q,0}\,, \tag{6 a}$$

$$(n-1)!\,v = x_1^{n-1}\,\mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\,x^q\,F_{n-q-1,q+1,0}\,, \tag{6 b}$$

$$(n-1)!\,w = x_1^{n-1}\,\mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\,x^q\,F_{n-q-1,q,1} \tag{6 c}$$

formulele lui Euler pentru u, v și w, funcții omogene de ordin $(n-1)$ dezvoltări valabile pentru punctele de pe aripă ($x = y$, $z = 0$).

Din [1] se știe că funcțiile $F_{n-q-r,q,r}$ sînt legate între ele prin condițiile de compatibilitate, care impun identitatea tuturor expresiilor de forma

$$(-1)^q\,x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r dF_{n-q-r,q,r} \tag{7}$$

unde $0 \leqslant q + r \leqslant n$.

De asemenea, vom pune mai departe

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\,W_{n-1}\,, \qquad dF_{0,n-1,1} = \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\,dx\,. \tag{8}$$

După cum se știe din [2], [3] și [4], problema indirectă, în care se caută funcțiile $F_{n-q-1,q,1}$ ce intervin în (6 c) pentru aripa subțire este echivalentă cu problema directă în care se caută funcțiile $F_{n-q,q,0}$ din relația (6 *a*) pentru aripa groasă. Din aplicarea condițiilor de compatibilitate (7) pentru funcțiile $F_{n-q-1,q,1}$, rezultă că soluția problemei indirecte trebuie să conțină, în afara singularităților de la problema directă echivalentă, un termen suplimentar al unei singularități de tip logaritmic plasată în origine. Ținînd seama de aceste considerații s-a obținut în [3] următoarea expresie pentru viteza verticală de perturbație w în cazul problemei indirecte pentru aripa subțire cu borduri de atac subsonice :

$$\begin{aligned} \frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \Bigg[\sum_{q=0}^{n-1} \Bigg(& A_q^{(1)}\,x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bx)(1+Bl_1)}{2B(l_1-x)}} + \\ & + A_q^{(2)}\,x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bx)(1+Bl_2)}{2B(x+l_2)}} + C_q\,x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bx)(1+Bs)}{2B(s-x)}} + \Bigg) \\ & + A^{(0)}\,x^{n-1} \operatorname{arghch} \sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\,x^q \sqrt{1-B^2x^2} \Bigg]. \end{aligned} \tag{9}$$

Se constată că expresia vitezei verticale de perturbație conține 4 n constante. În [3] s-a arătat că sistemul de ecuații pe care trebuie să le satisfacă aceste constante este de tip normal și conduce deci la o soluție unică perfect determinată pentru problema indirectă în cazul aripilor subțiri.

Un număr de $3n$ ecuații ale acestui sistem și anume acelea care ne furnizează valorile constantelor bordurilor, adică $A_q^{(1)}$ și $A_q^{(2)}$ și ale muchiei, adică C_q, se obțin din relațiile de compatibilitate (7) scrise sub forma

$$\mathcal{R}e\,(-1)^{n-q-1}\, i \int_{\Gamma} \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}}\, \frac{d^n\, W_{n-1}}{dx^n}\, dx = \frac{(n-1)!\, \Delta u_{n-q-1,q}}{C_{n-1}^{q}}, \tag{10}$$

în care $\Delta u_{n-q-1,q}$ reprezintă salturile impuse coeficienților vitezei axiale în dreptul bordurilor A_1 și A_2 și a muchiei C_0 și care au respectiv valorile $\Delta u = u^{(1)}$, $\Delta u = -\, u^{(2)}$ și $\Delta u = u^{(2)} - u^{(1)}$; iar integrala din membrul întîi se obține calculînd semireziduurile în punctele $x = l_1$, $x = -l_2$ și $x = s$ respectiv. Pentru calculul acestor semireziduuri este suficient să luăm pe w sub forma redusă. De exemplu, pentru calculul semireziduului în jurul muchiei, vom considera următoarea expresie pentru viteza redusă

$$w^{\star} = -\frac{1}{2} \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q \ln(x-s). \tag{11}$$

Celelalte n constante, $A^{(0)}$ și $D_q[q = 0,1,2\ldots(n-2)]$ se determină din condiția ca $\Phi_{n-q,q,0}$ să nu varieze la traversarea conului Mach al vîrfului. Această restricție ne furnizează relațiile

$$\left(\frac{d^p W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=\pm\frac{1}{B}} = 0 \qquad (p = 1,2,\ldots, n). \tag{12}$$

2. CAZUL ARIPII CU MUCHIE PE CENTRU

Un caz particular interesant al problemei aripii cu două regimuri de viteză axială este acela în care muchia de separație este situată pe centrul aripii. În acest caz, viteza verticală de perturbație w nu se poate obține direct, adică făcînd $s = 0$ în formula (9), deoarece se constată că o parte din coeficienții săi, calculați pentru $s \neq 0$, vor tinde la infinit în acest caz și deci w se va prezenta sub formă nedeterminată. De aceea, pentru muchia pe centru, ar trebui să calculăm mai întîi coeficienții din (9) pentru muchia în poziția oarecare ($s \neq 0$) în cazul mișcării conice de ordin n și apoi să trecem la limită ($s \to 0$) în expresia (9) cu coeficienți calculați ca mai sus. Pentru a evita acest calcul laborios, vom reface teoria pentru muchia pe centru prin același procedeu ca și acela pe care l-am aplicat în [3] și [4] în cazul muchiei în poziție oarecare. În acest scop, vom efectua limita indicată mai sus numai în cazul mișcării conice propriu-zise ($n = 1$) și vom constata ca și în [5] că în acest caz w tinde la infinit pe muchie ca

$$W^{\star}_{x\to 0} = C \ln x + \frac{D_{-1}}{x}\,. \tag{13}$$

Vom admite, mai departe, că şi pentru mişcările conice de ordin superior, w tinde la infinit într-un punct oarecare al muchiei de separație de pe axa Ox_1, la fel ca w de la mişcarea conică ($n = 1$). Deci pe lîngă singularitatea logaritmică caracteristică fiecărei muchii, mai apare și un dublet. Deci $F_{n-q-1,q,1}$ va conține singularitățile din (13) și derivatele lor pînă la ordinul ($n - 1$). Dubletul din (13) va introduce deci în $F_{n-q-1,q,1}$ singularitatea $\frac{1}{x^n}$ în plus față de cele provenite din logaritm. Mai departe, aplicînd formula lui Euler (6c) și ținînd seama și de ipoteza de mai sus, se vede ușor că apare un termen în $\frac{1}{x}$ în expresia lui w, pe lîngă termenii obișnuiți ai muchiei.

Deci formula modificată a vitezei verticale de perturbație, în cazul aripii cu muchie de separație situată pe centru, se poate obține din expresia (9) cu coeficienții necalculați, în care facem formal $s=0$ și mai adăugăm, vorbind în spirit hidrodinamic, un dublet ; vom avea astfel

$$\begin{aligned} \frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\Biggl\{ \sum_{q=0}^{n-1} \Biggl[A_q^{(1)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2B(l_1 - x)}} + \\ + A_q^{(2)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2B(l_2 + x)}} + C_q x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bx}{2\,Bx}} \Biggr] + \\ + \sum_{q=0}^{n-2} D_q x^q \sqrt{1 - B^2x^2} + \frac{D_{-1}\sqrt{1 - B^2x^2}}{x} \Biggr\}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Trecînd apoi la determinarea constantelor în acest caz observăm că valorile constantelor $A_q^{(1)}$ și $A_q^{(2)}$ ale bordurilor nu sînt afectate de poziția muchiei, de singularitățile de pe conul Mach și de cele din origină, deci vor avea valorile stabilite anterior.

Constantele $C_0, C_1, \ldots, C_{n-2}$ și D_{-1} se determină cu ajutorul relațiilor (10) în care putem lua pentru w următoarea formă redusă simplificată :

$$W^{\star} = -\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-2} C_q\, x^q \ln x + \frac{D_{-1}}{x}, \qquad (15)$$

deoarece din examinarea integralelor (10) numai acești termeni din dezvoltarea lui w dau un reziduu. Constantele rămase adică C_{n-1}, D_0, $D_1, \ldots, D_{n-2}$ se vor determina din condițiile (12) de pe conul Mach.

3. DETERMINAREA VITEZEI VERTICALE

În cele ce urmează vom calcula efectiv coeficienții vitezelor verticale de perturbație pentru mişcările omogene de ordin $n = 1,2,3$ la aripile triunghiulare prevăzute cu o muchie OC. Pentru aceste aripi, vitezele axiale de perturbație sînt de forma *a*) pentru cazul $n = 1$,

$$u^{(1)} = u_0^{(1)}, \tag{16 a}$$

$$u^{(2)} = u_0^{(2)}; \tag{16 b}$$

b) pentru cazul $n = 2$,

$$u^{(1)} = u_{10}^{(1)} x_1 + u_{01}^{(1)} x_2, \tag{17 a}$$

$$u^{(2)} = u_{10}^{(2)} x_1 + u_{01}^{(2)} x_2; \tag{17 b}$$

c) pentru cazul $n = 3$,

$$u^{(1)} = u_{20}^{(1)} x_1^2 + u_{11}^{(1)} x_1 x_2 + u_{02}^{(1)} x_2^2, \tag{18 a}$$

$$u^{(2)} = u_{2,0}^{(2)} x_1^2 + u_{11}^{(2)} x_1 x_2 + u_{0,2}^{(2)} x_2^2. \tag{18 b}$$

a) *Mișcarea conică propriu-zisă* ($n = 1$). Expresia (9) devine pentru $n = 1$

$$w = \mathcal{R}e\left[A^{(1)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2B(l_1 - x)}} + A^{(2)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2B(l_2 + x)}} + \right.$$
$$\left. + C_0 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(1 - Bx)}{2B(s - x)}} + A^{(0)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bx}{2Bx}}\right]. \tag{19}$$

Constantele bordurilor și muchiei, adică $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ și C_0, se determină calculînd semireziduurile în punctele respective, folosind relațiile (10) în care se iau vitezele sub formă redusă. Vom obține astfel

$$C_0 = \frac{2\left(u_0^{(2)} - u_0^{(1)}\right)\sqrt{1 - B^2 s^2}}{\pi s}, \tag{20 a}$$

$$A^{(1)} = \frac{2u_0^{(1)} \sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{\pi l_1}, \tag{20 b}$$

$$A^{(2)} = \frac{2u_0^{(2)} \sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{\pi l_2}. \tag{20 c}$$

Constanta $A^{(0)}$ se obține din (12), care, în acest caz, se reduce la

$$\left(\frac{dW}{dx}\right)_{x = \pm\frac{1}{B}} = 0, \tag{21}$$

Condiția în punctul $x = \frac{1}{B}$ pentru derivata întîia ne dă

$$A^{(1)} \sqrt{\frac{1 + Bl_1}{1 - Bl_1}} + A^{(2)} \sqrt{\frac{1 - Bl_2}{1 + Bl_2}} + C_0 \sqrt{\frac{1 + Bs}{1 - Bs}} + A^{(0)} = 0, \tag{22}$$

din care obţinem

$$A^{(0)} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{u_0^{(1)}}{l_1} + \frac{u_0^{(2)} - u_0^{(1)}}{s} + \frac{u_0^{(2)}}{l_2}\right). \tag{23}$$

Cazul aripii cu muchie pe centru ($n = 1$).

Din (14), deducem

$$w = \mathcal{Re}\left[A^{(1)} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2B(l_1 - x)}} + A^{(2)} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2B(l_2 + x)}} + \right.$$

$$\left. + C_0 \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1 + Bx}{2Bx}} + \frac{D_{-1}}{x}\sqrt{1 - B^2x^2}\right]. \tag{24}$$

Constantele $A^{(1)}$ şi $A^{(2)}$ au valorile date de (20 b) şi de (20 c). Constanta D_1 se calculează din relaţia (10) în care luăm viteza redusă în vecinătatea originii de forma

$$W^{\star} = \frac{D_{-1}}{x} \tag{25}$$

şi obţinem

$$D_{-1} = \frac{\Delta u_0}{\pi} = \frac{u_0^{(2)} - u_0^{(1)}}{\pi}, \tag{26}$$

ar din (12) rezultă

$$C_0 = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{u_0^{(1)}}{l_1} + \frac{u_0^{(2)}}{l_2}\right). \tag{27}$$

b) *Mişcarea conică de ordin* $n = 2$. Expresia (9) devine în acest caz

$$\frac{w}{x_1} = \mathcal{Re}\left[(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} x) \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2B(l_1 - x)}} + \right.$$

$$+ (A_0^{(2)} + A_1^{(2)} x) \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2B(l_2 + x)}} + \tag{28}$$

$$\left. + (C_0 + C_1 x) \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 - Bx)(1 + Bs)}{2B(s - x)}} + A^{(0)} x \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1 + Bx}{2Bx}} + D_0\sqrt{1 - B^2x^2}\right].$$

Constantele bordurilor şi muchiei, adică $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_1^{(2)}$ C_0 şi C_1, se calculează din semireziduuri. Viteza redusă, de exemplu în punctul $x = s$, va fi de forma

$$W^{\star} = -\frac{1}{2}(C_0 + C_1 x) \ln (x - s). \tag{29}$$

Aplicînd relațiile (10), obținem următoarele valori pentru aceste constante :

$$C_0 = -2\,\frac{B^2 s\left(u_{10}^{(2)} - u_{10}^{(1)}\right) + \left(u_{01}^{(2)} - u_{01}^{(1)}\right)}{\pi\sqrt{1 - B^2 s^2}}, \tag{30 a}$$

$$C_1 = 2\,\frac{\left(u_{10}^{(2)} - u_{10}^{(1)}\right) + \left(2 - B^2 s^2\right) s\left(u_{01}^{(2)} - u_{01}^{(1)}\right)}{\pi s^2\sqrt{1 - B^2 s^2}}, \tag{30 b}$$

$$A_0^{(1)} = -2\,\frac{B^2 l_1 u_{10}^{(1)} + u_{01}^{(1)}}{\pi\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}, \tag{30 c}$$

$$A_1^{(1)} = 2\,\frac{u_{10}^{(1)} + \left(2 - B^2 l_1^2\right) l_1 u_{01}^{(1)}}{\pi l_1^2\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}, \tag{30 d}$$

$$A_0^{(2)} = -2\,\frac{B^2 l_2 u_{10}^{(2)} - u_{01}^{(2)}}{\pi\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}, \tag{30 e}$$

$$A_1^{(2)} = 2\,\frac{l_2\left(2 - B^2 l_2^2\right) u_{01}^{(2)} - u_{10}^{(2)}}{\pi l_2^2\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}. \tag{30 f}$$

Celelalte două constante, $A^{(0)}$ și D_0, se obțin considerînd doar două din relațiile (12) și anume anulînd derivate întîia în punctele $x = \pm \frac{1}{B}$. Obținem astfel

$$\pm D_0 B + \frac{\left(A_1^{(1)} \pm A_0^{(1)} B\right)\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{2\,(1 \mp B l_1)} + \frac{\left(A_1^{(2)} \pm A_0^{(2)} B\right)\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{2\,(1 \pm B l_2)} +$$
$$+ \frac{(C_1 \pm C_0 B)\sqrt{1 - B^2 s^2}}{2\,(1 \mp B s)} + \frac{A^{(0)}}{2} = 0\,. \tag{31 a, b}$$

Aceste două relații ne dau următoarele valori ale coeficienților D_0 și $A^{(0)}$:

$$D_0 = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{u_{10}^{(1)}}{l_1} + \frac{u_{10}^{(2)}}{l_2} + \frac{u_{10}^{(2)} - u_{10}^{(1)}}{s}\right), \tag{32}$$

$$A^{(0)} = -\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{u_{10}^{(1)}}{l_1^2} - \frac{u_{10}^{(2)}}{l_2^2} + \frac{u_{10}^{(2)} - u_{10}^{(1)}}{s^2}\right) + 2\left(\frac{u_{01}^{(1)}}{l_1} + \frac{u_{01}^{(2)}}{l_2} + \frac{u_{01}^{(2)} - u_{01}^{(1)}}{s}\right)\right]\cdot \tag{33}$$

În cazul cînd nu avem, muchie $\left(u_{10}^{(1)} = u_{10}^{(2)}\right.$ și $\left.u_{01}^{(1)} = u_{01}^{(2)}\right)$, obținem rezultatele date în [3] pentru $n = 2$ la aripă fără muchie.

Cazul muchiei pe centru. Din (14) deducem

$$\frac{w}{x_1} = \mathcal{R}e\left[\left(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} x\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + B l_1)(1 - B x)}{2B\,(l_1 - x)}} +\right.$$
$$+ \left(A_0^{(2)} + A_1^{(2)} x\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1 + B l_2)(1 + B x)}{2B\,(l_2 + x)}} + (C_0 + C_1 x)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1 + Bx}{2Bx}} +$$
$$\left. + \left(D_0 + \frac{D_{-1}}{x}\right)\sqrt{1 - B^2 x^2}\right]. \tag{34}$$

Constantele bordurilor, adică $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $A_0^{(2)}$ şi $A_1^{(2)}$, au respectiv valorile date de formulele (30 c, d, e, f). Constantele C_0 şi D_1 se calculează cu ajutorul relațiilor (10), în care viteza redusă are următoarea expresie

$$W^* = -\frac{1}{2} C_0 \ln x + \frac{D_{-1}}{x}\cdot \tag{35}$$

Obținem astfel

$$C_0 = -\frac{2\left(u_{01}^{(2)} - u_{01}^{(1)}\right)}{\pi} \tag{36}$$

şi

$$D_{-1} = \frac{u_{1,0}^{(2)} - u_{1,0}^{(1)}}{2\pi}. \tag{37}$$

Iar din condițiile (12) de pe conul Mach, obținem

$$C_1 = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\left(2 + B^2 l_1^2\right) u_{10}^{(1)}}{l_1^2} - \frac{\left(2 + B^2 l_2^2\right) u_{10}^{(2)}}{l_2^2} + 4\left(\frac{u_{01}^{(1)}}{l_1} + \frac{u_{01}^{(2)}}{l_2}\right)\right\}, \tag{38}$$

$$D_0 = \frac{2\left(u_{01}^{(2)} - u_{01}^{(1)}\right)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{u_{10}^{(1)}}{l_1} + \frac{u_{10}^{(2)}}{l_2}\right)\cdot \tag{39}$$

c) *Mişcarea conică de ordin* $n = 3$. Din expresia (9) deducem în acest caz

$$\begin{aligned}\frac{w}{x_1^2} = \mathcal{R}e\Bigg[&\left(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} x + A_2^{(1)} x^2\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2B(l_1 - x)}} + \\ &+ \left(A_0^{(2)} + A_1^{(2)} x + A_2^{(2)} x^2\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2B(x + l_2)}} + \\ &+ \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(1 - Bx)}{2B(s - x)}} + \\ &+ A^{(0)} x^2 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bx}{2Bx}} + (D_0 + D_1 x)\sqrt{1 - B^2 x^2}\Bigg].\end{aligned} \tag{40}$$

Constantele bordurilor şi muchiei se determină calculînd semireziduurile în relațiile (10) în care s-a luat viteza sub formă redusă. Astfel, pentru calculul semireziduului în punctul $x = s$, viteza redusă va fi de forma

$$W^* = -\frac{1}{2}\left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2\right) \ln (x - s). \tag{41}$$

Obținem astfel următoarele valori pentru constante:

$$A_0^{(1)} = -\frac{\left(B^2 l_1^2\right) l_1 u_{02}^{(1)} + u_{11}^{(1)} + B l_1 \left(3 - 2B^2 l_1^2\right) B u_{20}^{(1)}}{\pi\left(1 - B^2 l_1^2\right)^{3/2}}, \tag{42 a}$$

$$A_1^{(1)} = \frac{2\left[B^2 u_{20}^{(1)} + \left(B^3 l_1^3\right) B u_{11}^{(1)} - \left(2 - 3B^2 l_1^2\right) u_{02}^{(1)}\right]}{\pi\left(1 - B^2 l_1^2\right)^{3/2}}, \tag{42 b}$$

$$A_2^{(1)} = \frac{\left(2 - 3B^2 l_1^2\right) u_{20}^{(1)} + \left(3 - 4B^2 l_1^2\right) l_1 u_{11}^{(1)} + \left(6 - 9B^2 l_1^2 + 2B^4 l_1^4\right) l_1^2 u_{02}^{(1)}}{\pi l_1^3 \left(1 - B^2 l_1^2\right)^{3/2}}, \tag{42 c}$$

$$A_0^{(2)} = -\frac{\left(B^2 l_2^2\right) l_2 u_{0,2}^{(2)} - u_{11}^{(2)} + B^2 l_2 \left(3 - 2B^2 l_2^2\right) u_{20}^{(2)}}{\pi\left(1 - B^2 l_2^2\right)^{3/2}}, \tag{42 d}$$

$$A_1^{(2)} = \frac{2\left[- B^2 u_{20}^{(2)} + \left(B^3 l_2^3\right) B u_{11}^{(2)} + \left(2 - 3B^2 l_2^2\right) u_{0,2}^{(2)}\right]}{\pi\left(1 - B^2 l_2^2\right)^{3/2}}, \tag{42 e}$$

$$A_2^{(2)} = \frac{\left(2 - 3B^2 l_2^2\right) u_{2,0}^{(2)} - \left(3 - 4B^2 l_2^2\right) l_2 u_{11}^{(2)} + \left(6 - 9B^2 l_2^2 + 2B^4 l_2^4\right) l_2^2 u_{0,2}^{(2)}}{\pi l_2^3 \left(1 - B^2 l_2^2\right)^{3/2}}, \tag{42 f}$$

$$C_0 = -\frac{(B^2 s^2)\, s \left(u_{02}^{(2)} - u_{0,2}^{(1)}\right) + \left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right) + B^2 s \left(3 - 2B^2 s^2\right)\left(u_{20}^{(2)} - u_{20}^{(1)}\right)}{\pi (1 - B^2 s^2)^{3/2}}, \tag{42 g}$$

$$C_1 = \frac{2\left[B^2 \left(u_{20}^{(2)} - u_{20}^{(1)}\right) + B^4 s^3 \left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right) - \left(2 - 3B^2 s^2\right)\left(u_{02}^{(2)} - u_{02}^{(1)}\right)\right]}{\pi (1 - B^2 s^2)^{3/2}}, \tag{42 h}$$

$$C_2 = \frac{(2 - 3B^2 s^2)\left(u_{20}^{(2)} - u_{20}^{(1)}\right) + \left(3 - 4B^2 s^2\right) s \left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right) + \left(6 - 9B^2 s^2 + 2B^4 s^4\right) s^2 \left(u_{02}^{(2)} - u_{02}^{(1)}\right)}{\pi s^3 (1 - B^2 s^2)^{3/2}}; \tag{42 i}$$

Constantele $A^{(0)}$, D_0 și D_1 se determină luînd trei din condițiile (12). Condițiile pentru derivata întîia ne dau

$$\frac{\left(A_2^{(1)} \pm A_1^{(1)} B + A_0^{(1)} B^2\right)\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{1 \mp B l_1} + \frac{\left(A_2^{(2)} \pm A_1^{(2)} B + A_0^{(2)} B^2\right)\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{1 \pm B l_2} +$$
$$+ \frac{(C_2 \pm C_1 B + C_0 B^2)\sqrt{1 - B^2 s^2}}{1 \mp B s} + A^{(0)} + 2B(D_0 B \pm D_1) = 0 \tag{43 a, b}$$

și condițiile de anulare a derivatei a II-a pentru $x = \frac{1}{B}$,

$$\frac{\left(2A_2^{(1)} + A_1^{(1)} B\right)\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{1 - B l_1} + \frac{\left(2A_2^{(2)} + A_1^{(2)} B\right)\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{1 + B l_2} + \tag{44}$$
$$+ \frac{(2 C_2 + C_1 B)\sqrt{1 - B^2 s^2}}{1 - B s} + 2A^{(0)} + 2BD_1 - B\Lambda = 0,$$

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
1005	(46 c)	$\left.\frac{\dots\left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right)}{\dots}\right\}.$	$\left.\frac{\dots u_{02}^{(2)} - u_{02}^{(1)})}{\dots}\right\}.$
1190	2	$Q_{\rho-i}\, Q_\vartheta$	$Q_\rho - i\, Q_\vartheta$
1190	(6.18)	$\dots f_0(\ ) + \dots$	$\dots f_0(\mathfrak{z})) + \dots$
1190	(6.18)	$\dots \mathcal{R}e]$	$\dots \mathcal{R}e\, f_0(\mathfrak{z})]$
1192	(7.6)	$= \int (dg + \dots$	$= \int (dy + \dots$
1197	(8.24)	$\mathfrak{M}'_t = \dots$	$M'_t = \dots$
1274	5 de jos	—	6,8
1274	2 ,, ,,	—	5,5

c. 3739. – Studii şi cercetări de mecanică aplicată nr. 4/1959

unde Λ reprezintă valoarea în punctul $\frac{1}{B}$ a polinomului rezultat al diviziunii termenilor care conțin $\frac{1}{\sqrt{1-B^2x^2}}$, în derivata întîia cu $1-B^2x^2$. Λ are următoarea valoare:

$$\Lambda = \frac{C_2 s + C_1 + C_0 B(1+Bs-B^2s^2)}{(1-Bs)\sqrt{1-B^2s^2}} + \tag{45}$$

$$+\frac{A_2^{(1)} l_1 + A_1^{(1)} + \left(1+Bl_1-B^2l_1^2\right) BA_0^{(1)}}{(1-Bl_1)\sqrt{1-B^2l_1^2}} - \frac{A_2^{(2)} l_2 - A_1^{(2)} - \left(1-Bl_2-B^2l_2^2\right) BA_0^{(2)}}{(1+Bl_2)\sqrt{1-B^2l_2^2}}.$$

Din relațiile (43) și (44) se determină următoarele valori pentru constantele $A^{(0)}$, D_0, D_1:

$$A^{(0)} = -\left\{\frac{2u_{2,0}^{(1)} + l_1\left(3+B^2l_1^2\right)u_{11}^{(1)} + 6l_1^2u_{02}^{(1)}}{\pi l_1^3} + \frac{2u_{20}^{(2)} - l_2\left(3+B^2l_2^2\right)u_{11}^{(2)} + 6l_2^2u_{02}^{(2)}}{\pi l_2^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\left(u_{20}^{(2)}-u_{20}^{(1)}\right) + s\left(3+B^2s^2\right)\left(u_{11}^{(2)}-u_{11}^{(1)}\right) + 6s^2\left(u_{02}^{(2)}-u_{02}^{(1)}\right)}{\pi s^3}\right\}, \tag{46 a}$$

$$D_0 = -\left\{\frac{\left(1-2B^2l_1^2\right)u_{20}^{(1)} - \left(B^2l_1^2\right)l_1u_{11}^{(1)} - l_1^2u_{02}^{(1)}}{2\pi l_1\left(1-B^2l_1^2\right)} + \frac{\left(1-2B^2l_2^2\right)u_{20}^{(2)} + \left(B^2l_2^2\right)l_2u_{11}^{(2)} - l_2^2u_{02}^{(2)}}{2\pi l_2\left(1-B^2l_2^2\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-2B^2s^2)\left(u_{20}^{(2)}-u_{20}^{(1)}\right) - \left(B^2s^2\right)s\left(u_{11}^{(2)}-u_{11}^{(1)}\right) - s^2\left(u_{02}^{(2)}-u_{02}^{(1)}\right)}{2\pi s(1-B^2s^2)}\right\}, \tag{46 b}$$

$$D_1 = -\left\{\frac{\left(2+B^2l_1^2-2B^4l_1^4\right)u_{20}^{(1)} + \left(3-2B^2l_1^2\right)l_1u_{11}^{(1)} + l_1^2u_{02}^{(1)}\left(2-B^2l_1^2\right)}{2\pi l_1^2\left(1-B^2l_1^2\right)} + \right.$$

$$+ \frac{u_{20}^{(2)}\left(2+B^2l_2^2-2B^4l_2^4\right) - l_2u_{11}^{(2)}\left(3-2B^2l_2^2\right) + l_2^2u_{02}^{(2)}\left(2-B^2l_2^2\right)}{2\pi l_2^2\left(1-B^2l_2^2\right)} + \tag{46 c}$$

$$\left. + \frac{(2+B^2s^2-2B^4s^4)\left(u_{20}^{(2)}-u_{20}^{(1)}\right) + s\left(3-2B^2s^2\right)\left(u_{11}^{(2)}-u_{11}^{(1)}\right) + s^2\left(2-B^2s^2\right)\left(u_{11}^{(2)}-u_{11}^{(1)}\right)}{2\pi s^2(1-B^2s^2)}\right\}.$$

Aripa cu muchie pe centru. Din (14) deducem

$$\frac{w}{x_1^2} = \mathcal{R}e\left\{\left(A_0^{(1)} + A_1^{(1)}x + A_2^{(1)}x^2\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bx)}{2B(l_1-x)}} + \right.$$

$$+ \left(A_0^{(2)} + A_1^{(2)}x + A_2^{(2)}x^2\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(l_2+x)}} + \tag{47}$$

$$\left. + \left(C_0 + C_1x + C_2x^2\right)\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} + \left(D_0 + \frac{D_{-1}}{x}\right)\sqrt{1-B^2x^2}\right\}.$$

Constantele bordurilor, adică $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_1^{(2)}$ și $A_2^{(2)}$, au valorile date respectiv de formulele (42 a, b, c, d, e, f). Constantele C_0, C_1 și D_{-1}

se obțin cu ajutorul relațiilor (10), în care viteza redusă în vecinătatea originii are următoarea expresie :

$$W_r^* = -\frac{1}{2}(C_0 + C_1 x)\ln x + \frac{D_{-1}}{x}\,. \tag{48}$$

Calculînd semireziduurile în origine obținem

$$C_0 = -\frac{\left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right)}{\pi}, \tag{49}$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi}\left[B^2\left(u_{20}^{(2)} - u_{20}^{(1)}\right) - 2\left(u_{02}^{(2)} - u_{02}^{(1)}\right)\right], \tag{50}$$

$$D_{-1} = \frac{u_{20}^{(2)} - u_{20}^{(1)}}{3\pi}, \tag{51}$$

și din condițiile (12) de pe conul Mach obținem

$$C_2 = -\left\{\frac{2u_{20}^{(1)} + l_1\left(3 + B^2 l_1^2\right) u_{11}^{(1)} + 6 l_1^2 u_{02}^{(1)}}{\pi l_1^3} + \frac{2u_{20}^{(2)} - l_2 u_{11}^{(2)}\left(3 + B^2 l_1^2\right) + 6 l_2^2 u_{02}^{(2)}}{\pi l_2^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{B^2\left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right)}{2\pi}\right\}, \tag{52 a}$$

$$D_0 = -\left\{\frac{\left(1 - 2B^2 l_1^2\right) u_{20}^{(1)} - \left(B^2 l_1^2\right) l_1 u_{11}^{(1)} - l_1^2 u_{02}^{(1)}}{2\pi l_1\left(1 - B^2 l_1^2\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\left(1 - 2B^2 l_2^2\right) u_{20}^{(2)} + \left(B^2 l_2^2\right) l_2 u_{11}^{(2)} - l_2^2 u_{02}^{(1)}}{2\pi l_2\left(1 - B^2 l_2^2\right)} - \frac{3\left(u_{11}^{(2)} - u_{11}^{(1)}\right)}{4\pi}\right\}, \tag{52 b}$$

$$D_1 = -\left\{\frac{\left(2 + B^2 l_1^2 - 2B^4 l_1^4\right) u_{20}^{(1)} + \left(3 - 2B^2 l_1^2\right) l_1 u_{11}^{(1)} + l_1^2 u_{02}^{(1)}\left(2 - B^2 l_1^2\right)}{2\pi l_1^2\left(1 - B^2 l_1^2\right)} + \right.$$
$$+ \frac{\left(2 + B^2 l_2^2 - 2B^4 l_2^4\right) u_{20}^{(2)} - \left(3 - 2B^2 l_2^2\right) l_2 u_{11}^{(2)} + l_2^2\left(2 - B^2 l_2^2\right) u_{02}^{(2)}}{2\pi l_2^2\left(1 - B^2 l_2^2\right)} + \tag{52 c}$$
$$\left. + \frac{2\left[2B^2\left(u_{20}^{(2)} - u_{20}^{(1)}\right) - 3\left(u_{02}^{(2)} - u_{02}^{(1)}\right)\right]}{3\pi}\right\}.$$

Observație. Formulele (9) și (14) rămîn valabile chiar dacă unul sau ambele borduri devin supersonice. Să presupunem de exemplu că bordul A_1 devine supersonic. Coeficienții $A_q^{(1)}$ ai singularităților acestui bord conțin toți pe $\sqrt{1 - B^2 l_1^2}$ la numitor, care, pentru $l_1 > \frac{1}{B}$ devine $-i\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}$. Ținînd seama că $-i$ argch $M =$ arc cos M putem pune în (9) sau în (14), în loc de $A_q^{(1)} x^q$ argch $M = A_q^{*(1)} x^q$ arc cos M în care $A_q^{*(1)}$ se obține din $A_q^{(1)}$ înlocuind $\sqrt{1 - B^2 l_1^2}$ cu $\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}$. Pe de altă parte

$$\text{arc cos}\left.\sqrt{\frac{(1 - Bl_1)(1 + Bx)}{2B(l_1 - x)}}\right|_{x = \frac{1}{B}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Deci, în cazul bordului A_1 supersonic w din (9) sau (14) nu se mai anulează în punctul $x = \frac{1}{B}$ al conului Mach şi soluţia se prelungeşte în dreapta în afara conului cu valoarea

$$\frac{W^\star}{x_1^{n-1}} = \frac{\pi}{2} \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{\star(1)} x^q . \tag{53}$$

4. SUPRAFAŢA ARIPII

Suprafaţa aripii $Z(x_1, x_2)$, dată de formula (2), se mai poate scrie

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \int w dx_1 = \int x_1^{n-1} w_{n-1} dx_1 = - x_2^n \int \frac{w_{n-1}}{y^{n+1}} dy \tag{2'}$$

Totalitatea suprafeţelor care răspund problemei se obţin adăugînd la $Z(x_1, x_2)$ dat de (2′) o funcţie arbitrară de x_2.

Formula (2′) se poate scrie

$$Z(x_1 x_2) = - \frac{x_2^n}{U_\infty} \left[\sum_{p=2}^{n+1} \left(C_{n+1-p} \mathcal{J}_{p(s)} + A_{n+1-p}^{(1)} \mathcal{J}_{p(l_1)} + A_{n+1-p}^{(2)} \mathcal{J}_{p(-l_2)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=3}^{n+1} D_{n+1-p} K_p + A^{(0)} \mathcal{J}_2 \right] = - \frac{x_2^n}{U_\infty} \left[Z_{n(s)} + Z_{n(l_1)}^{(1)} + Z_{n(-l_2)}^{(2)} + Z_{nc} \right], \tag{54}$$

în care am notat

$$Z_{n(s)} = \sum_{p=2}^{n+1} C_{n+1-p} \mathcal{J}_{p(s)}, \tag{55a}$$

$$Z_{nc} = A^{(0)} \mathcal{J}_2 + \sum_{p=3}^{n+1} D_{n+1-p} K_p, \tag{55b}$$

iar $Z_{n(l_1)}^{(1)}$ şi $Z_{n(-l_2)}^{(2)}$ se obţin din $Z_{n(s)}$ înlocuind s cu l_1 şi respectiv cu $-l_2$ şi C_q cu $A_q^{(1)}$ şi respectiv cu $A_q^{(2)}$. Iar, mai departe,

$$\mathcal{J}_{p(s)} = \int \frac{1}{y^p} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bs)(1+By)}{2B(y-s)}} dy = \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{s^{p-1}} - \frac{1}{y^{p-1}} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bs)(1+By)}{2B(y-s)}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{1 - B^2 s^2}}{2 s^p (p-1)} \sum_{t=1}^{p-1} s^t \Gamma_t , \tag{56}$$

unde

$$\Gamma_t = \int \frac{dy}{y^t \sqrt{1 - B^2 y^2}} = - \frac{\sqrt{1 - B^2 y^2}}{(t-1) y^{t-1}} + \frac{B^2 (t-2)}{t-1} \Gamma_{t-2} \tag{57}$$

și

$$K_p = \int \frac{\sqrt{1 - B^2y^2}}{y^p}\, dy = \Gamma_p - B^2\, \Gamma_{p-2}, \tag{58}$$

$$\mathcal{J}_2 = \int \frac{1}{y^2} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2\, By}}\, dy = \frac{1}{y} \left(\frac{\sqrt{1 - B^2y^2}}{2} + \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2By}} \right), \tag{59}$$

deci calculul formei aripii se reduce în ultima analiză la calculul unei integrale obișnuite de tip Γ_t.

Observație. Se constată din (54) și (56) — (58) că atît în dreptul muchiei $y = s \neq 0$ cît și în dreptul bordurilor de atac cota aripii este finită. De asemenea, aripa pentru care muchia nu este plasată în origine ($s \neq 0$) va fi finită pentru $y = 0$ în cazul mișcărilor omogene de ordin superior, spre deosebire de cazul mișcărilor conice propriu-zise ($n = 1$, în care avem $Z = \infty$ pentru $y = 0$. Făcînd acum aplicații pentru $n = 1$, 2, 3 obținem următoarele valori pentru $Z_{n(s)}$ și Z_{nc} :

a) Pentru $n = 1$,

$$Z_{1(s)} = C \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{y} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bs)(1+By)}{2B\,(y - s)}} - \frac{\sqrt{1 - B^2s^2}}{s} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2\, By}} \right], \tag{60 a}$$

$$Z_{1c} = \frac{A^{(0)}}{y} \left[\frac{\sqrt{1 - B^2y^2}}{2} - \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2By}} \right]; \tag{60 b}$$

b) pentru $n = 2$,

$$\begin{aligned} Z_{2(s)} = & \left[\frac{C_0}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{y^2} \right) + C_1 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{y} \right) \right] \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - Bs)\,(1 + By)}{2B\,(y - s)}} - \\ & - \left[C_1 + \frac{C_0}{2s} \right] \frac{\sqrt{1 - B^2s^2}}{s} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2By}} - \frac{C_0 \sqrt{(1 - B^2s^2)\,(1 - B^2y^2)}}{4sy}, \end{aligned} \tag{61 a}$$

$$Z_{2c} = \left(B^2 D_0 - \frac{A^{(0)}}{y} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2By}} + \left(A^{(0)} - \frac{D_0}{y} \right) \frac{\sqrt{1 - B^2y^2}}{2y}\ ; \tag{61 b}$$

c) pentru $n = 3$,

$$\begin{aligned} Z_{3(s)} = & \left[\frac{C_0}{3} \left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{y^3} \right) + \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{y^2} \right) + C_2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{y} \right) \right] \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bs)\,(1+ By)}{2B\,(y - s)}} - \\ & - \left[C_2 + \frac{C_1}{2s} + \frac{C_0\,(2 + B^2s^2)}{6s^2} \right] \frac{\sqrt{1 - B^2s^2}}{s} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2By}} - \\ & - \left[C_1 + \frac{C_0\,(s + 2y)}{3sy} \right] \frac{\sqrt{(1 - B^2s^2)\,(1 - B^2y^2)}}{4sy}, \end{aligned} \tag{62 a}$$

$$Z_{3c} = \left(D_1 B^2 - \frac{A^{(0)}}{y} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + By}{2By}} + \left[A^{(0)} - \frac{2D_0\,(1 - B^2y^2)}{3y^2} - \frac{D_1}{y} \right] \frac{\sqrt{1 - B^2y^2}}{2y}. \tag{62 b}$$

Cazul aripii cu muchie pe centru. Pentru a afla forma aripii, în acest caz, vom porni tot de la relația (2′) în care însă W are expresia dată de (14). În acest caz expresia generală a suprafeței aripii cu muchie pe centru este

$$\begin{aligned} Z = -\frac{x_2^n}{U_\infty}\Bigg[\sum_{p=2}^{n+1}\left(C_{n+1-p}\,\mathcal{J}_p + A^{(1)}_{n+1-p}\,\mathcal{J}_{p(l_1)} + A^{(2)}_{n+1-p}\,\mathcal{J}_{p(-l_2)}\right) + \\ + \sum_{p=3}^{n+2} D_{n+1-p}\,K_p\Bigg] = -\frac{x_2^n}{U_\infty}\left[Z_{n(0)} + Z^{(1)}_{n(l_1)} + Z^{(2)}_{n(-l_2)} + Z^{\star}_{nc}\right], \end{aligned} \tag{63}$$

în care am notat

$$Z'_{n(0)} = \sum_{p=2}^{n+1} C_{n+1-p}\,\mathcal{J}_p\,, \tag{64 a}$$

$$Z^{\star}_{nc} = \sum_{p=3}^{n+2} D_{n+1-p}\,K_p\,, \tag{64 b}$$

iar $Z^{(1)}_{n(l_1)}$ și $Z^{(2)}_{n(-l_2)}$ au semnificația din (54). Mai departe

$$\mathcal{J}_p = \int \frac{1}{y^p}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}}\,dy = -\frac{1}{(p-1)\,y^{p-1}}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}} - \frac{\Gamma_p}{2(p-1)}\,. \tag{65}$$

În relația (63) și (64 b) K_p are valoarea dată de relația (58). Făcînd acum aplicații pentru $n = 1, 2, 3$ obținem următoarele valori pentru $Z_{n(0)}$ și $Z^{\star}_{nc}$:

a) pentru $n = 1$

$$Z_{1(0)} = \frac{C_0}{y}\left[\frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{2} - \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}}\right], \tag{66 a}$$

$$Z^{\star}_{1c} = D_{-1}\left[B^2\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}} - \frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{2y^2}\right]; \tag{66 b}$$

b) pentru $n = 2$,

$$Z_{2(0)} = -\left[C_1 + \frac{2-B^2y^2}{4y}\,C_0\right]\frac{1}{y}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}} + \left(C_1 + \frac{C_0}{4y}\right)\frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{2y}\,, \tag{67 a}$$

$$Z^{\star}_{2c} = D_0B^2\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}} - \left[\frac{D_0}{2} + \frac{D_{-1}(1-B^2y^2)}{3y}\right]\frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{y^2}\,; \tag{67 b}$$

c) pentru $n = 3$,

$$\begin{aligned} Z_{3(0)} = -\left[C_2 + \frac{(2-B^2y^2)\,C_1}{4y} + \frac{C_0}{3y^2}\right]\frac{1}{y}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}} + \\ + \left[C_2 + \frac{C_1}{4y} + \frac{(1+2B^2y^2)\,C_0}{9y^2}\right]\frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{2y}\,, \end{aligned} \tag{68 a}$$

$$\begin{aligned} Z_{3c} = \left(D_1 + \frac{D_{-1}B^2}{4}\right)B^2\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+By}{2By}} - \\ - \left[\frac{D_1}{2} + \frac{D_0(1-B^2y^2)}{3y} + \frac{(2-B^2y^2)\,D_{-1}}{8y^2}\right]\frac{\sqrt{1-B^2y^2}}{y^2}\,. \end{aligned} \tag{68 b}$$

Vom căuta să vedem acum ce condiții trebuie să îndeplinească coeficienții unei aripi cu muchie pe centru pentru ca Z să fie finit în origine.

Din examinarea relației (63) se constată că Z tinde la infinit în origine ca $C_0 \ln y$ și $\frac{D_{-1}}{y}$. Deci pentru ca Z să fie finit pe centru este necesar ca $C_0 = D_{-1} = 0$. Din examinarea relațiilor de compatibilitate scrise sub forma (10) vom obține pentru $q = 0$ și $q = 1$ respectiv

$$D_{-1} = \frac{\Delta u_{n-1.0}}{n\pi}, \tag{69}$$

$$C_0 = -\frac{2\Delta u_{n-2.1}}{(n-1)\pi}, \qquad (n \geqq 2). \tag{70}$$

Deci condițiile de anulare ale acestor constante conduc la

$$\Delta u_{n-1.0} = 0, \tag{71 a}$$

$$\Delta u_{n-2.1} = 0, \tag{71 b}$$

care este echivalent cu

$$\Delta \Phi_{n-1.1.0} = 0, \tag{72 a}$$

$$\Delta \Phi_{n-2.2.0} = 0. \tag{72 b}$$

Din examinarea formulelor lui Euler (6 a) și (6 b) se constată ușor că condițiile (72 a) și (72 b) reprezintă continuitatea expresiilor lui u și v pe centru. Acest lucru este explicabil din punct de vedere fizic deoarece muchia de pe centru se proiectează în planul Ox_1x_2 după direcția lui Ox_1 deci ea nu perturbă curentul principal și deci nu trebuie să producă discontinuități pe axa Ox_1 în expresiile lui u și v. Să vedem acum ce restricții impun condițiile (71 a) și (71 b) pentru diverși n.

a) Pentru $n = 1$.

Din relația (71 a) rezultă $\Delta u_0 = 0$, adică $u_0^{(1)} = u_0^{(2)} = u_0$, ceea ce reprezintă inexistența muchiei. Dacă vom căuta să satisfacem și condiția $C_0 = 0$, în care C_0 are valoarea dată de relația (27), se constată că acest lucru conduce, fie la inexistența perturbației ($u_0 = 0$), fie la inexistența aripei ($l_1 = -l_2$). Deci, în cazul $n = 1$, problema găsirii unei aripi cu muchie pe centru care să fie finită în origine, conduce la o imposibilitate. De altfel, din cele arătate mai sus chiar și pentru s diferit de zero, Z devine infinit pe centru în cazul mișcărilor conice propriu-zise ($n = 1$).

b) Pentru $n = 2$.

Obținem $\Delta u_{1.0} = \Delta u_{01} = 0$, ceea ce echivalează cu lipsa muchiei pe centru. Deci în acest caz aripa cu muchie pe centru conduce și ea la Z infinit în origine.

c) Pentru $n \geqq 3$.

$\Delta u_{n-1.0} = 0$, $\Delta u_{n-2.1} = 0$ salturile celorlalți coeficienți ai lui u vor fi însă diferiți de zero. Rezultă că există în aceste cazuri aripi cu muchie de separație a presiunilor pe centru care conduc la o suprafață cu Z finit în origine și anume acelea pentru care distribuția dată de presiuni satisfac condițiile (71 *a*) și (71 b) susamintite.

Primit la redacție la 25 iunie 1959

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛА С РЕБРОМ РАЗДЕЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе определяется отметка высоты поверхности тонкого крыла в сверхзвуковом потоке, имеющего в плане треугольную форму и на котором заданы два режима изменения давления, разделенных ребром.

Расчет производится в рамках конических движений высшего порядка. Оба режима изменения коэффициента давления задаются в виде однородных многочленов высшего порядка и определяется изменение угла атаки крыла. Затем при помощи интегрирования получается уравнение крыла.

Исследование предпринято главным образом для выявления эффекта ребра и для того чтобы сделать некоторые интересные замечания, связанные с случаем, когда ребро находится в центре. Действительно в этом случае в видоизмененном выражении угла атаки появляется дополнительная особенность вида $\frac{1}{x}$. Если проанализировать затем вид получаемой поверхности в случае крыла с ребром на центре, то оказывается, что лишь при $n \geqq 3$ могут существовать поверхности с конечной отметкой высоты Z в начале координат. Для выполнения этого условия необходимо еще, чтобы заданное распределение коэффициента давления удовлетворяло двум соотношениям (71 a, b), выражающим непрерывность значений u и v при переходе через начало координат. Далее приводятся некоторые приложения как в случае произвольно направленного ребра, так и в случае ребра в центре.

DÉTERMINATION DE LA SURFACE D'UNE AILE, À ARÊTE DE SÉPARATION DE LA DISTRIBUTION DES PRESSIONS, EN COURANT SUPERSONIQUE

RÉSUMÉ

Les auteurs déterminent la cote de la surface d'une aile mince, placée en courant supersonique, ayant, en plan, une forme triangulaire et sur laquelle sont donnés deux régimes de variation de la pression, séparés par une arête.

Le calcul est effectué à l'aide des mouvements coniques d'ordre supérieur. On donne, donc, les deux régimes de variation du coefficient de pression sous la forme de polynômes homogènes d'ordre supérieur, et

l'on détermine la variation de l'incidence de l'aile. Ensuite, par intégration, on obtient l'équation de la surface.

Cette étude a été spécialement élaborée pour mettre en évidence l'effet de l'arête et en vue de certaines remarques, intéressantes, relatives au cas où l'arête est placée au centre. Dans ce dernier cas, en effet, dans l'expression modifiée de l'incidence, apparaît, en outre, une nouvelle singularité de la forme $\frac{1}{x}$. Si l'on analyse ensuite la forme de la surface obtenue pour une aile à arête placée au centre, on constate que des surfaces ayant la cote Z finie à l'origine ne peuvent exister que pour $n \geqq 3$. Pour cela il faut de même que la distribution donnée du coefficient de pression satisfasse à deux relations (71 *a* et *b*) exprimant la continuité des valeurs de u et v à la traversée de l'origine. Quelques applications sont faites, tant pour le cas d'une arête dirigée suivant une direction quelconque que pour le cas d'une arête placée au centre.

BIBLIOGRAFIE

1. P. GERMAIN, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, *7* (1949).
2. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., **II**, *9—10* (1952).
3. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Théorie générale de l'aile triangulaire à distribution de pressions donnée (Le problème indirect).* Revue de mécanique appliquée, **III**, *2* (1958).
4. — *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de mécanique appliquée, **II**, *1* (1957).
5. M. A. HEASLET, H. LOMAX, *Supersonic and transonic small perturbation theory* (General theory of high-speed aerodynamics.). W. R. Sears Editor, Princeton, 1954, p. 193.

ASUPRA HIPERSUSTENTAȚIEI DATORITĂ AȘEZĂRII ELICELOR PE EXTRADOSUL ARIPII

DE

N. N. PATRAULEA și N. CĂMĂRĂȘESCU

1. În această lucrare vrem să evaluăm efectul de sucțiune de pe extradosul unei aripi de anvergură infinită datorită unor elice E așezate de-a lungul anvergurii pe extrados (fig. 1) și în vecinătatea bordului de fugă. Presupunem că pentru uniformizarea curentului în dreptul elicelor, acestea sînt întubate, tuburile fiind formate de partea terminală a profilului $A_1'B_1$, o aripioară A_2B_2 și carenajele laterale speciale. Hipersustentația aripii este datorită în special depresiunilor care se nasc pe porțiunea A_1A_2'. De la A_2' spre bordul de fugă apare și o portanță negativă pe aripioara A_2B_2 de care trebuie să se țină seama.

În afară de acest efect mai avem efectul de incidență al sistemului portant considerat A_1B_1; A_2B_2 datorit vitezei de deplasare și de asemenea de un efect de volet fluid datorită jetului produs de elicele E în aval de secțiunea B_1B_2.

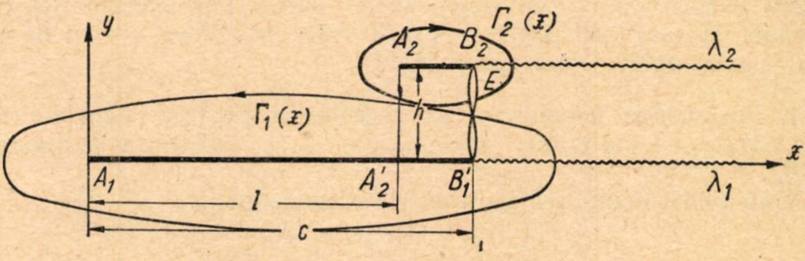


Fig. 1

2. Pentru evaluarea portanței totale, vom admite următoarele ipoteze :

a) Mișcarea este plană, discurile elicelor fiind înlocuite de suprafața permeabilă activă, E la bordul de fugă între cele două profile A_1B_1; A_2B_2 (fig. 1).

b) Saltul presiunii δp la traversarea suprafeței permeabile E este constant.

c) Portanța totală se compune din portanța datorită efectului de sucțiune, profilul fiind la incidența nulă şi din portanța corespunzătoare sistemului portant la incidența actuală α, *prevăzut cu un volet fluid infinit subțire*, dar avînd acelaşi impuls și bracaj inițial ca al jetului creat de suprafața permeabilă E.

d) Datorită faptului că jetul este aproape rectiliniu, vom presupune că pentru determinarea efectului de sucțiune scurgerea nu este mult diferită de aceea produsă de suprafața permeabilă E, lucrînd între semidrepte paralele $A_1B_1\lambda_1$; $A_2B_2\lambda_2$. Este evident că mişcării găsite i se poate suprapune o mişcare generală paralelă cu liniile $A\lambda$ și avînd o viteză asimptotică, V_∞.

e) Fluidul va fi presupus incompresibil și fără vîscozitate.

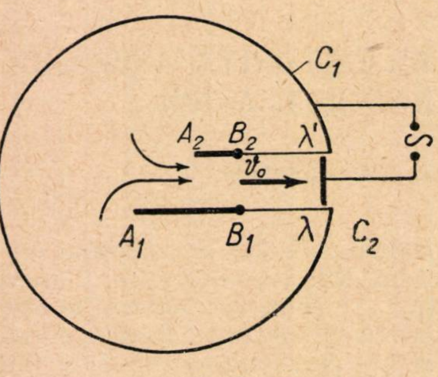


Fig. 2

3. Problema descrisă mai sus se poate rezolva pe cale matematică sau prin analogie reoelectrică. În această lucrare s-a folosit o metodă de analogie electrică. Montajul este reprezentat în figura 2.

Se aşază în cuvă plăcile izolante paralele $A_1\lambda_1$ și $A_2\lambda_2$ în prezența curentului electric creat de un electrod circular C_1 avînd centrul aproximativ în mijlocul segmentului A_1A_2 și de rază cît mai mare în raport cu profilul A_1B_1 și un electrod C_2 care este o plăcuță așezată între normal pe plăcile paralele $A\lambda$ și cît mai departe de profil.

S-a ales forma circulară pentru electrodul C_1, deoarece este clar că mişcarea datorită sucțiunii (fără curent paralel) pe care o determinăm aici, tinde la mari distanțe de profil către mişcarea creată de un puț care absoarbe debitul prin gura A_1A_2.

4. Parametrii geometrici ai sistemului portant considerat sînt: coarda $A_1B_1 = c$, lungimea $l = A_1B_1 - A_2B_1$, distanța h dintre A_1B_1 și A_2B_2.

Vom folosi următorii parametrii adimensionali :

$$\chi = \frac{h}{c}, \quad \bar{c} = \frac{c}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}.$$

Parametrii aerodinamici utilizați sînt următorii : Q debitul volumic absorbit între plăci, datorit mişcării de perturbație ($Q = h\ v_0$) ; $\Gamma(x)$ circulația în jurul sistemului portant aripă aripioară, pînă la abscisa x (fig. 1), egală cu suma $\Gamma_1(x)$ a vîrtejurilor de pe $A_1\lambda_1$ pînă la x plus suma $\Gamma_2(x)$ a vîrtejurilor de pe $A_2\lambda_2$ (pentru $\bar{x} < 1$, $\Gamma_2(x) = 0$).

Vom folosi, de asemenea, și următorii parametrii aerodinamici fără dimensiuni

$$\overline{\Gamma}(\bar{x}) = \frac{\Gamma(\bar{x})}{Q}, \quad \overline{\Gamma}_1(\bar{x}) = \frac{\Gamma_1(\bar{x})}{Q}, \quad \overline{\Gamma}_2(\bar{x}) = \frac{\Gamma_2(\bar{x})}{Q},$$

$$\overline{Q} = \frac{Q}{cv_\infty} = \chi \frac{v_0}{v_\infty},$$

și coeficientul unitar de portanță definit prin formula

$$\overline{C}_z = \frac{P}{\frac{P}{2} cv_\infty^2},$$

unde P reprezintă portanța sistemului portant considerat. În afară de acest coeficient vom utiliza și coeficientul $\overline{C}_z$ definit prin

$$\overline{C}_z = \frac{C_z}{\overline{Q}}.$$

În legătură cu momentele forțelor de presiune, vom folosi coeficientul de moment definit prin

$$C_m = \frac{M}{\frac{\rho}{2} c^2 v_\infty^2},$$

unde prin M s-a notat momentul forțelor de presiune în raport cu bordul de atac al profilului principal. Vom folosi de asemenea și

$$\overline{C}_m = \frac{C_m}{Q}.$$

5. În ipoteza perturbațiilor mici în raport cu v_∞ se obțin următoarele expresii pentru parametrii aerodinamici importanți :

$$C_z = \frac{2\overline{\Gamma}(c)}{cv_\infty}, \tag{5.1}$$

de unde

$$\overline{C}_z = 2\overline{\Gamma}(\bar{c}). \tag{5.2}$$

Pentru calculul momentului vom avea

$$M = \rho \int_0^c x d\Gamma = \rho v_\infty \left[c\Gamma(c) - \int_0^c \Gamma dx \right], \tag{5.3}$$

de unde

$$\overline{C}_m = 2\left[\overline{\Gamma}(\bar{c}) - \frac{1}{\bar{c}} \int_0^{\bar{c}} \overline{\Gamma}(\bar{x}) d\bar{x} \right]. \tag{5.4}$$

În diagrama din figura 3 s-a reprezentat $\overline{\Gamma}_1(\overline{x})$ pentru profilul principal şi $\overline{\Gamma}_2(\overline{x})$ pentru circulaţia în jurul aripioarei ($\overline{x} > 1$).

Se constată o scădere bruscă a circulaţiei totale datorită circulaţiei de sens în jurul aripioarei. În figura 4 s-a reprezentat valoarea circulaţiei

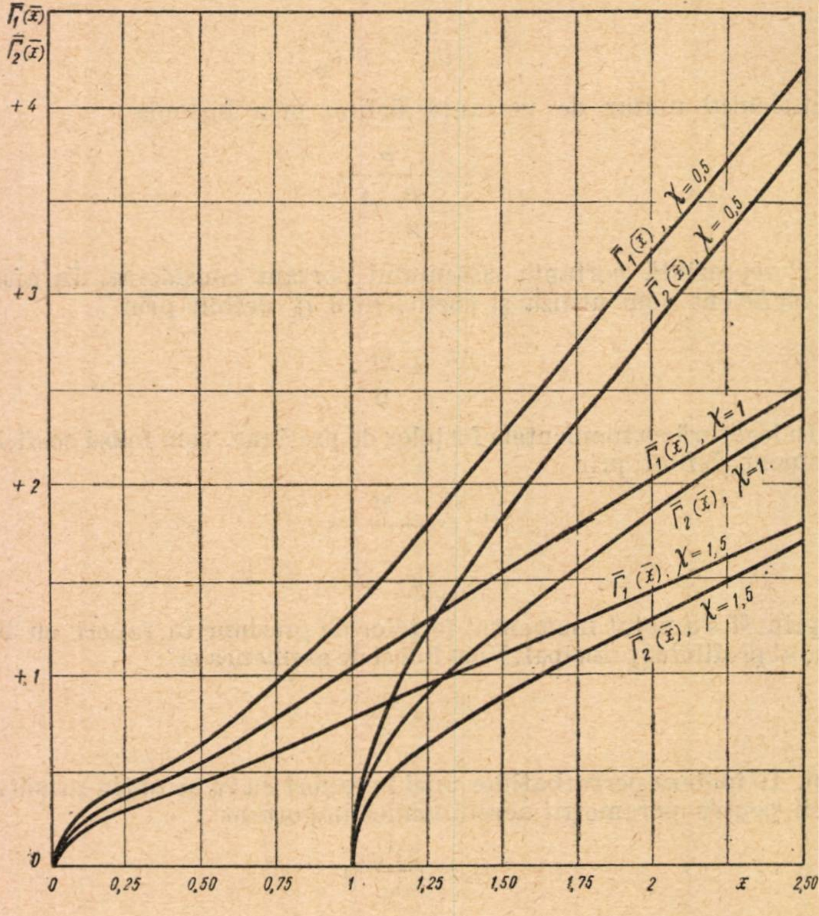


Fig. 3

totale $\overline{\Gamma}$ în jurul sistemului portant, pentru diferite valori ale parametrului $\overline{c} = \frac{c}{l}$. Se remarcă, de asemenea, scăderea rapidă a circulaţiei totale cu lungimea aripioarei

$$\frac{c-l}{l} = \overline{c} - 1 .$$

O variaţie asemănătoare are $\overline{C}_z$ în cazul perturbaţiilor suficient de mici (formula (5.2)) şi este reprezentată pe aceeaşi ordonată a figurii 4.

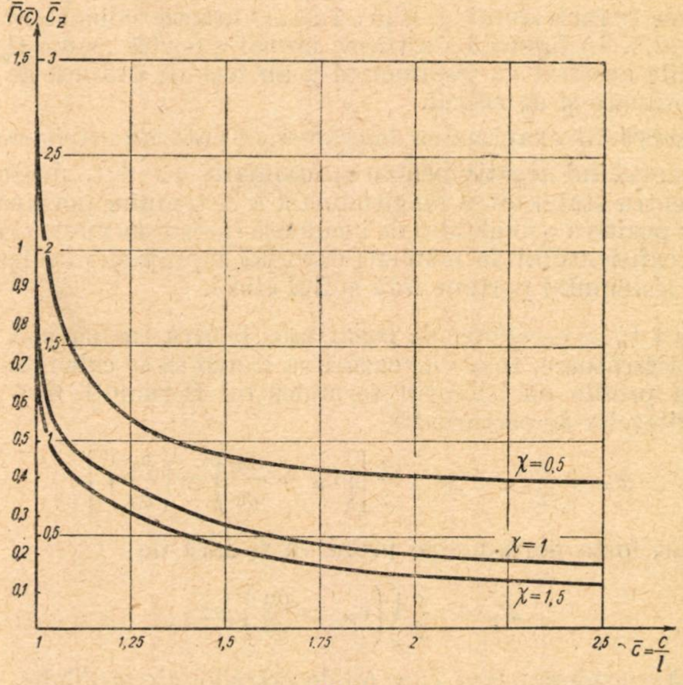


Fig. 4

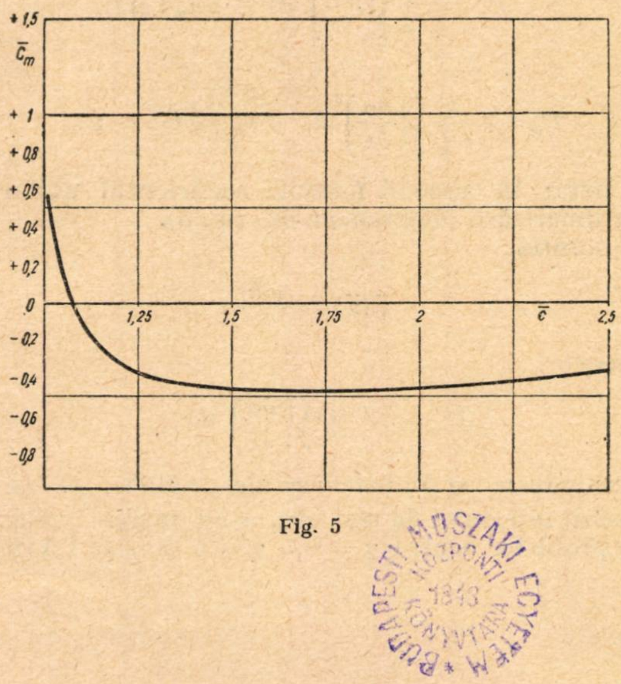


Fig. 5

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1843

În privința momentelor, se constată că curbele pentru celelalte trei valori ale parametrului χ, (0,5 ; 1 ; 1,5) practic coincid în intervalul $1{,}02 < x < 2{,}5$. În figura 5 s-a trasat numai o curbă medie $C_m(x)$, deoarece variațiile acesteia cu parametrul χ au fost de ordinul de mărime al erorilor exprimate și de calcul.

Se observă din examinarea diagramei, că datorită aripioarei, $\bar{C}_m$ scade rapid cu $\bar{c}$, devenind negativ pentru aproximativ $\bar{c} > 1{,}1$. Acest fapt pare favorabil pentru stabilitatea longitudinală a sistemului portant, deoarece la o variație pozitivă a unghiului de incidență (presupus mic), corespunde o creștere a coeficientului de moment datorită suprapunerii mișcării corespunzătoare sistemului portant fără suflul elicei.

6. Dacă $v_0 \gg v_\infty$ expresiile liniarizate pentru coeficienții unitari nu mai sînt satisfăcătoare. În aceste cazuri va trebui să se calculeze forțele de presiune pe profile cu ajutorul formulei lui Bernoulli, fără neglijarea patratelor vitezelor de perturbație

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}\left[\left(v_\infty + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{6.1}$$

În particular, forța portantă pe profil va fi dată de

$$P_1 = \varepsilon \frac{\rho}{2} \int \left(v_\infty + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{6.2}$$

convenind să considerăm $\varepsilon = 1$ pe fețele extrados ale profilelor și $\varepsilon = -1$ pe intradosuri.

Formula (6.2) mai poate fi scrisă,

$$P_1 = \varepsilon \frac{\rho}{2} \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx + \rho v_\infty \Gamma(c),$$

de unde

$$C_{z_1} = \varepsilon \frac{1}{c v_\infty^2} \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx + C_z = C_{zs} + C_z. \tag{6.3}$$

Prin C_z s-a notat în această formulă coeficientul unitar de portanță corespunzător liniarizării (diagramele din fig. 3).

Făcînd notația

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \frac{\varphi(\bar{x})}{Q},$$

avem mai departe

$$C_{zs} = \varepsilon\, \bar{c} \cdot \bar{Q}^2 \int \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}\right)^2 d\bar{x}, \tag{6.4}$$

integrala efectuîndu-se pe ambele fețe ale profilelor în spațiul $\bar{\varphi}$, $\bar{x}$. În vederea efectuării integralei de mai sus, s-au marcat valori ale funcției $\bar{\varphi}(\bar{x})$ pe fețele profilelor pentru $\chi = 0{,}5$ $\chi = 1$ și $\chi = 1{,}5$ (fig. 6).

7. În concluzie, cu ajutorul metodei indicate în această lucrare se poate evalua efectul de sucțiune datorită unor elice sau în general unor suprafețe permeabile oarecare acționînd pe extradosul unei aripi de anvergură infinită. Metoda se bazează pe multe aproximații dar are avantajul că este simplă, problema la limită fiind ușor rezolvabilă prin calcul sau cu ajutorul analogiei electrice expusă mai sus.

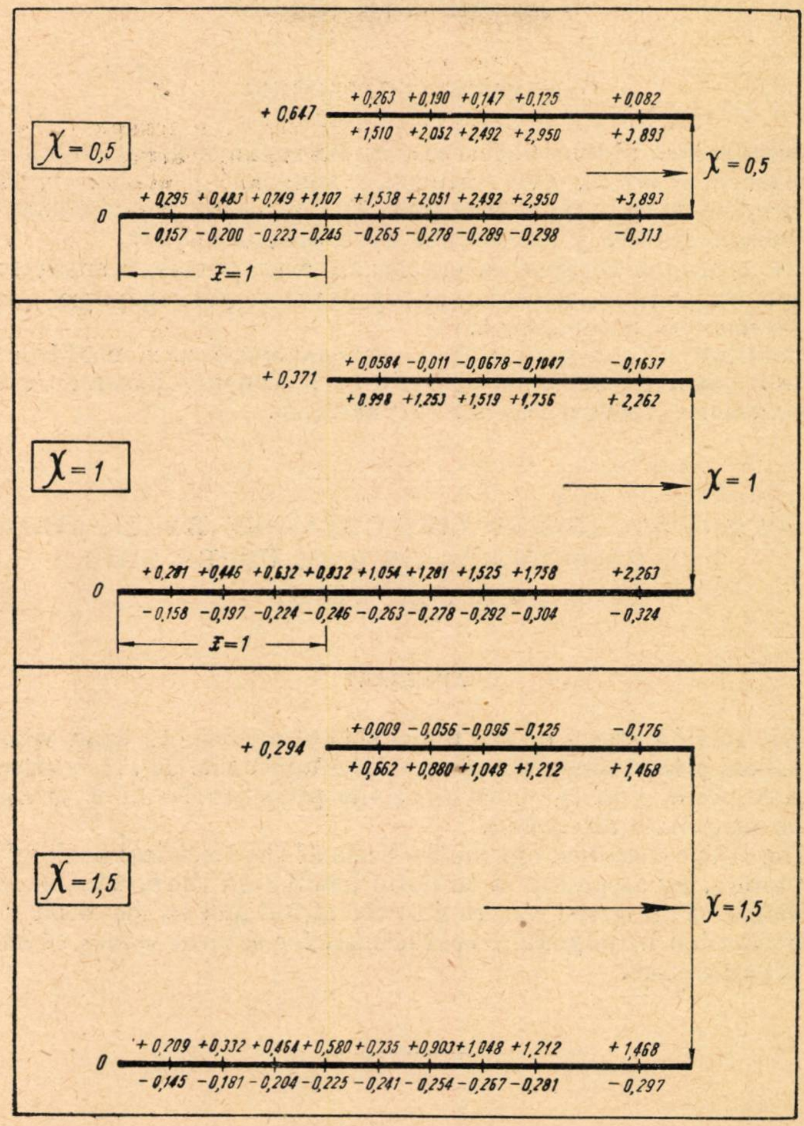

χ = 0,5
+0,263 +0,190 +0,147 +0,125 +0,082
+ 0,647
+1,510 +2,052 +2,492 +2,950 +3,893
χ = 0,5
+0,295 +0,483 +0,749 +1,107 +1,538 +2,051 +2,492 +2,950 +3,893
0
−0,157 −0,200 −0,223 −0,245 −0,265 −0,278 −0,289 −0,298 −0,313
x = 1
+0,0584 −0,011 −0,0678 −0,1047 −0,1637
+ 0,371
+0,998 +1,253 +1,519 +1,756 +2,262
χ = 1
χ = 1
+0,281 +0,446 +0,632 +0,832 +1,054 +1,281 +1,525 +1,758 +2,263
0
−0,158 −0,197 −0,224 −0,246 −0,263 −0,278 −0,292 −0,304 −0,324
x = 1
+0,009 −0,056 −0,095 −0,125 −0,176
+ 0,294
+0,662 +0,880 +1,048 +1,212 +1,468
χ = 1,5
χ = 1,5
+0,209 +0,332 +0,464 +0,580 +0,735 +0,903 +1,048 +1,212 +1,468
0
−0,145 −0,181 −0,204 −0,225 −0,241 −0,254 −0,267 −0,281 −0,297

Fig. 6

Primit la redacție la 14 mai 1959

ОБ УВЕЛИЧЕНИИ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ БЛАГОДАРЯ РАСПОЛОЖЕНИЮ ВИНТОВ НА ВЕРХНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Оценивается эффект подсасывания на верхней поверхности крыла бесконечного размаха, обусловленный винтами, расположенными по размаху на верхней поверхности (рис. 1). Считается, что для получения равномерного потока у винтов они вставлены в трубки.

Исследование ведется на основании электрической аналогии для аналогичного плоского движения, допускающего равномерную нагрузку на проницаемую поверхность.

Приводятся диаграммы для аэродинамических коэффициентов профиля и распределения циркуляции на крыле при различных заданных значениях геометрических параметров.

ON THE INCREASED LIFT OBTAINED BY PLACING THE PROPELLERS ON THE UPPER SIDE OF THE WING

ABSTRACT

The suction effect on the upper side of an infinite span wing, due to propellers placed along the span on the upper side (fig. 1), is estimated. For the uniformity of the current at the propeller level, it is assumed that the propellers are tubed.

The study is carried out on the basis of the electrical analogy of the plane motion, by assuming a uniform loading on the permeable surface.

Diagrams are given referring to the airfoil and to the wind circulation distribution aerodynamic coefficients, for several values of the geometrical parameters.

AEROMECANICĂ

CALCULUL REZISTENȚEI DE FRECARE ȘI AL TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ ÎN STRATUL LIMITĂ LAMINAR DIN APROPIEREA PUNCTULUI CRITIC AL UNUI PROFIL DIEDRIC

DE

PETRE BRĂDEANU *)

NOTAŢII:

Ox,	axă (linie) de coordonate de-a lungul profilului,
Oy,	axă de coordonate perpendiculară pe Ox,
u,	viteză în direcţia Ox,
v,	viteză în direcţia Oy,
τ,	rezistenţa de frecare locală,
T,	temperatura absolută,
i,	entalpia,
μ,	coeficientul dinamic de viscozitate,
ρ,	densitatea,
σ,	numărul lui Prandtl,
c_p,	căldura specifică la presiune constantă,
c_v,	căldura specifică la volum constant,
R,	constanta gazelor,
a, α, Q, p, q,	constante adimensionale,
w,	indicele w notează valoarea mărimilor pe corp,
∞,	indicele ∞ notează valoarea mărimilor la frontul superior,
s,	indicele s notează valori standard ale mărimilor respective,
L,	lungime caracteristică a corpului,
R_e, R_x,	numărul lui Reynolds,
N_L, N_x,	numărul lui Nusselt,
g_w, $g_{\infty s}$,	constante cunoscute,

---

*) Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj.

Γ, funcția gama,
λ, coeficientul de conductibilitate,
p, presiunea.

I. TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR

(rezistența de frecare)

Ecuațiile mișcării unui fluid vîscos compresibil în stratul limită laminar plan ce se formează în scurgerea plan-paralelă staționară în lipsa forțelor masice în jurul conturului de corp, considerate în variabilele independente (x, u) au forma (σ și c_p sînt constante) [2]:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2} - \frac{\mu\rho}{\tau^2} u \frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{u}{\tau} \frac{\partial(\mu\rho)}{\partial x} - \frac{dp}{dx} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\tau}\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \frac{1}{\tau} \frac{\partial\tau}{\partial u} \frac{\partial i}{\partial u} + 1 - \frac{\mu\rho}{\tau^2} u \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\mu}{\tau^2} \frac{dp}{dx}\left(\frac{\partial i}{\partial u} + u\right) = 0, \tag{1.2}$$

cu condițiile la limită

$$\tau\frac{\partial\tau}{\partial u} = -\mu_w \rho_\infty u_\infty u'_\infty, \quad i = i_w(x) \text{ sau } \frac{\partial i}{\partial u} = 0 \text{ pentru } u = 0,$$
$$\tau = 0, \; i = i_\infty(x) \text{ pentru } u = u_\infty. \tag{1.3}$$

În ecuațiile (1.1) și (1.2) care conțin funcțiile necunoscute $\tau(x, u)$ adică rezistența de frecare și $i(x, u)$, adică entalpia, să facem substituția următoare:

$$\bar{\mu}\bar{\rho} = \frac{\mu\rho}{\mu_\infty \rho_\infty} = c_1 = \text{const.} \tag{1.4}$$

Prima problemă pe care ne propunem s-o studiem are un conținut matematic și constă din transformarea ecuațiilor cu derivate parțiale (1.1) și (1.2), ținînd seama de relația (1.4), în ecuații diferențiale ordinare, presupunînd că

$$\begin{aligned} \tau &= g(x) f(z), \\ z &= uh(x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vom stabili condițiile în care ecuațiile (1.1), (1.2) și (1.4) admit soluții de această formă, demonstrînd în acest fel și existența lor. Funcțiile g și h vor trebui determinate, iar funcția $f(z)$ înlocuiește funcția necunoscută τ.

Variabila z introdusă în forma de mai sus nu se deosebește formal de variabila η a lui Blasius folosită în cadrul variabilelor fizice x și y și nici de argumentul adimensional $\zeta = \psi/2\sqrt{\xi}$ folosit în cadrul variabilelor lui Mises (ξ, ψ). Variabila z ar completa o unitate formală a variabilei unice introdusă în cadrul celor trei tipuri de coordonate, variabilă care corespunde în majoritatea cazurilor unui scop unic, adică obținerea de ecuații ordinare. Variabila z astfel introdusă permite o separare a variabilelor în structura funcției τ sub forma de mai sus (1.5) și așa după cum se va arăta în cele ce urmează, posibilitatea obținerii unor ecuații ordinare în condiții mai generale decît cele cunoscute în cazul variabilelor x, u.

Scriind că soluția (1.5) satisface ecuațiile (1.1) și (1.4) vom obține o ecuație, pentru funcția necunoscută f, ai cărei coeficienți vor depinde de x prin intermediul funcțiilor h, g, $\mu_\infty \rho_\infty$

$$\begin{gathered} g h^2 f'' - c_1 \mu_\infty \rho_\infty u^2 \frac{h' f'}{g f^2} - c_1 \mu_\infty \rho_\infty u \frac{g'}{g^2 f} + \\ + u^2 \frac{h'}{g f} c_1 \frac{\partial(\mu_\infty \rho_\infty)}{\partial x} + \frac{dp}{dx} \left(\frac{\mu h f'}{g f} - \frac{1}{g f} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Vom determina funcțiile $h(x)$ și $g(x)$ în așa fel ca

$$\frac{\mu_\infty \rho_\infty}{g^2} \frac{h'}{h^4} = A = \text{const.}, \quad g' \frac{\mu_\infty \rho_\infty}{g^3 h^3} = -B = \text{const.} \tag{1.7}$$

Notînd $3A - 2B = a$, $A = a\alpha$ și introducînd noua variabilă ξ, în forma

$$\xi = \int_0^x \frac{dx}{\mu_\infty \rho_\infty}, \tag{1.8}$$

soluția (1.5) devine

$$\begin{gathered} \tau = (a\xi)^{-\frac{1+3\alpha}{2}} f(z), \\ z = u(a\xi)^\alpha . \end{gathered} \tag{1.9}$$

Vom admite că în stratul limită sînt valabile următoarele legi fizice :

$$\mu = c^\star \mu_s \frac{T}{T_s}, \quad p = \rho R T, \quad \frac{T}{T_\infty} = \frac{\rho_\infty}{\rho} \cdot \tag{1.10}$$

Vom admite, de asemenea, existența în stratul limită a unui profil de temperatură de forma

$$\begin{gathered} T = T_\infty(\xi)[kg(z) + 1], \quad i = i_\infty(\xi)[kg(z) + 1], \\ i_w = k_w (a\xi)^{-2\alpha}, \quad i_\infty(\xi) = k_\infty (a\xi)^{-2\alpha}, \quad k = \frac{k_w}{k_\infty} - 1. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Ținînd seama de aceste ipoteze, folosind ecuația lui Bernoulli aplicabilă pe frontiera superioară a stratului și considerînd

$$(a\xi)^{2\alpha+1} u_\infty(\xi) \frac{du_\infty}{d\xi} = \beta = \text{const}.$$

adică

$$u_\infty(\xi) = c(a\xi)^{-\alpha} \tag{1.12}$$

unde $(-\beta/a\alpha)^{1/2} = c = u_s L^{\alpha}$, ecuaţia (1.6) devine

$$f^2 f'' - (a\alpha z^2 + \beta) f' + \left(a^* + \frac{1+3\alpha}{2} a\right) zf + k\beta (g'f - f'g) = 0, \qquad (1.13)$$

unde constanta a^* rezultă din calcule.

Condiţiile la limită sînt

$$\text{pentru } z = 0,\ ff' = -\beta \frac{\mu_w}{\mu_\infty};\ \text{pentru } z = c,\ f = 0. \qquad (1.14)$$

Ne vom îndrepta atenţia asupra ecuaţiei energiei (1.2). Propunem pentru această ecuaţie soluţii de forma (1.11) unde z este noua variabilă unică, iar $g(z)$ noua funcţie adimensională necunoscută.

Folosind tipul de soluţii (1.9) formula (1.12) şi soluţiile (1.11), ecuaţia (1.2), împreună cu relaţia (1.4), după efectuarea tuturor calculelor, devine

$$f^2 g'' + [(1-\sigma) ff' - a\alpha\sigma z^2] g' + 2 a\alpha\sigma z g(z) +$$

$$+ \frac{\sigma}{k_w - k_\infty} f^2 - 2 a\alpha\sigma \frac{z}{k_\infty} - \sigma\beta \left(g' + \frac{z}{k_w - k_\infty}\right)(kg + 1) = 0. \qquad (1.15)$$

Ecuaţiile (1.13) şi (1.15) introduse în forma de mai sus, formează, în mod efectiv, un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare pentru funcţiile necunoscute $f(z)$ şi $g(z)$. Determinarea funcţiilor $f(z)$ şi $g(z)$ va permite determinarea rezistenţei de frecare τ şi a repartiţiei entalpiei (temperaturii) i. Forma ecuaţiilor (1.13) şi (1.15) precum şi rezolvarea lor este foarte complicată. Această situaţie se datoreşte variaţiei parametrilor fizici μ, ρ, u_∞ şi faptului că gradienţii longitudinali de temperatură în strat şi pe perete sînt diferiţi de zero.

Să presupunem $\mu\rho = \text{const.}$ şi anume $\mu = \text{const.}$ şi $\rho = \text{const.}$, adică un fluid incompresibil cu viscozitate constantă. În această ipoteză va trebui să considerăm $a^* = 0\ (\mu\rho = \text{const.})$ şi în ecuaţia (1.13) să luăm $k = 0$ (independenţa stratului limită dinamic de cel termic în fluid incompresibil).

Ecuaţia (1.13) devine

$$f^2 f'' - (a\alpha z^2 + \beta) f' + \frac{1+3\alpha}{2} azf = 0. \qquad (1.16)$$

În ecuaţia (1.16) vom face substituţiile

$$\xi = \frac{x}{\mu_\infty \rho_\infty},\ z_1 = z(\mu_\infty \rho_\infty)^{\alpha},\ f = \frac{f_1}{(\mu_\infty \rho_\infty)^{\frac{1+3\alpha}{2}}}, \qquad (1.17)$$

$$\beta = -a\alpha c^2 = -a\alpha c^{*2} (\mu_\infty \rho_\infty)^{-2\alpha},$$

aşa încît, lăsînd steluţa şi indicele 1 la o parte, această ecuaţie devine

$$f^2(z) f'' - a\alpha c_1 (z^2 - c^2) f' + \frac{1+3\alpha}{2} ac_1 zf = 0, \qquad (1.18)$$

iar formulele (1.9) au forma

$$\begin{aligned} \tau &= (ax)^{-\frac{1+3\alpha}{2}} f(z), \\ z &= u\,(ax)^{\alpha}, \qquad\qquad (1.19) \\ c_1 = \mu_\infty \rho_\infty, \quad u_\infty &= c(ax)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Se observă de asemenea uşor că, ţinînd seama de expresia mărimilor $i_\infty(\xi)$, $i_w(\xi)$ date mai sus, entalpia i dată prin formula (1.11) se poate pune sub forma

$$i = (k_w - k_\infty)(a\xi)^{-2\alpha} g(z) + i_\infty .$$

Vom presupune, în plus ipotezele $\mu = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, $i_\infty = \text{const.}$ În consecință, în ecuaţia (1.15) va trebui să lăsăm la o parte termenii : $2\,a\alpha\sigma z/k_\infty$ ($i_\infty = \text{const.}$), $-\,\sigma\beta kgg'$ (viscozitate constantă) şi $z(kg + 1)/(k_w - k_\infty)$ (incompresibilitate).

Se adaugă la substituţiile (1.17) şi substituţia

$$g(z) = \frac{(\mu_\infty \rho_\infty)^{-2\alpha}}{k_w - k_\infty}\, g_1(z)$$

şi atunci ecuaţia (1.15), eliminînd din scriere indicele 1, şi formulele (1.11) devin

$$f^2 g''(z) + [(1-\sigma)ff' + a\alpha\sigma c_1(c^2 - z^2)]g' + 2\,a\alpha\sigma c_1 zg + \sigma f^2(z) = 0, \qquad (1.20)$$

unde

$$\begin{aligned} i &= (ax)^{-2\alpha} g(z) + i_\infty, \\ z &= u(ax)^{\sigma}, \qquad\qquad (1.21) \\ i_w &= (ax)^{-2\alpha} g\,(0) + i_\infty, \quad i_\infty = \text{const.} \end{aligned}$$

Problema fizică de determinare a frecării şi repartiţiei temperaturii în stratul limită este redusă, astfel, la o problemă la limită pusă asupra ecuațiilor ordinare (1.18) şi (1.20) cu condiţiile la limită

$$\begin{aligned} &f(0)\,f'(0) = \mu\rho\alpha ac^2 = k_0; \quad f(c) = 0, \\ &g(0) = g_w; \quad g(c) = 0. \end{aligned} \qquad (1.22)$$

Observăm, de asemenea, că ecuaţia (1.8) este neliniară în raport cu funcţia necunoscută f pe cînd ecuaţia (1.20) este liniară în funcţia $g(z)$ şi aceasta va uşura, credem, integrarea ei. Integrarea ecuaţiei (1.20) poate fi dificilă atît din cauza eventualei forme complicate a funcţiei f cît şi din cauza existenţei termenului ce conţine funcţia $g(z)$, spre deosebire de alte forme ale ecuaţiei energiei care nu conţin funcţia necunoscută, cum este cazul problemei plăcii cu gradienţi longitudinali de temperatură nuli.

Vom introduce mărimi adimensionale notînd

$$
\begin{gathered}
\bar{z} = \frac{z}{u_s L^{\alpha}}, \\
c_{\tau} = \frac{2\tau}{\rho u_s^2} = \frac{2f}{(ax)^{\frac{1+3\alpha}{2}} \rho u_s^2}, \quad R_e = \frac{\rho L u_s}{\mu}, \\
\bar{f} = c_{\tau} \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{1+3\alpha}{2}} \sqrt{R_e} = \frac{2f}{\sqrt{\mu \rho u_s^3 a^{1+3\alpha} L^{3\alpha}}}.
\end{gathered}
\tag{1.23}
$$

Ecuația (1.18), dacă se ține seama de formulele (1.23) va conține numai mărimi adimensionale și va avea forma

$$
\begin{gathered}
\bar{f}^2 \bar{f}'' - 4\alpha a^{-3\alpha} (\bar{z}^2 - 1) \bar{f}' + 2 a^{-3\alpha} (1 + 3\alpha) \bar{z} \bar{f}(\bar{z}) = 0, \\
\bar{f}(0) \bar{f}'(0) = \bar{k}_0, \; \bar{f}(1) = 0.
\end{gathered}
\tag{1.24}
$$

Folosind relațiile precedente (1.23) găsim formule pentru caracterizarea și calculul rezistenței de frecare pe suprafața corpului, sub forma

$$
\tau_w = (ax)^{-\frac{1+3\alpha}{2}} f(0) = \frac{1}{2} (ax)^{-\frac{1+3\alpha}{2}} \sqrt{\mu \rho u_s^3 a^{1+3\alpha} L^{3\alpha}} \, \bar{f}(0).
$$

Pentru coeficientul adimensional c_{τ_w} al rezistenței de frecare obținem expresia

$$
\sqrt{R_x} \, c_{\tau_w} = \left(\frac{x}{L} \right)^{-\frac{3\alpha}{2}} \bar{f}(0), \tag{1.25}
$$

sau

$$
\tau_w = \frac{\bar{f}(0)}{2} \sqrt{\frac{\mu \rho u_{\infty}^2 u_{\infty}'}{-\alpha a^{-3\alpha}}}. \tag{1.25'}
$$

Pentru determinarea frecării pe corp este necesar să cunoaștem valoarea $\bar{f}(0)$.

Vom introduce, de asemenea, funcția adimensională $\theta(\bar{z})$ luînd

$$
g(\bar{z}) = g(c_s) \, \theta \tag{1.26}
$$

unde

$$
g(c_s) = i_{\infty} L^{2\alpha} = \text{const.} = g_{\infty s},
$$

vom ține seama de formulele (1.23) așa încît, după efectuarea unor calcule simple, ecuația (1.20) se va scrie în următoarea formă adimensională :

$$
\begin{gathered}
\bar{f}^2 \theta''(\bar{z}) + [(1 - \sigma) \bar{f} \bar{f}' + 4 q \sigma (\bar{z}^2 - 1)] \theta' + 8 q \sigma \bar{z} \theta + \sigma (\gamma - 1) M_{\infty s}^2 \bar{f}^2 = 0, \\
\theta(0) = \frac{g_w}{g_{\infty s}}, \; \theta(1) = 0,
\end{gathered}
\tag{1.27}
$$

cu

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad M^2_{\infty s} = \frac{u_s^2}{a_0^2}, \quad \frac{u_s^2}{i_\infty} = (\gamma - 1)\, M^3_{\infty s}, \quad q = -\,\alpha a^{-3\alpha}, \tag{1.28}$$

unde simbolul a_0 înseamnă viteza sunetului în fluidul în echilibru.

Pentru evaluarea transportului de căldură (convecție) este suficient să calculăm, numărul lui Nusselt, care în problema noastră, va avea forma

$$N_L = -\frac{L}{T_w - T_\infty}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = -\frac{g_{\infty s}}{g_w}\,\frac{L}{u_\infty}\,\frac{\tau_w}{\mu}\,\theta'_{\bar z}(0, \sigma, a, \alpha), \tag{1.29}$$

de unde se deduce

$$N_x = -\frac{a^{\frac{3\alpha}{2}}}{2}\,\frac{g_{\infty s}}{g_w}\sqrt{R_x}\,\bar f(0)\left(\frac{d\theta}{d\bar z}\right)_w, \quad R_x = \frac{\rho x u_\infty}{\mu}, \tag{1.30}$$

dacă se ține seama de formula (1.25) și se introduce numărul lui Reynolds R_x.

În formula (1.30) mărimile a, α, $g_{\infty s}$, g_w, μ, ρ (deci și u_∞), sînt date iar mărimile $\bar f\,(0)$ și $\theta'_{\bar z}\,(0)$ trebuie calculate ca valori în origine ale integralelor ecuațiilor (1.24) și (1.27).

Vom face acum următoarea schimbare de funcție și variabilă:

$$\begin{aligned} \bar f(\bar z) &= \frac{1}{2}\,\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}, \\ \bar z &= \frac{1}{2}\,\frac{d\zeta}{d\xi}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

și ecuația (1.24) devine

$$a^{3\alpha}\left(\frac{\zeta'''}{\zeta''}\right)' + \zeta'(\xi) + 2\,\alpha\left(\frac{3}{2}\,\zeta' - \frac{\zeta'^2 - 4}{\zeta''^2}\,\zeta'''\right) = 0. \tag{1.31'}$$

După o primă operație de integrare a ecuației (1.31′) și introducerea variabilei $\eta = 2\,\xi$ și a mărimilor $p = (1-\alpha)/2\,a^{3\alpha}\ q = -\,\alpha a^{-3\alpha}$, aceasta se scrie

$$\frac{d^3\zeta}{d\eta^3} + p\,\zeta(\eta)\,\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} + q\left[1 - \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2\right] = 0. \tag{1.32}$$

Forma ecuației (1.32) există în ipoteza considerării egale cu zero a constantei de integrare care ar fi apărut în membrul drept. Această ipoteză este posibilă deoarece variabila η și funcția $\zeta(\eta)$ n-au fost încă fixate. Dacă funcției $\zeta(\eta)$ îi adăugăm următoarele condiții la limită:

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \to \infty} \zeta'(\eta) = 1 \tag{1.33}$$

care sînt în acord cu formulele (1.19) și (1.31) și nu contrazic ipotezele anterioare, ecuația (1.32) devine ecuația lui Falkner-Skan. Ecuația lui Falkner-Skan apare, după cum este cunoscut, în problema găsirii condițiilor de existență a unor profile afine de viteză [1] şi în problema determinării profilului de viteză în mişcarea din apropierea punctului critic al diedrului de deschidere πq (dacă se ia $p = 1$) [1]. Ecuaţia lui Falkner-Skan a fost rezolvată, în formă generală, numeric (sub formă de tabele) de Hartree (1937) şi asimptotic de Meksin [5]. În felul acesta am reuşit să reducem problema determinării rezistenţei de frecare, mai exact, a ecuaţiilor acestei probleme la ecuații a căror rezolvare este cunoscută în literatură.

Rezistența de frecare se va calcula cu ajutorul formulei (1.25′) unde $\overline{f}(0) = 2\zeta''_{\eta 2}(0)$. Valoarea $\overline{f}(0)$ ca şi $\zeta''(0)$ depinde de valorile parametrului q și se poate scoate din tabela care rezolvă numeric ecuația lui Falkner-Skan [3].

Se știe, de asemenea, că pentru $q < -0{,}198$ stratul limită nu există. Pentru $q = -0{,}198$ avem $\overline{f}(0) = 0$ şi frecarea pe perete este nulă.

Folosind transformările (1.31), ecuația (1.27) găsită mai sus devine

$$\zeta''\theta'' + \sigma[-\zeta''' + q(\zeta'^2 - 1)]\theta' - 2q\sigma\zeta'\zeta''\theta(\eta) + \sigma(\gamma - 1)M^2_{\infty s}\zeta''^3 = 0. \quad (1.34)$$

Vom presupune că variabila η şi funcția ζ din ecuația (1.34) sînt de asemenea variabila şi funcția din ecuaţia lui Falkner-Skan şi satisfac condițiile (1.33).

În baza acestor precizări, ecuațiile (1.32) şi (1.34) formează un sistem de ecuații diferențiale ordinare în raport cu funcțiile necunoscute $\zeta(\eta)$ şi $\theta(\eta)$.

În raport cu noile variabile ξ şi η forma numărului lui Nusselt (1.29) se va scrie astfel

$$N_x = -\frac{a^{\frac{3\alpha}{2}}}{2}\frac{g_{\infty s}}{g_w}\sqrt{R_x}\,\theta'_\xi(0, \sigma) = -a^{\frac{3\alpha}{2}}\frac{g_{\infty s}}{g_w}\sqrt{R_x}\,\theta'_\eta(0, \sigma). \quad (1.35)$$

Aplicarea formulei (1.35) necesită cunoaşterea valorii $\theta'_\eta(0, \sigma)$ care se poate obţine în urma integrării ecuației (1.34).

Aplicații. 1. Dacă $q = 1, p = 2$, deci $\alpha = -\frac{1}{3}$, $a = 3$, $u_\infty = c(3x)^{1/3}$ ecuaţia (1.32) devine

$$\zeta''' + 2\zeta\zeta'' + 1 - \zeta'^2 = 0,$$

adică ecuaţia care se întîlneşte în problema determinării profilului de viteză în scurgerea axial simetrică în apropierea punctului critic [1].

2. Dacă $p = 1$, $q = 1$, adică $\alpha = -1$, $a = 1$, $u_\infty = cx$ ecuația (1.32) devine

$$\zeta''' + \zeta\zeta'' + 1 - \zeta'^2 = 0. \quad (1.36)$$

Ecuaţia (1.36) apare în problema determinării profilului de viteză în apropierea punctului critic al unei plăci aşezate normal pe direcţia scurgerii principale (a se vedea [1], p. 78).

Ținînd seama de formulele (1.23) deducem, de asemenea, formulele

$$\bar{f}(\bar{z}) = \frac{2\tau}{\sqrt{\mu\rho u_\infty^2 c}}, \quad \bar{f}(0) = \frac{2\tau_w}{\sqrt{\mu\rho c u_\infty^2}}. \tag{1.37}$$

Folosind tabela dată de L. Howarth referitor la integrarea numerică a ecuației (1.36) [2] (cazul scurgerii plan-paralele) se pot găsi valorile funcției $\bar{f}(\bar{z})$, valori care arată că graficul funcției $\bar{f}(\bar{z})$ este, cu o bună aproximație, liniar pe intervalul [0 ; 0, 7] și că funcția $\bar{f}(\bar{z})$ se poate aproxima prin funcția $\bar{f}(0) - 2\bar{z}$. Aceasta reprezintă un avantaj valoros pentru integrarea unor ecuații de tipul (1.27) adică pentru determinarea repartiției temperaturii.

II. REPARTIȚIA TEMPERATURII ȘI TRANSPORTUL DE CĂLDURĂ

Ne vom îndrepta acum atenția asupra ecuației (1.34). Vom presupune că funcția $\zeta(\eta)$ este funcția necunoscută din ecuația lui Falkner și atunci ecuația (1.34) se scrie

$$\begin{gathered} \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + p\sigma\zeta\frac{d\theta}{d\eta} - 2q\sigma\frac{d\zeta}{d\eta}\,\theta(\eta) + \sigma(\gamma - 1)\,M_{\infty s}^2\zeta''^2 = 0, \\ \zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \ \zeta'(\infty) = 1, \ \theta(0) = \frac{g_w}{g_{\infty s}}, \ \theta(\infty) = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Referitor la funcția $\zeta(\eta)$ și a primelor două derivate ale ei, vom admite următoarea comportare asimptotică dată de D. Meksyn [5]

$$\begin{gathered} \zeta \sim \eta, \quad \zeta' \sim 1, \quad \zeta'' \sim A(\eta)\,e^{\xi(\eta)} \\ \eta \to \infty, \quad \eta \to \infty, \quad \eta \to \infty, \end{gathered} \tag{2.2}$$

unde $A(\eta)$ și $\xi(\eta)$ sînt funcții de tipul

$$\begin{gathered} 1^\circ.\ q > 0, \ A(\eta) = a - \eta, \ \xi(\eta) = -\frac{a\eta^3}{3!} + \frac{\eta^4}{4!} - \frac{a^2\eta^6}{6!}; \ a = \\ = \zeta''(0) = 1{,}50, \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$2^\circ.\ q < 0, \ A(\eta) = 1, \ \xi(\eta) = -\frac{a\eta^3}{6} + \frac{q\eta^4}{24}; \ a = \zeta''(0) = 0{,}326.$$

Dacă ținem seama de formulele asimptotice (pentru valori mari ale variabilei) (2.2), introducem notația $q/p = n$ și facem schimbarea de variabilă

$$\bar{x} = \eta\sqrt{\frac{p\sigma}{2}}, \tag{2.4}$$

ecuația (2.1) devine

$$\theta'' + 2\bar{x}\theta' - 4n\theta = -\frac{1}{2}\,p\sigma^2(\gamma - 1)\,M_{\infty s}^2\zeta''^2(\bar{x}). \tag{2.5}$$

1. Cazul $2n > 0$ și diferit de un număr întreg

Se consideră ecuația omogenă corespunzătoare ecuației (2.5) în care vom face substituția

$$z = i\eta\sqrt{\frac{p\sigma}{2}} = i\bar{x} \tag{2.6}$$

și obținem ecuația

$$\theta'' - 2z\theta' + 4n\theta(z) = 0, \tag{2.7}$$

adică tocmai ecuația funcțiilor lui Hermite. Soluțiile ei liniar independente sînt, după cum este binecunoscut, funcțiile lui Hermite de speța I

$$H_{2n}(z),\quad H_{2n}(-z),$$

adică

$$H_{2n}(i\eta\sqrt{p\sigma/2}),\quad H_{2n}(-i\eta\sqrt{p\sigma/2}),$$

pentru ecuația în variabila independentă η. Folosind relațiile funcționale cunoscute dintre $H_\nu(z)$ și $H_\nu(\pm iz)$ [6], valabile și pentru z real, se poate scrie integrala generală a ecuației omogene relativ la ecuația (2.5) astfel

$$\theta(\bar{x}) = e^{-\bar{x}^2}[AH_{-\nu}(\bar{x}) + BH_{-\nu}(-\bar{x})], \tag{2.8}$$

unde A și B sînt două constante de integrare.

Găsim, de asemenea, integrala generală a ecuației (2.5) folosind metoda variației constantelor, în forma

$$\begin{aligned}\theta(\bar{x}) = e^{-\bar{x}^2}\Big\{ & H_{-\nu}(-\bar{x})\int\frac{e^{-\bar{x}^2}H_{-\nu}(\bar{x})\,h(\bar{x})}{w}\,d\bar{x} - \\ & - H_{-\nu}(\bar{x})\int\frac{e^{-\bar{x}^2}H_{-\nu}(-\bar{x})\,h(\bar{x})}{w}\,d\bar{x} + AH_{-\nu}(\bar{x}) + BH_{-\nu}(-\bar{x})\Big\},\end{aligned} \tag{2.9}$$

unde

$$w = \begin{vmatrix} H_{-\nu}(\bar{x}) & H_{-\nu}(-\bar{x}) \\ H'_{-\nu}(\bar{x}) & H'_{-\nu}(-\bar{x}) \end{vmatrix} e^{-2\bar{x}^2} = e^{-2\bar{x}^2}w_1\,; \qquad \begin{aligned} h(\bar{x}) &= -\frac{1}{2}\,p\sigma^2(\gamma-1)M_{\infty s}^2\zeta''^2(\bar{x}), \\ \nu &= \frac{2q}{p} + 1 > 0. \end{aligned}$$

Se știe după formula lui Liouville că wronskianul funcțiilor $H_\nu(-x)$ și $H_\nu(x)$ este $w_1 = ce^{x^2}$ unde c este o constantă ce nu depinde de x și anume

$$c = \frac{2^{\nu+1}\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)}\,;\quad \nu < 0.$$

Pentru a vedea în ce măsură integrala (2.9) corespunde problemei fizice va trebui să clarificăm comportarea la infinit a termenilor ei.

Se cunoaşte comportarea asimptotică a funcţiilor lui Hermite [6]

$$H_{\nu}(z) \underset{|z|\to\infty}{\approx} (2z)^{\nu}, \quad H_{\nu}(-z) \underset{|z|\to\infty}{\approx} -\frac{\pi^{1/2} e^{\nu\pi i}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} e^{z^2}$$

şi se ştie că

$$H'_{\nu}(x) = 2\nu H_{\nu-1}(x).$$

Se folosesc aceste formule împreună cu regula lui l'Hospital pentru calculul următoarelor limite :

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} e^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(\bar{x}) \int \frac{e^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(-\bar{x}) h}{w} d\bar{x} = \frac{1}{c} \lim_{\bar{x}\to\infty} e^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(\bar{x}) \int h H_{\nu}(-\bar{x})\, d\bar{x},$$

dacă

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} \int \zeta''^2 H_{-\nu}(-\bar{x})\, d\bar{x} = \infty,$$

atunci

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} \bar{e}^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(\bar{x}) \int \zeta''^2 H_{-\nu}(\bar{x})\, d\bar{x} = \lim_{\bar{x}\to\infty} \zeta''^2 \frac{H_{\nu}^2(\bar{x}) H_{-\nu}(-\bar{x})}{e^{-\bar{x}^2}[2\bar{x} H_{-\nu}(\bar{x}) - H_{-\nu}(\bar{x})]} = 0.$$

În mod analog, se poate arăta că

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} e^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(-\bar{x}) \int \frac{h e^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(\bar{x}) d\bar{x}}{w} = \frac{1}{c} \lim_{\bar{x}\to\infty} e^{-\bar{x}^2} H_{-\nu}(-x) \int h H_{-\nu}(\bar{x})\, d\bar{x} = 0.$$

Dacă în integrala generală (2.9) luăm $B = 0$ atunci toți termenii din expresia ei tind spre zero cînd x tinde spre infinit.

Soluția ecuației (2.1) considerînd $\zeta \sim \eta$, $\zeta' \sim 1$ este

$$\theta(\eta) = e^{-\frac{p\sigma\eta^2}{2}} \left\{ M_{\infty s}^2 (1-\gamma) \frac{\Gamma\left(\frac{2q}{p}+1\right)}{2^{-\frac{2q}{p}} \sqrt{\pi}\, p} \left[H_{-\frac{2q}{p}-1}(-\eta\sqrt{p\sigma/2}) \times \right.\right.$$

$$\times \int \zeta''^2_{\eta^2} H_{-\frac{2q}{p}-1}(\eta\sqrt{p\sigma/2})\, d(\eta\sqrt{p\sigma/2}) - H_{-\frac{2q}{p}-1}(\eta\sqrt{p\sigma/2}) \times \tag{2.10}$$

$$\left.\times \int \zeta''^2_{\eta^2} H_{-\frac{2q}{p}-1}(-\eta\sqrt{p\sigma/2})\, d(\eta\sqrt{p\sigma/2}) \right] + A H_{-\frac{2q}{p}-1}(\eta\sqrt{p\sigma/2}).$$

Funcția $\theta(\eta)$ astfel determinată este mărginită şi satisface condiția la limită deoarece pentru $\eta \to \infty$, $\theta \to 0$. Pentru problema fizică soluția (2.10) este valabilă numai pentru valori mari ale variabilei η unde aproximațiile asimptotice (2.2) sînt suficient de bune.

Ea reprezintă soluția problemei determinării temperaturii în apropierea frontierei superioare a stratului limită, deoarece se poate, fără nici o greutate, afla distribuția entalpiei (temperaturii) în această regiune, folosind formula

$$i = (ax)^{-2\alpha}\,\theta\left(\eta\sqrt{\frac{p\sigma}{2}}\right) g_{\infty s} + i_{\infty}. \tag{2.11}$$

Pentru a reveni la variabilele fizice x şi y se ține seama de faptul că variabila η este variabilă independentă în ecuația lui Falkner aşa că după formula (1.19) putem scrie

$$\eta = y\sqrt{\frac{1}{2p-q}\,\frac{u_{\infty}}{\nu x}} = \frac{y}{(ax)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{ac\rho}{(2p-q)\mu}}\,. \tag{2.12}$$

Evaluarea constantei A, rămasă nedeterminată deoarece s-a folosit numai una din condițiile la limită, cu ajutorul condiției la limita inferioară, ne-ar permite, sub o formă aproximativă, găsirea soluției valabilă în toată regiunea stratului limită.

a. *Soluție aproximativă.* Dacă notăm

$$P(\bar{x},\sigma) = (1-\gamma)\,\frac{\Gamma(\nu)p\sigma^2}{2^{2-\nu}\sqrt{\pi}}\,e^{-\bar{x}^2}\Big[H_{-\nu}(-\bar{x})\int\zeta''^2(\bar{x})\,H_{-\nu}(\bar{x})\,d\bar{x} - \\ - H_{-\nu}(\bar{x})\int\zeta''^2 H_{-\nu}\,d\bar{x}\Big] \tag{2.13}$$

unde $\bar{x} = \eta\sqrt{p\sigma/2}$ soluția (2.10) se scrie

$$\theta(\bar{x}) = Ae^{-\bar{x}^2}H_{-\nu}(\bar{x}) + M_{\infty s}^2\,P(\bar{x},\sigma). \tag{2.14}$$

Folosind condiția de la frontiera inferioară se găseşte constanta A în forma

$$A = \frac{2\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left[\frac{g_w}{g_{\infty s}} - M_{\infty s}^2 P(0,\sigma)\right]\cdot \tag{2.15}$$

Formula (2.14) împreună cu formulele (2.13), (2.15) şi (2.12) ne dă soluția aproximativă a problemei determinării temperaturii în toată regiunea stratului, din apropierea punctului critic, considerată în planul fizic (x, y).

Să presupunem, acum, că nu există schimb de căldură între corp şi fluid, adică

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_w = \left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0. \tag{2.16}$$

O asemenea problemă are sens numai dacă admitem că mişcarea fluidului este disipativă şi atunci energia mecanică se transformă, prin frecare, în căldură care ridică temperatura în stratul limită față de temperatura fluidului exterior.

Condiția la limită (2.16) se folosește pentru determinarea constantei A. Utilizînd derivata funcției (2.14) formula (2.16) ne conduce la valoarea

$$A = M_{\infty s}^2 P'(0,\sigma) \frac{\Gamma(1+\nu)}{\nu\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \cdot \tag{2.17}$$

Repartiția aproximativă a funcției θ, care se poate numi adiabatică, se va obține din expresiile (2.14) și (2.17) și are forma

$$\theta_{\mathrm{ad}}(\overline{x}) = M_{\infty s}^2 \left[\frac{\Gamma(1+\nu)}{\nu\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} P'(0,\sigma) e^{-\overline{x}^2} H_{-\nu}(\overline{x}) + P(\overline{x},\sigma) \right] \cdot \tag{2.18}$$

Din expresia (2.18) se deduce, folosind formula (2.11) temperatura adiabatică în stratul limită și temperatura adiabatică a peretelui

$$T_{\mathrm{ad}} = \frac{g_{\infty s}}{c_p} (ax)^{-2\alpha} \theta_{\mathrm{ad}}\left(\eta\sqrt{\frac{p\sigma}{2}}\right) + T_\infty, \tag{2.19}$$

$$T_{\mathrm{ad}_w} = \frac{g_{\infty s}}{c_p} (ax)^{-2\alpha} \theta_{\mathrm{ad}}(0,\sigma,a,\alpha) + T_\infty = T_\infty + \frac{u_\infty^2}{c_p} r(\sigma), \tag{2.20}$$

unde $r(\sigma)$ este coeficientul de restabilire

$$r(\sigma) = \frac{2}{c^2} \theta_{\mathrm{ad}}(0,\sigma) g_{\infty s}.$$

b. *Calculul transportului de căldură.* Exprimarea fluxului termic local $q(x)$ și a condițiilor necesare și suficiente pentru existența acestui flux cu ajutorul diferenței $T_w - T_\infty$ nu mai are sens în condiții generale, (răcirea peretelui în cazul scurgerii disipative) deoarece deși $T_w > T_\infty$ s-ar putea ca transportul de căldură de la corp la fluid să fie nul. În încercările de a formula un nou număr Nusselt, se folosește introducerea în expresia mărimilor termodinamice, a diferenței $T_w - T_{\mathrm{ad}_w}$ ceea ce vom face și noi în cele ce urmează.

Se observă ușor că valoarea derivatei funcției $\theta(\overline{x})$ din forma (2.14), cu constanta A dată de formula (2.15), se poate exprima astfel

$$\left(\frac{d\theta}{d\overline{x}}\right)_{\overline{x}=0} = -2 \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{g_w}{g_{\infty s}} - \theta_{\mathrm{ad}}(0,\sigma)\right] \cdot \tag{2.21}$$

Fluxul termic local în unitatea de timp, folosind pentru numărul lui Nusselt formula (1.35) este

$$q(x) = \frac{\lambda N}{x}(T_w - T_\infty) = -a^{\frac{3\alpha}{2}} \frac{g_{\infty s}}{g_w} \frac{\lambda}{x} \sqrt{R_x}\, \theta'_{\overline{x}}(0,\sigma,a,\alpha)(T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{p\sigma}{2}}, \tag{2.22}$$

adică

$$q(x) = 2a^{\frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p\sigma}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\lambda}{x} \sqrt{\frac{\rho x u_\infty}{\mu}} \, (T_w - T_{\mathrm{ad}_w}). \tag{2.23}$$

Formula (2.23) permite calculul transferului de căldură de la perete la fluid numai dacă $T_w - T_{\mathrm{ad}_w} > 0$. Vom obține astfel condiția necesară și suficientă de transfer de căldură de la perete la fluid și invers, de la fluid la perete în forma

$$T_w - T_\infty \gtrless \frac{u_\infty^2}{2c_p} r(\sigma) = \frac{u_\infty^2}{2c_p} \frac{2g_{\infty s}}{c^2} \theta_{\mathrm{ad}}(0, \sigma, a, \alpha). \tag{2.24}$$

Pentru viteze mici, cînd căldura care ia naștere prin frecare este neglijabilă se poate lua $T_{\mathrm{ad}_w} = T_\infty$ și fluxul local $q(x)$ se obține cu formula (2.23) în care mărimea T_{ad_w} se va înlocui cu T_∞.

Observații. Dacă în ecuația (2.7) se va face substituția $z^2 = t$ se obține ecuația hipergeometrică degenerată. Soluțiile găsite mai sus se pot exprima în forma notațiilor funcțiilor hipergeometrice degenerate.

2. Cazul $2n > 0$ și egal cu un număr întreg

Ne raportăm la ecuația (2.5) considerînd acum că $2n > 0$ și egal cu un număr întreg. Este cunoscut că ecuația omogenă corespunzătoare ecuației (2.5) are sistemul fundamental de soluții

$$\begin{gathered} \theta_{2n}^{(1)}(\bar{x}) = h_{2n}(\bar{x}) = i^{-2n} H_{-n}(i\bar{x}), \\ \theta_{2n}^{(2)}(\bar{x}) = i^{-2n-1} G_{2n}(ix), \\ \left(G_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \int_0^x e^{x^2} \, dx\right)\right), \end{gathered} \tag{2.25}$$

unde $G_{2n}(ix)$ este funcția de speța a II-a a lui Hermite de argument imaginar (existența acestui sistem fundamental o putem dovedi prin verificare directă, factorii imaginari introduși au rolul de a face reale funcțiile h_{2n} și g_{2n}). Din cauza comportării asimptotice, pentru valori mari ale variabilei, identice ale funcțiilor $h_n(z)$ și $g_n(z)$ se obișnuiește să se introducă funcția f_n în forma următoarei combinații liniare :

$$f_n(z) = h_n(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{z^2} \int_z^\infty e^{-z^2} \, dz\right). \tag{2.26}$$

Folosirea metodei variației constantelor conduce la integrarea ecuației neomogene (2.5) în forma :

$$\theta(\bar{x}) = \frac{1}{c} \left[f_{2n} \int g_{2n} h e^{\bar{x}^2} \, d\bar{x} - g_{2n} \int f_{2n} h e^{\bar{x}^2} d\bar{x} \right] + A g_{2n}(\bar{x}) + B f_{2n}(\bar{x}), \tag{2.27}$$

h este membrul drept al ecuației (2.5). A şi B sînt constante de integrare, iar constanta c introdusă în calcule în urma aplicării teoremei lui Liouville, pentru calculul wronskianului, este egală cu $c = w\{f_{2n}(0), g_{2n}(0)\}$. Cunoaşterea reprezentărilor asimptotice

$$g_{2n}(x) \underset{x\to\infty}{\approx} -\frac{(2n)!}{2x^{2n+1}} e^{-x^2}, \quad f_{2n}(x) \underset{x\to\infty}{\approx} \frac{(2n)!\, e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\, x^{2n+1}},$$
$$f'_{2n}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2n+1}(2n)!\, e^{-x^2}[2xH_{-2n-1}(x) + (4n+2)H_{-2n-2}(x)], \tag{2.28}$$

ne permit să scriem că

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} f_{2n} \int g_{2n} h e^{\bar{x}^2} d\bar{x} = \lim_{\bar{x}\to\infty} \frac{g_{2n} f_{2n}^2}{e^{-\bar{x}^2} f'_{2n}} = 0,$$
$$\lim_{\bar{x}\to\infty} g_{2n} \int f_{2n} h e^{\bar{x}^2} d\bar{x} = 0. \tag{2.29}$$

Expresia (2.27) arată că funcția $\theta(\bar{x})$ este mărginită la infinit şi că $\lim\limits_{\bar{x}\to\infty} \theta(\bar{x}) = 0$. Funcția $\theta(\bar{x})$ din forma (2.27) este integrala ecuației (2.5) care satisface condiția de la infinit şi este în acelaşi timp soluția problemei fizice în regiunea superioară a stratului limită.

Se arată, de asemenea, uşor, că

$$\lim_{\bar{x}\to\infty} \frac{d\theta}{d\bar{x}} = 0.$$

3. Mişcarea nedisipativă

Vom presupune acum că este neglijabilă căldura care ia naştere prin frecare în fluidul vîscos din stratul limită. Analitic, aceasta înseamnă a lua în ecuații $M_{\infty s} = 0$, deoarece simbolul $M_{\infty s}$ caracterizează în ecuațiile şi formulele noastre disipația energiei cinetice în căldură. Pentru a avea o problemă termodinamică reală va trebui să admitem că

$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_w \neq 0.$$

Vom relua ecuația (2.5) şi vom considera $M_{\infty s} = 0$, avem

$$\theta'' + 2\bar{x}\theta' - 4n\theta(\bar{x}) = 0, \tag{2.30}$$

$$(n > 0, \text{ întreg}).$$

Ecuația (2.30) este aceeaşi cu ecuația omogenă apărută în problema de la paragraful precedent (cazul 2). Vom integra ecuația (2.30) ştiind că la infinit funcția $\theta(\overline{x})$ împreună cu derivatele sale este nulă. Derivînd ecuația (2.30) de $2n$ ori obținem

$$\begin{aligned} &\theta^{(2n+1)} + 2\overline{x}\theta^{(2n)} - 2\theta^{(2n-1)} = 0, \qquad (2.31)\\ &\theta^{(2n+2)} + 2\overline{x}\theta^{(2n+1)} = 0,\\ &n = 1,2,3, \dots \end{aligned}$$

Integrarea acestui șir de ecuații ne conduce la expresiile derivatelor funcției $\theta(\overline{x})$

$$\left.\begin{aligned} &\theta^{(2n+1)}(\overline{x}) = Ae^{-\overline{x}^2} (A \text{ este o constantă}),\\ &\theta^{(2n)} = A\int_{\infty}^{\overline{x}} e^{-\overline{x}^2}\, d\overline{x}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.32)$$

$$\theta^{(2n-1)} = \frac{1}{2}\left[\theta^{(2n+1)} + 2\overline{x}\theta^{(2n)}\right] = \frac{A}{2}\left[e^{-\overline{x}^2} + 2\overline{x}\int_{\infty}^{\overline{x}} e^{-\overline{x}^2} d\overline{x}\right],$$

$$\theta^{(2n-2)} = \frac{A}{4}\left[\overline{x}e^{-\overline{x}^2} + (1 + 2\overline{x}^2)\int_{\infty}^{\overline{x}} e^{-\overline{x}^2}\, d\overline{x}\right].$$

Dacă parametrii p și q vor primi valori particulare se vor putea obține soluții pentru diferite mișcări particulare studiate și din punctul de vedere al frecării.

Aplicații. 1. Dacă vom presupune $p = 1$, $q = 1$ vom obține $u_\infty = cx$ adică o mișcare în vecinătatea punctului critic al plăcii așezate normal pe direcția curentului.

În ecuația (2.30) să revenim la variabila η. Avem

$$\left.\begin{aligned} &\theta'' + \sigma\eta\theta' - 2\sigma\theta = 0,\\ &\theta(\infty) = 0, \quad (\theta'(\infty) = 0). \end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

Derivăm ecuația (2.33) în raport cu η (conform condițiilor la limită ecuația se încadrează în asemenea tip de ecuații) și obținem

$$\theta''' + \sigma\eta\theta'' - \sigma\theta'(\eta) = 0. \qquad (2.34)$$

Independent de condiția la limită, ecuația (2.34) admite soluția particulară.

$$\theta' = \eta \qquad (2.35)$$

și soluția de forma

$$\theta'(\eta) = \eta\psi(\eta). \qquad (2.36)$$

Integrînd de la ∞ la η ecuația funcției ψ $[\psi(\infty) = 0]$ se obține

$$\frac{d\theta}{d\eta} = A\eta\int_{\infty}^{\eta} \frac{1}{\eta_1^2} e^{-\frac{\sigma\eta_1^2}{2}} d\eta_1 = -Ae^{-\frac{\sigma\eta^2}{2}} - A\sigma\eta\int_{\infty}^{\eta} e^{-\frac{\sigma\eta_1^2}{2}} d\eta_1. \qquad (2.37)$$

Integrăm ecuația (2.37) de la ∞ la η și obținem soluția

$$\theta(\eta) = -\frac{A}{2}\left[\eta e^{-\frac{\sigma\eta^2}{2}} + (1+\sigma\eta^2)\int_{\infty}^{\eta} e^{-\frac{\sigma\eta_1^2}{2}} d\eta_1\right]; \quad (A = \text{const.}). \qquad (2.38)$$

Se poate arăta prin verificare directă că funcția (2.38) satisface ecuația dată (2.33) și corespunde condiției de la infinit, adică $\lim\limits_{\eta\to\infty} \theta = 0$.

Expresia entalpiei, în regiunea superioară a stratului limită este

$$i = i_{\infty} + g_{\infty s}\, x^2\theta(\eta), \qquad (2.39)$$

unde $\theta(\eta)$ are expresia (2.38). Formula (2.12) dă relația dintre η și x, y.

Soluția (2.38) se putea obține direct din a patra ecuație din șirul (2.32) dacă în această ecuație făceam substituția $\bar{x} = \eta\sqrt{\sigma/2}$ și notam constanta $\sqrt{\sigma/2}\,A/2$ cu $-A$.

2. Dacă presupunem $p = 2$, $q = 1$ adică $2n = 1$, din șirul (2.34) se obține

$$\theta(\eta) = \frac{A}{2}\left[e^{-\sigma\eta^2} + 2\eta\sqrt{\sigma}\int_{\infty}^{\eta} e^{-\sigma\eta_1^2}\, d(\eta_1\sqrt{\sigma})\right]. \qquad (2.40)$$

Derivatele întîi și a doua ale funcției $\theta(\eta)$ sînt date de a doua și prima din ecuațiile șirului (2.32). Această soluție corespunde diedrului cu deschiderea de 90° și scurgerii axial simetrice în apropierea punctului critic.

Se poate găsi și în acest caz o soluție aproximativă pentru funcția θ și numărul lui Nusselt folosind condiția de la limita inferioară. Se găsește

$$\alpha = -1, \quad a = 3$$

$$\theta'_{\eta}(0,\sigma) = -2\frac{g_w}{g_{\infty s}}\sqrt{\sigma}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = -\frac{g_w}{g_{\infty s}}\sqrt{\pi\sigma},$$

$$N_x = \sqrt{\frac{\pi\sigma}{3}\frac{x\rho u_{\infty}}{\mu}} \approx 1{,}02\sqrt{\sigma}\left(\frac{xu_{\infty}}{\nu}\right)^{1/2}. \qquad (2.41)$$

Observație. Rezultatul găsit prin formula (2.41) este în acord cu cel obținut de Fage și Falkner (citat în [8]) sau M. Sibulkin [9]. De exemplu, pentru $\sigma = 0{,}77$ formula (2.41) devine $N \approx 0{,}8\,(xu_{\infty}/\nu)^{1/2}$ iar tabela lui Fage și Falkner dă $N \approx 0{,}6\,(xu_{\infty}/\nu)^{1/2}$.

În general, soluțiile propuse în lucrare, sub formă aproximativă, sînt valabile numai pentru anumite valori ale numărului lui Prandtl σ, în majoritatea cazurilor pentru $0{,}5 < \sigma < 0{,}9$.

Această limitare a domeniului de valabilitate al soluțiilor, în raport cu parametrul σ, se datorește desigur aproximației admise (2.2).

CONCLUZII

1. Față de cercetările cunoscute asupra ecuațiilor cu derivate parțiale ale stratului limită în variabilele lui L. Crocco x, u, lucrarea noastră propune o metodă prin care aceste ecuații, relativ la un diedru, se reduc la ecuații diferențiale ordinare.

2. În spiritul metodelor folosite de Crocco, Tifford, Howarth, Chapman, Rubesin, Meksyn etc. de a reduce problemele determinării frecării, ale profilului de viteză și temperatură la ecuații cunoscute și studiate, am procedat și noi, dar, referitor la alte ecuații, reușind să reducem ecuația frecării și repartiției temperaturii în variabilele x, u la ecuația lui Falkner-Skan, Hermite și ecuații integrabile prin cvadraturi.

3. De asemenea, față de diferiți cercetători care dau soluții numerice lucrarea noastră propune soluții, aproximative pentru problema fizică, cu ajutorul funcțiilor lui Hermite și sub formă de cvadraturi. Soluțiile s-au obținut în urma rezolvării unor probleme la limită, în cadrul teoriei elementare a integrării ecuațiilor ordinare.

4. Lucrarea prezentată presupune, de asemenea, că temperatura peretelui este variabilă sub forma unei funcții date.

5. Se evaluează fluxul de căldură găsindu-se numărul lui Nusselt.

6. Credem că rezultatele obținute pot fi recomandate spre aplicare, de exemplu, în procesul cedării de căldură în dispozitivele antigivroare cu aer cald folosite în aviație pentru înlăturarea fenomenului de givraj, fenomen ce se manifestă prin solidificarea pe învelișul avionului (bordul de atac al aripilor și ampenajelor, elice etc.) a particulelor de apă supraîncărcate din aer (nori).

Primit la redacție la 3 februarie 1959

РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ДВУХГРАННОГО ПРОФИЛЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе доказывается, что, используя типы решений вида (1.8)—(1.9)—(1.10)—(1.12) для сопротивления трения и распределения температуры и принимая физический закон (1.10) и (1.4), возможно преобразовать уравнения в частных производных сжимаемого пограничного слоя в переменных Крокко (x, u) в обыкновенные дифференциальные уравнения (1.13), (1.15).

Рассматривается случай несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью, предполагается, что теплосодержание потенциального по-

тока также постоянно и вводятся безразмерные величины (1.23), причем, получаются безразмерные уравнения (1.24) и (1.27) для трения и распределения температуры.

Для расчета трения на теле найдена формула (1.25)—(1.25′). Найдено выражение (1.30) для числа Нуссельта.

Если применить преобразования (1.31), то найденное выше уравнение трения сводится к уравнению Фолкнера-Скана.

Используется предложенное Мексином асимптотическое интегрирование уравнения Фалкнера и решается задача распределения температуры, путем ее сведения к краевой задаче для некоторых неоднородных уравнений, соответствующие однородные уравнения которых совпадают с уравнениями для функций Эрмита.

Приводится приближенное решение (2.14) для распределения температуры и теплопередачи (2.23) при диссипативном движении в пограничном слое на стенке, нагретой до переменной температуры.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DE FROTTEMENT ET DU TRANSFERT DE CHALEUR DANS LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE À PROXIMITÉ DU POINT CRITIQUE D'UN PROFIL DIÉDRIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur démontre, dans ce travail, que, à l'aide des solutions de la forme (1.8), (1.9), (1.10), (1.12), pour la résistance de frottement et la répartition de la température, et en admettant la loi physique (1.10) et (1.4), on peut transformer les équations aux dérivées partielles de la couche limite compressible dans les variables de Crocco $[x, u]$, en équations différentielles ordinaires (1.13), (1.15).

On considère le cas du fluide incompressible à viscosité constante, on admet que l'enthalpie du courant potentiel est aussi constante et l'on introduit les grandeurs adimensionnelles (1.23) ; on obtient ainsi les équations adimensionnelles (1.24) et (1.27), pour le frottement et la répartition de la température.

Pour le calcul du frottement sur le corps, on a trouvé la formule (1.25), (1.25′). Pour le nombre de Nusselt on a trouvé l'expression (1.30).

En vertu de la transformation (1.31), l'équation du frottement, trouvée ci-dessus, se réduit à l'équation de Falkner-Skan.

A l'aide de l'intégration asymptotique, donnée par Meksyn pour l'équation de Falkner, on résout le problème de la répartition de la température, en le réduisant à des problèmes aux limites (conditions bilocales) imposés à des équations non homogènes dont les équations homogènes correspondantes sont justement les équations des fonctions d'Hermite.

On donne une solution approximative (2.14) pour la répartition de la température et l'évaluation du transport de chaleur (2.23) pour le mouvement dissipatif dans la couche limite, sur la paroi chauffée à une température variable.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. ШЛИХТИНГ, *Теория пограничного слоя*. Москва, 1956.
2. Л. ХОВАРТ, *Современное состояние аэродинамики больших скоростей*. **I—II**. Москва, 1955—1956.
3. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ, *Механика жидкостей и газа*. Москва-Ленинград, 1950.
4. L. HOWARTH, *On the solution of the laminar boundary layer equat*. Proc. Roy. Soc. London, A *164* (1938).
5. D. MEKSYN, *The laminar bound layer equations*. **II**. Proc. Roy. Soc. London, A. *192* (1948).
6. N.N. LEBEDEV, *Funcții speciale și aplicațiile lor*. Ed. tehnică, București, 1957.
7. L. CROCCO, Monogr. Sci. Aeronautica, *3* (1946).
8. С. ГОЛЬДШТЕЙН, *Современное состояние гидроазродинамики вязкой жидкости*. Иностр. лит. Москва, 1948.
9. M. SIBULKIN, *Transmiterea de căldură în apropierea punctului critic anterior al corpului de rotație*. Journal of the Aeronautical Sciences, **19**, *8*, 570—571 (1952).

DIVERGENȚA AEROELASTICĂ LA SUPRAFEȚE PORTANTE ÎN ROTAȚIE ȘI ROTOTRANSLAȚIE

DE

AUGUSTIN PETRE

Fenomenul de divergență aeroelastică se poate produce ori de cîte ori la o suprafață portantă linia centrelor de presiune este în fața liniei elastice. Pentru suprafețele portante în translație există o viteză la care o creștere de incidență produce un moment de răsucire mai mare decît cel produs ca reacțiune elastică, astfel încît creșterea de incidență continuă indefinit, evident pînă la rupere.

Pentru suprafețe portante, cum sînt palele de elicopter, de elici, viteza relativă a aerului variază, astfel încît problema nu mai poate fi tratată ca în cazul suprafețelor portante în translație și soluționarea problemei constituie obiectul prezentei lucrări.

Se consideră o suprafață portantă în consolă de secțiune constantă. Această suprafață portantă se rotește în planul de portanță nulă în jurul unui ax din planul secțiunii de încastrare.

În aceste condiții ecuația de răsucire în cazul unei rotiri elastice $\varphi(x)$ variabile în lungul suprafeței considerate se poate scrie

$$GI_d \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\rho}{2} V_1^2 \frac{x^2}{l^2} ce \frac{dc_z}{di} \varphi = 0, \qquad (1)$$

unde

GI_d este rigiditatea la răsucire,
l — lungimea suprafeței portante,
c — coarda suprafeței portante,
e — distanța între linia de presiune și cea elastică,
ρ — masa specifică a aerului,
V_1 — viteza relativă la vîrf,
c_z — coeficientul unitar de portanță,
i — incidența, aici egală cu φ.

Notînd cu

$$\frac{\rho}{2}\,\frac{V_1^2 c\, e}{GI_d\, l^2}\,\frac{dc_z}{di} = \alpha^2, \tag{2}$$

ecuația (1) se scrie

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \alpha^2 x^2 \varphi = 0. \tag{3}$$

Utilizînd schimbarea de variabilă și de funcție

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}\, x_1}, \\ \varphi &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}\, x_1}\, \eta(x_1), \end{aligned} \tag{4}$$

ecuația (3) devine o ecuație clasică de tip Bessel astfel încît revenind la vechile variabile soluția se poate scrie

$$\varphi = C_1 \sqrt{x}\; J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right) + C_2 \sqrt{x}\; J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right). \tag{5}$$

Pentru determinarea constantelor se vor utiliza condiții la limită. Astfel, în încastrare se poate considera rotirea φ nulă, iar vîrful suprafeței portante este liber de sarcini, respectiv momentul de răsucire este nul.

Prima condiție

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ \varphi &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

conduce la

$$C_2 = 0. \tag{7}$$

Condiția a doua se va scrie

$$x = l, \tag{8}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Derivînd soluția (5) în care s-a introdus (7) se obține relația

$$\frac{d\varphi}{\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right) d\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right)} = C_1 \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right)^{\frac{1}{4}-1} J_{\frac{1}{4}-1}\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right), \tag{9}$$

respectiv

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right)} = C_1 \sqrt{x}\; J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\, x^2\right). \tag{10}$$

De aici, derivata în raport cu x se poate scrie

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\left(\frac{\alpha}{2}x^2\right)} \frac{d\left(\frac{\alpha}{2}x^2\right)}{dx},$$

respectiv

$$\frac{d\varphi}{dx} = C_1 \alpha\, x \sqrt{x}\, J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}x^2\right). \tag{11}$$

Aplicînd condiţia (8) se poate scrie

$$C_1 \alpha l \sqrt{l}\, J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}l^2\right) = 0. \tag{12}$$

Rezultă de aici fie

$$C_1 = 0, \tag{13}$$

fie

$$\alpha = 0, \tag{14}$$

$$J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}l^2\right) = 0. \tag{15}$$

Condiţiile (13) şi (7) fac soluţia (5) identic nulă, respectiv fenomenul de divergenţă nu se va produce.

Condiţia (14) impune anularea unuia din termenii expresiei (2) ceea ce conduce, de asemenea, la soluţii banale.

Condiţia (15) conduce la a determina zerourile funcţiei $J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}l^2\right)$. Primul zero al acestei funcţii este

$$\frac{\alpha}{2}l^2 = 1{,}05851\,; \tag{16}$$

respectiv înlocuind aici expresia lui α din (2) se obţine

$$V_1 = 1{,}05851\,\frac{2}{l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}\,ce\,\frac{dc_z}{di}}},$$

expresie care se poate scrie

$$V = 1{,}34774\,\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2}\,ce\,\frac{dc_z}{di}}}. \tag{17}$$

Din această ultimă expresie se observă că viteza necesară la vîrful suprafeţei portante pentru a se obţine fenomenul de divergenţă este cu aproape 35% mai mare decît în cazul unei mişcări de translaţie.

Dacă suprafaţa portantă considerată se găseşte atît în translaţie cît şi în rotaţie, viteza relativă va putea fi considerată în cazul cel mai general ca rezultînd din cele două mişcări. Variaţia în lungul palei precum şi notaţiile utilizate sînt date în figura 1.

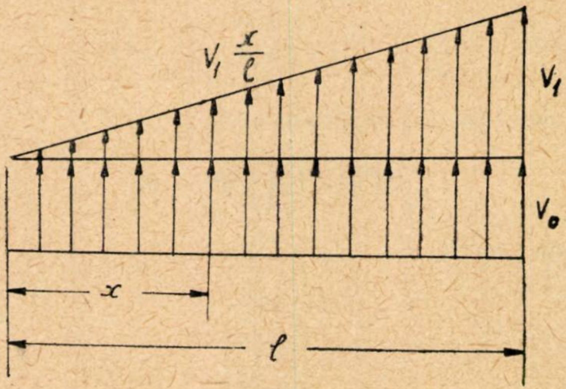


Fig. 1

În aceste condiţii ecuaţia (1) se va scrie

$$GI_d \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\rho}{2} ce \frac{dc_z}{di}\left(V_1 \frac{x}{l} + V_0\right)^2 \varphi = 0. \tag{18}$$

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$\frac{x}{l} + \beta = y,$$

ecuaţia (18) devine

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\rho}{2} \frac{l^2}{GI_d} V_1^2 ce \frac{dC_z}{di} y^2 \varphi = 0, \tag{19}$$

unde s-a notat

$$\frac{V_0}{V_1} = \beta. \tag{20}$$

Utilizînd notaţia (2) ecuaţia (19) se poate scrie

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \alpha^2 y^2 \varphi = 0, \tag{21}$$

iar soluţiile acestei ecuaţii vor fi

$$\varphi = C_1 \sqrt{y}\, J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2} y^2\right) + C_2 \sqrt{y}\, J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2} y^2\right). \tag{22}$$

Condiţiile (6) şi (8) se vor scrie în acest caz ţinînd seama de (19) şi (20)

$$\left.\begin{aligned} y &= \beta, \\ \varphi &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

respectiv

$$\left.\begin{aligned} y &= \beta+1, \\ \frac{d\varphi}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Condiţia (23) conduce la

$$C_1 \sqrt{\beta}\, J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,\beta^2\right) + C_2 \sqrt{\beta}\, J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,\beta^2\right) = 0. \tag{25}$$

Ţinînd seama de relaţia (9) precum şi de relaţia

$$\begin{aligned} \frac{d}{\left(\frac{\alpha}{2}\,y^2\right) d\left(\frac{\alpha}{2}\,y^2\right)} \left[C_2\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,y^2\right)^{\frac{1}{4}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,y^2\right)\right] &= \\ = - C_2\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,y^2\right)^{\frac{1}{4}-1} J_{-\frac{1}{4}+1}\left(\frac{\alpha}{2}\,y^2\right)&, \end{aligned} \tag{26}$$

condiţia (24) se poate scrie

$$\begin{aligned} C_1\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right] J_{-\frac{3}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right] &- \\ - C_2\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right]^{\frac{1}{4}} J_{\frac{3}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right] &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Pentru a exista soluţii nenule, respectiv pentru a se produce fenomenul de divergenţă este necesar ca sistemul format din ecuaţiile (25) şi (27) să fie compatibil. Condiţia de compatibilitate se poate scrie

$$\begin{vmatrix} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,\beta^2\right) & J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,\beta^2\right) \\ J_{-\frac{3}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right] & -J_{\frac{3}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right] \end{vmatrix} = 0, \tag{28}$$

respectiv

$$\frac{J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,\beta^2\right)}{J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha}{2}\,\beta^2\right)} = -\frac{J_{-\frac{3}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right]}{J_{\frac{3}{4}}\left[\frac{\alpha}{2}\,(\beta+1)^2\right]}. \tag{29}$$

Pentru soluţionarea acestei ecuaţii se calculează variaţia membrului stîng şi drept pentru diferite valori ale argumentelor. Se obţin astfel diagramele din figura 2 trasate pe baza rezultatelor de calcul trecute în tabela 1. În figura 2 curbele ce reprezintă membrul stîng al ecuației (29) sînt notate cu I, iar cele ce reprezintă membrul drept al acestei ecuații sînt notate cu II.

Alegînd în continuare diferite valori ale ordonatelor va corespunde pentru fiecare ordonată cîte o valoare a argumentului pentru fiecare din cele două curbe. Dacă se notează aceste două valori obținute, respectiv cu a și b se poate scrie

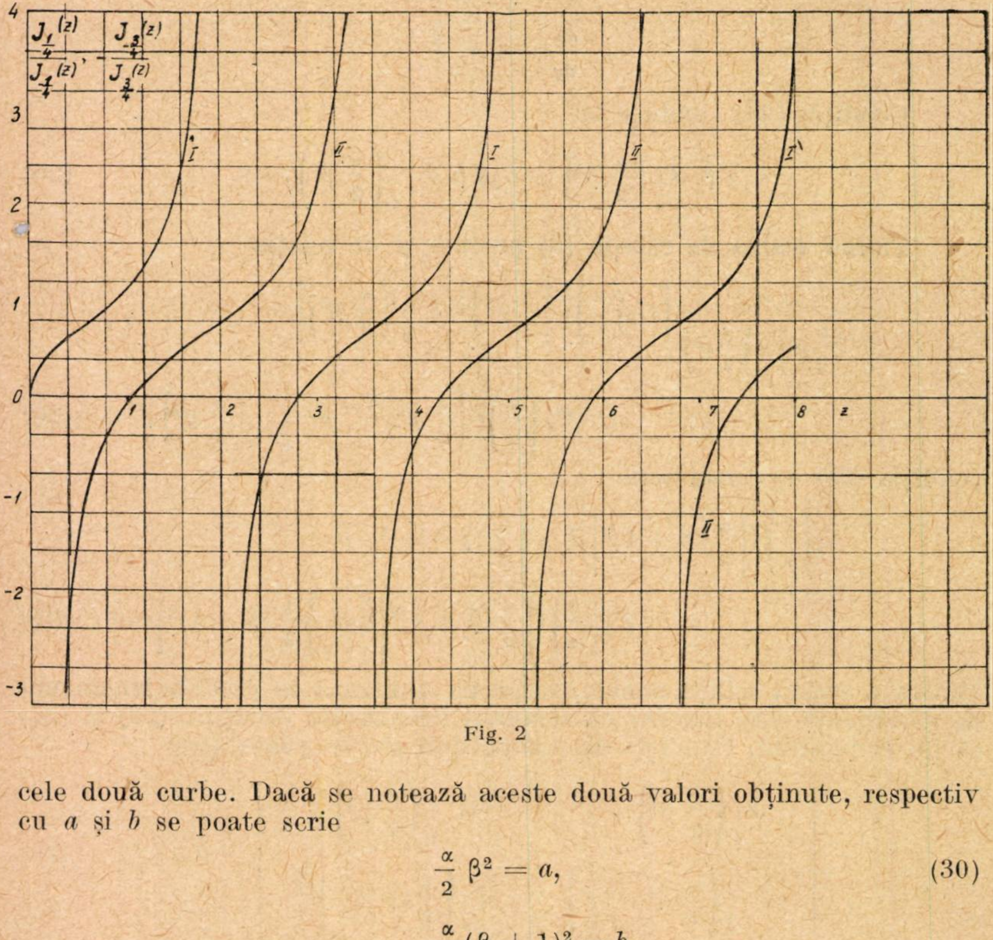


Fig. 2

$$\frac{\alpha}{2}\,\beta^2 = a, \tag{30}$$

$$\frac{\alpha}{2}\,(\beta + 1)^2 = b,$$

de unde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}} - 1}, \tag{31}$$

$$\alpha = 2a\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right)^2. \tag{32}$$

Tabela 1

Valorile termenilor din care se compune ecuaţia (29)

(z)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	
$J_{\frac{1}{4}}(z) \Big/ J_{\frac{1}{4}}(z)$	0	0,4301	0,6179	0,7794	0,9412	1,1237	1,3553	1,6947	2,3101	4,0171	
$J_{-\frac{3}{4}}(z) \Big/ J_{\frac{3}{4}}(z)$	$-\infty$	−7,7401	−2,4434	−1,0609	−0,4400	−0,0800	0,1645	0,3507	0,5063	0,6469	
	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	
$J_{\frac{1}{4}}(z) \Big/ J_{-\frac{1}{4}}(z)$	110,5	−2,8344	−0,9654	−0,3222	0,00269	0,2596	0,4391	0,5923	0,7358	0,8816	
$J_{-\frac{3}{4}}(z) \Big/ J_{\frac{3}{4}}(z)$	0,7839	0,9279	1,0913	1,2947	1,5794	2,0509	3,0950	8,5499	−5,8264	−1,5339	
	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	
$J_{\frac{1}{4}}(z) \Big/ J_{-\frac{1}{4}}(z)$	1,0425	1,2379	1,5042	1,9275	2,8285	6,4009	−8,4461	−1,7675	−0,6561	−0,1689	
$J_{-\frac{3}{4}}(z) \Big/ J_{\frac{3}{4}}(z)$	0,5760	−0,1292	0,1464	0,3465	0,5070	0,6545	0,7957	0,5454	1,1140	1,3293	
	6	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
$J_{\frac{1}{4}}(z) \Big/ J_{-\frac{1}{4}}(z)$	0,1221	0,3291	0,4960	0,6434	0,7857	0,9348	1,1042	1,3182	1,6232	2,1465	3,4061
$J_{-\frac{3}{4}}(z) \Big/ J_{\frac{3}{4}}(z)$	1,6366	2,1680	3,4562	14,1840	−4,0872	−1,2539	−0,4576	−0,0593	0,1956	0,3858	0,5442

Pentru a se compara rezultatele cu cele obținute în cazul mișcării de translație, notîndu-se

$$V = V_1 + V_0,$$

se va scrie

$$V = k \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{GI_d}{\frac{\rho}{2} ce \frac{dc_z}{di}}}, \tag{33}$$

unde

$$k = \alpha(\beta + 1)\frac{2}{\pi}, \tag{34}$$

respectiv

$$k = \frac{4}{\pi}(b - \sqrt{ab}). \tag{35}$$

Pe baza curbelor din figura 2, a relațiilor (31) și (35) s-a trasat în figura 3 relația între k și β. Se observă de aici că dacă viteza de translație este de două ori mai mare decît cea maximă de rotație, viteza critică de divergență este încă cu aproximativ 10% mai mare decît cea pentru o mișcare de translație cu aceeași viteză maximă.

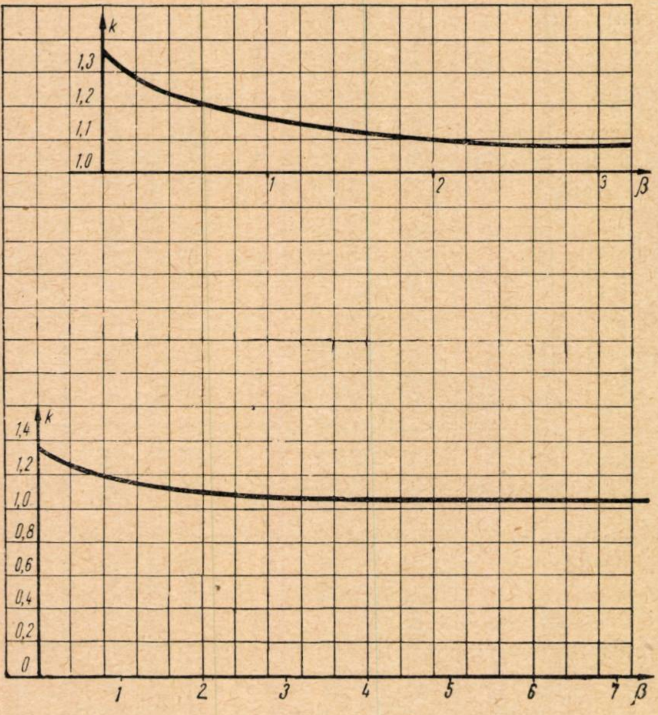


Fig. 3

Pentru un calcul mai riguros a unor puncte particulare se pot utiliza fie valori speciale ale funcţiilor care intervin în (29) fie dînd o valoare particulară lui β se calculează α prin încercări şi apoi valoarea lui k.

Luînd primele două zerouri ale funcţiei $J_{-\frac{1}{4}}$ şi $J_{\frac{3}{4}}$ se obţine

$$a_1 = 2{,}0063,$$
$$b_1 = 3{,}4910,$$
$$a_2 = 5{,}1230,$$
$$b_2 = 6{,}6526,$$

de unde se obţine pentru

$$\beta = 3{,}138, \qquad k = 1{,}072,$$

respectiv

$$\beta = 7{,}092, \qquad k = 1{,}048.$$

Luînd de exemplu $\beta = 0{,}1$ prin încercări, dezvoltînd funcţiile Bessel în serie se obţine

$$\alpha = 1{,}875, \text{ respectiv, } k = 1{,}313.$$

Pe aceeaşi cale luînd $\beta = 0{,}5$ se obţine

$$\alpha = 1{,}28, \text{ respectiv, } k = 1{,}22.$$

Se observă din cele de mai sus că viteza critică de divergenţă aeroelastică este mai ridicată în cazul suprafeţelor portante în rotaţie, iar calculul riguros al acestui fenomen poate lărgi domeniul de utilizare al suprafeţelor portante fără ca fenomenul de divergenţă să se producă.

Primit la redacţie la 21 iulie 1959

АЭРОУПРУГАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе вычисляется прежде всего критическая скорость дивергенции для вращающихся несущих поверхностей, один из концов которых неподвижен. Расчет приводит к бесселевым функциям порядка —3/4. Сравнение критической скорости дивергенции, получаемой в этом случае у вершины свободного конца несущей поверхности, с критической скоростью дивергенции для той же несущей поверхности при поступательном движении, дает для рассматриваемого случая значение примерно на 35% большее.

Далее рассматривается случай несущей поверхности, находящейся как в поступательном, так и во вращательном движении. В этом случае вычисление приводит в конечном счете к решению транс-

цедентного уравнения в бесселевых функциях порядка — 1/4, 1/4, 3/4 и —3/4.

Полученные результаты приведены на диаграмме рис. 3, причем они выражены в единицах скорости дивергенции; на оси абсцисс отложены отношения скоростей потока у закрепленного сечения к скорости у свободного конца, обусловленной вращением. Отсюда следует, например, что если поступательная скорость в два раза больше, чем максимальная вращательная скорость, то критическая скорость дивергенции все еще примерно на 10% больше, чем для поступательного движения с той же максимальной скоростью.

AEROELASTIC DIVERGENCE OF LIFTING SURFACES IN ROTATION AND ROTOTRANSLATION

ABSTRACT

In this paper, the divergence velocity for rotating lifting surfaces having a fixed end is first computed. The computation leads to Bessel functions of the —3/4 order. By comparing the divergence velocity obtained in this case at the tip of the lifting surfaces, with the divergence velocity obtained for the same lifting surfaces in translation, a value about 35% higher is found for the case dealt with.

The case of an airfoil which is both in rotation and in translation is then dealt with. In this case, the computation finally leads to the solving of a transcendental equation in Bessel functions of the $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ and $-\frac{3}{4}$ orders.

The results obtained are shown — the divergence velocity of a lifting surface in translation being taken as unity — in figure 3, having as abscissa the ratio between the velocity at the root and that at the tip produced by rotation. It is noted that, if the translation velocity is twice as high as the maximum rotation velocity, for instance the divergence velocity is still about 10% higher than that for a translation motion of the same maximum velocity.

BIBLIOGRAFIE

1 R. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, R. HALFMAN, *Aeroelasticity*. Addison-Wesley, Publ. Comp. Inc., Cambridge, Mass., 1955.

ASUPRA VITEZEI UNGHIULARE DE REZONANȚĂ A PALELOR ARTICULATE ALE ROTOARELOR DE ELICOPTER

DE

AL. MARINESCU

Deosebit de important în proiectarea rotorului de elicopter este calculul la vibrații în plan vertical al palelor, în esență calculul vitezei unghiulare de rezonanță a acestora.

Dacă pentru calculul flexiunii dinamice în plan vertical a palelor, ținînd seama într-o măsură mai mică sau mai mare de factorii dinamici care o influențează, s-au dat multe metode de calcul în general laborioase, nici una dintre ele nu dă posibilitatea determinării expeditive a vitezei unghiulare de rezonanță.

Ne-am propus în lucrarea de față să găsim o cale simplă pentru ajungerea acestui scop.

Considerăm un sistem fix $O\xi\zeta$ astfel ca axa $O\zeta$ să coincidă cu axa de comandă a rotorului, și un sistem mobil Oxz care se învîrtește cu viteza unghiulară a rotorului (fig. 1 *a*).

Axa Ox a sistemului mobil coincide în orice moment cu poziția palei rigide definită de unghiul β față de planul de control (planul normal pe axa $O\zeta$) și face în planul de control unghiul ωt cu axa $O\xi$ (fig. 1 *b*).

Deflecțiunea z a palei deformate se măsoară de la axa Ox.

Dacă cunoaștem pe z, ceea ce de altfel vom face în cele ce urmează, atunci poziția oricărui punct al palei poate fi definită față de sistemul fix căci unghiul de bătaie β se poate ușor calcula cu formulele binecunoscute din aerodinamica rotorului.

Dezvoltările matematice care urmează se fac în următoarele ipoteze :

a — pala este netorsionată și are profunzime constantă,

b — articulația de bătaie se găsește în punctul 0,

c — forțele aerodinamice pe pală au o repartiție triunghiulară independentă de timp căreia i se suprapune o repartiție triunghiulară cu variație sinusoidală (o justificare detaliată a acestei ipoteze se poate vedea în lucrarea [1]).

Punem deflecţiunea palei într-un punct x al său sub forma

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t) \cdot y_n(x), \tag{1}$$

unde ζ_n este coordonata generalizată în cel de-al n-lea mod de vibraţie, iar y_n funcţia ce descrie a n-a formă modală.

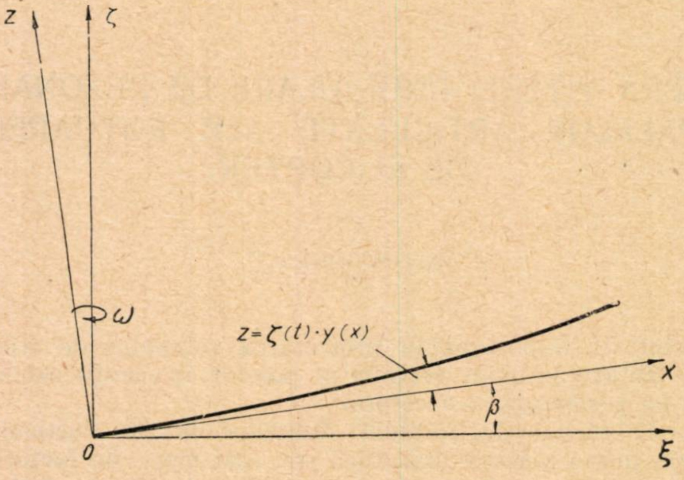


Fig. 1*a*

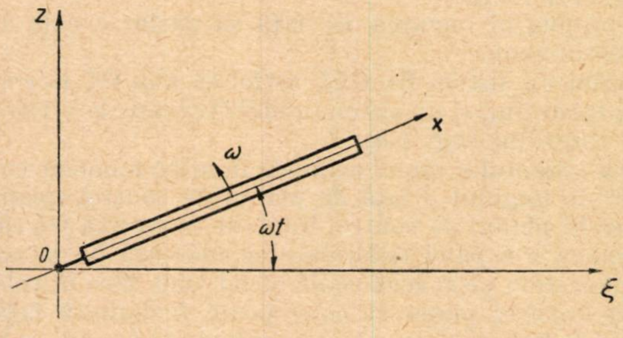


Fig. 1*b*

Pe baza relaţiei (1) energia cinetică a palei se scrie

$$T = \frac{m}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{m}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{\zeta}^2 \int_0^l y_n^2(x) \cdot dx, \tag{2}$$

m fiind masa palei pe unitatea de lungime, iar l lungimea palei, măsurată din axul de rotaţie.

Energia potențială a palei se scrie [1]

$$V = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{\omega^2 m}{2}\int_0^l x\left[\int_0^x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx\right] dx. \tag{3}$$

Într-unul din modurile normale de vibrație funcția $y_n(x)$ poate fi luată sub forma generală [2]

$$\begin{aligned} y_n(x) = {} & A_{1n}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l}x + \operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{2n}\left(\cos\frac{\alpha_n}{l}x - \operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + \\ & + A_{3n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x + \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{4n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Deoarece în cazul palei articulate avem următoarele condiții la extremități:

$$\begin{aligned} &\Big[y_n(x)\Big]_{x=0} = 0, && \left[\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2}\right]_{x=0} = 0, \\ &\left[\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2}\right]_{x=l} = 0, && \left[\frac{d^3 y_n(x)}{dx^3}\right]_{x=l} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

din primele două condiții (5) rezultă că funcția $y_n(x)$ în cazul nostru trebuie să fie de forma

$$y_n(x) = A_{3n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x + \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{4n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right). \tag{6}$$

Din ultimele două condiții rezultă

$$A_{3n}(\operatorname{sh}\alpha_n - \sin\alpha_n) - A_{4n}(\operatorname{sh}\alpha_n + \sin\alpha_n) = 0, \qquad (7$$

$$A_{3n}(\operatorname{ch}\alpha_n - \cos\alpha_n) - A_{4n}(\operatorname{ch}\alpha_n + \cos\alpha_n) = 0. \tag{8}$$

Condiția ca sistemul (7) să nu aibă soluții toate nule conduce la ecuația

$$\operatorname{ch}\alpha_n \cdot \sin\alpha_n - \operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n = 0, \tag{9}$$

din care pot fi deduse valorile lui α_n pentru diversele moduri de vibrație.

În ceea ce privește rapoartele constantelor A_{3n}, A_{4n} ele pot fi deduse din relațiile

$$\frac{A_{3n}}{\operatorname{sh}\alpha_n + \sin\alpha_n} = \frac{A_{4n}}{\operatorname{sh}\alpha_n - \sin\alpha_n} = \mu_n. \tag{10}$$

Cu aceste precizări ținînd seama de (6) expresiile energiei cinetice și potențiale devin însemnînd cu M masa totală a palei

$$T = \frac{M}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{\zeta}_n \cdot \text{[illegible]}_n, \tag{11}$$

$$V = \frac{EIl}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 \left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^4 \Lambda_n + \frac{\omega^2 M}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 \cdot \varphi_n. \tag{12}$$

În relațiile (11) și (12) am însemnat

$$\begin{aligned}\Phi_n = {} & A_{3n}^2 \Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(1 - \frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\Bigg) + \frac{1}{\alpha_n}(\operatorname{ch}\alpha_n \sin\alpha_n - \operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n) + \\ & + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n - 1\Bigg) + A_{3n}\cdot A_{4n}\Bigg]\Bigg(1 - \frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\Bigg) - \Bigg(\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n - 1\Bigg) + \\ & + A_{4n}^2\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(1 - \frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\Bigg) - \frac{1}{\alpha_n}(\operatorname{ch}\alpha_n \sin\alpha_n - \operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n) + \\ & + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n - 1\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_n = {} & A_{3n}^2\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n - 1\Bigg) - \frac{1}{\alpha_n}(\operatorname{ch}\alpha_n \cdot \sin\alpha_n - \\ & - \operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n)\Bigg] + \frac{1}{2}\Bigg(1 - \frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\Bigg) - \\ & - A_{3n} A_{4n}\Bigg[\Bigg(\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n - 1\Bigg) - \Bigg(1 - \frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\Bigg)\Bigg] + \\ & + A_{4n}^2\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n - 1\Bigg) + \frac{1}{\alpha_n}(\operatorname{ch}\alpha_n \sin\alpha_n - \operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n) + \\ & + \frac{1}{2}\Bigg(1 - \frac{1}{2\alpha_n}\sin 2\alpha_n\Bigg)\Bigg],\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\varphi_n = {} & A_{3n}^2\Bigg[\frac{\alpha_n^2}{3} - \frac{1}{8}\cos 2\alpha_n + \frac{1}{16\,\alpha_n}\sin 2\alpha_n + \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha_n \sin\alpha_n + \operatorname{ch}\alpha_n \cos\alpha_n) - \frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{ch}\alpha_n \sin\alpha_n + \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha_n \sin\alpha_n - \operatorname{ch}\alpha_n \cos\alpha_n) + \frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n + \\ & + \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2\alpha_n - \frac{1}{16\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n\Bigg] + A_{3n}\cdot A_{4n}\Bigg[-\frac{1}{4}\cos 2\alpha_n + \\ & + \frac{1}{8\alpha_n}\sin 2\alpha_n - \frac{1}{4}\operatorname{ch} 2\alpha_n + \frac{1}{8\alpha_n}\operatorname{sh} 2\alpha_n\Bigg] + \\ & + A_{4n}^2\Bigg[\frac{\alpha_n^2}{3} - \frac{1}{8}\cos 2\alpha_n + \frac{1}{16\alpha_n}\sin 2\alpha_n - \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha_n \sin\alpha_n + \\ & + \operatorname{ch}\alpha_n \cos\alpha_n) + \frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{ch}\alpha_n \sin\alpha_n - \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha_n \sin\alpha_n - \\ & - \operatorname{ch}\alpha_n \cos\alpha_n) - \frac{1}{2\alpha_n}\operatorname{sh}\alpha_n \cos\alpha_n + \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2\alpha_n - \frac{1}{16}\operatorname{sh} 2\alpha_n\Bigg].\end{aligned} \tag{15}$$

Ecuațiile lui Lagrange se scriu acum pentru fiecare coordonată generalizată sub forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_n}\right] - \frac{\partial T}{\partial \zeta_n} + \frac{\partial V}{\partial \zeta_n} = F_n, \tag{16}$$

F_n fiind forța generalizată pentru coordonata ζ_n.

Înainte de a introduce expresiile energiei cinetice și potențiale în (16) este cu totul indicat să găsim expresia forței generalizate F_n.

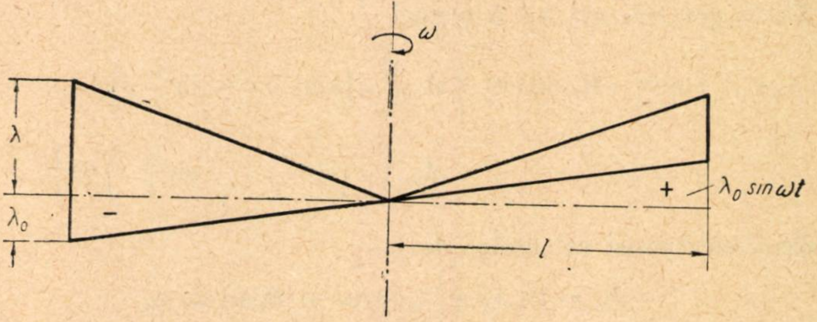


Fig. 2

Dăm creșterea $\Delta\zeta_n$ coordonatei ζ_n și punem flexiunea corespunzătoare a palei sub forma

$$\Delta z = \Delta\zeta_n\left[A_{3n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x + \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right) + A_{4n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right)\right]. \tag{17}$$

Forțele perturbatoare care intervin sînt cele aerodinamice și cele datorite mișcării de bătaie.

Fie λ și λ_0 încărcările aerodinamice la capătul palei independentă de timp respectiv cu variație sinusoidală (fig. 2).

Cum forța elementară într-o secțiune x datorită mișcării de bătaie este $x\ddot{\beta}dm$ singura dificultate ar fi cunoașterea unghiului de bătaie β.

Or, se știe că acesta se poate pune sub forma

$$\beta = a_0 - a_1\cos\omega t - b_1\sin\omega t, \tag{18}$$

coeficienții a_0, a_1, b_1 fiind dați de aerodinamica rotorului pentru pala rigidă.

Cu aceste precizări într-o secțiune la distanța x de axul de rotație, rezultanta forțelor elementare va produce travaliul elementar

$$\begin{aligned}\Delta L = \Delta\zeta_n(A_0 + A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t)\cdot\Big[A_{3n}x\Big(\sin\frac{\alpha_n}{l}x + \\ + \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\Big) + A_{4n}\cdot x\left(\sin\frac{\alpha_n}{l}x - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l}x\right)\Big]dx,\end{aligned} \tag{19}$$

unde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\lambda}{l}, \\ A_1 &= m\omega^2 a_1, \\ B_1 &= \frac{\lambda_0}{l} - m\omega^2 b_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Forța generalizată va fi atunci

$$\begin{aligned} F_n = (A_0 + A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t)\cdot \Big\{ A_{3n} \int_0^l x \left(\sin\frac{\alpha_n}{} x + \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l} x \right) dx + \\ + A_{4n} \int_0^l x \left(\sin\frac{\alpha_n}{l} x - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{l} x \right) dx \Big\}, \end{aligned} \tag{21}$$

care după efectuarea calculelor devine

$$F_n = l^2 (A_0 + A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t)\, \eta_n \tag{22}$$

unde

$$\begin{aligned} \eta_n = A_{3n} \left[\frac{1}{\alpha_n} (\operatorname{ch}\alpha_n - \cos\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_u^2} (\sin\alpha_n - \operatorname{sh}\alpha_n) \right] + \\ + A_{4n} \left[-\frac{1}{\alpha_n} (\cos\alpha_n + \operatorname{ch}\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n^2} (\operatorname{sh}\alpha_n + \sin\alpha_n) \right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Avînd cunoscută și expresia forțelor generalizate (22) după ce introducem expresiile (11) și (12) ale energiei cinetice și potențiale în ecuațiile (16) ale lui Lagrange, sîntem conduși la următoarele ecuații de mișcare pentru fiecare coordonată :

$$\ddot{\zeta}_n + \mu^2 \zeta_n = \nu (A_0 + A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t), \tag{24}$$

unde

$$\mu^2 = \frac{EI}{M} \left(\frac{\alpha_n}{l} \right)^4 \frac{\Lambda_n}{\Phi_n} + \omega^2 \frac{\varphi_n}{\Phi_n}, \tag{25}$$

$$\nu = \frac{l^2}{M} \cdot \frac{\eta_n}{\Phi_n}. \tag{26}$$

Ecuația (24) după cum ușor se constată este liniară de tipul cel mai cunoscut. O soluție a ecuației (24) este de tipul

$$\zeta_n = C_{1n} \cos\mu t + C_{2n} \sin\mu t + \nu \frac{A_0}{\mu^2} + \nu \frac{A_1}{\mu^2 - \omega^2} \cos\omega t + \nu \frac{B_1}{\mu^2 - \omega^2} \sin\omega t. \tag{27}$$

Cu aceasta ținînd seama de (1) ajungem la expresia deflecțiunii palei

$$\begin{aligned} z = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cos\mu t + C_{2n} \sin\mu t) y_n(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \left(\frac{A_0}{\mu^2} + \frac{A_1}{\mu^2 - \omega^2} \cos\omega t + \frac{B_1}{\mu^2 - \omega^2} \sin\omega t \right) y_n(x). \end{aligned} \tag{28}$$

Pentru practică este deosebit de important să se știe cînd apare rezonanța. Aceasta are natural loc cînd $z \to \infty$ cu alte cuvinte cînd $\mu^2 - \omega^2 \to 0$.

Din condiția ca $\mu^2 - \omega^2 = 0$ se obține viteza unghiulară de rezonanță la pătrat

$$\omega^2 = \frac{EIl}{M} \left(\frac{\alpha_n}{l} \right)^4 \frac{\Lambda_n}{\Phi_n - \varphi_n}, \tag{29}$$

a cărei expresie este asemănătoare cu cea găsită pentru palele Cantilever în lucrarea noastră [1], bineînțeles mărimile α_n, Λ_n, Φ_n, φ_n fiind altele.

Trebuie remarcat că în formula (29) funcțiile Λ_n, Φ_n, φ_n trebuie puse astfel, încît să conțină rapoartele λ_n sau $\frac{1}{\lambda_n}$, lucru care se poate face ușor dînd una din constantele A_{3n} sau A_{4n} în factor. Rapoartele λ_n se calculează din relațiile (10). Pe calea descrisă în lucrarea de față problema vibrațiilor palelor articulate în plan vertical capătă o rezolvare simplă spre deosebire de cele întîlnite în alte lucrări de acest gen.

În afară de aceasta, avem posibilitatea determinării formei modale susceptibilă de rezonanță în gama vitezelor unghiulare de lucru ale elicopterului.

Dacă modul respectiv de deformare al palei este constructiv împiedicat (prin ramforsare locală) avem un remediu contra apariției rezonanței sau cel puțin al diminuării efectelor ei.

Primit la redacție la 18 iulie 1958

О РЕЗОНАНСНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ШАРНИРНЫХ ЛОПАСТЕЙ ВЕРТОЛЕТНЫХ НЕСУЩИХ КРЫЛЬЕВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе рассматриваются вынужденные колебания в вертикальной плоскости шарнирных лопастей вертолетных несущих крыльев, причем приводится явная формула для определения их резонансной угловой скорости.

SUR LA VITESSE DE RÉSONANCE DES PALES ARTICULÉES DES ROTORS D'HÉLICOPTÈRE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie, dans ce travail, les vibrations forcées, en plan vertical, des pales articulées des rotors d'hélicoptère et donne une formule explicite pour déterminer leur vitesse angulaire à la résonance.

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Vibrațiile forțate ale rotoarelor de elicopter cu pale Cantilever.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2* (1958).
2. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations.* Paris, Liège, 1948.

HIDROMECANICĂ

ASUPRA CREŞTERII PRESIUNII ÎNTR-O SONDĂ DUPĂ ÎNCHIDEREA ACESTEIA

DE

TEODOR OROVEANU şi ELEONORA SILVEANU

1. *Introducere.* Într-o lucrare anterioară [4], am considerat scurgerea cu variaţii rapide de presiune a unui lichid compresibil printr-un mediu poros şi am stabilit pentru presiune ecuaţia

$$f\beta\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \tag{1}$$

în care f este porozitatea, β coeficientul de compresibilitate al lichidului, ρ_0 masa specifică a acestuia, corespunzătoare unei presiuni de referinţă p_0, μ vîscozitatea lichidului şi k permeabilitatea mediului poros.

În deducerea ecuaţiei precedente, am admis că β, μ şi k sînt constante. Pentru scurgerile plane-radiale de care ne vom ocupa în cele ce urmează, avem

$$f\beta\rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{f\beta\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2}$$

şi dacă introducem variabilele adimensionale

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \qquad \bar{t} = \frac{k}{f\beta\mu}\,\frac{t}{r_0^2}, \tag{3}$$

ecuaţia (2) ia forma

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial p}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{4}$$

constanta pozitivă şi adimensională α^2 fiind definită prin relaţia

$$\alpha^2 = \frac{f\beta\mu^2 r_0^2}{k^2\rho_0}. \tag{5}$$

Vom aplica ecuația (4) la studiul unei probleme binecunoscute și anume la stabilirea modului în care crește presiunea într-o sondă care a fost închisă. În acest caz, se produc într-un timp relativ scurt variații mari de presiune și tratarea matematică a fenomenului cu ajutorul ecuației de mai sus ni se pare potrivită.

În afară de faptul că ne referim la un lichid omogen și compresibil, am admis, pentru simplificare, ipotezele uzuale și anume că sonda se închide instantaneu, iar o dată cu oprirea sondei afluxul de lichid din strat în sondă încetează. Această ultimă ipoteză, care revine la neglijarea compresibilității fluidului aflat în coloana sondei, este echivalentă cu presupunerea că sonda se închide la fund.

În ceea ce privește regimul inițial de scurgere, vom considera două cazuri și anume acela al unui zăcămînt cu presiune constantă pe conturul exterior și acela al unui zăcămînt închis. Aceste situații limită, astfel alese, ne vor permite să facem calcule comparative cu soluțiile existente.

2. *Cazul unui zăcămînt cu presiune constantă pe conturul exterior*. Să considerăm un zăcămînt circular de rază r_c în centrul căruia se găsește o sondă de rază r_s. Ca lungime caracteristică r_0, ce intervine în relațiile (3), vom alege raza sondei r_s, astfel că vom avea

$$\bar{r} = \frac{r}{r_s}, \qquad \bar{t} = \frac{k}{f\beta\mu}\,\frac{t}{r_s^2}, \qquad \alpha^2 = \frac{f\beta\mu^2 r^2}{k^2 \rho_0}. \tag{6}$$

Admitem, de asemenea, că în momentul închiderii sondei erau realizate practic condițiile unei scurgeri staționare, repartiția inițială a presiunii avînd deci forma [1]

$$p = \frac{p_c - p_{si}}{\log \bar{r}_c} \log \bar{r} + p_{si}, \tag{7}$$

cu p_c presiunea pe contur și p_{si} presiunea la sondă în momentul închiderii. Pentru ușurarea calculelor, introducem funcția

$$\bar{p} = \frac{p_c - p}{p_c - p_{si}}, \tag{8}$$

astfel că ecuația (4) se scrie

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}. \tag{9}$$

Condițiile la limită ale problemei se găsesc cu destulă ușurință. Astfel, deoarece pe conturul exterior presiunea este constantă și egală cu p_c, avem

$$\bar{r} = \bar{r}_c, \qquad \bar{p} = 0. \tag{10}$$

De asemenea, condiția ca lichidul să nu mai pătrundă în sondă după închidere are forma

$$r = 1, \qquad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = 0. \tag{11}$$

Dacă admitem însă că raza sondei este mică în raport cu raza conturului, ceea ce corespunde cu realitatea, putem considera cazul limită în care raza sondei este nulă, fapt care, după cum vom vedea, face să nu mai intervină explicit condiţia (11) şi simplifică în acelaşi timp rezolvarea.

În ceea ce priveşte condiţiile iniţiale, una dintre acestea este dată de (7) şi pentru funcţia $\bar{p}$ devine

$$\bar{t} = 0, \qquad \bar{p} = 1 - \frac{\log \bar{r}}{\log \bar{r}_c}. \tag{12}$$

O a doua condiţie se obţine scriind că în momentul iniţial distribuţia presiunii este staţionară

$$\bar{t} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} = 0. \tag{13}$$

Soluţia ecuaţiei (9), cu condiţiile stabilite, se poate găsi prin separarea variabilelor. Dacă punem

$$\bar{p} = T(\bar{t})\, R(\bar{r}), \tag{14}$$

găsim cu uşurinţă, pentru funcţiile astfel introduse, ecuaţiile

$$\frac{d^2 T}{d\bar{t}^2} + \alpha^2 \frac{dT}{d\bar{t}} + \alpha^2 \lambda_n^2 T = 0 \tag{15}$$

şi

$$\frac{d^2 R}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{dR}{d\bar{r}} + \lambda_n^2 R = 0, \tag{16}$$

λ_n^2 fiind o constantă pozitivă.

Prima dintre aceste ecuaţii are soluţia generală

$$T = C_{1n}\, e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2}\bar{t}} + C_{2n}\, e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2}\bar{t}} \tag{17}$$

cu

$$\omega_n = \alpha \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda_n^2}, \tag{18}$$

iar a doua

$$R = C_{3n} J_0(\lambda_n \bar{r}) + C_{4n} Y_0(\lambda_n \bar{r}), \tag{19}$$

unde $J_0(\lambda_n \bar{r})$ şi $Y_0(\lambda_n \bar{r})$ sînt funcţiile Bessel de ordinul zero, respectiv de prima şi a doua specie. Deoarece am presupus că neglijăm raza sondei, soluţia trebuie să fie regulată în toate punctele din interiorul cercului de rază $\bar{r}_c$, astfel că funcţia $Y_0(\lambda_n \bar{r})$ care are o singularitate logaritmică în origine dispare din soluţie. Rezultă prin urmare

$$C_{4n} = 0 \tag{20}$$

şi soluţia căutată are forma

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\, e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2}\bar{t}} + B_n\, e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2}\bar{t}} \right) J_0(\lambda_n \bar{r}). \tag{21}$$

Condiția la limită (10) este satisfăcută dacă avem

$$J_0(\lambda_n \bar{r}_c) = 0, \tag{22}$$

și dacă notăm cu x_n zerourile funcției Bessel de prima specie de ordinul zero, λ_n rezultă prin urmare din relația

$$\lambda_n = \frac{x_n}{\bar{r}_c}. \tag{23}$$

O dată determinate valorile proprii λ_n, putem stabili și caracterul variației în timp a soluției, care depinde de faptul dacă ω_n este real sau imaginar. În acest scop, vom determina o valoare a parametrului α^2 despre care să putem spune că este apropiată de aceea minimă posibilă. Ajungem la acest rezultat alegînd pentru mărimile care intervin în expresia (6) a lui α^2 valori corespunzătoare scopului urmărit. Astfel, dacă luăm o porozitate $f = 0{,}2$, destul de obișnuită, un coeficient de compresibilitate foarte mic $\beta = 10^{-5}\ \mathrm{cm^2/kg}$, o vîscozitate de asemenea redusă $\mu = 1$ cP, o permeabilitate foarte mare $k = 1$D și o masă specifică $\rho_0 = 80\ \mathrm{kgs^2/m^4}$, în limitele normale, rezultă $\alpha^2 = 249{,}69$. Pe de altă parte, dacă luăm $r_s = 0{,}1$ m și $r_c = 100$ m, obținem $\bar{r}_c = 1\,000$, valoare situată către limita inferioară, deoarece raza r_c aleasă este mică. Avem deci $\lambda_n = 10^{-3}\, x_n$ și de exemplu pentru $x_{40} = 124{,}8793$ obținem $\lambda_{40} = 0{,}1248793$, respectiv $4\lambda_{40}^2 = 0{,}062379$. Diferența $\alpha^2 - 4\lambda_n^2$ este deci departe de a se anula pentru $n = 40$ și devine negativă numai pentru n foarte mare. Vom arăta însă mai departe că acest fapt este lipsit de importanță practică, deoarece pentru n foarte mare termenii corespunzători ai seriei din (21), la un $\bar{t}$ dat, sînt practic neglijabili. Ca atare, pentru valorile lui n care intră în considerație, soluția găsită rămîne aperiodică în timp.

Mergînd mai departe, din condiția (13) obținem cu ușurință

$$B_n = \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n + \alpha^2} A_n, \tag{24}$$

astfel că (21) devine

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2}\bar{t}} + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n + \alpha^2} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2}\bar{t}} \right) J_0(\lambda_n \bar{r}). \tag{25}$$

Constantele A_n se determină dezvoltînd condiția inițială (12) în serie Fourier-Bessel

$$1 - \frac{\log \bar{r}}{\log \bar{r}_c} = f(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\lambda_n \bar{r}) \tag{26}$$

și identificînd termen cu termen cu (25) în care punem $\bar{t} = 0$. După cum se știe, coeficientul D_n are expresia

$$D_n = \frac{2}{\bar{r}_c^2 J_1^2(\lambda_n \bar{r}_c)} \int_0^{\bar{r}_c} \bar{r} f(\bar{r}) J_0(\lambda_n \bar{r})\, d\bar{r}. \tag{27}$$

Integralele care intervin în calculul acestui coeficient sînt binecunoscute aşa că nu credem necesar să mai insistăm asupra lor. În cele din urmă, se găseşte

$$D_n = \frac{2}{\lambda_n^2 \bar{r}_c^2 \log \bar{r}_c J_1^2(\lambda_n \bar{r}_c)} \tag{28}$$

şi

$$A_n = \frac{\omega_n + \alpha^2}{2\,\omega_n} D_n = \frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n [\lambda_n^2 \bar{r}_c^2 \log \bar{r}_c J_1^2(\lambda_n \bar{r}_c)]}, \tag{29}$$

astfel că soluţia ia forma

$$\bar{p} = \frac{1}{\bar{r}_c^2 \log \bar{r}_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar{t}} + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2} \bar{t}} \right) \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n \bar{r}_c)}, \tag{30}$$

$J_1(\lambda_n \bar{r}_c)$ fiind funcţia Bessel de speţa întîi şi de ordinul întîi.

Dacă utilizăm relaţia (23) şi punem, de asemenea,

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}}{\bar{r}_c} \tag{31}$$

expresia (30) devine

$$\bar{p} = \frac{1}{\log \bar{r}_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar{t}} + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2} \bar{t}} \right) \frac{J_0(x_n \bar{R})}{x_n^2 J_1^2(x_n)}. \tag{32}$$

Pentru scopul pe care îl urmărim, este suficient să calculăm valorile funcţiei

$$p_s = \frac{p_c - p_s}{p_c - p_{si}} \tag{33}$$

şi deoarece $J_0(x_n \bar{R})$ tinde către unitate atunci cînd $\bar{R}$ tinde către zero, ceea ce înseamnă că folosim din nou simplificarea de a considera raza sondei neglijabilă, obţinem

$$\bar{p}_s = \frac{1}{\log \bar{r}_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar{t}} + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2} \bar{t}} \right) \frac{1}{x_n^2 J_1^2(x_n)}. \tag{34}$$

În efectuarea calculelor numerice, formula (34) este susceptibilă de unele simplificări, datorită faptului că ω_n are valori foarte apropiate de α^2. Într-adevăr deoarece α^2 este mare faţă de $4\lambda_n$ pentru toate valorile indicelui n care intervin în calcule, diferenţa $\omega_n - \alpha^2$ este foarte mică, aşa cum se observă imediat din (18). De asemenea, suma $\omega_n + \alpha^2$ este mare în valoare absolută, aşa că, pentru cazurile uzuale termenul al doilea din paranteza din (34) poate fi neglijat.

Pentru exemplificare, am executat un calcul plecînd de la următoarele date : $f = 0{,}2$, $\beta = 5 \times 10^{-5}$ cm²/kg, $\mu = 1$ cP, $k = 0{,}3$ D, $\rho_0 = 80$ kgs²/m⁴. Am ales de asemenea, $r_s = 0{,}1$ m, $r_c = 200$ m, astfel că am obținut $\alpha^2 = 13871{,}69$, $\bar{r} = 0{,}1\,r$, $\bar{t} = 300{,}186\,t$ (cu timpul exprimat în secunde). Rezultatele calculului, notate cu $\bar{p}_{sII}$ sînt cuprinse în tabela 1.

Tabela 1

$\bar{t}$	$\bar{p}_{sI}$	$\bar{p}_{sII}$
10^2	0,597 649 827	0,597 204 627
2.10^2	0,577 817 826	0,577 175 338
5.10^2	0,534 912 133	0,533 520 622
10^3	0,492 097 078	0,489 740 791
5.10^3	0,386 094 374	0,376 507 867
10^4	0,340 941 603	0,323 129 837
10^5	0,189 392 389	0,109 569 901
2.10^5	0,143 876 798	0,047 578 166
5.10^5	0,083 599 188	0,005 338 557
10^6	0,039 802 863	0,000 164 219

Pentru comparație, am tratat același exemplu de calcul și cu ajutorul soluției cunoscute [1], [3], care se obține prin rezolvarea ecuației

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}, \tag{35}$$

în care $\bar{p}$, $\bar{r}$ și $\bar{t}$ sînt definiți ca mai sus. Se găsește astfel cu condiția inițială (12) și condiția la limită (10)

$$\bar{p}_s = \frac{2}{\log \bar{r}_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_1^2(x_n)}, \tag{36}$$

λ_n și x_n avînd aceeași semnificație ca și în calculele precedente. Rezultatele sînt trecute tot în tabela 1, unde sînt notate cu $\bar{p}_{sI}$. Curbele respective se află trasate în figura 1. În calcule, pentru ambele soluții, au fost considerați, în principiu cîte 40 termeni ai seriei, la fiecare valoare a lui $\bar{t}$. În amîndouă cazurile, s-a constatat că pentru $\bar{t}$ mic, convergența seriei nu este bună, rezultatele obținute prin însumarea a 40 termeni fiind destul de aproximative. Acest fapt nu are o însemnătate deosebită deoarece timpul efectiv corespunzător este extrem de mic. Astfel, în ambele cazuri, pentru $\bar{t} = 5\,000$, care corespunde la un timp efectiv $t = 16{,}656$ s, convergența devine bună, fiind suficient să se însumeze un număr de termeni mai mic decît cel ales inițial.

Din examinarea datelor din tablou și a figurii *) rezultă că pentru $\bar{t}$ mic, cele două soluții sînt foarte apropiate. Diferențe sensibile apar pentru valori mai mari ale lui $\bar{t}$, iar timpul în care presiunea la sondă ajunge la valoarea presiunii de pe contur este mai scurt în cazul soluţiei date de noi. Astfel, pentru $\bar{t} = 10^6$, ceea ce corespunde la un timp efectiv $t = 55{,}52$ min, presiunea este practic restabilită, în timp ce pentru soluţia cunoscută, la acelaşi moment, mai există încă o diferenţă de presiune între sondă şi contur, aproximativ de 4% faţă de căderea de presiune iniţială.

---

*) În figură, pe scara absciselor sînt trecuți logaritmii naturali ai lui $\bar{t}$, numai pentru valorile calculate.

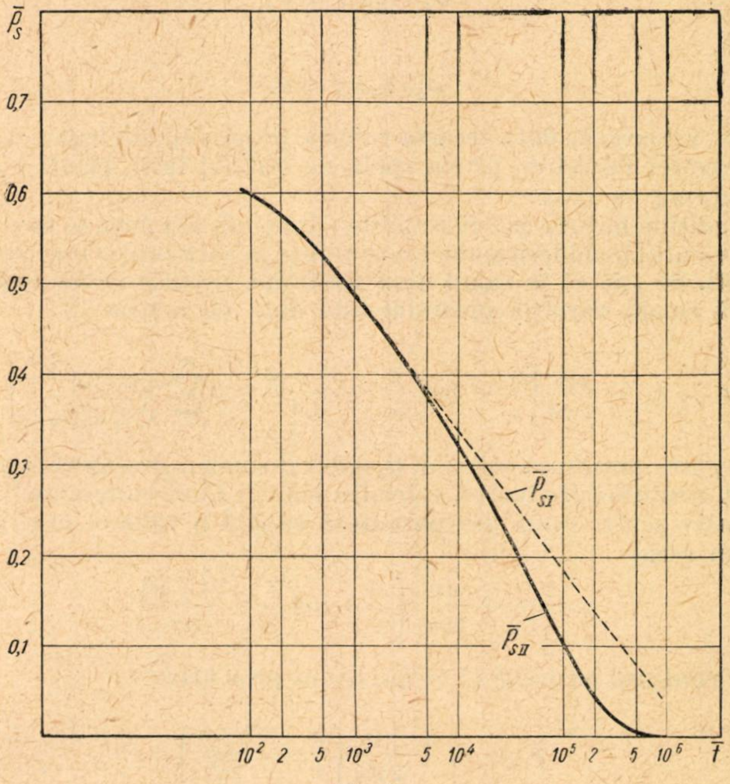


Fig. 1

3. *Cazul unui zăcămînt închis* (*limitat de un strat impermeabil*). Trecînd la studiul celei de-a doua situaţii extreme, vom considera tot un zăcămînt circular de rază r_c în centrul căruia se află o sondă de rază r_s şi prin intermediul relaţiilor (6) şi (8) vom ajunge la ecuaţia (9). Observăm că de data aceasta vom scrie la numitor în relaţia (8) diferenţa $p_c - p_s$, despre care vom arăta că este constantă în timp, deşi atît p_c cît şi p_s variază. Condiţiile la limită au acum forma

$$\bar{r} = \bar{r}_c, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = 0, \tag{37}$$

şi

$$\bar{r} = 1, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = 0. \tag{38}$$

Dacă presupunem ca și în cazul precedent că r_s este foarte mic față de r_c astfel că poate fi presupus nul, ajungem pe o cale analoagă cu acceea utilizată mai sus la o soluție de forma (21). După cum se observă cu ușurință, condiția la limită (37) este satisfăcută dacă avem

$$J_0'(\lambda_n \bar{r}_c) = 0, \tag{39}$$

respectiv,

$$J_1(\lambda_n \bar{r}_c) = 0. \tag{40}$$

Prin urmare, de data aceasta valorile proprii λ_n sînt legate de zerourile x_n ale funcției Bessel de prima speță de ordinul întîi, printr-o relație de aceeași formă cu (23).

Condițiile inițiale pot fi stabilite admițînd, așa cum se face de obicei, că în momentul închiderii sondei se stabilise în zăcămînt o scurgere pseudo-staționară. Se știe că în cazul unui zăcămînt circular închis exploatat de o singură sondă variația presiunii este dată de relația [3]

$$p = p_i + \frac{\mu Q_s}{2\pi hk}\left[\frac{3}{4} + \log\frac{\bar{r}}{\bar{r}_c} - \frac{\bar{r}^2 + 4\bar{t}}{2\bar{r}_c^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n \bar{r})\, e^{-\lambda_n^2 \bar{t}}}{\lambda_n^2 \bar{r}_c^2 J_0^2(\lambda_n \bar{r}_c)}\right], \tag{41}$$

în care p_i este presiunea inițială, Q_s debitul sondei, presupus constant și h grosimea stratului productiv, celelalte notații fiind cunoscute*). După un timp relativ scurt, suma din paranteză capătă o valoare neglijabilă, așa că putem scrie

$$p = p_i + \frac{\mu Q_s}{2\pi hk}\left(\frac{3}{4} + \log\frac{\bar{r}}{\bar{r}_c} - \frac{\bar{r}^2 + 4\bar{t}}{2\bar{r}_c^2}\right). \tag{42}$$

Pe conturul exterior ($\bar{r} = \bar{r}_c$), avem prin urmare

$$p_c = p_i + \frac{\mu Q_s}{2\pi hk}\left(\frac{3}{4} - \frac{\bar{r}_c^2 + 4\bar{t}}{2\bar{r}_c^2}\right), \tag{43}$$

iar la sondă ($\bar{r} = 1$)

$$p_s = p_i + \frac{\mu Q_s}{2\pi hk}\left(\frac{3}{4} - \log\bar{r}_c - \frac{1 + 4\bar{t}}{2\bar{r}_c^2}\right), \tag{44}$$

de unde rezultă

$$p_c - p_s = \frac{\mu Q_s}{2\pi hk}\left(\log\bar{r}_c + \frac{1 - \bar{r}_c^2}{2\bar{r}_c^2}\right). \tag{45}$$

Așadar, presiunea diferențială este independentă de timp, ceea ce, împreună cu faptul că debitul este constant, justifică denumirea de scurgere pseudo-staționară introdusă mai sus.

---

*) În [3] această formulă este dată pentru variația masei specifice ρ, însă în cadrula proximațiilor care conduc la ecuația (1), înlocuirea lui ρ cu p este posibilă.

Ţinînd seama de (42), (43) şi (45), putem scrie deci condiţia iniţială *)

$$\bar t = 0, \quad \bar p = \frac{p_c - p}{p_c - p_s} = \frac{\bar r^2 - \bar r_c^2 - 2\bar r_c^2 \log \frac{\bar r}{\bar r_c}}{1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c} . \tag{46}$$

A doua condiţie iniţială are aceeaşi formă ca şi în cazul precedent (13), deoarece funcţia $\bar p$ este independentă de timp în momentul iniţial. Prin urmare, constantele A_n şi B_n din (21) sînt legate tot prin relaţia (24) şi în cele din urmă obţinem

$$p = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar t} + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n + \alpha^2} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2} \bar t} \right) J_0(\lambda_n \bar r), \tag{47}$$

constanta A_0 fiind introdusă din motive ce vor fi arătate mai jos.

Pentru determinarea constantelor A_n vom utiliza acelaşi procedeu ca şi în cazul precedent şi anume dezvoltarea condiţiei iniţiale (46) într-o serie de forma

$$\frac{\bar r^2 - \bar r_c^2 - 2\bar r_c^2 \log \frac{\bar r}{\bar r_c}}{1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c} = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\lambda_n \bar r) \tag{48}$$

în care termenul aditiv D_0 are expresia

$$D_0 = 2 \int_0^{\bar r_c} \frac{\bar r^2 - \bar r_c^2 - 2\bar r_c^2 \log \frac{\bar r}{\bar r_c}}{1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c} \frac{\bar r \, d\bar r}{\bar r_c^2} = \frac{\bar r_c^2}{2(1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c)} . \tag{49}$$

Apariţia acestui termen se datoreşte faptului că (48) este o serie Dini-Bessel, λ_n rezultînd din (40). În ceea ce priveşte ceilalţi coeficienţi din (48), aceştia se calculează cu ajutorul formulei

$$D_n = \frac{2}{\bar r_c^2 J_0^2(\lambda_n \bar r_c)} \int_0^{\bar r_c} \frac{\bar r^2 - \bar r_c^2 - 2\bar r_c^2 \log \frac{\bar r}{\bar r_c}}{1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c} J_0(\lambda_n \bar r) \, \bar r \, d\bar r, \tag{50}$$

care ne dă, după calcule simple,

$$D_n = \frac{4}{(1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c) \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \bar r_c)} . \tag{51}$$

Prin identificare, găsim aşadar

$$A_0 = D_0 = \frac{\bar r_c^2}{2(1 - \bar r_c^2 + 2\bar r_c^2 \log \bar r_c)} \tag{52}$$

---

*) În deducerea acestei condiţii, am urmat raţionamentul expus în [2].

şi

$$A_n = \frac{\omega_n + \alpha^2}{2\omega_n} D_n = \frac{2(\omega_n + \alpha^2)}{\omega_n (1 - \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c^2 \log \bar{r}_c) \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \bar{r}_c)}, \tag{53}$$

astfel că expresia (47) devine

$$\bar{p} = \frac{\bar{r}_c^2}{2(1 - \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c \log \bar{r}_c)} + \frac{2}{1 - \bar{r}_c^2 + 2\bar{r}_c^2 \log \bar{r}_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar{t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n + \alpha^2}{2} \bar{t}} \right) \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \bar{r}_c)}. \tag{54}$$

Dacă observăm că putem neglija unitatea în raport cu $\bar{r}_c$ rezultă

$$\bar{p} = \frac{1}{2(2 \log \bar{r}_c - 1)} + \frac{2}{2 \log \bar{r}_c - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar{t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^2}{2} \bar{t}} \right) \frac{J_0(x_n \bar{R})}{x_n^2 J_0^2(x_n)}, \tag{55}$$

unde am utilizat relaţiile (23) şi (31).

Prin urmare, ţinînd seama de faptul că raza sondei este presupusă neglijabilă obţinem

$$\bar{p}_s = \frac{1}{2(2 \log \bar{r}_c - 1)} + \frac{2}{2 \log \bar{r}_c - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_n + \alpha^2}{\omega_n} e^{\frac{\omega_n - \alpha^2}{2} \bar{t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_n - \alpha^2}{\omega_n} e^{-\frac{\omega_n + \alpha^3}{2} \bar{t}} \right) \frac{1}{x_n^2 J_0^2(x_n)}. \tag{56}$$

Ca aplicaţie am calculat un exemplu numeric cu aceleaşi date ca şi în cazul precedent. Rezultatele, notate cu $\bar{p}_{sII}$ sînt cuprinse în tabela 2.

Tabela 2

$\bar{t}$	$\bar{p}_{sI}$	p_{sII}
10^2	0,571 573 639	0,571 206 661
2.10^2	0,550 930 538	0,550 356 794
5.10^2	0,506 158 412	0,505 087 362
10^3	0,462 060 510	0,460 078 463
5.10^3	0,355 372 375	0,347 241 786
10^4	0,310 983 586	0,296 775 353
10^5	0,174 992 079	0,116 196 225
2.10^5	0,138 674 388	0,069 392 052
5.10^5	0,093 998 664	0,038 956 419
10^6	0,063 084 109	0,035 321 804

Pentru comparaţie, am tratat acelaşi exemplu de calcul şi cu ajutorul soluţiei cunoscute a ecuaţiei (35), cu condiţia iniţială (46) şi condiţia la limită (37), de asemenea, în ipoteza că se neglijează raza sondei. Se găseşte astfel [2]

$$\bar{p}_s = \frac{1}{2\,(2\log \bar{r}_c - 1)} + \frac{4}{2\log \bar{r}_c - 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 \bar{t}}}{x_n^2 J_0^2(x_n)}, \qquad (57)$$

λ_n şi x_n avînd aceeaşi semnificaţie ca şi în (56). Rezultatele sînt de asemenea trecute în tabela 2, unde sînt notate cu $\bar{p}_{sI}$. Curbele respective se află trasate în figura 2 *). Calculele au decurs în mod asemănător cu cele din exemplul precedent, în sumarea seriilor, pentru fiecare valoare a lui $\bar{t}$ fiind luaţi în considerare cîte 40 termeni. Şi în acest caz, pentru t mic, convergenţa nu este bună, dar cu începere de la $\bar{t} = 5\,000$, care corespunde, după cum am arătat, unui timp efectiv destul de redus, convergenţa devine mai mult decît satisfăcătoare. Diferenţele dintre cele două soluţii sînt asemănătoare cu cele constatate în primul caz tratat, aşa cum rezultă din

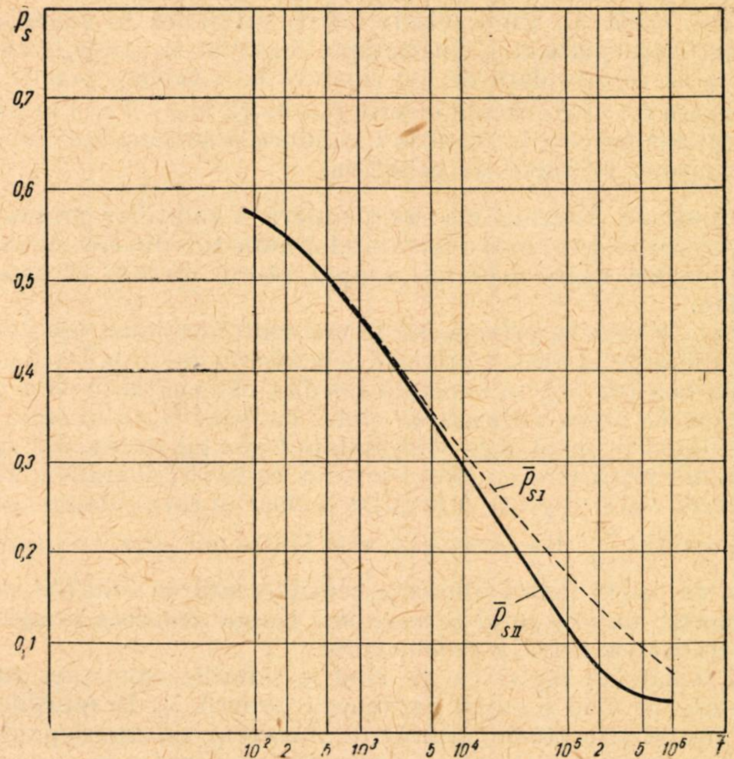


Fig. 2

---

*) În figură, pe scara absciselor sînt trecuţi logaritmii naturali ai lui $\bar{t}$, numai pentru valorile calculate.

examinarea comparativă a celor două figuri. Remarcăm însă că în cel de-al doilea caz, presiunea în sondă nu mai devine egală cu presiunea inițială de pe contur ci se stabileşte la o presiune de echilibru p_e, aceeaşi în tot zăcămîntul, care se poate calcula din expresia

$$\bar{p}_{se} = \frac{p_c - p_e}{p_c - p_s} = \frac{2}{2(2\log\bar{r}_c - 1)} . \tag{58}$$

Teoretic, presiunea p_e se atinge atunci cînd timpul devine infinit. În realitate, după un timp relativ scurt, presiunea la sondă capătă o valoare foarte apropiată de p_e. În exemplul calculat, în care $\bar{p}_{se} = 0{,}0352068$ se constată că soluția dată de noi conduce la o valoare practic egală cu aceasta pentru $\bar{t} = 10^6$ (timpul efectiv $t = 55{,}52$ min). Ca şi în primul caz tratat, soluția cunoscută în literatură, conduce la un timp mai lung necesar pentru atingerea presiunii de echilibru.

4. *Concluzii.* Examinarea comparativă a soluțiilor propuse de noi şi a celor existente precum şi a rezultatelor numerice din cele două exemple de calcul, indică unele deosebiri asupra cărora credem că este necesar să insistăm.

Astfel, în ceea ce priveşte structura soluțiilor, apar, aşa cum era de aşteptat, diferențe în ceea ce priveşte dependența de timp. Dacă ne referim la lucrarea noastră [4], se constată imediat că ecuația (1) din prezentul studiu diferă de aceea utilizată de obicei datorită faptului că în loc de a introduce direct în ecuația de continuitate legea lui Darcy, am considerat şi variația în timp a vitezei. Este adevărat că în [5] se arată că în general efectul acestei variații poate fi neglijat şi chiar în cazul nostru coeficientul $\frac{1}{\alpha^2}$ al termenului $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{t}^2}$ din ecuația (4) este foarte mic, dar, cu toate acestea, exemplele de calcul indică diferențe sensibile față de soluțiile cunoscute. Punctul nostru de vedere ni se pare mai corect deoarece se apropie mai mult de realitatea fizică a fenomenului.

Mai remarcăm faptul că, pe cînd la soluțiile cunoscute variația în timp depinde în mod esențial de valorile proprii λ_n, la soluțiile noastre apare cu un rol important parametrul α^2 a cărui valoare depinde atît de proprietățile lichidului cît şi de acelea ale mediului poros.

Primit la redacție la 3 iunie 1959

О ВОЗРАСТАНИИ ДАВЛЕНИЯ В СКВАЖИНЕ ПОСЛЕ ЕЕ ЗАКРЫТИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя из установленного в одной из предыдущих работ (4) уравнения, исследуется явление восстановления давления в скважине после ее закрытия. Рассматривается случай радиальной симметрии и задача исследуется в двух вариантах, различных с точки зрения граничных и начальных условий. Так, сначала приводится решение для пласта с постоянным давлением на контуре, а затем для закрытого пласта. В обоих случаях при помощи численных расчетов проводится сравнение с известными решениями.

SUR LA REMONTÉE DE PRESSION DANS UN PUITS APRÈS SA FERMETURE

RÉSUMÉ

Prenant pour point de départ l'équation établie dans un travail antérieur [4], on étudie le phénomène de la remontée de pression dans un puits après sa fermeture. On considère le cas de la symétrie radiale et on traite le problème dans deux situations différentes, au point de vue des conditions aux limites et des conditions initiales. On donne d'abord la solution pour une couche alimentée à distance finie et ensuite, pour une couche limitée par une paroi imperméable. Pour les deux cas, on fait la comparaison avec les solutions connues, par l'intermédiaire des calculs numériques.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Cristea, *Hidraulica subterană.* **I**, Editura tehnică, Bucureşti, 1956, 89, 255.
2. A. Houpeurt, *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux.* Extrait de la Revue de l'Institut français du pétrole et Annales des combustibles liquides, Paris, 1957, 191, 197.
3. M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.* Mac Graw Hill, New York, 1937, 640, 657.
4. T. Oroveanu, H. Pascal, *Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *3*, 625 (1958).
5. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*, ГИТТЛ, Москва, 1952, 36.

HIDROMECANICĂ

O METODĂ PENTRU DETERMINAREA PERMEABILITĂȚII UNUI MEDIU POROS

DE

H. PASCAL *)

Într-o lucrare precedentă [1] s-a studiat propagarea undelor de presiune într-un lichid care se scurge printr-un mediu poros, omogen și izotrop.

Rezultatele obținute ne permit acum să putem stabili, în anumite cazuri practice, valoarea permeabilității stratului petrolifer sau acvifer.

În prezent, pentru cunoașterea acestui parametru, în afara metodei de laborator, se utilizează metode analitice cu ajutorul cărora este posibilă prelucrarea datelor obținute din curbele restabilirii presiunii de fund [2].

Aplicarea procedeului menționat necesită un anumit timp de închidere a sondei care, bineînțeles, depinde de compresibilitatea fluidului, permeabilitatea stratului și de alți factori.

În lucrarea de față, se propune o metodă bazată pe prelucrarea datelor obținute din măsurarea oscilațiilor presiunii, care apar în urma propagării undelor. Prin utilizarea acestei metode, determinarea permeabilității se obține fără a mai fi necesară închiderea sondei.

★

În conformitate cu rezultatele stabilite, ecuația propagării undelor de presiune are forma [1]

$$\rho_0 f \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\mu f}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

pentru masa specifică și

$$\rho_0 f \beta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\mu f}{k} \beta \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \tag{2}$$

---

*) Institutul de cercetări pentru foraj și extracție, Cîmpina.

pentru presiune, unde s-a notat cu f — porozitatea mediului, β — coeficientul de compresibilitate a lichidului, μ — vîscozitatea dinamică şi k — permeabilitatea mediului poros.

Pentru deducerea ecuaţiilor (1) şi (2) s-a admis că masa specifică ρ variază în raport cu presiunea după legea [3]

$$\rho = \rho_0 \exp \beta (p - p_0), \tag{3}$$

iar filtrarea se efectuează în domeniul valabilităţii legii lui Darcy ; ρ_0 reprezentînd valoarea masei specifice la presiunea de referinţă p_0.

Ecuaţiile (1) şi (2) fiind identice cu ecuaţia telegrafiştilor, rezolvarea lor nu prezintă nici o dificultate.

Astfel, vom presupune că într-o sondă, numită sondă de excitaţie, se realizează un regim periodic de variaţie a presiunii de fund, care acţionează un timp suficient de lung*).

Mai departe, presupunem că într-o sondă, numită sondă de reacţie, înregistrăm grafic, cu ajutorul unui manometru de fund sensibil, oscilaţiile presiunii. Atunci, evident, vom avea de soluţionat o problemă fără condiţii iniţiale, întrucît ele sînt importante numai în primele momente ale mişcării ; după un anumit timp influenţa lor este practic neglijabilă.

Aşadar, în aceste condiţii soluţia ecuaţiei (2), dacă ne referim la spaţiul monodimensional, va fi**)

$$p(x, t) = \sum_m \left(A \cos \frac{m\lambda_m}{a} x + B \sin \frac{m\lambda_m}{a} x \right) \exp im\omega t, \tag{4}$$

unde λ_m, care reprezintă numerele caracteristice ale sistemului fundamental de soluţii particulare, are valoarea

$$\lambda_m^2 = \omega^2 - \frac{ib\omega}{m}, \tag{5}$$

iar pentru a şi b avem

$$a^2 = \frac{1}{f\rho_0\beta}, \qquad b = \frac{\mu}{k\rho_0}. \tag{6}$$

Notînd prin α_m partea reală şi prin β_m partea imaginară a lui $\frac{\lambda_m}{a}$ vom obţine

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{m^2\omega^2}}}, \\ \beta_m &= \frac{\omega}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{m^2\omega^2}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

---

*) Perturbaţiile din sonda de excitaţie, în funcţie de amplitudinea presiunii, compresibilitatea lichidului şi permeabilitatea mediului poros, se vor propaga în strat pînă la o oarecare distanţă. Regimul periodic de variaţie a presiunii de fund se realizează prin modificarea periodică a debitului sondei de excitaţie, de exemplu : schimbarea duzelor la intervale egale de timp.

**) $0 < x < l$.

În cele ce urmează, pentru a reduce raționamentele matematice și unele transformări intermediare, introducem mărimi complexe.

În acest scop, considerăm condițiile la limită sub forma

$$\begin{aligned} p(0, t) &= \sum_m |A_m| \exp i(m\omega t - \theta_m), \\ p(l, t) &= \sum_m |B_m| \exp i(m\omega t - \varphi_m). \end{aligned} \tag{8}$$

Amplitudinile A_m, B_m, unghiul de fază θ_m și φ_m, sînt considerate mărimi cunoscute, iar valorile lor numerice se determină prin metodele obișnuite ale analizei armonice.

Cînd stabilim distribuția vitezei, este necesar să considerăm, în locul ecuației (2), sistemul echivalent de ecuații [1]

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{k} v\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{10}$$

a cărui soluții particulare pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \left(A\cos\frac{\lambda}{a}x + B\sin\frac{\lambda}{a}x\right)\exp i\omega t, \\ v(x,t) &= \left(A_1\cos\frac{\lambda}{a}x + B_1\sin\frac{\lambda}{a}x\right)\exp i\omega t. \end{aligned} \tag{11}$$

Este ușor de observat că, dacă introducem derivatele parțiale $\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$ și $\frac{\partial p}{\partial t}$ din (11) în ecuația (10), rezultă, după un calcul simplu, relațiile dintre constante

$$A_1 = \frac{i\omega}{a\lambda}B \qquad B_1 = -\frac{i\omega}{a\lambda}A. \tag{12}$$

Prin urmare, oscilațiile vitezei sînt determinate dacă cunoaștem oscilațiile presiunii, respectiv condițiile la limită pentru presiune.

În cazul condițiilor la limită (8), după cîteva transformări simple, avem*)

$$\mathcal{R}e\ \rho v(x,t) = \sum_m [\psi_{m1}(x)\cos m\omega t - \psi_{m2}(x)\sin m\omega t], \tag{13}$$

unde funcțiile $\psi_{m1}(x)$ și $\psi_{m2}(x)$ au expresiile

$$\begin{aligned} \psi_{m1}(x) &= \omega\left|\frac{\rho_3 B_m}{\rho_1\rho_4}\right|\sin(\theta_1+\theta_3+\theta_4+\varphi_m) - \omega\left|\frac{\rho_2 A_m}{\rho_1\rho_4}\right|\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_4+\theta_m), \\ \psi_{m2}(x) &= \omega\left|\frac{\rho_3 B_m}{\rho_1\rho_4}\right|\cos(\theta_1+\theta_3+\theta_4+\varphi_m) - \omega\left|\frac{\rho_2 A_m}{\rho_1\rho_4}\right|\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_4+\theta_m), \end{aligned} \tag{14}$$

---

*) Deoarece masa specifică variază puțin cu presiunea, se poate face aproximația $\bar{\rho} \cong \rho$, $\bar{\rho}$ fiind valoarea medie ponderată.

iar ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 și θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 se obțin din relațiile de mai jos

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= \sin^2\alpha_m l\,\mathrm{ch}^2\beta_m l + \mathrm{sh}^2\beta_m l\cos^2\alpha_m l,\\ \rho_2^2 &= \cos^2\alpha_m(l+x)\,\mathrm{ch}^2\beta_m(l+x) + \mathrm{sh}^2\alpha_m(l+x)\,\mathrm{sh}^2\beta_m(l+x),\\ \rho_3^2 &= \cos^2\alpha_m l\,\mathrm{ch}^2\beta_m l + \mathrm{sh}^2\alpha_m l\,\mathrm{sh}^2\beta_m l,\\ \rho_4^2 &= a^2(\alpha_m^2+\beta_m^2),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \mathrm{arc\,tg\,th}\,\beta_m l\,\mathrm{ctg}\,\alpha_m l,\\ \theta_2 &= \mathrm{arc\,tg\,th}\,\beta_m(l+x)\,\mathrm{tg}\,\alpha_m(l+x),\\ \theta_3 &= \mathrm{arc\,tg\,th}\,\alpha_m l\,\mathrm{th}\,\beta_m l,\\ \theta_4 &= \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\beta_m}{\alpha_m}\cdot\end{aligned} \tag{16}$$

Din lipsa unor date practice, n-a fost posibil să se deducă influența armonicelor superioare față de armonica fundamentală. În urma acestui fapt, pentru a nu restrînge generalitatea problemei, s-a admis că presiunea, atît în sonda de excitație cît și în cea de reacție, este dată de relațiile (8). Numărul armonicelor care trebuie considerate, în calculul numeric, va putea fi precizat numai după ce în prealabil se vor prelucra curbele experimentale.

Trecem acum la stabilirea coeficientului de permeabilitate, folosind un procedeu frecvent utilizat în teoria oscilațiilor sistemelor elastice dispative neliniare.

Pe baza acestui procedeu, coeficientul de permeabilitate trebuie să satisfacă egalitatea dintre puterea calculată și cea măsurată într-un punct oarecare.

Dacă notăm cu N_0 puterea medie aplicată în sonda de excitație într-un timp T și prin N_1 puterea medie din sonda de reacție, în același timp, atunci, diferența $\Delta N = N_0 - N_1$ reprezintă pierderea de putere.

Această diferență se obține din calcul, întrucît noi am presupus cunoscute, în ambele sonde, graficele variației presiunii cu timpul, iar valoarea vitezei se determină cu ajutorul relației (13).

Cînd avem posibilitate să măsurăm puterea pierdută*) ΔN^*, valoarea permeabilității mediului poros se obține din soluționarea ecuației transcedente**)

$$\frac{T\Delta N^*}{F} = \int_0^T \left\{\sum_m \left[p(0,t)\,v(0,t) - p(l,t)\,v(l,t)\right]\right\} dt \tag{17}$$

unde prin F am notat secțiunea de filtrare.

Ținînd seama de cele de mai sus, este mult mai comod, mai ales pentru cazul determinării în condiții de laborator, să se aleagă caracteristicile perturbațiilor astfel încît, într-un punct situat la distanța $x = l$ de punctul de excitație, să nu înregistrăm nici o variație a presiunii.

Din punct de vedere practic, realizarea unor asemenea condiții la limită se obține cu destulă ușurință, deoarece din cîteva încercări pot fi stabilite valorile perturbațiilor în sonda de excitație, care ne dau $p(l, t) = 0$.

---

*) Deoarece variația presiunii este cunoscută, rezultă că, pentru stabilirea puterii pierdute ΔN^*, este necesară măsurarea în același timp a debitului sondei

**) Mărimile stelate se referă la valorile măsurate.

În această situație oscilațiile presiunii, într-un punct $0 < x < l$, vor fi

$$\mathcal{R}e\, p(x, i) = \sum_m [\psi'_{m1}(x) \cos m\omega t - \psi'_{m2}(x) \sin m\omega t], \tag{18}$$

funcțiile $\psi'_{m1}(x)$ și $\psi'_{m2}(x)$ avînd expresiile

$$\begin{aligned} \psi'_{m1}(x) &= \left| A_m \frac{\rho'_2}{\rho'_1} \right| \cos(\theta'_2 - \theta'_1 - \theta_m), \\ \psi'_{m2}(x) &= \left| A_m \frac{\rho'_2}{\rho'_1} \right| \sin(\theta'_2 - \theta'_1 - \theta_m), \end{aligned} \tag{19}$$

iar

$$\begin{aligned} \rho_1'^2 &= \sin^2 \alpha_m l \operatorname{ch}^2 \beta_m l + \operatorname{sh}^2 \beta_m l \cos^2 \alpha_m l, \\ \rho_2'^2 &= \sin^2 \alpha_m (l - x) \operatorname{ch}^2 \beta_m (l - x) + \operatorname{sh}^2 \beta_m (l - x) \cos^2 \alpha_m (l - x) \\ \theta'_1 &= \operatorname{arc\,tg} \operatorname{th} \beta_m l \operatorname{ctg} \alpha_m l\,; \ \theta'_2 = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{th} \beta_m (l - x) \operatorname{ctg} \alpha_m (l - x). \end{aligned} \tag{20}$$

Introducînd în (18) relațiile vitezei și presiunii din (19) și (13), și remarcînd că pentru acest caz avem $B_m = 0$, găsim în cele din urmă ecuația

$$\begin{aligned} \frac{T \Delta N^*}{\bar{\rho} F} = \sum_m (\psi_{m1} \psi'_{m1} + \psi_{m2} \psi'_{m2}) \frac{\sin 2m\omega T}{4} + \frac{1}{4} (\psi'_{m1} \psi_{m2} + \psi_{m1} \psi'_{m2}) \times \\ \times (\cos 2m\omega T - 1) + \frac{1}{2} (\psi_{m1} \psi'_{m1} - \psi_{m2} \psi'_{m2}) m\omega T, \end{aligned} \tag{21}$$

a cărei rezolvare trebuie efectuată, bineînțeles, prin metode numerice sau grafice.

Din ecuația (21) observăm că stabilirea permeabilității necesită un volum laborios de calcule numerice. Din acest motiv este recomandabil să utilizăm modelarea electrică.

După cum s-a menționat, ecuațiile (1) și (2) fiind identice cu ecuația telegrafiștilor, soluționarea problemei poate fi efectuată mult mai ușor pe baza analogiei existente dintre oscilațiile presiunii și cele ale tensiunii într-o linie electrică lungă cu constante distribuite.

Realizarea unor condiții la limită într-un model electric, similare cu cele dintr-un zăcămînt petrolifer sau acvifer, ne va permite să obținem valoarea permeabilității mediului poros cu un volum redus de calcule numerice.

Primit la redacție la 17 martie 1959

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе предложен новый метод определения проницаемости пористой среды, который в отличие от используемого до сих пор метода не требует закрывания скважины. Метод основывается на обработке данных, полученных от измерения колебаний давления, обусловленных распространением волн.

При помощи результатов, установленных в предыдущей работе [1], относящейся к распространению волн давления через жидкости, содержащиеся в нефтеносных или водоносных пластах, устанавливаются расчетные соотношения, позволяющие определить проницаемость, если известны графики изменения во времени донного давления и расхода в скважинах возбуждения и реакции.

Далее указывается, что, так как уравнение распространения волн совпадает с телеграфным уравнением, задача может быть также решена, используя аналогию между колебаниями давления и колебаниями напряжения в длинной электрической линии с распределенными постоянными. Для этого необходимо осуществить в электрической модели граничные условия электрического напряжения, аналогичные имеющим место в нефтяной или водоносной залежи.

UNE MÉTHODE DE DÉTERMINATION DE LA PERMÉABILITÉ D'UN MILIEU POREUX

RÉSUMÉ

L'auteur propose, dans ce travail, une nouvelle méthode permettant de déterminer la perméabilité d'un milieu poreux qui, à l'encontre de la méthode actuellement en usage, n'exige pas la fermeture de la sonde. Cette méthode est fondée sur l'application des données fournies par la mesure des oscillations de pression qui apparaissent par suite de la propagation des ondes.

En vertu des résultats établis dans un travail antérieur [1], ayant trait à la propagation des ondes de pression à travers les liquides contenus dans des couches pétrolifères ou aquifères, l'auteur détermine des relations de calcul permettant de déduire la perméabilité, lorsque l'on connaît les diagrammes de la variation avec le temps de la pression de fond et du débit, dans les sondes d'excitation et de réaction.

L'auteur ajoute que, l'équation de propagation des ondes étant identique à l'équation des télégraphistes, on peut résoudre ce problème en appliquant l'analogie qui existe entre les oscillations de la pression et celles de la tension dans une ligne électrique longue, aux constantes distribuées.

A ces fins, il est nécessaire de réaliser, dans un modèle électrique, des conditions aux limites de la tension électrique, similaires à celles qui existent dans un gisement pétrolifère ou aquifère.

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, H. PASCAL, *Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care se scurge printr-un mediu poros.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IV**, *3*, 625 (1958).
2. I. Gr. IOACHIM, *Exploatarea zăcămintelor de ţiţei.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
3. Б. Н. ЩЕЛКАЧЕВ, *Основы подземной нефтяной гидравлики.* Гостоптехиздат, Москва, 1945.

CERCETĂRI ASUPRA REGIMURILOR DE FUNCȚIONARE A LAGĂRELOR

II. CARACTERISTICILE GLOBALE ÎN CAZUL VISCOZITĂȚII VARIABILE

DE

N. TIPEI și AL. NICA

În prima parte a acestei lucrări, s-a arătat că variația viscozității în filmul de lubrifiant se poate exprima după legea

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^q, \tag{1}$$

relație a cărei valabilitate a fost demonstrată teoretic și experimental, [1]. S-a obținut de asemenea ecuația presiunilor, considerînd variația viscozității după legea (1), expresia sa generală fiind de forma

$$p = p_0 + A(\alpha, q) \cdot f_1(\theta, \alpha, q) \cdot f_3(x_3, \alpha, q), \tag{2}$$

precum și coeficientul de portanță ζ

$$\zeta = \frac{p\psi^2}{\mu_1 \Omega} = \frac{3\sqrt{Cn^2 + Cl^2}}{(1+\alpha)^q}. \tag{3}$$

Simbolurile folosite au semnificațiile din prima parte a lucrării, [1].

Pentru a se putea urmări mai ușor variația portanței pentru elemente geometrice și funcționale date, este utilă deducerea și calcularea coeficientului adimensional $\overline{\zeta}$

$$\overline{\zeta} = \frac{F\delta_2^2}{4\mu_1 V r_1^3} = \lambda(1-\alpha)^2 \zeta, \tag{4}$$

în care F este încărcarea.

Într-o lucrare anterioară [2], au fost făcute calculele numerice pentru un caz particular ($q = 1$). În practică, q poate avea valori cuprinse între 0 şi 1. Sînt necesare deci şi calculele numerice pentru cazul $q = 0$, întregul domeniu de variaţie a viscozităţii fiind astfel parcurs.

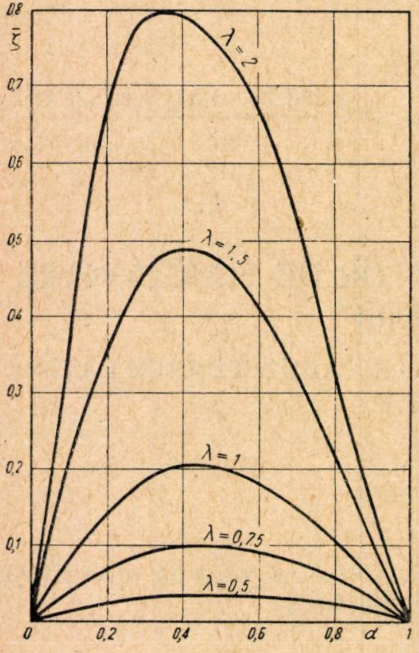


Fig. 1

Variaţia lui $\bar{\zeta}$ în funcţie de α, pentru diverse valori ale lui λ, este redată în figura 1, şi se observă că şi în acest caz $\bar{\zeta}$, deci portanţa F prezintă un maximum între $\alpha = 0{,}35 \sim 0{,}4$. Pentru cazul $q = 1$, [2], acest maximum avea loc la $\alpha \cong 0{,}3$.

Unghiul θ^* dintre rezultanta presiunilor şi linia centrelor rezultă din relaţia

$$[\operatorname{tg} \theta^* = \frac{Cn}{Ct}. \tag{5}$$

Expresiile generale ale lui Cn şi Ct în funcţie de α, λ şi q sînt date în [1]; în figura 2 se prezintă, pentru cazul $q = 0$, traiectoria centrului fusului, cînd α variază, presupunînd cuzinetul fix.

Forma acestor curbe este apropiată de un arc de cerc, pe cînd pentru cazul $q = 1$, erau sensibil eliptice, [2]. În figura 3 se compară curba $\theta^*(\alpha)$ pentru $\lambda = \infty$ cu rezultatele altor autori, constatîndu-se o bună apropiere [3], [4].

Momentele de frecare pe fus şi cuzinet, $M_{1,2}$ (indicele 1 se referă la fus, iar 2 la cuzinet) sau coeficienţii de moment $Cm_{1,2}$ se pot calcula din relaţiile generale [2]

$$Cm_{1,2} = \frac{\psi}{\pi\mu_1 V r_1 b} M_{1,2} = \frac{\psi}{\pi\mu_1 V r_1 b}\left(\pm r_{1,2} r_1 b \int_0^{2\pi} \mu \frac{V}{\delta}\, d\theta + \frac{\alpha\Delta}{2} Fn\right), \tag{6}$$

sau

$$\begin{aligned} Cm_{1,2} = \frac{1}{(1+\alpha)^q}\Bigg\{ \pm 2 \Bigg[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-2n)}{2n\,!} \times \\ \times \binom{2n}{n} \alpha^{2n}\Bigg] + \frac{3}{\pi}\alpha\, Cn\Bigg\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Pentru cazul particular $q = 0$, se găsesc coeficienţii de moment pentru fus şi cuzinet sub forma

$$Cm_{1,2} = -\left(\frac{3}{\pi}\alpha\, Cn \pm \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right). \tag{8}$$

Aceste relaţii sînt valabile dacă şi în zona divergentă, în care presiunea $p = p_0$, uleiul umple complet spaţiul dintre fus şi cuzinet ($b_\theta = b$, b fiind lăţimea lagărului).

Pentru calculele practice, în care trebuie introduse elemente cunoscute, momentele pot fi raportate în mod avantajos la forța exterioară F și la grosimea minimă δ_2.

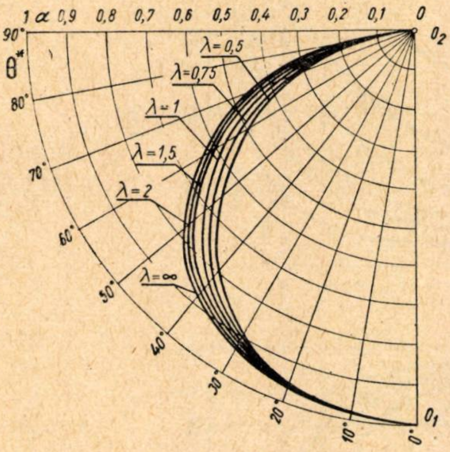


Fig. 2

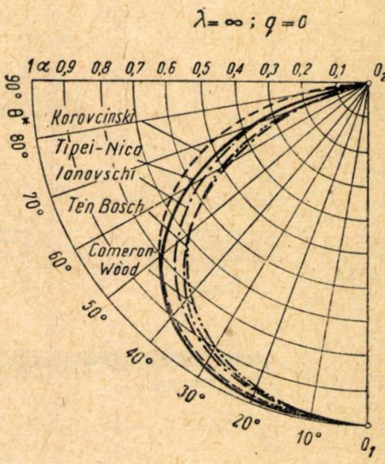


Fig. 3

Coeficientul adimensional corespunzător se poate scrie

$$km_{1,2} = \frac{6M}{\pi F \delta_2} = \frac{3Cm_{1,2}}{(1-\alpha)\,\zeta}. \tag{9}$$

În sfîrșit coeficientul de frecare f, se poate deduce din relația

$$\frac{f_{1,2}}{\psi} = \frac{\pi Cm_{1,2}}{2\zeta}. \tag{10}$$

În figurile 4, 5, 6, se redau valorile coeficienților $-Cm_1$, $-km_1$ și $\frac{f_1}{\psi}$, pentru cazul $q = 0$, în funcție de α, pentru mai multe valori ale parametrului λ.

Se remarcă pentru $-Cm_1$ (fig. 4), tendința continuu crescătoare a curbelor, spre deosebire de cazul $q = 1$, [2], cînd prezentau un minim situat pentru diferite valori ale lui λ pe o dreaptă care se poate exprima în funcție de α. Tendința lui $-Cm_1$ de a descrește cu λ se păstrează, valorile absolute fiind însă sensibil mai mari decît în cazul $q = 1$. Variația lui $-km_1$ (fig. 5) este asemănătoare cazului $q = 1$.

Curbele prezintă valori minime așezate aproximativ pe o dreaptă, determinată în funcție de α.

Ecuația dreptei se poate scrie sub forma:

$$-km_{1\,\min} = 136{,}5\,\alpha - 55{,}4. \tag{11}$$

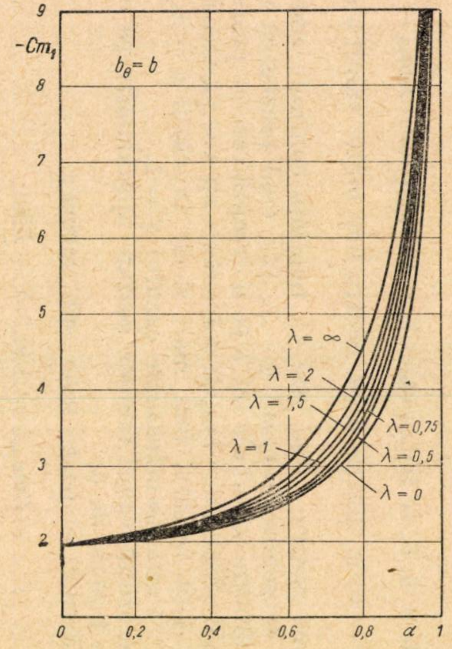


Fig. 4

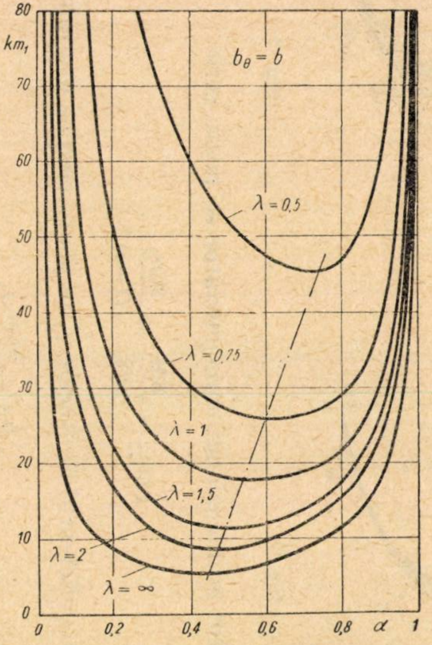


Fig. 5

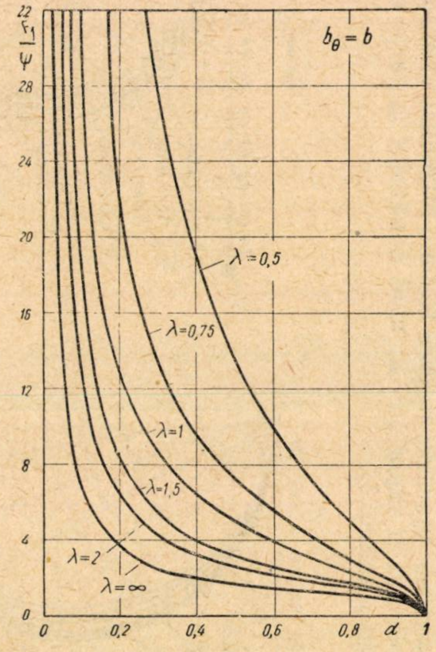


Fig. 6

De asemenea, alura curbelor $\frac{f_1}{\psi}$ (fig. 6) este apropiată de cazul $q = 1$; valorile absolute diferă puțin, fiind mai mari pentru cazul $q = 0$.

În figurile 7, 8, 9, sînt redate curbele Cm_2, km_2 și $\frac{f_2}{\psi}$ în raport cu α, pentru diferite valori ale lui λ.

Se constată pentru coeficientul de moment Cm_2 o alură cu totul diferită față de cazul $q = 1$, [2], tendința lor fiind de a crește continuu cu α, tinzînd spre ∞. Alura curbelor km_2 pentru $q = 0$ (fig. 8), este de asemenea cu totul diferită, tinzînd pentru $\alpha = 1$ la valoarea $+\infty$, nu spre $-\infty$, ca în cazul $q = 1$; alura lor este asemănătoare cu a curbelor km_1 (fig. 5), prezentînd valori minime care se pot așeza pe o dreaptă determinată în raport cu α:

$$km_{2\,\min} = 209{,}5\,\alpha - 118{,}5. \tag{12}$$

Curbele $\frac{f_2}{\psi}$ (fig. 9) sînt apropiate ca alură și ca valori absolute de cazul $q = 1$.

Pe lîngă situația cînd lubrifiantul umple complet zona divergentă ($b_\theta = b$), trebuie luată în considerație și posibilitatea unei umpleri incomplete a zonei divergente. În acest caz, se poate considera lățimea filmului de lubrifiant în zona divergentă ca variind după relația (2) $b_\theta = \frac{\delta_2}{\delta}\,b$.

Se consideră din nou relațiile generale (6) și (7) și se obține pentru $q = 0$ relația

$$Cm_{1.2} = \mp \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\frac{2+\alpha}{1+\alpha} - \frac{3}{\pi}\,\alpha\,Cn. \tag{13}$$

Introducînd în formulele (10) și (11) expresia lui $Cm_{1.2}$ dată de (12) se găsesc coeficienții $km_{1.2}$ și $\frac{f_{1.2}}{\psi}$ pentru umplerea incompletă a zonei divergente.

În figurile 10, 11, 12, s-au reprezentat coeficienții $-Cm_1$, $-km_1$ și $\frac{f_1}{\psi}$ în funcție de α, pentru diverse valori ale lui λ, în cazul $q = 0$.

Curbele $-Cm_1$ (fig. 10) diferă mult față de cazul $q = 1$, [2]; coeficienții cresc continuu cu α și au valori absolute cu mult mai mari. Alura curbelor km_1 (fig. 11) este asemănătoare cu cazul $q = 1$, prezentînd valori minime situate pe o dreaptă determinată în funcție de α:

$$-km_{1\,\min} = 143\,\alpha - 65, \tag{14}$$

valorile absolute fiind însă mai mari. De asemenea, curbele $\frac{f_1}{\psi}$ (fig. 12) nu diferă ca alură de cazul $q = 1$, iar valorile absolute sînt și ele apropiate.

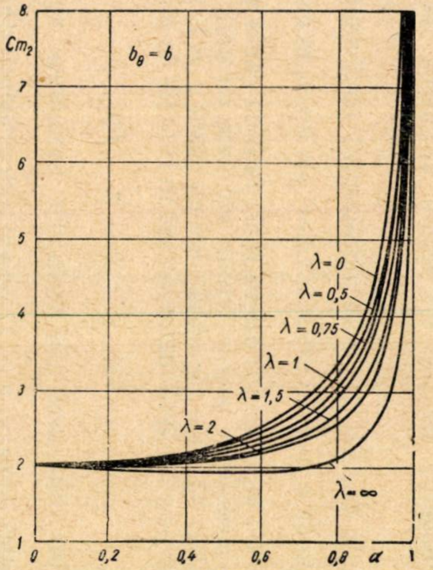


Fig. 7

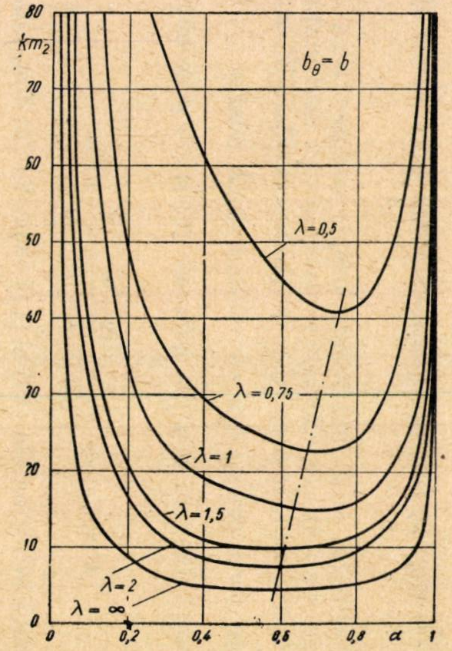


Fig. 8

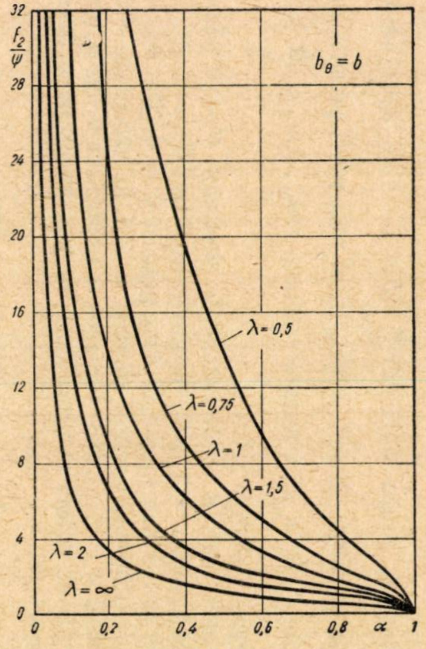


Fig. 9

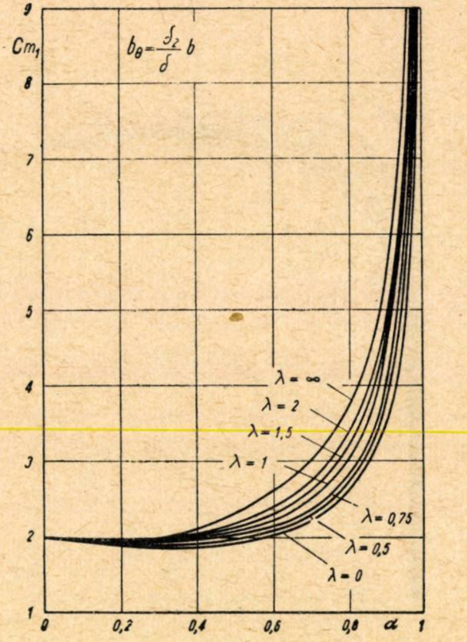


Fig. 10

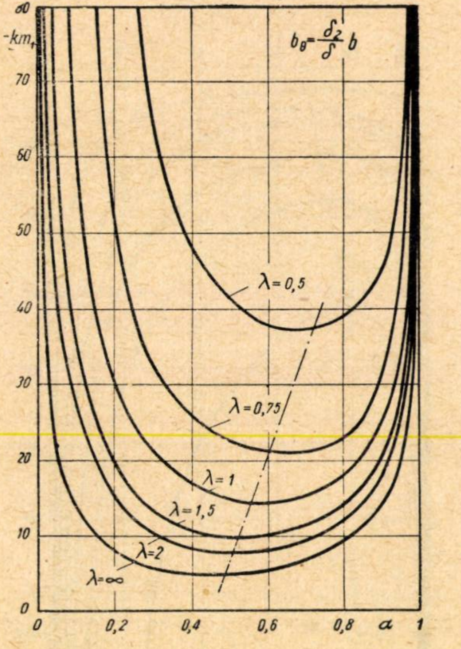


Fig. 11

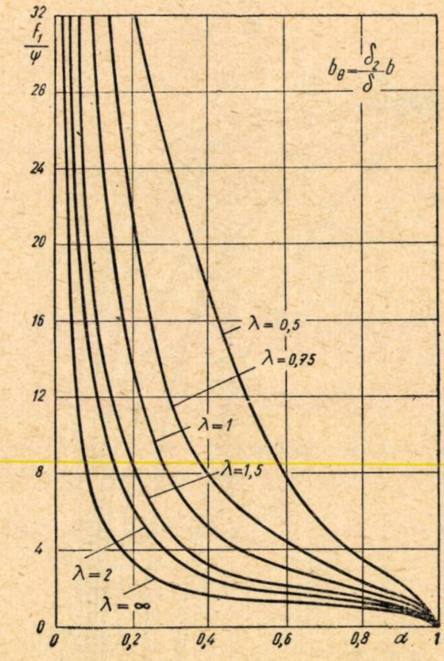


Fig. 12

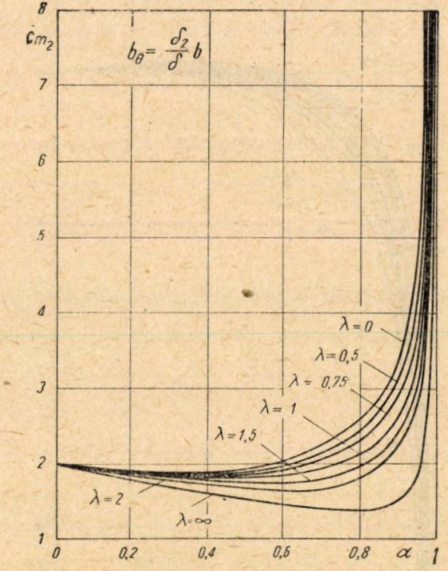


Fig. 13

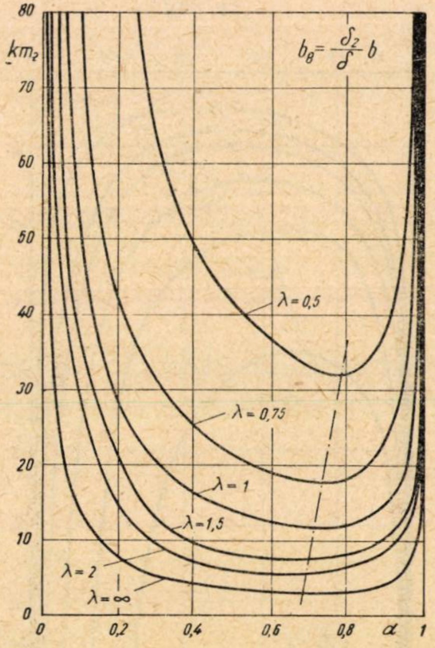


Fig. 14

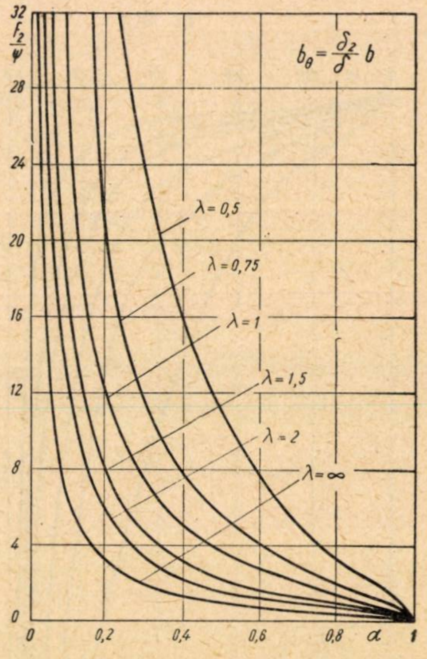


Fig. 15

Figurile 13, 14, 15 redau coeficienții Cm_2, km_2 și $\frac{f_2}{\psi}$ pentru cazul $q = 0$, în funcție de α și diferite valori ale parametrului λ.

Curbele reprezentînd coeficientul de moment Cm_2 (fig. 13) diferă de asemenea mult față de cazul $q = 1$, [2], prezentînd doar o mică tendință de descreștere cu α, iar pentru $\alpha > 0{,}8$ creșterea este rapidă, $Cm_2 \to \infty$.

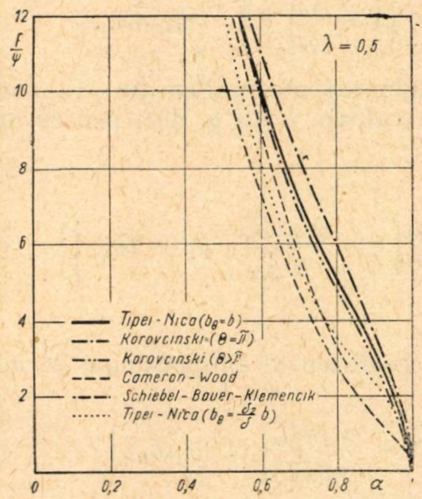


Fig. 16

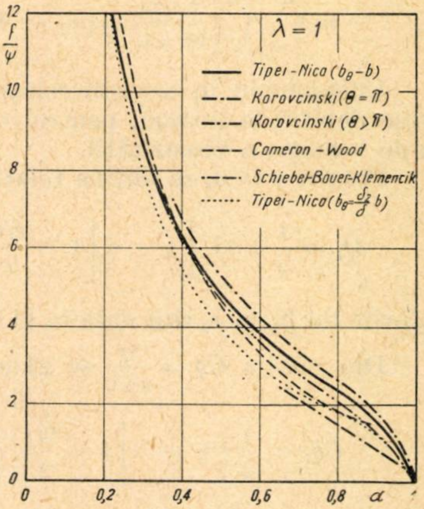


Fig. 17

Totodată, curbele km_2 (fig. 14) prezintă valori minime așezate pe o dreaptă determinată în funcție de α

$$km_{2\min} = 289\,\alpha - 194{,}5, \tag{15}$$

iar la $\alpha = 1$, tind spre ∞.

Curbele $\frac{f_2}{\psi}$ (fig. 15) nu diferă ca alură față de cazul $q = 1$, valorile absolute sînt însă mai mari.

Valorile obținute pentru coeficientul $\frac{f_1}{\psi}$ sînt comparate cu datele altor cercetători, ([3], [4], [5]), pentru $\lambda = 0{,}5$ și $\lambda = 1$ (fig. 16 și 17). Se constată o bună apropiere, mai ales pentru $\lambda = 1$, chiar cînd unii autori folosesc alte condiții la limită (Cameron-Wood, Schiebel-Bauer); se poate de asemenea remarca faptul că luarea în considerație a celor două ipoteze de umplere a spațiului divergent $\left(b_\theta = b \text{ și } b_\theta = \frac{\delta_2}{\delta} b\right)$ este utilă, deoarece $\frac{f}{\psi}$ poate diferi sensibil în cele două cazuri.

Debitul de ulei, care străbate printr-o secţiune cuprinsă într-un plan normal la suprafaţa fusului şi trece prin axul acestuia, la intrarea în zona de suprapresiuni, este dat de relaţia, [2]

$$Q_i = \int_{-b_1}^{b_2}\int_{0}^{\delta_1} (v_1)_{x_1=0}\, dx_2 \,.\, dx_3 =$$

$$= \int_{-b_1}^{b_2}\int_{0}^{\delta_1}\left[\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x_1}\, x_2(x_2-\delta_1) + \left(1-\frac{x_2}{\delta_1}\right) V\right]_{x_1=0} dx_2\, dx_3 . \tag{16}$$

Introducînd în această relaţie valoarea presiunilor din (2), putem obţine debitul la intrare, pentru orice valoare a lui q, deci pentru orice caz de variaţie a viscozităţii.

Pentru $q = 0$, se obţine relaţia

$$Q_i = \frac{1}{2}\, b\,\Delta V\left\{1 + \alpha\left[1 - \frac{2(1+\alpha)}{2+\alpha^2}\left(1 - \frac{\text{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{\lambda\sqrt{\beta_{10}}}\right)(1 + 2\bar{a}_0)\right]\right\} \tag{17}$$

(valorile lui β_{10} şi $\bar{a}_0$ sînt date în [1]).

Din relaţia $Cq = \frac{Q}{b\Delta V}$ se găseşte coeficientul adimensional de debit

$$Cq_i = \frac{1}{2}\left\{1 + \alpha\left[1 - \frac{2(1+\alpha)}{2+\alpha^2}\left(1 - \frac{\text{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{\lambda\sqrt{\beta_{10}}}\right)(1 + 2\bar{a}_0)\right]\right\} . \tag{18}$$

Considerînd secţiunea de ieşire din zona de suprapresiuni ($\delta = \delta_2$ şi $\theta = \theta_2$), coeficientul de debit pentru ieşire va fi

$$Cq_e = \frac{1}{2}\left\{1 - \alpha\left[1 - \frac{2(1-\alpha)}{2+\alpha^2}\left(1 - \frac{\text{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{\lambda\sqrt{\beta_{10}}}\right)(1 - 2\bar{a}_0)\right]\right\} . \tag{19}$$

În sfîrşit, relaţia [2]

$$Q_s = 2\int_0^l\int_0^\delta \left(\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)_{x_3=b_2} x_2(x_2-\delta)\,dx_1 dx_2 , \tag{20}$$

conduce dacă se ţine seama de expresia (2) a presiunilor, la debitul de scăpări laterale, funcţie de q.

Pentru $q = 0$, se găseşte expresia

$$Q_s = \frac{4 r_1 \Delta V \alpha \sqrt{\beta_{10}}\,\text{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{2+\alpha^2}\left(1 + \frac{2\alpha\bar{a}_0}{3}\right), \tag{21}$$

sau

$$Cq_s = \frac{2\alpha\sqrt{\beta_{10}}\,\text{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{\lambda(2+\alpha^2)}\left(1 + \frac{2\alpha\bar{a}_0}{3}\right), \tag{22}$$

Rezultatele calculelor numerice pentru cazul $q = 0$, sînt redate în figurile 18 şi 19.

Se constată pentru curbele coeficienților de debit Cq_i și Cq_e (fig. 18 că nu diferă cu mult de cazul $q = 1$, [2]. Valorile absolute sînt ceva mai mici, dar alura curbelor rămîne aceeași. O constatare asemănătoare se poate face și în cazul coeficientului de scăpări laterale, Cq_s (fig. 19).

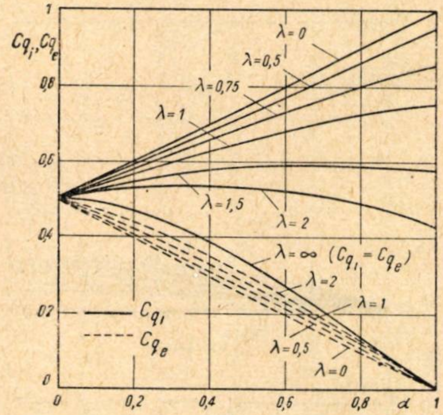


Fig. 18

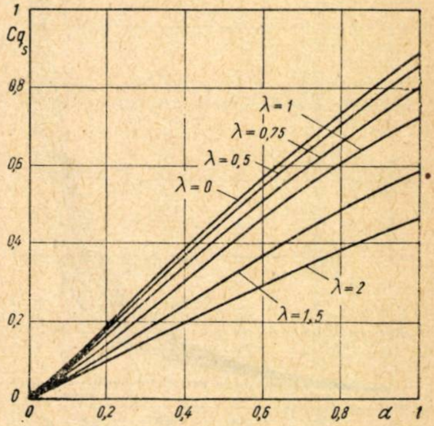


Fig. 19

De multe ori, în proiectare se impune valoarea grosimii minime δ_2 astfel încît apare util să se raporteze coeficienții de debit la acest parametru $\left(Cq^\star = \frac{Q}{b\delta_2 V}\right)$ obținîndu-se relațiile (pentru $q = 0$)

$$\left.\begin{aligned} Cq_i^\star &= \frac{1}{2(1-\alpha)}\left\{1 + \alpha\left[1 - \frac{2(1+\alpha)}{2+\alpha^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th}\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{\lambda\sqrt{\beta_{10}}}\right)(1 + 2\bar{a}_0)\right]\right\} \\ Cq_e^\star &= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2\alpha}{2+\alpha^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th}\lambda\sqrt{\beta_{10}}}{\lambda\sqrt{\beta_{10}}}\right)(1 - 2\bar{a}_0)\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Valorile numerice sînt reprezentate în figurile 20, 21, 22.

Se constată din studiul acestor diagrame că valorile lui $Cq_i^\star$ nu diferă cu mult de cazul $q = 1$, [2], (fig. 20), spre deosebire de $Cq_e^\star$ (fig. 21), care tinde la valori finite pentru $\alpha = 1$ pe cînd în cazul $q = 1$, la $\alpha = 1$, $Cq_e^\star \to \infty$.

Coeficientul de scăpări laterale $Cq_s^\star$ (fig. 22), prezintă aceeași alură ca și pentru $q = 1$, dar valorile absolute sînt puțin mai mici.

De multe ori este util să se redea valoarea debitului în funcție de elementele geometrice și funcționale cunoscute ale lagărului, ceea ce determină deducerea coeficientului adimensional

$$\overline{Cq_s} = \frac{Q_s}{\delta_2^2}\sqrt{\frac{\mu_1}{F\Omega}} = Cq_s^\star \frac{\lambda}{\sqrt{\bar{\zeta}}}\,. \tag{24}$$

Curbele reprezentînd valoarea acestui parametru, în funcție de diferite alungiri λ, sînt redate în figura 23.

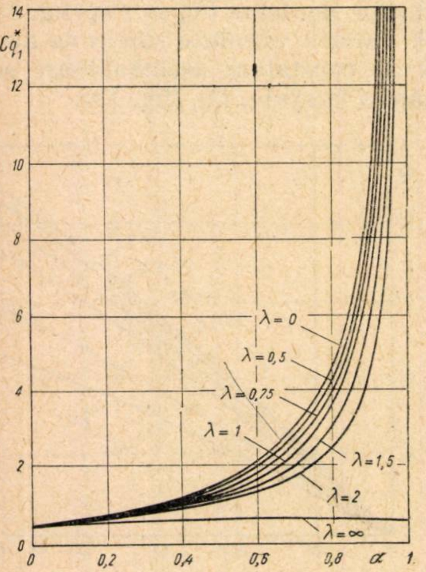


Fig. 20

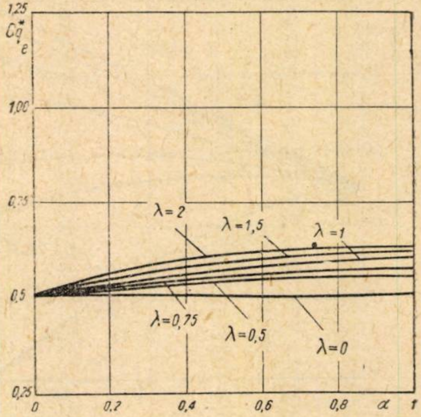


Fig. 21

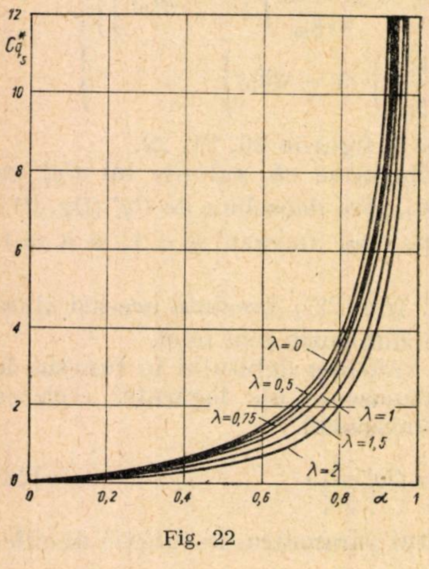


Fig. 22

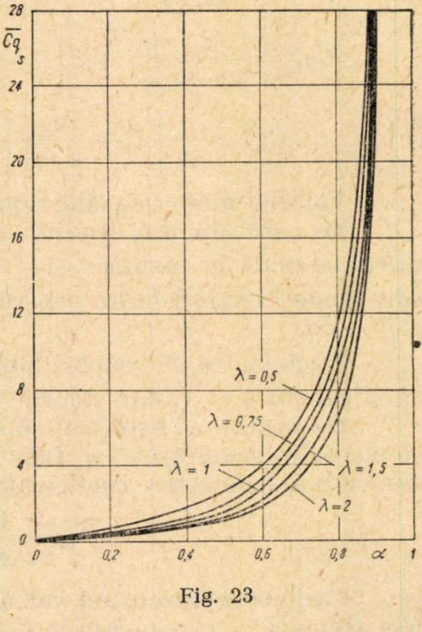


Fig. 23

Se constată din studiul acestei diagrame că alura curbelor este asemănătoare cu cazul $q = 1$, [2], valorile absolute fiind însă mai mici.

Astfel, cazul $q = 0$, situat la limita inferioară a valorilor posibile ale acestui parametru, permite o dată cu rezultatele anterioare ($q = 1$, [2]), să se acopere întregul domeniu al posibilităților de variație a viscozității. Cazurile intermediare pot fi studiate fie prin calcul direct, integrîndu-se pe cale grafică, de exemplu, relațiile generale expuse anterior, fie prin interpolare, folosind curbele extreme ($q = 0$; $q = 1$).

În orice caz, prin studiul efectuat și datele stabilite în lucrarea precedentă, [1], se poate ține ușor seama de variația efectivă a viscozității cu punctul și se pot determina mai exact toate elementele funcționale ale cuplelor de frecare.

Primit la redacție la 24 iunie 1959

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ПОДШИПНИКОВ

II. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Используя приведенное в первой части работы общее соотношение для давлений, учитывающих изменение вязкости, авторы выводят общие формулы для общих характеристик в зависимости и от q; таким образом возможно их получение прямым расчетным путем, для любого случая изменения вязкости.

Приводятся результаты численных расчетов для частного случая $q = 0$ (переменная вязкость), которые, вместе с приведенным в одной из предыдущих работ (2) частным случаем $q = 1$, выражают значения общих характеристик (коэффициента подъемной силы, траектории центра шейки вала, коэффициентов момента и трения, коэффициентов расхода) для всей области изменения вязкости.

INVESTIGATIONS ON THE OPERATING CONDITIONS OF JOURNAL BEARINGS

II. GLOBAL CHARACTERISTICS IN THE CASE OF VARIABLE VISCOSITY

ABSTRACT

By means of the general relation for pressures, which takes into account the variation of viscosity — presented in the first part of the paper — the general formulae of the global characteristics, as functions of q also, are deduced, their direct computation being therefore possible for any case of viscosity variation.

The result of the numerical computations for the particular case $q = 0$ (variable viscosity), together with the particular case $q = 1$ — presented in a previous paper [2] — yields the values of the global characteristics (lift coefficient, trajectory of the centre of the journal, moment and friction coefficients, oil flow coefficients) for the entire possible variation range of viscosity.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor*. I. *Influența variației viscozității*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **X**, *3* (1959).
2. N. Tipei, *Hidro-aerodinamica lubrificației*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
3. D. F. Wilcock, E. R. Booser, *Bearing Design and Application*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1957.
4. М. В. Коровчинский, *Прикладная теория подшипников житкостного трения*. Машгиз, Москва, 1954.
5. Gh. Manea, R. Mustafa, M. Aldea, *Asupra calculului lagărelor radiale prin alunecare, unse cu lichide, pe baza teoriei hidrodinamice*. Metalurgia și construcția de mașini, **VIII**, *8* (1956).

CONSIDERAŢII ASUPRA LUBRIFICAŢIEI TRIDIMENSIONALE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

În unele lucrări anterioare [1], [2] am studiat mişcarea turbulentă în stratul de lubrifiant în ipoteza că scurgerea este bidimensională. În aceste condiţii, s-a putut determina distribuţia presiunilor pentru regimuri de funcţionare permanente, cît şi nepermanente. De asemenea, s-au putut determina criterii pentru aprecierea stabilităţii mişcării corpurilor lubrificate în regim turbulent. Rezultatele obţinute în aceste condiţii au importanţă practică, deoarece permit aprecierea calitativă a fenomenelor care se produc în cazul cînd lubrificaţia suprafeţelor se efectuează în regim turbulent.

Pentru un studiu cantitativ al lubrificaţiei în regim turbulent, ale cărui rezultate să poată fi utilizate efectiv în aplicaţii, trebuie însă să se ţină seama de faptul că în realitate lagărele au dimensiuni finite, sau cu alte cuvinte că mişcarea în stratul de lubrifiant este tridimensională.

Evident studiul problemei în aceste condiţii devine mult mai dificil, deoarece mecanismul turbulenţei în mişcările tridimensionale este foarte complex, mai ales atunci cînd aceste mişcări se efectuează sub influenţa unor viteze ale suprafeţelor care mărginesc domeniul de fluid considerat, existînd variaţii ale presiunii după două direcţii, aşa cum se produce mişcarea în stratul de lubrifiant.

De aceea, studiul problemei sub o formă riguroasă este extrem de dificil şi vom fi siliţi să introducem unele aproximaţii, care să facă posibilă efectuarea unor cercetări, ale căror rezultate să fie suficient de simple pentru a putea fi utilizate în aplicaţii.

1. DISTRIBUŢIA VITEZELOR

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că în cazul regimurilor de funcţionare permanente şi cu aproximaţiile obişnuite în problema lubrificației, care decurg din faptul că mișcarea se efectuează în straturi subțiri, ecuațiile de mișcare se scriu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \bar u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right),\\ \frac{\partial \bar p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'^2}\right),\\ \frac{\partial \bar p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 \bar w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'w'}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

la care se asociază ecuația de continuitate

$$\frac{\partial \bar u}{\partial x} + \frac{\partial \bar v}{\partial y} + \frac{\partial \bar w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

În aceste ecuații u, v și w reprezintă proiecțiile vitezei în raport cu axele x, y, z de referință, p este presiunea, ρ densitatea, iar μ viscozitatea lubrifiantului. Notațiile supraliniate reprezintă valorile medii în timp ale mărimilor considerate, iar mărimile u', v', w' etc. sînt pulsațiile turbulente ale acestora. Sistemul de coordonate ales are axa Oy dirijată după normala la una din suprafețe.

Rezolvarea sistemului format din ecuațiile (1) și (2) este foarte grea cu mijloacele de studiu obișnuite, fără a se face anumite ipoteze asupra tensiunilor turbulente $\overline{u'v'}$, $\overline{v'^2}$ și $\overline{v'w'}$ care sînt necunoscute.

În plus, în mod riguros mișcarea după axa Oz influențează mișcarea după axa Ox și invers, aceste două mișcări neputînd fi astfel tratate separat. Vom face totuși în cele ce urmează, aproximația că pentru mișcarea în direcția Ox se pot utiliza rezultatele obținute anterior, în particular, legătura dintre gradientul de presiune $\frac{\partial p}{\partial x}$ și viteza medie

$$u_m = u_{m_t} - u_{m_c}\,,\ u_{m_c} = \frac{V}{2} \tag{3}$$

(unde u_{m_t} este viteza totală medie din stratul de lubrifiant, iar $u_{m_c} = \frac{V}{2}$ viteza medie corespunzătoare unei mișcări de tip Couette) care a fost dedusă sub forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{\delta^2} k_x u_m = -\frac{\mu}{\delta^2}\left[12 + 0{,}14\left(\frac{\rho V \delta}{\mu}\right)^{0.725}\right] u_m\,. \tag{4}$$

Pentru mișcarea în stratul de lubrifiant în direcția z, care în aceste condiții va fi considerată că, întocmai ca și pentru regimul laminar, este influențată de mișcarea din direcția x numai prin intermediul gradientului de presiune $\frac{\partial p}{\partial z}$, vom considera că tensiunea turbulentă $\overline{v'w'}$ poate fi apreciată pe baza ipotezei lungimii de amestec a lui Prandtl, adică

$$-\rho\overline{v'w'} = \rho l^2 \frac{\partial \bar w}{\partial y}\left|\frac{\partial \bar w}{\partial y}\right|, \tag{5}$$

în care lungimea de amestec va fi considerată ca fiind egală cu

$$\left.\begin{aligned} l &= \varkappa y && \text{pentru } 0 \leqslant y \leqslant \delta/2 \\ l &= \varkappa(\delta - y) && \text{pentru } \delta/2 \leqslant y \leqslant \delta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

deoarece pe cele două suprafeţe lubrificate (la $y = 0,\ \delta$) tensiunea turbulentă $\overline{v'w'}$ se anulează.

În aceste condiţii, a treia ecuaţie a sistemului (1), care dă distribuţia de viteze $\bar{w}$ se scrie, pentru $0 \leqslant y \leqslant \frac{\delta}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\varkappa^2 y^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\left|\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right|\right) + \mu\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

sau, integrînd o dată termen cu termen în raport cu y toţi membrii acestei ecuaţii şi ţinînd seama că $\frac{\partial p}{\partial z}$ nu depinde de y în primă aproximaţie [1]

$$\rho\varkappa^2 y^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\left|\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right| + \mu\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} y + C = 0. \tag{8}$$

În cele ce urmează, dat fiind că se vor utiliza numai valori medii, se va renunţa la notaţia supraliniată, în acest scop utilizîndu-se însă notaţia menţionată pentru mărimile adimensionale

$$\bar{w} = \frac{w}{V},\ \bar{y} = \frac{y}{\delta} \tag{9}$$

în care V este viteza relativă dintre suprafaţa dirijată după direcţia x.

Trebuie să se remarce cu această ocazie, că s-au utilizat ca viteză de referinţă viteza V, ca şi pentru studiul mişcării în direcţia x, deoarece, deşi pentru mişcarea în direcţia z avem de-a face cu o mişcare de tip Poiseuille, gradul de turbulenţă în această mişcare nu este dat de însăşi distribuţia de viteze, ci de mişcarea în direcţia x, faţă de care influenţa vitezelor w în aprecierea gradului de turbulenţă este neglijabilă.

În consecinţă, utilizînd variabilele adimensionale (9) şi introducînd numărul Reynolds definit de relaţia

$$Re = \frac{\rho V \delta}{\mu} \tag{10}$$

ecuaţia diferenţială (8) se scrie sub forma

$$A\bar{y}^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}\left|\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}\right| + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + B_z\bar{y} - C = 0, \tag{11}$$

în care

$$A = \varkappa^2 Re,\quad B_z = -\frac{\delta^2}{\mu V}\,\frac{\partial p}{\partial z}\cdot \tag{12}$$

Ecuația (11) este valabilă pentru $0 \leqslant y \leqslant \frac{\delta}{2}$. Pentru domeniul $\frac{\delta}{2} \leqslant y \leqslant \delta$ se obține o ecuație diferențială identică cu aceasta, ținînd seama de relațiile (6) și utilizînd substituția

$$y' = \delta - y. \tag{13}$$

Considerînd de exemplu $\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} > 0$ și ținînd seama că în acest caz $B_z > 0$, $C > 0$, ecuația (11) poate fi integrată fără dificultăți, atît în mod riguros, cît și aproximativ [1]. Utilizînd astfel rezultatele obținute în lucrarea [1] se obține pentru viteza w expresia

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = \sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{B_z}{C}\overline{y}}}{\overline{y}}\,; \quad \overline{w} = C_2 + \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1 - \frac{B_z}{C}\overline{y}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{B_z}{C}\overline{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B_z}{C}\overline{y}}}\right], \tag{14}$$

pentru $\overline{y}_{\mathrm{I}} \leqslant y \leqslant \frac{\delta}{2}$ și

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}} = C - B_z\overline{y}\,; \quad \overline{w} = C\overline{y} - \frac{B_z}{2}\overline{y}^2, \tag{15}$$

pentru $0 \leqslant \overline{y} \leqslant \overline{y}_{\mathrm{I}}$.

Aceleași relații pot fi utilizate și pentru domeniul $\frac{\delta}{2} \leqslant y \leqslant \delta$ înlocuind $\overline{y}'$ în loc de $\overline{y}$ (13).

Condițiile la limită impun ca

$$w = 0 \text{ la } y = 0, \quad y = \delta. \tag{16}$$

În plus trebuie scrise condiții de racordare asupra mărimilor $\overline{w}$ și $\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{y}}$ la $\overline{y} = \overline{y}_{\mathrm{I}}$, $\overline{y} = \frac{1}{2}\left(\overline{y}' = \frac{1}{2}\right)$ și $\overline{y}' = \overline{y}'_{\mathrm{I}}$. Aceste condiții permit determinarea constantei C, a mărimilor $y_{\mathrm{I}} = y'_{\mathrm{I}}$ și a vitezei maxime $(\overline{w})_{\overline{y}=\frac{1}{2}} = \overline{w}_1$ cu ajutorul sistemului

$$\left.\begin{aligned} & C = \frac{B_z}{2}, \; \overline{y}_{\mathrm{I}}\sqrt{1 - 2\overline{y}_{\mathrm{I}}} = \sqrt{\frac{2}{AB_z}}, \\ & \overline{w}_1 = C_2 = \frac{B_z}{2}\overline{y}_{\mathrm{I}}(1 - \overline{y}_{\mathrm{I}}) - \sqrt{\frac{C}{A}}\left[2\sqrt{1 - 2\overline{y}_{\mathrm{I}}} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 - 2\overline{y}_{\mathrm{I}}}}{1 - \sqrt{1 - 2\overline{y}_{\mathrm{I}}}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Distribuția vitezelor $\overline{w}$ pentru diferite valori ale numărului Reynolds Re (10) și avînd numărul B_z ca parametru este arătată în figurile 1–4 (s-a luat $\varkappa = 0{,}4$, valoare obținută pentru mișcările obișnuite din mecanica fluidelor).

Din aceste diagrame se constată importanta influență pe care o are numărul Reynolds asupra distribuției vitezelor.

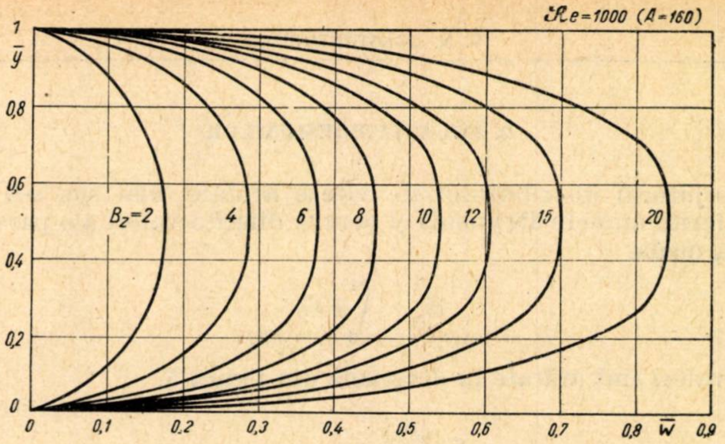


Fig. 1

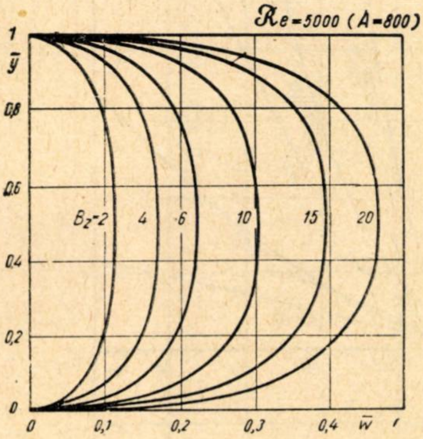


Fig. 2

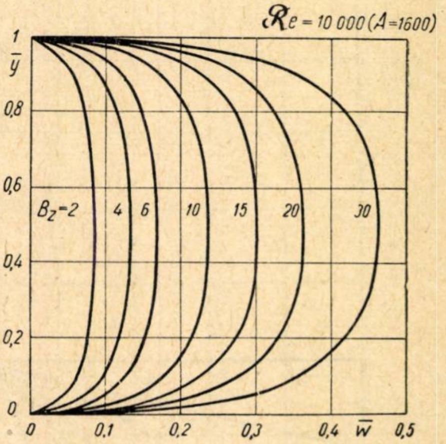


Fig. 3

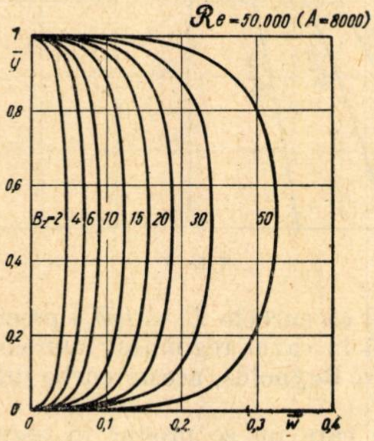


Fig. 4

2. ECUAŢIA PRESIUNILOR

Cu ajutorul distribuţiilor de viteze arătate mai sus s-a calculat, pentru diferite numere Reynolds şi pentru diferite valori ale parametrului B_z, viteza medie

$$\overline{w}_m = \int_0^1 \overline{w}\, d\overline{y} \tag{18}$$

ale cărei valori sînt arătate în diagrama din figura 5.

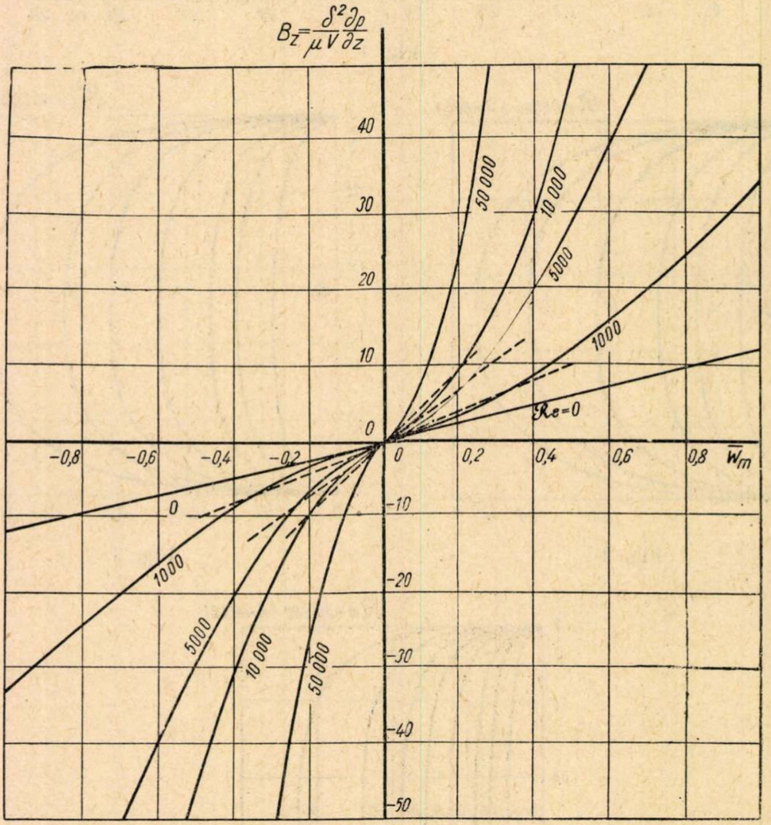


Fig. 5

Se constată astfel că curbele $B_z = f(\overline{w}_m)$ prezintă diferenţe de alură faţă de curba obţinută în cazul regimului laminar, diferenţe accentuate de creşterea numărului Reynolds, aceste curbe diferind tot mai mult de o linie dreaptă.

Aceste diferenţe, care nu se produc în cazul mişcării pe direcţia x, fac ca studiul în aceste condiţii să fie foarte dificil, deoarece rezultate relativ simple pot fi obţinute numai în cazul unei dependenţe liniare între B_z şi $\overline{w}_m$.

Această ipoteză aproximativă poate fi utilizată şi în cazul curbelor din figura 5, dat fiind că în cazurile reale, variaţia parametrului B_z este relativ redusă (în general $-10 \leqslant B_z \leqslant +10$). Astfel curbele din figura 5 în acest interval sînt destul de bine aproximate de relaţia

$$B_z = k_z \overline{w}_m, \quad k_z = 12 + 0{,}09\ Re^{0{,}65}. \tag{19}$$

Curbele $B_z = f(\overline{w}_m)$ pot fi aproximate cu o mare precizie de o relaţie de forma

$$B_z = k_z w_m^{n_z} \tag{20}$$

în care atît coeficientul k_z, cît şi exponentul n_z sînt funcţii de numărul Reynolds

$$k_z = 12 + 0{,}103\, Re^{0{,}745}, \quad n_z = 1 + 0{,}089\ Re^{0{,}18}, \tag{21}$$

curba corespunzătoare regimului laminar

$$B_z = 12\, \overline{w}_m, \tag{22}$$

obţinîndu-se punînd $Re = 0$ în relaţiile (19), (21).

În consideraţiile de mai sus s-a luat pentru constanta de care depinde lungimea de amestec, valoarea $\varkappa = 0{,}4$ (6), valoare dedusă pentru mişcările obişnuite din mecanica fluidelor. După cum s-a mai arătat [5], este posibil, din cauza faptului că mişcarea se efectuează în straturi foarte subţiri şi nu în straturi groase, ca variaţia lungimii de amestec cu y să fie modificată, respectiv ca valoarea constantei $\varkappa$ să fie alta decît 0,4. Toate rezultatele de mai sus rămîn valabile, punînd în locul numărului Reynolds mărimea $\frac{A}{0{,}16}$, deoarece atît vitezele cît şi presiunile depind de numărul Reynolds prin intermediul parametrului $A = \varkappa^2 Re$ (12).

Astfel, coeficientul k_x(4) este egal cu

$$k_x = 12 + 0{,}53\ A^{0{,}725}, \tag{23}$$

iar coeficienţii k_z şi n_z (21) sînt respectiv egali cu

$$k_z = 12 + 0{,}4\, A^{0{,}745}, \quad n_z = 1 + 0{,}124\, A^{0{,}18}. \tag{24}$$

În sfîrşit, relaţia aproximativă (19) se scrie

$$k_z = 12 + 0{,}296\ A^{0{,}65}. \tag{25}$$

Ecuaţia diferenţială a presiunilor se poate scrie cu ajutorul ecuaţiei de continuitate (2). Astfel, integrînd această ecuaţie în raport cu y şi inversînd ordinea operatorilor de derivare şi integrare, obţinem (3), (18)

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_m \delta) - \frac{\partial}{\partial z}(w_m \delta) = \frac{V}{2}\frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot \tag{26}$$

Ținînd seama de relațiile (4) și (19) se vede că

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu k_x}{\delta^2} u_m, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\mu k_z}{\delta^2} w_m \tag{27}$$

și în consecință, ecuația diferențială (26) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu k_x}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu k_z}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{V}{2}\frac{\partial \delta}{\partial x}. \tag{28}$$

În cazul cînd se consideră viscozitatea variabilă după relația [2]

$$\mu = \mu_1\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q, \quad q = 1, \tag{29}$$

atunci se vede imediat că k_x și k_z sînt constante și ecuația diferențială (28) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{k_x}{k_z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{Vk_x}{2}\frac{\partial \delta}{\partial x} \tag{30}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z'}\right) = 6V'\frac{\partial \delta}{\partial x} \tag{31}$$

unde

$$z' = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}\, z; \quad V' = \frac{k_x}{12} V. \tag{32}$$

În acest mod ecuația (31) devine identică cu ecuația diferențială care se obține în cazul regimului laminar. În consecință rezultatele obținute în cazul regimului laminar permit rezolvarea problemei și în cazul mișcării turbulente în stratul de lubrifiant și anume : presiunile într-un lagăr în care mișcarea este turbulentă sînt aceleași ca presiunile într-un lagăr în care mișcarea ar fi laminară, lagărul fictiv avînd însă o viteză relativă V' dată de relația (32) și o alungire aparentă λ' mai redusă și anume egală cu

$$\lambda' = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}\, \lambda; \quad \left(\lambda = \frac{b}{2r}\right) \tag{33}$$

unde b este lățimea iar $2\ r$ diametrul sau lungimea lagărului. Notînd cu

$$A_1^{\star} = \varkappa^2 Re_1^{\star}\ ; \quad Re_1^{\star} = \frac{\rho V \Delta}{\mu_1} \tag{34}$$

în care μ_1 este viscozitatea în punctul în care grosimea filmului de lubrifiant are valoarea δ_1 (de exemplu la intrarea în lagăr) și Δ o grosime medie de referință (de exemplu pentru lagărele circulare, jocul radial), atunci

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 12 + 0{,}53\, A_1^{\star\, 0{,}725}\left(\frac{\delta_1}{\Delta}\right)^{0.725}, \\ k_z &= 12 + 0{,}296\, A_1^{\star\, 0{,}65}\left(\frac{\delta_1}{\Delta}\right)^{0.65}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Utilizînd de exemplu rezultatele obţinute de N. Tipei [6] pentru lagărele circulare în regim laminar în ipoteza viscozităţii variabile, şi notînd cu

$$\zeta = \frac{P\psi^2}{2\mu_1 Vb}, \tag{36}$$

în care ψ este jocul relativ $\left(\psi = \frac{\Delta}{r}\right)$ iar b este lăţimea lagărului, în figurile 6, 7, 8 şi 9, s-a reprezentat variaţia coeficientului ζ în funcţie de excen-

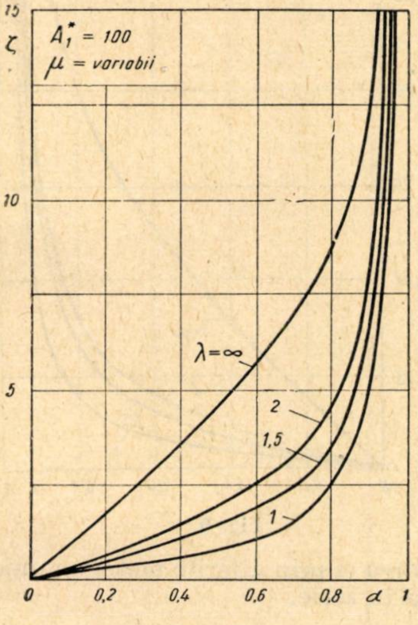


Fig. 6

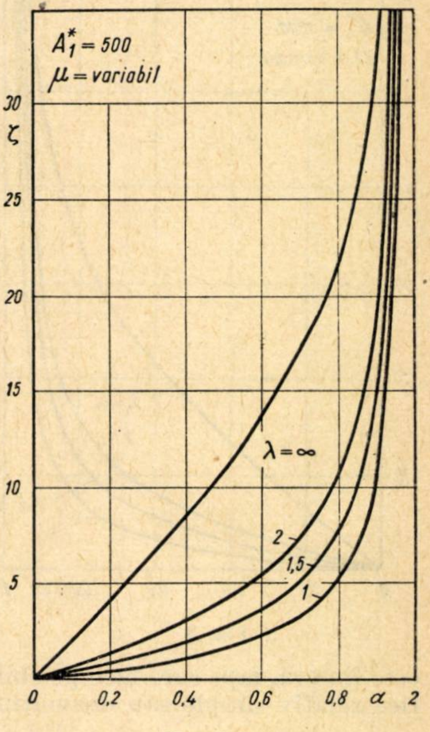


Fig. 7

tricitatea relativă pentru alungirile $\lambda = 0{,}75$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1{,}5$, $\lambda = 2$, $\lambda = \infty$ şi pentru diferite numere Reynolds, respectiv pentru diferite valori ale parametrului A_1^*.

După cum era şi de aşteptat, alura acestor curbe este foarte apropiată de aceea care se obţine în cazul regimului laminar. Acest fapt apare şi mai evident, dacă se calculează unghiul θ^* dintre direcţia rezultantei presiunilor şi linia centrelor, a cărui variaţie în funcţie de excentricitate este foarte apropiată de aceea obţinută în cazul regimului laminar.

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, notînd cu

$$A^* = \varkappa^2 Re^*,\ Re^* = \frac{\rho V \Delta}{\mu}, \tag{37}$$

rezultă

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 12 + 0{,}53\, A^{*0{,}725}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{0{,}725}, \\ k_z &= 12 + 0{,}296\, A^{*0{,}65}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{0{,}65}. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Rezolvarea ecuației (28) este acum mai dificilă, deoarece coeficienții k_x și k_z depind de δ, care la rîndul lui este funcție de x. Totuși, ecuația (25) este liniară, fapt care face posibilă rezolvarea ei prin diferite metode numerice relativ simple sau dezvoltînd soluția în serie.

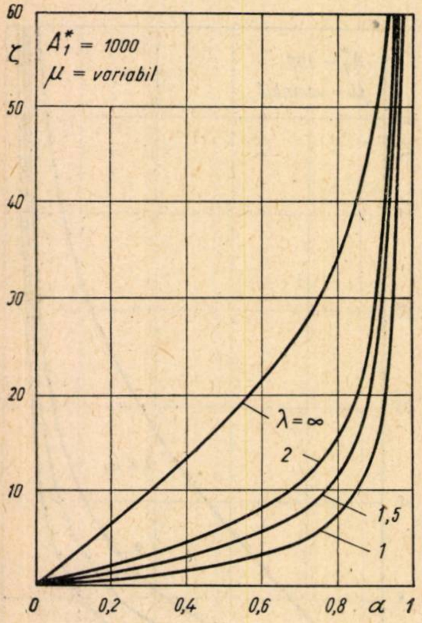


Fig. 8

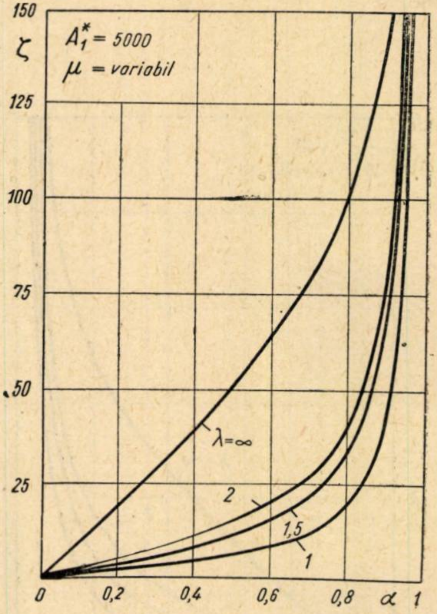


Fig. 9

3. LAGĂRE DE ALUNGIRE REDUSĂ

Integrarea ecuației (25) se simplifică mult dacă se utilizează ipoteza lagărelor de alungire redusă [7], [8] care constă în neglijarea termenului $\frac{\partial}{\partial x}(u_m \delta)$ în raport cu $\frac{\partial}{\partial z}(w_m \delta)$ și care se poate aplica cu suficientă exactitate pentru lagărele a căror alungire este mai mică decît 1.

În aceste condiții, dacă δ nu depinde de z (ceea ce este cazul în majoritatea situațiilor reale), ecuația (23) se scrie, după o primă integrare în raport cu z

$$-\,w_m \delta = \frac{V}{2}\,\frac{\partial \delta}{\partial x}\, z + C_1 \qquad (39)$$

Dacă alegem planul xy la mijlocul lagărului, fapt care nu restrînge generalitatea problemei, din motive de simetrie rezultă

$$C_1 = 0 \tag{40}$$

și deci

$$- w_m \delta = \frac{V}{2} \frac{\partial \delta}{\partial x} z. \tag{41}$$

În aceste condiții, utilizînd relația mai exactă (20), ecuația (41) se scrie pentru $z \geqslant 0$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\mu k_z}{V^{n_z - 1} \delta^{2+n_z}} \left(- \frac{V}{2} \frac{\partial \delta}{\partial x} z \right)^{n_z}, \tag{42}$$

sau, ținînd seama de condițiile obișnuite la limită pentru zona de suprapresiuni în care $\frac{\partial \delta}{\partial x} < 0$ se poate pune

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\mu k_z V}{2^{n_z} \delta^{2+n_z}} \left| \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|^{n_z} z^{n_z} \tag{43}$$

i în sfîrșit

$$p = - \frac{\mu k_z V}{(n_z + 1)\, 2^{n_z}} \frac{1}{\delta^{2+n_z}} \left| \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|^{n_z} z^{n_z + 1} + C_2. \tag{44}$$

Punînd apoi condiția de limită

$$p = p_0 \text{ la } z = \frac{b}{2} \tag{45}$$

distribuția presiunilor se scrie în cele din urmă sub forma

$$p = p_0 + \frac{\mu k_z V}{(n_z + 1)\, 2^{n_z}} \frac{1}{\delta^{2+n_z}} \left| \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|^{n_z} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^{n_z + 1} - z^{n_z + 1} \right], \tag{46}$$

în care k_z și n_z sînt date de relațiile (21).

Distribuția presiunilor se obține sub o formă mai simplă, dacă se utilizează relațiile aproximative (19). În acest caz rezultă imediat

$$p = p_0 + \frac{\mu k_z V}{4} \frac{1}{\delta^3} \frac{\partial \delta}{\partial x} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right). \tag{47}$$

Dacă viscozitatea este variabilă, coeficientul k_z este constant (35) și distribuția presiunilor (47) are forma

$$p = p_0 + \frac{3 \mu_1 V b^2}{4 r \Delta^2 \bar{\delta}_1} \left(1 + 0{,}0247\, A_1^{\star 0{,}65}\, \bar{\delta}_1^{0{,}65} \right) \frac{1}{\bar{\delta}^2} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{x}} (1 - \bar{z}^2), \tag{48}$$

în care s-au utilizat notațiile

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \bar{\delta}_1 = \frac{\delta_1}{\Delta}, \quad \bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \bar{z} = \frac{2z}{b}, \tag{49}$$

r fiind o lungime de referință.

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, distribuția presiunilor se obține sub forma

$$p = p_0 + \frac{3\mu V b^2}{4r\,\Delta^2}\left(\frac{1}{\bar{\delta}^3}\,\frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{x}} + 0{,}0247\,A^{*0{,}65}\,\frac{1}{\bar{\delta}^{2{,}35}}\,\frac{\partial\bar{\delta}}{\partial\bar{x}}\right)(1 - \bar{z}^2)\,. \tag{50}$$

4. LAGĂRE PLANE

În acest caz, notînd cu δ_1 și δ_2 grosimea maximă și minimă a stratului de lubrifiant (fig. 10) și cu r lungimea lagărului

$$\delta = \delta_1 - \frac{\delta_1 - \delta_2}{r}\,x \tag{51}$$

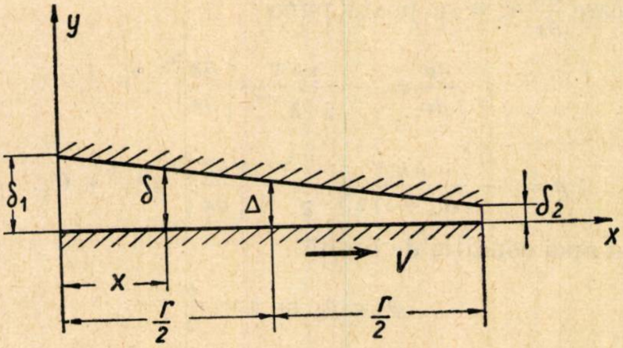


Fig. 10

sau notînd cu

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\,, \quad \alpha = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \tag{52}$$

relația (51) se mai poate scrie și sub formele

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 - (\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)\,\bar{x}\,, \quad \bar{\delta} = 1 + \alpha - 2\alpha\,\bar{x}\,. \tag{53}$$

Rezultanta presiunilor este egală cu

$$P = \int_0^r\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0)\,dx\,dz. \tag{54}$$

Notînd cu

$$\zeta = \frac{P\Delta^2}{2\mu V r^2 b}\,, \quad \bar{\zeta} = \frac{P\delta_2^2}{2\mu\,V r^2 b} \tag{55}$$

şi cu λ alungirea lagărului $\left(\lambda = \frac{b}{r}\right)$, rezultă, în cazul viscozităţii variabile

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + 0{,}0247\, A_1^{\star 0{,}65}\, \bar{\delta}_1^{0{,}65}\right) \frac{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1^2\, \bar{\delta}_2} = \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\left[1 + 0{,}0247\, A_1^{\star 0{,}65}(1+\alpha)^{0{,}65}\right]\frac{\alpha}{(1+\alpha)(1-\alpha^2)}\end{aligned} \tag{56}$$

şi

$$\bar{\zeta} = \frac{\lambda^2}{4}\left[1 + 0{,}0247\, \bar{A}_1^{\star 0{,}65}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}65}\right]\frac{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2} \tag{57}$$

unde

$$\bar{A}_1^{\star} = \varkappa^2\, \overline{Re}_1^{\star}, \quad \overline{Re}_1^{\star} = \frac{\rho V \delta_2}{\mu_1}. \tag{58}$$

În cazul cînd se consideră viscozitatea constantă, utilizînd relaţia (50) rezultă analog

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\bar{\delta}_1^2 - \bar{\delta}_2^2}{\bar{\delta}_1^2\,\bar{\delta}_2^2} + 0{,}0183\, A^{\star 0{,}65}\,\frac{\bar{\delta}_1^{1{,}35} - \bar{\delta}_2^{1{,}35}}{\bar{\delta}_1^{1{,}35}\,\bar{\delta}_2^{1{,}35}}\right] = \\ &= \frac{\lambda_2}{4}\left[\frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2} + 0{,}0183\, A^{\star 0{,}65}\,\frac{(1+\alpha)^{1{,}35} - (1-\alpha)^{1{,}35}}{(1-\alpha^2)^{1{,}35}}\right]\end{aligned} \tag{59}$$

şi

$$\bar{\zeta} = \frac{\lambda^2}{4}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} - 1}{\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}} + 0{,}0183\, \bar{A}^{\star 0{,}65}\,\frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}35} - 1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1{,}35}}\right], \tag{60}$$

unde

$$\bar{A}^{\star} = \varkappa^2\, \overline{Re}^{\star}\, ; \; \overline{Re}^{\star} = \frac{\rho V \delta_2}{\mu}. \tag{61}$$

În diagramele din figurile 11 şi 12 s-a reprezentat coeficientul $\bar{\zeta}/\lambda^2$ în funcţie de δ_1/δ_2 pentru diferite numere Reynolds.

Poziţia rezultantei presiunilor poate fi de asemenea calculată fără dificultăţi. Astfel, notînd cu $x^\star$ distanţa de la origine pînă la rezultanta presiunilor, această distanţă va fi egală cu

$$x^\star = \frac{\int_0^r \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0)\, x\, dx\, dz}{P} = \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2} - \frac{\int_0^r \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p - p_0)\,\frac{\delta}{\delta_1 - \delta_2}\, dx\, dz}{P}. \tag{62}$$

În cazul viscozităţii variabile rezultă

$$\frac{x^\star}{r} = \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2} - \frac{\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2}{(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)^2}\ln\frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2} = \frac{1+\alpha}{2\alpha} - \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \tag{63}$$

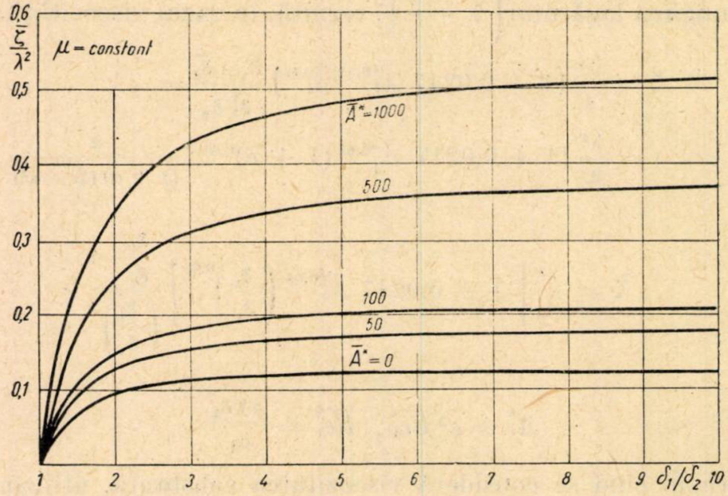

$\frac{\overline{\zeta}}{\lambda^2}$
μ = constant
$\bar{A}^*$=1000
500
100
50
$\bar{A}^*$=0
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
δ_1/δ_2
10

Fig. 11

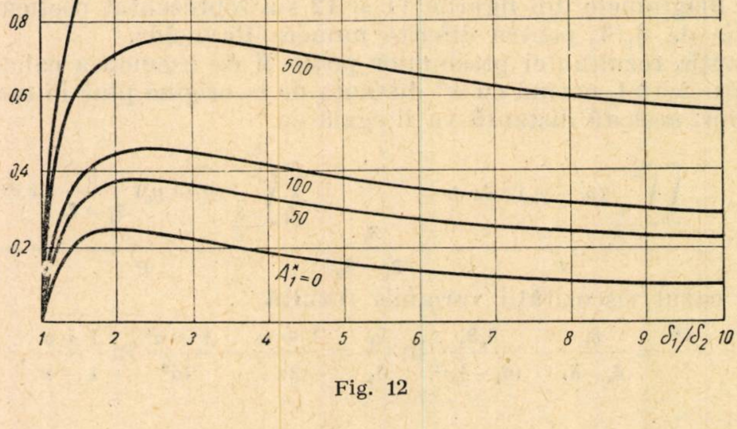

1,4
$\frac{\overline{\zeta}}{\lambda^2}$
μ = variabil
1,2
A_1^*=1000
1
0,8
500
0,6
0,4
100
50
0,2
A_1^*=0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
δ_1/δ_2
10

Fig. 12

sau

$$\frac{x^{\star}}{r} = \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1} - \frac{\frac{\delta_1}{\delta_2}}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1\right)^2} \ln \frac{\delta_1}{\delta_2}, \tag{64}$$

şi nu depinde de numărul Reynolds.

În cazul viscozităţii constante rezultă

$$\frac{x^{\star}}{r} = \frac{\lambda^2}{4\zeta} \frac{1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2} \left[\frac{\bar{\delta}_1^2 - \bar{\delta}_2^2}{\bar{\delta}_1^2 \bar{\delta}_2^2} + 0{,}706\, A^{\star 0{,}65} \frac{\bar{\delta}_1^{0{,}35} - \bar{\delta}_2^{0{,}35}}{(\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2)^{0{,}35}} \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{8\zeta\alpha} \left[\frac{4\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} + 0{,}706\, A^{\star 0{,}65} \frac{(1 + \alpha)^{0{,}35} - (1 - \alpha)^{0{,}35}}{(1 - \alpha^2)^{0{,}35}} \right] \tag{65}$$

şi

$$\frac{x^{\star}}{r} = \frac{\lambda^2}{4\bar{\zeta}} \frac{1}{\frac{\delta_1}{\delta_2} - 1} \left[\frac{\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} - 1}{\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}} + \right.$$

$$\left. + 0{,}706\, \bar{A}^{\star 0{,}65} \frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}35} - 1}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{0{,}35}} \right]. \tag{66}$$

Se constată că în toate cazurile $x^{\star}$ nu depinde de alungire, din cauza ipotezelor simplificatoare efectuate. Este de notat că deoarece pentru lagăre plane nu sînt satisfăcute riguros condiţiile la limită [6], rezultatele nu sînt aplicabile decît în cazul alungirilor foarte reduse.

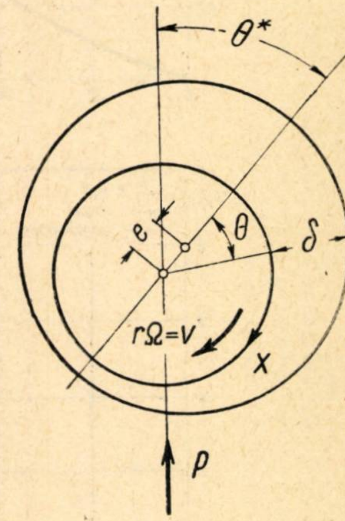


Fig. 13

5. LAGĂRE CIRCULARE

În acest caz grosimea filmului de lubrifiant este dată de relaţia (fig. 13)

$$\delta = \Delta(1 + \alpha \cos\theta). \tag{67}$$

Pentru viscozitatea variabilă, se poate utiliza direct relaţia (48) pentru distribuţia presiunilor.

Cu scopul de a simplifica calculele, urmînd aceeaşi metodă ca şi pentru problema bidimensională, vom utiliza în locul relaţiei exacte (50) relaţia aproximativă

$$p = p_0 + \frac{3\mu V b^2}{4r\Delta^2} \left[(1 + \varepsilon_{1z}) \frac{1}{\bar{\delta}^3} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \theta} + \varepsilon_{2z} \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \theta} \right] (1 - \bar{z}^2), \tag{68}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{1z}\left(Re^{\star}\right) &= 0{,}00618\ A^{\star 0{,}65}, \\ \varepsilon_{2z}\left(Re^{\star}\right) &= 0{,}01852\ A^{\star 0{,}65}, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

relație dedusă din (50) în care s-a înlocuit

$$f(\theta) = \frac{1}{\overline{\delta}^{2,35}}\,\frac{\partial\overline{\delta}}{\partial\theta} = \frac{\alpha\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{2,35}} \cong \frac{0{,}25\,\alpha\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{3}} + \frac{0{,}75\,\alpha\sin\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^{2}}, \tag{70}$$

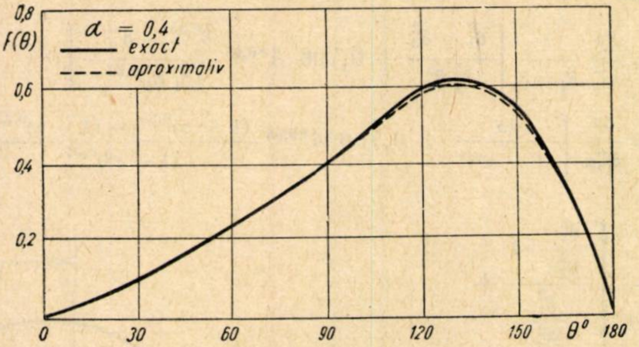


Fig. 14

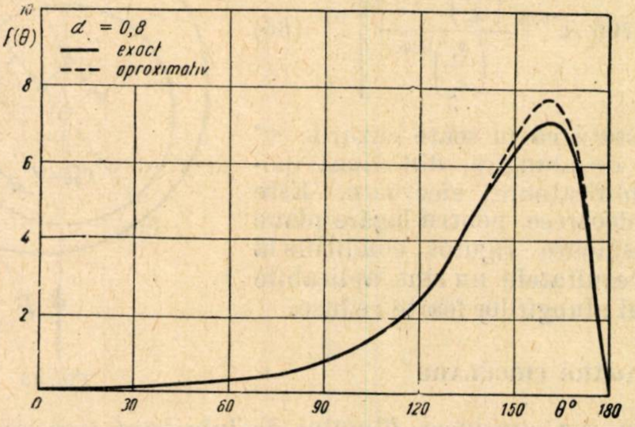


Fig. 15

relație destul de exactă, după cum se poate constata din figurile 14 și 15.

Componentele rezultantei presiunilor

$$\left.\begin{aligned} P_t &= -\int_0^{\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p-p_0)\, r\cos\theta\, d\theta\, dz = \frac{C_t\,\psi^2}{2\mu V b}, \\ P_n &= \int_0^{\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (p-p_0)\, r\sin\theta\, d\theta\, dz = \frac{C_n\,\psi^2}{2\mu V b}, \end{aligned}\right| \tag{71}$$

în cazul viscozităţii variabile sînt egale cu

$$\left.\begin{aligned}C_t &= 2\lambda^2 \frac{1}{(1+\alpha)(1-\alpha^2)}\left(1 - \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)[1 + 0{,}0247\, A_1^{\star 0,65}(1+\alpha)^{0,65}],\\ C_n &= \pi\lambda^2 \frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha(1+\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}}[1 + 0{,}0247\, A_1^{\star 0,65}(1+\alpha)^{0,65}],\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

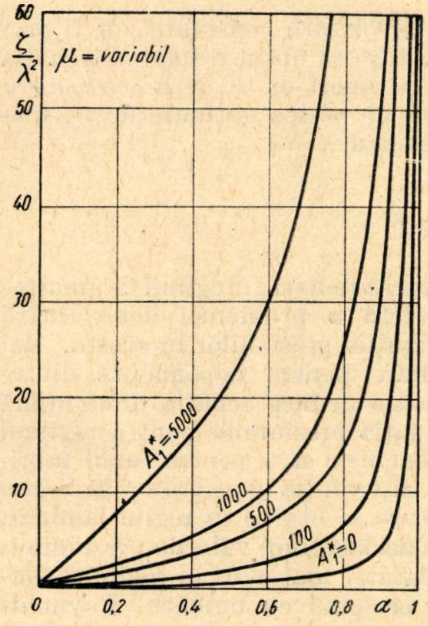


Fig. 16

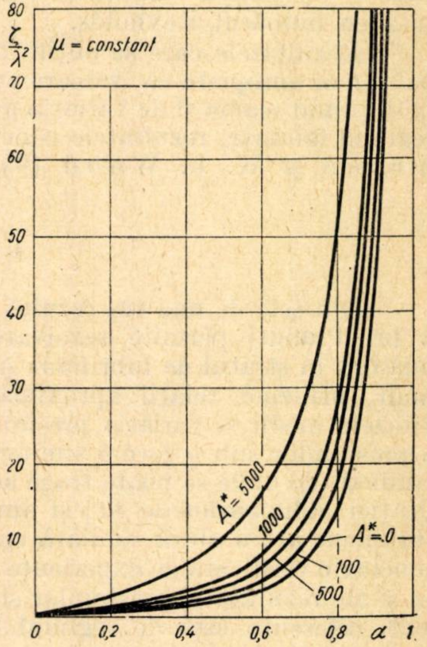


Fig. 17

iar în cazul viscozităţii constante

$$\left.\begin{aligned}C_t &= \frac{2\lambda^2}{1-\alpha^2}\left[\frac{(1+\varepsilon_{1z})\alpha}{1-\alpha^2} + \varepsilon_{2z}\left(1 - \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right],\\ C_n &= \frac{\pi\lambda^2}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\frac{(1+\varepsilon_{1z})\,\alpha^2}{2(1-\alpha^2)} + \varepsilon_{2z}(1-\sqrt{1-\alpha^2})\right].\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Cunoscînd componentele rezultantei presiunilor, unghiul $\theta^\star$ făcut de rezultanta presiunilor şi linia centrelor, rezultă imediat

$$\operatorname{tg}\theta^\star = \frac{P_n}{P_t}. \tag{74}$$

Astfel în cazul viscozităţii variabile

$$\operatorname{tg}\theta^\star = \frac{\pi}{2\alpha}\,\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,(1-\sqrt{1-\alpha^2})}{1-\dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}\ln\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}}, \tag{75}$$

independent de numărul Reynolds şi datorită aproximaţiilor introduse independent şi de alungirea lagărului.

În figurile 16 şi 17 s-a reprezentat variaţia coeficientului ζ/λ^2 (36) în funcţie de excentricitate, pentru diferite numere Reynolds.

Este de notat că se obţine o concordanţă satisfăcătoare între valorile obţinute pe această cale şi valorile mai exacte obţinute mai înainte (fig. 6—9) pentru viscozitate variabilă, dacă $\lambda < 0,9$, erorile crescînd însă cu numărul Reynolds.

Rezultatele care se obţin în cazul viscozităţii constante vor fi probabil mai apropiate ca valoare cu acelea care se obţin rezolvînd ecuaţia (25), ţinînd seama şi de variaţia presiunii în raport cu x, deoarece pentru regimul laminar, rezultatele concordă bine cu acelea obţinute de A. Cameron şi W. L. Wood [9], chiar pentru $\lambda = 1$.

4. CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că utilizarea ipotezei lungimii de amestec a lui Prandtl permite rezolvarea completă a problemei determinării mişcării în stratul de lubrifiant şi a distribuţiei presiunilor în acesta. Mai mult, utilizînd relaţii aproximative liniare pentru dependenţa dintre vitezele medii şi variaţia presiunii, se poate deduce ecuaţia diferenţială a presiunilor sub o formă similară cu ecuaţia presiunilor pentru regimul laminar, de unde se poate trage aceeaşi concluzie ca şi pentru cazul lubrificaţiei bidimensionale [2] şi anume că distribuţia presiunilor în regim turbulent are o alură similară cu aceea care se obţine în regim laminar, concluzie verificată de experienţe [10]. În acelaşi timp valorile presiunilor, ca şi ale rezultantei presiunilor sînt comparativ mai mari în regim turbulent, diferenţa faţă de regimul laminar crescînd cu numărul Reynolds al scurgerii. Analogia cu mişcarea laminară este aproape completă, dacă se consideră viscozitatea ca fiind variabilă cu grosimea stratului de lubrifiant, ipoteză utilizabilă după cum se ştie în cazul cînd lubrifiantul utilizat prezintă o variaţie apreciabilă a viscozităţii cu temperatura (cazul uleiurilor).

Rezultatele de mai sus sînt perfect determinate, dacă se cunoaşte valoarea constantei $\varkappa$ de care depind lungimea de amestec şi tensiunile suplimentare care apar în fluid din cauza turbulenţei. Această constantă trebuie determinată experimental, deoarece este probabil că va avea valori mai mici decît valoarea obţinută în cazul mişcărilor turbulente obişnuite din mecanica fluidelor, datorită grosimii reduse a stratului de lubrifiant. Astfel, din rezultatele experimentale obţinute de M. I. Smith şi D. D. Fuller [10] deşi nu se poate face o comparaţie cantitativă precisă (din cauza faptului că în lucrare nu sînt indicate o serie de date, ca temperatura medie a lubrifiantului etc.) rezultă pentru constanta $\varkappa = 0,25 \div 0,3$ în timp ce în mişcările turbulente obişnuite din mecanica fluidelor, $\varkappa = 0,4$.

Primit la redacţie la 17 martie 1959

СООБРАЖЕНИЯ О ТРЕХМЕРНОЙ СМАЗКЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется распределение боковых скоростей истечения слоя смазки, причем используется гипотеза пути смешения Прандтля и ранее полученные результаты [1], [2]. При этих условиях определяются приближенные соотношения между расходом смазки и изменением давления, на основании которых получается дифференциальное уравнение давлений в случае подшипников конечных размеров. Это уравнение интегрируется для случая, когда вязкость смазки является переменной, на основании аналогии с ламинарным режимом течения. В последней части работы рассматривается случай плоских и круглых подшипников малого удлинения, причем считается, что вязкость смазки является постоянной или переменной.

CONSIDÉRATIONS SUR LA LUBRIFICATION TRIDIMENSIONNELLE EN RÉGIME TURBULENT

RÉSUMÉ

On étudie la distribution des vitesses d'écoulement latéral dans la couche lubrifiante, en utilisant l'hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl et les résultats déjà obtenus [1], [2]. Dans ces conditions, on détermine des relations approximatives, concernant la dépendance du débit latéral, des variations de la pression. On obtient de cette manière l'équation différentielle des pressions pour le cas des paliers de dimensions finies. Cette équation est ensuite intégrée pour le cas où l'on considère la viscosité du lubrifiant variable, en utilisant une analogie avec le cas du régime laminaire. A la fin du travail, on étudie le cas des paliers plans et circulaires, d'allongement réduit, en considérant la viscosité aussi bien constante que variable.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifiant.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 1, 103 (1958).
2. — *Studiul lubrificației bidimensionale în regim turbulent:* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 1, 139 (1958).
3. — *Lubrificația lagărelor în regim turbulent supuse la forțe și viteze variabile.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 3, 657 (1958).

4. V. N. Constantinescu, *Stabilitatea mişcării lagărelor circulare lubrificate în regim turbulent.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 4, 197 (1958).
5. — *Calculul lagărelor compuse din suprafeţe plane lubrificate în regim turbulent.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX**, 3 (1958).
6. N. Tipei, *Hidro-aerodinamica lubrificaţiei.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.
7. F. W. Ocvirk, G. B. DuBois. Tech. Note nat. adv. Comm. Aero, *2808* and *2809* (1952).
8. V. T. Morgan, A. Cameron, *Mechanism of Lubrification in Porous Metal Bearings.* Paper Nr. 89. Proceedings of the Conference on Lubrification and Wear, London, 1957, the Institution of Mechanical Engineers, London, 1958.
9. A. Cameron, W. L. Wood, *The Full Journal Bearing.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, **161**, 59 (1949).
10. M. I. Smith, D. D. Fuller, *Journal Bearings Operations at Superlaminar Speeds.* Trans. ASME, *78*, 469–474 (1956).

TEORIA MECANISMELOR

CONTRIBUȚII LA CINEMATICA DIADEI CEBÎȘEV

DE

RADU C. BOGDAN și CHR. PELECUDI

Într-o lucrare anterioară [1] ne-am ocupat de problema cercetării mecanismelor cu patru elemente articulate folosind analiza armonică. Întrebuințînd seriile Fourier sub formă complexă s-au obținut dezvoltările parametrilor cinematici în funcție de unghiul φ de rotație al manivelei. Caracterizarea cinematică și dinamică pe baza analizei armonice este foarte importantă pentru mecanisme, unde problema fundamentală a măririi vitezelor de lucru pentru ridicarea productivității poate duce la vibrații care modifică parametrii mecanismelor într-un mod nedorit, micșorînd calitatea transmisiei. În plus, s-au obținut funcțiile parametrilor cinematici sub formă explicită, cu tot inconvenientul reprezentării lor prin serii, dar repede convergente. Astfel se cunoaște că ecuația traiectoriei unui punct de bielă este dată sub forma unei funcții implicite de gradul șase. Mărirea numărului de elemente ale mecanismului duce desigur la ecuații de ordin superior. Dacă pornim de la principiul Assur că orice mecanism poate fi format prin legarea succesivă a unor lanțuri cinematice cu grad de mobilitate zero (grupe) la elementul conducător (sau la elemente conducătoare) și suport, se impune deci ca o primă generalizare studierea diadei Cebîșev pe baza analizei armonice.

Considerînd sub forma generală diada Cebîșev $A_1 B A_2$, articulată în B, unde se află unghiul de transmisie Ψ și de asemenea articulată în punctele A_1 și A_2 obligate să descrie diferite traiectorii, în particular cu vectorii de poziție complecși z_1 și z_2, cunoscuți sub formă de serii Fourier, avem (fig. 1)

$$z_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} e^{ik\varphi} , \tag{1}$$

$$z_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} e^{ik\varphi} , \tag{2}$$

urmîndu-se a se determina

$$e^{i\Phi_1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} e^{ik\varphi}\,, \tag{3}$$

$$e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} e^{ik\varphi}\,, \tag{4}$$

$$e^{i\Psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\varphi}\,. \tag{5}$$

Întrucît unghiul de transmitere Ψ este legat de unghiurile Φ_1 și Φ_2, făcute de direcțiile A_1B și A_2B cu orizontala, prin relația

$$\Psi = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{6}$$

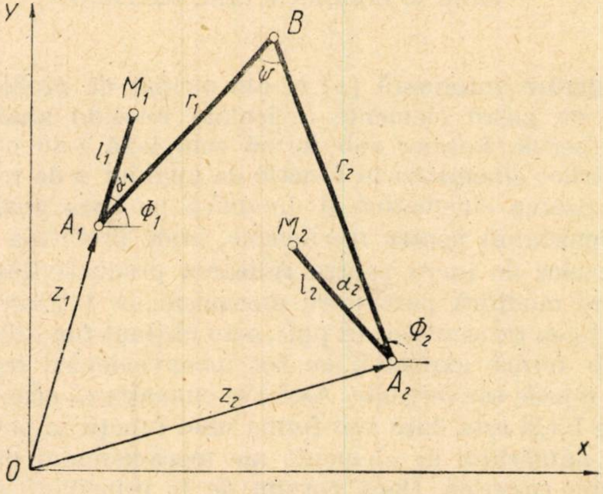


Fig. 1

coeficienții B se pot obține prin identificarea după înmulțirea seriilor $e^{i\Phi_2}$ și $e^{-i\Phi_1}$ (conjugata complexă)

$$B_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(2)} \bar{A}_k^{(1)}\,. \tag{7}$$

Dar conform figurii 1

$$\overline{OB} = z_1 + r_1 e^{i\Phi_1} = z_2 + r_2 e^{i\Phi_2}\,,$$

$$\overline{A_1A_2} = z_2 - z_1 = r_1 e^{i\Phi_1} - r_2 e^{i\Phi_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{ik\varphi}\,, \tag{8}$$

cu

$$\beta_k = \alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)} = r_1 A_k^{(1)} - r_2 A_k^{(2)} \tag{9}$$

relaţie care exprimă legătura între coeficienţii dezvoltărilor pentru cele două unghiuri Φ_1 şi Φ_2.

Pentru uşurarea calculelor viitoare este nevoie de introducerea vectorilor complecşi

$$V_1 = \overline{A_1 A_2}\, e^{-i\Phi_1} = r_1 - r_2\, e^{i\Psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \tag{10}$$

$$V_2 = \overline{A_1 A_2}\, e^{-i\Phi_2} = r_1\, e^{-i\Psi} - r_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \tag{11}$$

reprezentînd vectorul $\overline{A_1 A_2}$ rotit cu unghiurile $-\Phi_1$ sau $-\Phi_2$ sau, mai bine, fiind reprezentarea complexă a vectorului $\overline{A_1 A_2}$ faţă de axele rotite cu $+\Phi_1$ sau $+\Phi_2$, deci cu axa Ox în direcţia şi sensul, fie a lui $\overline{A_1 B}$, fie a lui $\overline{A_2 B}$. În consecinţă găsim

$$C_m^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \bar{A}_k^{(1)}, \tag{12}$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \bar{A}_k^{(2)}, \tag{13}$$

sau

$$\beta_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} A_{-k}^{(1)}, \tag{14}$$

$$\beta_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(2)} A_{-k}^{(2)}, \tag{15}$$

cu condiţiile

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(2)} \bar{A}_k^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(1)} \bar{A}_k^{(1)} = 0 \quad \text{pentru } m \neq 0, \tag{16}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} \bar{A}_k^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} \bar{A}_k^{(1)} = 1. \tag{17}$$

Aceste condiţii arată că totdeauna $| A_k^{(1)} | \leqslant 1$ $| A_k^{(2)} | \leqslant 1$ ceea ce este valabil şi pentru $| B_k | \leqslant 1$. Din (10) rezultă şi $| \beta_k | \leqslant r_1 + r_2$.

De asemenea,

$$\begin{aligned} C_m^{(1)} &= -r_2 B_m, && \qquad\qquad (18) \\ & && \text{pentru } m \neq 0 \\ C_m^{(2)} &= +r_1 \bar{B}_{-m}, && \qquad\qquad (19) \end{aligned}$$

şi

$$C_0^{(1)} = r_1 - r_2 B_0, \tag{20}$$

$$C_0^{(2)} = r_1 \bar{B}_0 - r_2, \tag{21}$$

cu inegalităţile $| C_m^{(1)} | \leqslant r_2$, $| C_m^{(2)} | \leqslant r_1$

și

$$| C_0^{(1)} | \leqslant r_1 + r_2 , \quad | C_0^{(2)} | \leqslant r_1 + r_2 .$$

În afara acestor relații, din proprietățile vectorilor complecși V_1 și V_2 se obțin noi legături interesante.

Din relația

$$V_1 \overline{V}_1 = V_2 \overline{V}_2 = | \overline{A_1 A_2} |^2 = (z_2 - z_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\varphi} , \qquad (22)$$

rezultă

$$\gamma_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \overline{\beta}_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} C_k^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(2)} C_k^{(2)} , \qquad (23)$$

cu $\gamma_m = \overline{\gamma}_{-m}$, funcția respectivă fiind reală.

Din relația

$$\frac{V_1}{V_2} = e^{i\Psi} , \qquad (24)$$

obținem

$$C_m^{(1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(2)} B_{-k} , \qquad (25)$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{k+m}^{(1)} \overline{B}_k , \qquad (26)$$

una din ele constituind soluția sistemului infinit de ecuații dat de cealaltă relație.

Din

$$r_1 V_1 - r_2 V_2 = | \overline{A_1 A_2} |^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\varphi} , \qquad (27)$$

avem

$$r_1 C_k^{(1)} - r_2 C_k^{(2)} = \gamma_k \qquad (28)$$

și

$$| \gamma_k | \leqslant 2 r_1 r_2 , \text{ iar } | \gamma_0 | \leqslant (r_1 + r_2)^2 .$$

Mai departe se va arăta că este posibilă calcularea coeficienților C și deci din sistemul infinit de ecuații (12), (15) se pot calcula și coeficienții A, care rezolvă problema.

Din triunghiul $A_1 B A_2$ se găsește

$$\cos \Psi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - | \overline{A_1 A_2} |^2}{2 r_1 r_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k e^{ik\varphi} , \qquad (29)$$

cu

$$\Delta_k = - \frac{\gamma_k}{2 r_1 r_2} , \quad \text{pentru } k \neq 0 \qquad (30)$$

şi

$$\Delta_0 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \gamma_0}{2\, r_1 r_2},$$

sau

$$\Delta_k = \frac{B_k + \bar{B}_{-k}}{2}, \tag{31}$$

rezultînd $|\Delta_k| \leqslant 1$ şi $\Delta_k = \bar{\Delta}_{-k}$ pentru orice k.

Dacă vom considera

$$\sin \Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k\, e^{ik\varphi}, \tag{32}$$

ar reveni

$$B_k = \Delta_k + i D_k\,. \tag{33}$$

Din mersul calculelor de pînă acum se constată că dacă dezvoltarea lui $\cos\Psi$ se poate cunoaşte uşor prin calculul coeficienţilor Δ_k din aproape în aproape, de la α_k, β_k, γ_k şi Δ_k dezvoltarea lui $\sin\Psi$ este necunoscută, coeficienţii săi D_k obţinîndu-se pînă aici din coeficienţii necunoscuţi A_k, B_k, C_k şi D_k.

Vom căuta să dezvoltăm pe $\sin\Psi$ în funcţie de $\cos\Psi$ după formula binomului generalizată şi după înlocuirile respective să obţinem în cele din urmă dezvoltarea în serii Fourier pentru $\sin\Psi$

$$\sin\Psi = \pm\sqrt{1 - \cos^2\Psi} = \pm\left[1 - \frac{1}{2}\cos^2\Psi - \frac{1}{2^2.2!}\cos^4\Psi - \right.$$
$$\left. \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n \cdot n!}\cos^{2n}\Psi \ldots\right], \tag{34}$$

semnele + şi — corespunzînd situaţiilor cînd unghiul Ψ se găseşte în cadranul 1 şi 2 sau 3 şi 4.

Dacă notăm

$$\cos\Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k\, e^{ik\varphi},$$

$$\cos^{2n}\Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k^{(2n)}\, e^{ik\varphi}, \tag{35}$$

$$\Delta_m^{(2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{k+m}\, \bar{\Delta}_k = \bar{\Delta}_{-m}^{(2)}, \tag{36}$$

cu

$$\Delta_m^{(2n)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{k+m}^{(2n-2)}\, \bar{\Delta}_k^{(2)} = \bar{\Delta}_{-m}^{(2n)}, \tag{37}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA * 1848

vom avea

$$\begin{aligned} D_k &= \overline{D}_{-k} = \mp \left[\frac{1}{2} \Delta_k^{(2)} + \frac{1}{2^2.2!} \Delta_k^{(4)} + \dots \right. \quad \text{pentru } k \neq 0 \\ D_0 &= \pm 1 \mp \left[\frac{1}{2} \Delta_0^{(2)} + \frac{1}{2^2.2!} \Delta_0^{(4)} + \dots \right. \end{aligned} \tag{38}$$

Așa cum s-a arătat mai sus, după aflarea coeficienților D prin relațiile (33), (18)—(21) și (12)—(15) se obțin coeficienții A pentru dezvoltările unghiurilor Ψ_1 și Ψ_2.

CONVERGENȚA SERIILOR

Pentru dezvoltările

$$\overline{A_1 A_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k \, e^{ik\varphi},$$

$$|\, \overline{A_1 A_2} \,|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m \, e^{im\varphi},$$

cu

$$\gamma_m = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{k+m} \, \overline{\beta}_k = \overline{\gamma}_{-m},$$

observîndu-se că diada $A_1 B A_2$ se poate utiliza în condițiile de mobilitate

$$|\, r_1 - r_2 \,| \leqslant |\, \overline{A_1 A_2} \,| \leqslant r_1 + r_2 \tag{39}$$

adică funcția $|\, \overline{A_1 A_2} \,|$ este mărginită și presupunînd-o continuă, este integrabilă împreună cu patratul ei, rezultă că seriile lui Fourier sînt absolut și uniform convergente. În consecință, și seriile numerice ale coeficienților sînt absolut convergente.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\, \beta_k \,| \leqslant K \quad \text{cu} \quad \lim_{k \to \infty} |\, \beta_k \,| = 0 \, . \tag{40}$$

Aceasta ajută la limitarea numărului de termeni pentru calcularea aproximativă a coeficienților γ_k deoarece presupunînd

$$|\, \beta_k \,| \leqslant \varepsilon_N \quad \text{pentru} \quad |\, k \,| \geqslant N,$$

avem

$$|\, \gamma_m \,| \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} |\, \beta_{k+m} \,| \, |\overline{\beta}_k \,| \leqslant S_1 + S_2, \tag{41}$$

unde

$$S_1 = \sum_{k=-N}^{k=N-m} |\, \beta_{k+m} \,| \, |\, \overline{\beta}_k \,|, \tag{42}$$

cu $2N + 1 - m$ termeni, cu $m > 0$,

iar

$$S_2 = \varepsilon_N \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} | \beta_k | \mp \sum_{-N-1+m}^{N+1-m} | \beta_k | \right], \tag{43}$$

adică

$$S_2 \leqslant \varepsilon_N K \quad \text{pentru } m < N, \tag{44}$$

$$S_2 \leqslant 2\, \varepsilon_N K \quad \text{pentru } m > N, \tag{45}$$

şi

$$S_1 = 0 \quad | \gamma_m | \leqslant S_2 \leqslant 2\, \varepsilon_N K \quad \text{pentru } m \geqslant 2N + 1.$$

Trebuie să remarcăm aici cazul interesant din punct de vedere practic care se întîlneşte de exemplu la patrulaterul articulat şi la derivatele sale, cînd funcţia $|\overline{A_1A_2}|$ se prezintă sub forma unui polinom cu număr limitat de termeni, egal cu $2N + 1$, adică $\varepsilon_{N+1} = 0$. În acest caz funcţia $|\overline{A_1A_2}|^2$ va avea $4N + 1$ termeni dintre care $2N$ termeni cu indice pozitiv, $2N$ termeni cu indice negativ, dar $\gamma_m = \overline{\gamma}_{-m}$, şi termenul liber.

Următoarea dezvoltare :

$$\cos \Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_k\, e^{ik\varphi},$$

urmăreşte convergenţa seriei precedente, deoarece coeficienţii ei se obţin prin împărţire cu $2r_1r_2$, $\Delta_k = - \gamma_{k/2r_1 r_2}$.

În sfîrşit, dezvoltarea lui sin Ψ este mai repede convergentă cu cît cos Ψ este mai depărtat de unitate, deci pentru $\Psi \neq 0$ sau 180°. Dar practic aceste poziţii extreme nu trebuie atinse decît cu foarte mare îngrijire, întrucît pe lîngă că există posibilitatea nedeterminării mişcării, există şi pericolul ca din cauza jocurilor în cuplele cinematice, imperfecţiunilor de prelucrare etc., mecanismul realizat să aibă în aceste poziţii şocuri sau să se blocheze.

Sistemele infinite de ecuaţii (12)—(15) se pot rezolva prin metoda aproximaţiilor succesive, după ce au fost aduse la forma normală prin substituţiile

$$\text{pentru } k \neq 0,\ \beta_k^{\star} = - \beta_k \text{ şi } \beta_0^{\star} = 1 - \beta_0, \tag{46}$$

adică (fără indicele 1 sau 2)

$$\overline{A}_m = C_{-m} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k^{\star}\, \overline{A}_{k+m}, \tag{47}$$

condiţia de convergenţă fiind îndeplinită deoarece $\sum_{-\infty}^{+\infty} | \beta_k^{\star} | < 1 + K$.

CAZURI PARTICULARE

a) Dacă diada A_1BA_2 este legată prin articulaţia A_2 la bază atunci

$$z_2 = \alpha_0^{(2)} = l e^{i\delta},\ \alpha_k^{(2)} = 0 \quad \text{pentru } k \neq 0 \tag{48}$$

l şi δ fiind constante.

b) Dacă diada A_1BA_2 este legată prin articulaţia A_1 la o bară OA_1 în mişcare de rotaţie, de unghi φ, avem

$$z_1 = re^{i\varphi}, \quad \alpha_k^{(1)} = 0, \quad \text{pentru } k \neq 1. \tag{49}$$

c) În cazul patrulaterului articulat OA_1BA_2 (fig. 2) se obţine

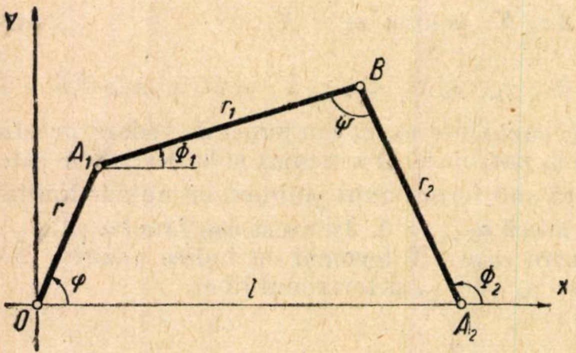


Fig. 2

$$z_1 = re^{i\varphi}, \quad z_2 = l,$$
$$\alpha_1^{(1)} = r, \quad \alpha_0^{(2)} = l,$$
$$\beta_0 = l, \quad \beta_1 = -r,$$
$$\gamma_0 = l^2 + r^2, \ \gamma_1 = \gamma_{-1} = -rl,$$
$$\Delta_0 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2 - l^2}{2\,r_1 r_2},$$
$$\Delta_1 = \Delta_{-1} = \frac{rl}{2r_1 r_2}. \tag{50}$$

Calculele de la Δ_k la D_k sînt mai laborioase şi este bine să fie făcute numeric.

$$B_k = \Delta_k + iD_k, \text{ iar } C_k^{(1)} = -r_2B_k, \ C_0^{(1)} = r_1 - r_2 B_0 .$$

Sistemul infinit de ecuaţii devine

$$l\overline{A}_m^{(1)} - r\,\overline{A}_{m+1}^{(1)} = C_{-m}^{(1)} \tag{51}$$

unde se pot prezenta două situaţii după cum $l > r$ sau $l < r$.

Pentru $\lambda = \frac{r}{l} < 1$ avem

$$\overline{A}_m^{(1)} = \lambda\overline{A}_{m+1}^{(1)} + \frac{C_{-m}^{(1)}}{l} \tag{52}$$

rezultînd din aproape în aproape soluţia

$$l\overline{A}_m^{(1)} = C_{-m}^{(1)} + \lambda\, C_{-(m+1)}^{(1)} + \ldots + \lambda^p\, C_{-(m+p)}^{(1)} + r\lambda^p\, \overline{A}_{m+p+1}^{(1)} . \tag{53}$$

Pentru $\lambda^\star = \frac{l}{r} < 1$ avem

$$\overline{A}_{m+1}^{(1)} = \lambda^\star\, \overline{A}_m^{(1)} - \frac{C_{-m}^{(1)}}{r}, \tag{54}$$

sau

$$\overline{A}_{-m+1}^{(1)} = \lambda^\star\, \overline{A}_{-m}^{(1)} - \frac{C_m^{(1)}}{r},$$

de unde se obţine în acelaşi fel

$$r\overline{A}_{-m+1}^{(1)} = -\left[C_m^{(1)} + \lambda^\star\, C_{m+1}^{(1)} + \ldots + \lambda^{\star p}\, C_{m+p}^{(1)}\right] + l\lambda^{\star p}\, \overline{A}_{-(m+p)}^{(1)}. \tag{55}$$

La ambele sisteme pentru p destul de mare astfel ca însăşi $(m + p)$ să fie mare, ultimul termen se poate neglija. Seriile (53) şi (55) care dau

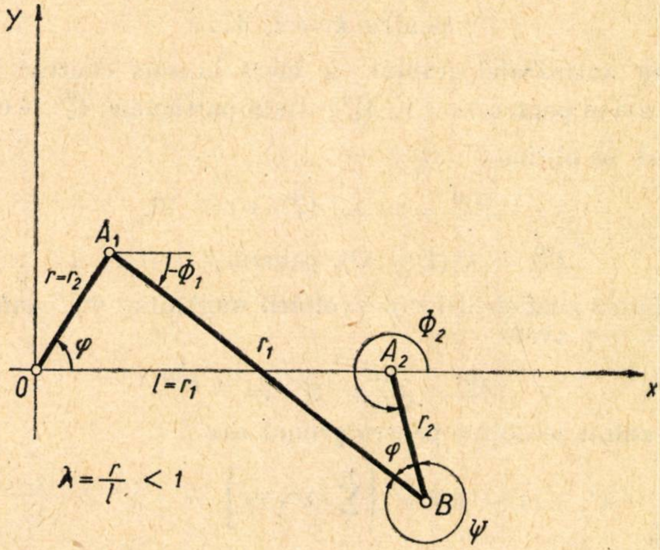

y
A_1
$r=r_2$
$-\Phi_1$
φ
r_1
Φ_2
A_2
0
$l=r_1$
x
r_2
φ
$\lambda=\frac{r}{l}<1$
B
ψ

Fig. 3

aceste necunoscute sînt repede convergente, restul lor tinzînd foarte repede către zero, atît din cauza coeficienţilor $|A| < 1$ cît şi din cauza $\lambda^p \ll 1$.

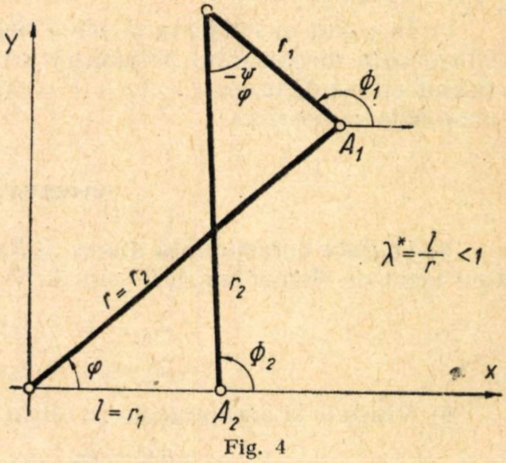

B
y
r_1
$-\psi$
φ
Φ_1
A_1
$\lambda^*=\frac{l}{r}<1$
$r=r_2$
r_2
φ
Φ_2
x
$l=r_1$
A_2

Fig. 4

În cazul $\lambda = \lambda^* = 1$ desigur convergenţa este mai înceată.

d) Pentru paralelogram sau antiparalelogram cu condiţiile $l = r_1$ şi $r = r_2$ relaţiile (50) se reduc la

$$\Delta_0 = 0 \quad \Delta_1 = \Delta_{-1} = \frac{1}{2}$$

La antiparalelogram observînd figurile 3 şi 4

$$\Psi = 360 - \varphi, \text{ sau } \Psi = -\varphi,$$
$$B_{-1}=1, \; B_k=0, \text{ pentru } k \neq -1 \tag{56}$$

şi deci

$$C_0^{(1)} = r_1, \; C_{-1}^{(1)} = -r_2, \; C_m^{(1)} = 0, \text{ pentru } m \neq 0, -1. \tag{57}$$

Pentru antiparalelogramul cu mers în acelaşi sens la care $l < r$ şi $\lambda^* = l/r < 1$, obţinem pentru $m \geqslant 1$ $\overline{A}_{m+1}^{(1)} = 0$ în particular $\overline{A}_0^{(1)} = 0$.

În continuare

$$\overline{A}_1^{(1)} = -\lambda^*,\ \overline{A}_k^{(1)} = (1-\lambda^{*2})\,\lambda^{*k-2}, \qquad (58)$$

pentru $k = 2, 3\ldots$

Pentru antiparalelogramul cu mers în sens contrar cu $l > r$ și $\lambda = \frac{r}{l} < 1$ avem pentru $m > 1$, $\overline{A}_m^{(1)} = 0$ în particular $\overline{A}_2^{(1)} = 0$.

În rest se obține

$$\overline{A}_1^{(1)} = -\lambda,\ \overline{A}_0^{(1)} = 1-\lambda^2,$$

$$\overline{A}_{-k}^{(1)} = \lambda^k(1-\lambda^2), \text{ pentru } k = 1{,}2\ldots \qquad (59)$$

La aflarea coeficienților dezvoltării unghiului Φ_2 conform relației $\Phi_2 - \Phi_1 = -\varphi$ avem

$$A_k^{(2)} = A_{k+1}^{(1)} \quad \text{și} \quad \beta_k = C_{-k}^{(1)}. \qquad (60)$$

Ca rezultat se obține pentru primul caz

$$e^{i\Phi_2} = -\lambda^* + (1-\lambda^{*2})\,e^{i\varphi}\left[\sum_1^\infty (\lambda^* e^{i\varphi})^p\right] = -\lambda^* + \frac{(1-\lambda^{*2})\,e^{i\varphi}}{1-\lambda^* e^{i\varphi}}, \qquad (61)$$

iar în cazul al doilea

$$e^{i\Phi_2} = -\lambda + (1-\lambda^2)\,e^{-i\varphi}\left[\sum_1^\infty (\lambda e^{-i\varphi})^p\right] = -\lambda + \frac{(1-\lambda^2)\,e^{-i\varphi}}{1-\lambda\,e^{-i\varphi}}, \qquad (62)$$

cu $e^{i\Phi_1} = e^{i\Phi_2}\cdot e^{i\varphi}$.

e) În cazul mecanismului bielă manivelă, considerînd [2] că acesta se obține din mecanismul patrulater articulat în care laturile r_2 și l tind la infinit cu condițiunea $l - r_2 = e =$ const. $e =$ excentricitatea, se obțin dezvoltările cunoscute.

OBSERVAȚII

a) O dată determinată diada A_1BA_2, vectorul de poziție al oricărui punct legat de elementul A_1B (sau A_2B) se obține simplu (fig. 1).

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= z_1 + l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)}, \\ Z_2 &= z_2 + l_2\, e^{i(\alpha_2+\Phi_2)}. \end{aligned}\right. \qquad (63)$$

b) Vitezele și accelerațiile se obțin prin derivări :

$$v_1 = \frac{dZ_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + i\,\omega_1 l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)}, \qquad (64)$$

unde dz_1/dt este viteza punctului A_1 sub forma complexă, iar $i\,\omega_1 l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)}$ este componenta obținută din rotația elementului A_1M_1B cu viteza unghiulară absolută $\omega_1 = d\,\Phi_1/dt$.

Pentru acceleraţii

$$a_1 = \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} + i\varepsilon_1 l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)} - \omega_1^2 l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)}, \tag{65}$$

unde la fel $d^2 z_1/dt^2$ este acceleraţia punctului A_1 sub formă complexă iar $i\varepsilon_1 l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)}$ şi $\omega_1^2 l_1 e^{i(\alpha_1+\Phi_1)}$ sînt componentele tangenţiale şi normale din mişcarea de rotaţie a elementului $A_1 M_1 B$ cu acceleraţia unghiulară absolută $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$ şi viteza unghiulară absolută ω_1.

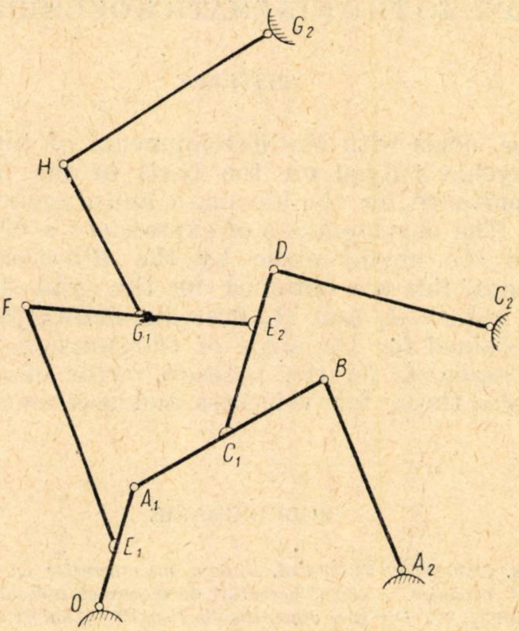


Fig. 5

c) Cu ajutorul studiului arătat în prezenta lucrare asupra diadei Cebîşev se poate trece la mecanisme articulate cu mai multe elemente, legînd în serie astfel de diade, bineînţeles cu respectarea regulilor date mai sus (fig. 5).

Primit la redacţie la 3 iunie 1959

К КИНЕМАТИКЕ ДИАДЫ ЧЕБЫШЕВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе исследуются разложения кинематических параметров диады Чебышева, на основании гармонического анализа, представляющего значение для кинематической и динамической характеристи-

ки механизмов. Для диады A_1BA_2 при условии, что ее точки A_1 и A_2 описывают заданные траектории, получаются разложения для выражений $e^{i\Phi_1}$ и $e^{i\Phi_2}$, где Φ_1 и Φ_2 — углы между направлениями $A_1 B$ и $A_2 B$ и горизонталью, а также для угла передачи ψ между двумя звеньями. После этого легко выписываются разложения для радиус-вектора точки, связанной с одним из звеньев, а также для скоростей и ускорений.

CONTRIBUTIONS TO THE KINEMATICS OF CHEBYCHEV'S DYAD

ABSTRACT

This paper, deals with the developments of the kinematic parameters of Chebychev's dyad on the basis of the harmonic analysis, which is of importance for the kinematic and dynamic characterization of mechanisms. The developments of expressions $e\ i\Phi_1$ and $e\ i\Phi_2$ where Φ_1 and Φ_2 are the angles made by the directions A_1B and A_2B with the horizontal line are obtained for the dyad A_1BA_2 on the condition that its points A_1 and A_2 describe known paths. A similar development is obtained for the angle of transmission ψ between the two bars. The developments for the position vector of a point of one of the bars and also those for velocities and accelerations may then be easily written.

BIBLIOGRAFIE

1. Radu C. Bogdan, Christian Pelecudi, *Sinteza mecanismelor cu patru elemente pe baza analizei armonice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *1* (1959).
2. W. Meyer zur Capellen, *Die zwei dimensionale Fourier - Analyse spezieller Koppelkurven.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. *1/2* (1959).
3. И. И. Артоболевский, З. С. Блох, В. В. Добровольский, *Синтез механизмов.* Огиз. Гостехиздат, Москва, 1944.

O TEORIE A ECHILIBRAJULUI FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE POLICILINDRICE ÎN LINIE ÎN DOI TIMPI CU NUMĂR PAR DE CILINDRI ȘI APRINDERI UNIFORM REPARTIZATE

DE

G. BĂRĂNESCU *)

INTRODUCERE

La motoarele cu piston, piesele în mișcare dezvoltă forțe de inerție variabile ca mărime, direcție sau sens. Ele produc trepidații care obosesc și uzează organele motorului.

Studiul echilibrajului forțelor de inerție se rezumă la constatarea unei situații de fapt, deoarece, în general, nu se pot folosi dispozitive convenabile din punct de vedere practic, care să echilibreze aceste forțe. Se stabilește, în fond, numai influența pe care o are sporirea numărului de cilindri asupra echilibrajului motorului.

La motoarele cu mai mulți cilindri apare o problemă suplimentară de echilibraj : cilindrii fiind situați în planuri diferite, forțele de inerție ale fiecărui cilindru vor lucra în planuri diferite și ca atare pot lua naștere momente variabile, care măresc dezechilibrul motorului. Există însă posibilitatea de a micșora sau de a echilibra aceste momente prin plasarea convenabilă a manivelelor arborelui cotit. Astfel, scopul principal al studiului echilibrajului motoarelor policilindrice este precizarea acelor dispoziții ale manivelelor care să satisfacă cerința funcțională a uniformității aprinderilor și în același timp să conducă la cele mai mici momente ale forțelor de inerție.

În cele ce urmează se prezintă o metodă de cercetare a echilibrajului motoarelor în linie. S-a considerat cazul motoarelor în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate. Sînt folosite simplificările

---

*) **Institutul politehnic, București.**

uzuale și anume : viteza unghiulară de rotație a arborelui cotit este presupusă constantă, iar forțele de inerție ale fiecărei biele sînt considerate echivalente cu forțele de inerție a două mase, dintre care una participă la mișcarea pistonului, iar cealaltă la mișcarea butonului manivelei ; ca urmare a acestei ultime ipoteze, în motor există numai forțe de inerție ale pieselor cu mișcare de rotație, și forțe de inerție ale pieselor care participă la mișcarea de translație a pistonului.

1. INTERPRETAREA FORȚELOR DE INERȚIE ALE UNUI CILINDRU

Fie

r — raza manivelei ;

m_r — masa pieselor cu mișcare de rotație, redusă la butonul manivelei ;

ω — viteza unghiulară a arborelui cotit.

Deoarece viteza unghiulară ω este presupusă constantă, forța de inerție a pieselor cu mișcarea de rotație se reduce la forța centrifugă,

$$F_r = m_r\, r\, \omega^2\,,$$

care are o mărime constantă și se rotește o dată cu manivela. Această forță poate fi reprezentată printr-un vector de mărime constantă, care se află în permanență în fază cu manivela (fig. 1).

Forța de inerție a pieselor cu mișcare de translație are întotdeauna direcția axei cilindrului, iar mărimea și sensul sînt periodic variabile. Scrisă sub forma unei serii Fourier această forță are expresia

$$F_t = m_t \sum_{p=1}^{\infty} c_p (p\omega)^2 \cos(p\,\alpha + \varphi_p),$$

unde m_t este masa pieselor cu mișcare de translație, p ordinul armonicii, α unghiul descris de manivelă măsurat față de poziția moartă interioară, iar c_p și φ_p constante determinate de particularitățile geometrice ale echipajului mobil ; la motorul axat, armonicile impare de ordin superior lipsesc.

Armonica de ordinul p are forma

$$f_p = m_t\, c_p(\,p\omega)^2 \cos\,(p\alpha + \varphi_p).$$

Deoarece mărimile m_t, c_p și φ_p depind numai de particularitățile geometrice și constructive ale arborelui cotit, la motoarele policilindrice care au cilindri identici, armonicile de același ordin ale forței de inerție ale pieselor cu mișcare de translație vor fi identice.

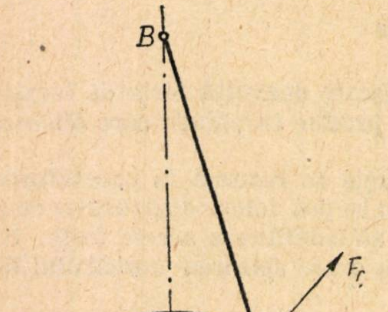


Fig. 1. — Interpretarea forței de inerție a pieselor cu mișcare de rotație.

Ținînd seama de reprezentările din figura 2, se poate afirma că armonica de ordinul p este întotdeauna proiecția pe direcția ox a unui vector de mărime constantă și egală cu $m_t\, c_p(p\omega)^2$, care se rotește în sensul manivelei cu viteza unghiulară constantă $p\omega$ și care face cu manivela unghiul $\pi + \varphi_p$ cînd manivela se află în poziția moartă interioară.

Cu ajutorul acestei interpretări, echilibrajul forțelor de inerție și a momentelor acestor forțe poate fi redus la echilibrajul vectorilor care interpretează forțele de inerție, respectiv la echilibrajul momentelor acestor vectori.

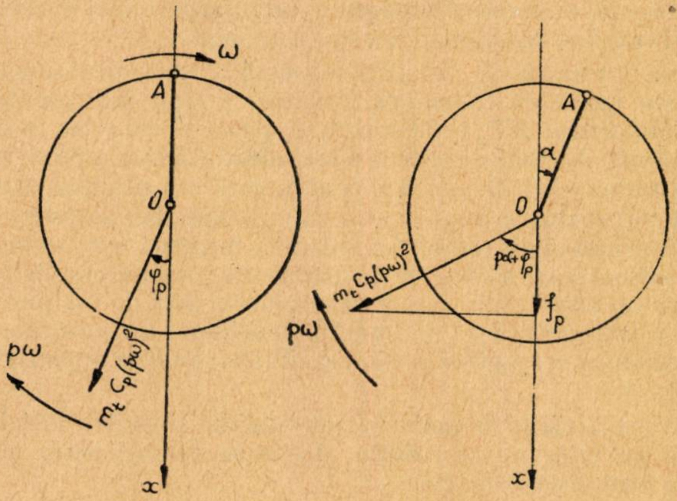


Fig. 2. — Interpretarea armonicii de ordinul p a forței de inerție a pieselor cu mișcare de translație.

Astfel, pentru o armonică oarecare, rezultanta forțelor de inerție pentru întregul motor este egală cu suma proiecțiilor pe direcția ox a vectorilor care interpretează armonica respectivă ; această sumă este evident egală cu proiecția pe aceeași direcție a rezultantei vectorilor. Dacă rezultanta vectorilor este nulă, și rezultanta forțelor de inerție va fi nulă, ceea ce înseamnă că metodele care echilibrează vectorii ce interpretează o armonică oarecare, echilibrează și armonica respectivă.

Aceeași constatare poate fi făcută în legătură cu momentul unei armonici oarecare. Acest moment variabil lucrează întotdeauna în planul cilindrilor și ca atare poate fi reprezentat printr-un vector de mărime și sens variabile, care este însă întotdeauna perpendicular pe planul cilindrilor. În locul armonicilor de ordinul p se pot considera vectorii care interpretează armonicile. Acești vectori egali se rotesc în același sens cu viteza unghiulară $p\omega$; ei sînt deci legați indeformabil unul de altul. Ca atare momentul lor va fi un vector MV_p de mărime constantă, care se rotește cu viteza unghiulară $p\omega$. Deoarece armonicile de ordinul p sînt egale cu proiecția pe direcția ox a vectorilor care le interpretează, momentul

M_p al acestor armonici va fi egal cu proiecția pe normala la planul cilindrilor a momentului vectorilor care interpretează armonicile. Notînd cu θ unghiul pe care îl face vectorul MV_p cu normala la planul cilindrilor într-o poziție oarecare a arborelui cotit, se poate scrie conform celor de mai sus

$$M_p = MV_p \cdot \cos\,\theta. \tag{1}$$

Momentul M_p se anulează deci odată cu momentul MV_p. Astfel, metodele care echilibrează momentul vectorilor ce interpretează o armonică oarecare, echilibrează și momentul acestei armonici.

Relația (1) arată că valoarea maximă a momentului unei armonici oarecare este egală cu momentul vectorilor care interpretează această armonică. Momentul MV_p fiind constant, poate fi calculat în orice poziție a arborelui cotit. Această concluzie a fost obținută fără a pune vreo condiție în privința numărului de cilindri pentru care s-a calculat momentul sau în privința punctului în raport cu care s-a calculat momentul. Se poate deci enunța următoarea teoremă : valoarea maximă a momentului produs de o armonică oarecare a forțelor de inerție ale pieselor cu mișcare de translație, pentru un număr oarecare q de cilindri și față de un punct oarecare, este egală cu momentul față de punctul considerat al vectorilor care interpretează armonica respectivă a celor q cilindri, pentru o poziție oarecare a arborelui cotit.

Toate constatările de mai sus sînt valabile și pentru forțele de inerție ale pieselor cu mișcare de rotație, deoarece vectorii care interpretează aceste forțe sînt înseși forțele.

2. ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE

La motoarele în doi timpi perioada funcțională a unui cilindru fiind 2π, toate aprinderile trebuie să aibă loc într-o rotație completă a arborelui cotit. Dacă aprinderile sînt uniform repartizate, și manivelele vor fi uniform repartizate în jurul axei de rotație. Forțele de inerție ale pieselor cu mișcare de rotație fiind în fază cu manivelele respective și totodată egale între ele deoarece echipajele mobile sînt identice, vor da o rezultantă nulă.

Astfel, la motoarele cu aprinderi uniform repartizate, forțele de inerție ale pieselor cu mișcare de rotație se echilibrează reciproc.

Pentru determinarea rezultantei unei armonici oarecare a forțelor de inerție ale pieselor cu mișcare de translație se va folosi interpretarea din figura 2. Datorită identității cilindrilor vectorii care interpretează armonica de ordinul p au aceeași mărime. Se alege în mod arbitrar una din manivele ca origine și se numerotează consecutiv celelalte manivele întîlnite în sensul de rotație al arborelui cotit (fig. 3).

Dacă motorul are i cilindri și aprinderile sînt uniform repartizate, decalajul dintre două manivele consecutive este $\frac{2\pi}{i}$. Într-un moment oarecare, cînd manivela origine face cu poziția ei moartă interioară unghiul

α, vectorii care interpretează armonica de ordinul p vor face cu direcția ox unghiurile următoare :

- pentru cilindrul comandat de manivela 1 $\quad p\alpha + \varphi_p = p\alpha + \varphi_p$
- pentru cilindrul comandat de manivela 2 $\quad p\left(\alpha + \frac{2\pi}{i}\right) + \varphi_p = p\alpha + \varphi_p + p\frac{2\pi}{i}$
- pentru cilindrul comandat de manivela 3 $\quad p\left(\alpha + 2\frac{2\pi}{i}\right) + \varphi_p = p\alpha + \varphi_p + 2p\frac{2\pi}{i}\cdot$

. . . .

Se constată că vectorii sînt repartizați unghiular în progresie aritmetică de rație $p\frac{2\pi}{i}\cdot$

Dacă rația progresiei este un multiplu de 2π adică

$$p = ki \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ldots), \tag{2}$$

vectorii se suprapun și dau o rezultantă de i ori mai mare decît mărimea vectorului unui singur cilindru ; în consecință și rezultanta armonicii de ordinul p, care este suma proiecțiilor pe direcția ox a vectorilor ce interpretează armonica respectivă a fiecărui cilindru, va fi de i ori mai mare.

Dacă rația progresiei nu este un multiplu de 2π, adică

$$p \neq ki, \qquad (k = 1,2,3,\ldots),$$

vectorii nu se mai suprapun. Ei formează însă o figură de vectori egali, uniform repartizați în jurul unei axe, a căror rezultantă va fi deci nulă ; ca urmare și rezultanta forțelor de inerție respective va fi nulă.

Se poate, deci, formula următoarea teoremă : la motoarele în doi timpi în linie, cu aprinderi uniform repartizate, subsistă numai armonicile al căror rang este un multiplu al numărului de cilindri ; ele dau o rezultantă de i ori mai mare decît armonica respectivă a unui cilindru. Armonicile al căror rang nu este un multiplu al numărului de cilindri, dau o rezultantă nulă. Dacă motorul este axat, armonicile impare de ordin superior lipsesc. În acest caz, pentru motoarele cu număr impar de cilindri condiția (2) ia forma

$$p = 2ki. \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,).$$

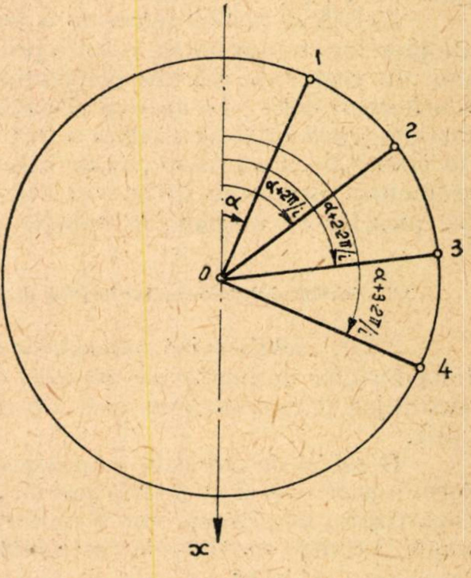


Fig. 3. — Schemă pentru stabilirea orientării vectorilor care interpretează armonica de ordinul p a forțelor de inerție ale pieselor cu mișcare de translație.

Din punctul de vedere al echilibrajului forțelor, motoarele axate cu număr impar de cilindri sînt deci mai avantajoase, deoarece păstrează armonici de ordin mai mare, care sînt cu mult mai mici. De exemplu la un motor în doi timpi cu opt cilindri vor subsista armonicile :

$$8,\ 16,\ 24,\ 32\ldots$$

La un motor cu şapte cilindri vor subsista armonicile

$$7,\ 14,\ 21,\ 28\ \ldots$$

însă dacă motorul este axat, rămîn numai armonicile pare, adică cele multiplu de 14.

3. ECHILIBRAJUL MOMENTELOR FORȚELOR DE INERȚIE

3.1. Echilibrajul momentelor forțelor de inerție ale pieselor cu mişcare de rotație

Echilibrajul acestor momente se poate face întotdeauna cu mase care participă la mişcarea arborelui cotit şi care operează sau asupra forțelor de inerție ale fiecărui cilindru sau asupra momentului acestor forțe. Există şi posibilitatea de a echilibra momentul forțelor de inerție ale pieselor cu mişcare de rotație prin plasarea manivelelor. Acest moment este un vector de mărime constantă care se roteşte cu viteza unghiulară a arborelui cotit. În aceeaşi situație se află şi momentul vectorilor care interpretează armonica întîia a forțelor de inerție ale pieselor cu mişcare de translație. Ca urmare, toate soluțiile de arbori cotiți care echilibrează momentul armonicii întîia vor echilibra şi momentul forțelor de inerție ale pieselor cu mişcare de rotație.

3.2. Echilibrajul momentelor forțelor de inerție ale pieselor cu mişcare de translație

3.2.1. *Echilibrajul momentelor armonicilor pare.* Echilibrajul momentelor forțelor de inerție ale pieselor cu mişcare de translație se poate face avantajos prin realizarea unei simetrii în plasarea manivelelor arborelui cotit.

O astfel de simetrie se poate obține la motoarele cu aprinderi uniform repartizate şi cu număr par de cilindri. Dacă aprinderile sînt uniform repartizate, manivelele vor fi uniform distribuite în jurul axei de rotație, unghiul dintre manivelele consecutive fiind egal cu unghiul dintre două aprinderi, adică $\frac{2\pi}{i}$. Dacă numărul de cilindri i este par, unghiul dintre manivela care comandă aprinderea numărului q $\left(\text{unde } 1 < q < \frac{i}{2}\right)$ şi manivela care comandă aprinderea numărului $q + \frac{i}{2}$ va fi

$$\frac{i}{2}\cdot\frac{2\pi}{i} = \pi.$$

Rezultă că la motoarele în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate şi cu număr par de cilindri, manivelele sînt două cîte două în opoziţie şi uniform distribuite în jurul axei de rotaţie.

Pentru două manivele în opoziţie, unghiul dintre vectorii care interpretează armonica de ordinul p va fi

$$\psi = p\pi,$$

iar dacă p este par

$$\psi = 2k\pi.$$

Vectorii sînt deci în fază. Plasînd manivelele în opoziţie la aceeaşi distanţă de mijlocul arborelui cotit, cei doi vectori vor produce faţă de mijlocul arborelui două momente egale şi de sens contrar. Numerotînd cilindrii consecutiv, atribuind acelaşi număr de ordine manivelelor respective şi cuplînd în opoziţie manivelele

1 cu i,
2 cu $i-1$,
3 cu $i-2$,
. . . . .

se echilibrează momentele tuturor armonicilor pare.

Dacă se axează motorul, dispar armonicile impare de ordin superior. În aceste condiţii mai subsistă momentul armonicii întîia, care poate fi echilibrat cu un dispozitiv format din doi arbori care se rotesc în sensuri contrare cu viteza unghiulară a arborelui cotit, fiecare arbore fiind prevăzut cu mase dispuse în direcţie opusă una alteia, masele de la extremităţile arborilor de echilibraj rămînînd întotdeauna simetrice faţă de planul cilindrilor (fig. 4).

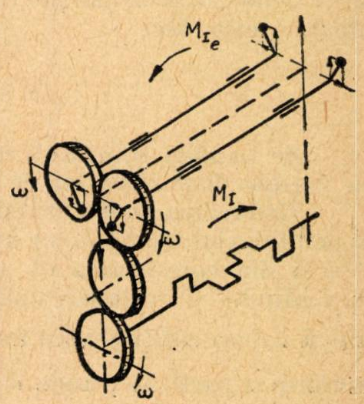


Fig. 4. — Dispozitiv pentru echilibrarea momentului armonicii 1-a.

La un motor în doi timpi care îndeplineşte condiţiile de mai sus referitoare la plasarea manivelelor şi care este prevăzut cu un dispozitiv ce echilibrează momentul armonicii întîia, se realizează echilibrajul momentelor tuturor forţelor de inerţie ale pieselor cu mişcare de translaţie.

Pentru un număr de cilindri dat, există mai multe soluţii de arbori cotiţi cu manivelele în opoziţie plasate la egală distanţă de mijlocul arborelui. Numărul soluţiilor rezultă din următorul raţionament : pentru a obţine soluţii distincte trebuie să se menţină fixă o grupă de manivele în opoziţie. Celelalte $\frac{i}{2} - 1$ grupe de manivele în opoziţie pot ocupa oricare din cele $\frac{i}{2} - 1$ direcţii precizate de condiţia uniformităţii aprinderilor ; numărul de variante ar fi $\left(\frac{i}{2} - 1\right)$! Însă pe o direcţie, o grupă de două manivele în opoziție poate fi plasată în două poziții astfel că la fiecare repartiție a celor $\frac{i}{2} - 1$ grupe de manivele în opoziție sînt posibile $2^{\frac{i}{2} - 1}$ soluții. Numărul total de soluții va fi :

$$2^{\frac{i}{2} - 1}\left(\frac{i}{2} - 1\right)! . \tag{3}$$

Din acestea, două cîte două sînt simetrice în oglindă și se poate constata ușor că soluțiile simetrice în oglindă nu sînt distincte din punct de vedere dinamic, deoarece conduc la aceleași valori pentru momentele armonicilor forțe de inerție. Numărul de soluții distincte din punct de vedere dinamic este deci

$$n = \frac{1}{2}\, 2^{\frac{i}{2} - 1}\left(\frac{i}{2} - 1\right)! . \tag{4}$$

Se va alege soluția cu cel mai mic moment al armonicii întîia, pentru ca masele dispozitivului de echilibraj să fie cît mai mici.

Reducerea momentului armonicii întîia se poate obține renunțînd la echilibrajul momentelor unora din armonicile pare. Această posibilitate derivă din constatarea că arborele cotit pentru un motor în doi timpi cu i cilindri și aprinderi uniform repartizate poate fi considerat ca format din K arbori cotiți pentru motoare în doi timpi cu $\frac{i}{d}$ cilindri și aprinderi uniform repartizate, unde d este orice divizor al numărului de cilindri i. Dacă $\frac{i}{d}$ este par și mai mare ca 2, manivelele fiecăruia din cei d arbori vor fi două cîte două în opoziție ; prin dispunerea manivelelor în opoziție la egală distanță de mijlocul arborelui respectiv, se obține pentru fiecare din cei d arbori echilibrarea momentelor tuturor armonicilor pare. Însă, conform relației (2), la fiecare arbore armonicile al căror ordin este un multiplu al numărului de cilindri, adică multiplu de $\frac{i}{d}$ vor da o rezultantă. Pentru fiecare din aceste armonici vor exista la motorul cu i cilindri d rezultante, care în general vor produce un moment.

Arborele cotit pentru motorul în doi timpi cu i cilindri, realizat din d arbori pentru motoare în doi timpi cu $\frac{i}{d}$ cilindri, prezintă deci dezavantajul că nu echilibrează momentele al căror ordin este multiplu de $\frac{i}{d}$ *) ; în schimb unele din variantele acestei soluții conduc la un moment al armonicii întîia mai mic decît la soluția care echilibrează momentele armonicilor pare.

---

*) Cu excepția armonicilor al căror ordin este multiplu al numărului de cilindri, care în mod organic nu produc momente.

Numărul de cilindri are întotdeauna ca divizori pe 1, $\frac{i}{2}$ și i. Divizorul 1 corespunde soluției care echilibrează momentele tuturor armonicilor pare. Divizorul $\frac{i}{2}$ nu prezintă interes deoarece conduce la arbori parțiali cu cîte două manivele la care toate armonicile pare dau o rezultantă. Nici divizorul i nu prezintă interes, întrucît aduce problema la punctul de plecare. În cadrul acestei metode trebuie cercetate deci soluțiile corespunzătoare divizorilor pentru care rezultatul diviziunii este un număr par și mai mare ca doi. Dacă se limitează la 12 numărul de cilindri dispuși în linie, metoda poate fi aplicată numai motoarelor cu 8 și 12 cilindri.

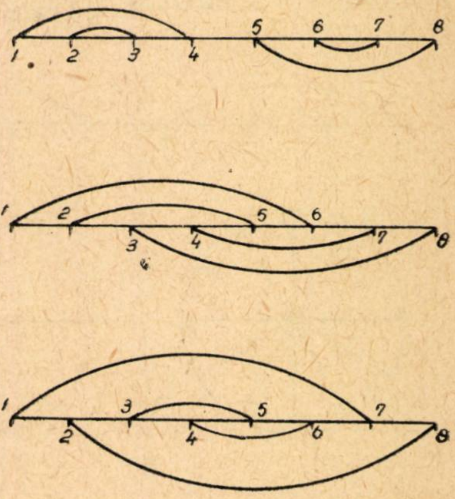


Fig. 5. — Variante de cuplare a manivelelor în opoziție la motorul în doi timpi cu opt cilindri, care conduc la echilibrarea momentelor armonicilor pare nemultiplu de $\frac{i}{d} = \frac{8}{2} = 4$.

La fiecare divizor există mai multe variante de cuplare a manivelelor în opoziție. Ca exemplu, în figura 5, sînt arătate variantele pentru motorul cu opt cilindri.

Pentru fiecare variantă de cuplare a manivelelor în opoziție există mai multe soluții de orientare a manivelelor una față de alta. Fiecăruia din cei d arbori îi revine $\frac{i}{2d}$ grupe de cîte două manivele în opoziție. Pentru a obține soluții distincte trebuie să se mențină fixă o grupă oarecare de manivele în opoziție; la arborele care conține această grupă mai pot fi permutate numai $\frac{i}{2d} - 1$ grupe și deci numărul de variante este dat de relația (3):

$$2^{\frac{i}{2d}-1}\left(\frac{i}{2d}-1\right)!$$

La ceilalți $d - 1$ arbori pot fi permutate toate grupele de manivele în opoziție și deci numărul de variante pentru fiecare arbore este

$$2^{\frac{i}{2d}}\left(\frac{i}{2d}\right)!$$

Însă cele $d - 1$ serii de manivele care formează cei $d - 1$ arbori pot fi atribuite oricăruia dintre arbori; numărul de soluții se multiplică deci cu $(d - 1)!$. Ținînd seama că din soluțiile obținute două cîte două sînt simetrice în oglindă, numărul de soluții distincte din punct de vedere dinamic pentru fiecare variantă de cuplare a manivelelor în opoziție, va fi

$$n' = \frac{1}{2}\, 2^{\frac{i}{2d}-1}\left(\frac{i}{2d}-1\right)!\left[2^{\frac{i}{2d}}\left(\frac{i}{2d}\right)!\right]^{d-1}(d-1)!. \qquad (5)$$

Pentru exemplificare, se consideră la motorul cu 12 cilindri pentru divizorul $d = 3$ varianta de cuplare a manivelelor în opoziție, din figura

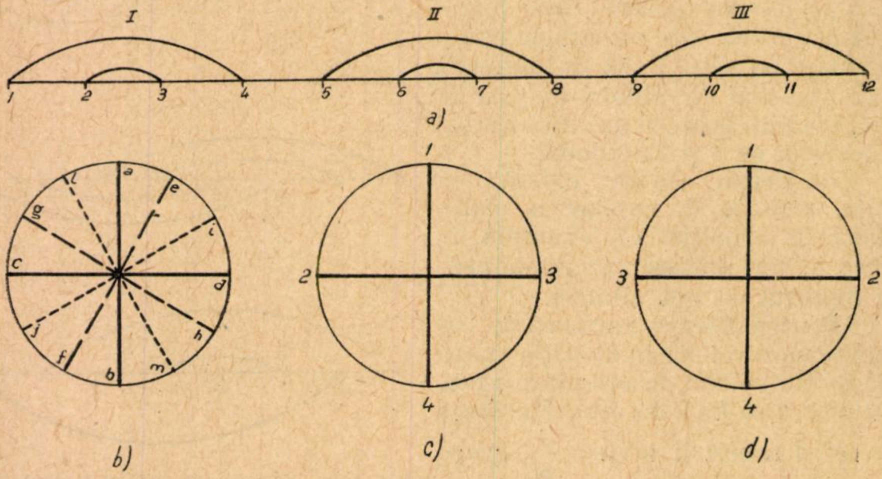


Fig. 6. — Variantă de cuplare a manivelelor în opoziție la motorul în doi timpi cu doisprezece cilindri, în vederea echilibrării momentelor unor armonici pare.

6*a*; există trei serii de cîte patru manivele, în fiecare serie manivelele fiind orientate conform soluției care echilibrează momentele armonicilor pare la motorul în doi timpi cu patru cilindri (de exemplu la seria I manivelele 1,4 și 2,3 sînt în opoziție, planurile acestor două grupe sînt perpendiculare, iar distanțele de la manivelele în opoziție la mijlocul ansamblului celor patru manivele sînt două cîte două egale).

Deoarece $d = 3$ arborele motorului cu doisprezece cilindri este format din trei arbori pentru motoare în doi timpi cu patru cilindri și anume *abcd*, *efgh*, *ijlm* (fig. 6 *b*). Dacă manivela *1* se menține fixă și se atribuie arborelui *abcd*, în seria respectivă de manivele, se poate permuta numai $\frac{i}{2d} - 1 = 1$ grupă; variantele posibile sînt arătate în figura 6 *c* și *d*. Presupunem că seria a II-a de manivele se repartizează arborelui *efgh* iar seria a III-a arborelui *ijlm*. La fiecare din acești arbori pot fi permutate toate cele $\frac{i}{2d}$ grupe și deci numărul de variante este

$$2^{\frac{i}{2d}}\left(\frac{i}{2d}\right)! = 8.$$

Cum fiecare variantă a unui arbore poate fi asociată oricărei variante a celorlalţi arbori, numărul total de variante este $2 \cdot 8 \cdot 8 = 128$. Însă seriile de manivele II şi III pot fi atribuite oricărora din arborii *efgh* şi *ijlm*. În general, numărul de soluţii se va multiplica cu $(d - 1)!$, factor care în cazul de faţă are valoarea 2. Reducînd soluţiile simetrice în oglindă se obţin în definitiv 128 de soluţii distincte din punct de vedere dinamic.

Din soluţiile tuturor variantelor de grupare a manivelelor în opoziţie se va alege soluţia cu cel mai mic moment al armonicii întîia.

Plecînd de la această metodă de echilibrare a momentelor armonicilor pare, se poate ajunge la o soluţie care echilibrează momentul armonicii întîia : se rotesc arborii parţiali faţă de poziţia care asigură uniformitatea aprinderilor astfel ca rezultanta celor K momente produse de armonica întîia să fie nulă ; motorul nu va mai avea însă aprinderi uniform repartizate.

3.2.2. *Echilibrajul momentului armonicii întîia.* La motoarele mari, dispozitivul de echilibrare a momentului armonicii întîia complică mult construcţia motorului. Deoarece momentul armonicii întîia are valoarea cea mai mare, este preferabil să se folosească soluţii de plasare a manivelelor arborelui cotit care echilibrează acest moment. După cum s-a arătat înainte, aceste soluţii conduc şi la echilibrarea momentului forţelor de inerţie ale pieselor cu mişcare de rotaţie.

Soluţiile de arbori cotiţi care echilibrează momentul armonicii întîia pot fi găsite în baza următoarelor observaţii :

Dacă motorul are un număr par de cilindri, manivelele sînt două cîte două în opoziţie. Pentru două manivele în opoziţie vectorii care interpretează armonica întîia produc un moment constant, ce poate fi reprezentat printr-un vector de mărime constantă care se roteşte cu viteza unghiulară a arborelui cotit. În total vor exista $\frac{i}{2}$ vectori moment, care sînt legaţi indeformabil unul de altul deoarece toţi se rotesc cu aceeaşi viteză unghiulară.

Mărimea vectorilor moment depinde de distanţa dintre manivelele în opoziţie, adică de poziţia acestor manivele în lungul arborelui cotit. Dacă distanţa dintre manivelele în opoziţie este aceeaşi, vectorii moment vor fi egali. Urmează să se orienteze grupele de manivele în opoziţie astfel ca rezultanta vectorilor să fie nulă.

La motoarele cu aprinderi uniform repartizate această ultimă cerinţă poate fi îndeplinită numai dacă numărul de cilindri satisface o condiţie suplimentară (în afară de condiţia ca numărul de cilindri să fie par).

În adevăr, deoarece într-un plan sînt plasate numai două manivele în opoziţie, vectorii moment ai grupelor de manivele în opoziţie lucrează după direcţii diferite, care fac între ele unghiul $\frac{2\pi}{i}$. Direcţiile vectorilor sînt deci uniform distribuite în jurul axei de rotaţie.

Deoarece vectorii sînt egali, pentru a da o rezultantă nulă ei trebuie să fie distribuiţi simetric faţă de un punct, ceea ce înseamnă că pe direcțiile uniform distribuite vectorii trebuie să aibe astfel de sensuri încît să formeze o figură simetrică față de un punct*).

O astfel de repartiție se poate reduce întotdeauna la o figură formată din vectori egali, uniform distribuiți în jurul unui punct, în care numărul de vectori n este o fracțiune m din numărul inițial de vectori

$$n = \frac{\frac{i}{2}}{m},$$

unghiul dintre doi vectori consecutivi fiind $\frac{2\pi}{n}$. De exemplu, sistemul de vectori distribuiți simetric față de un punct din figura $7a$ se poate reduce

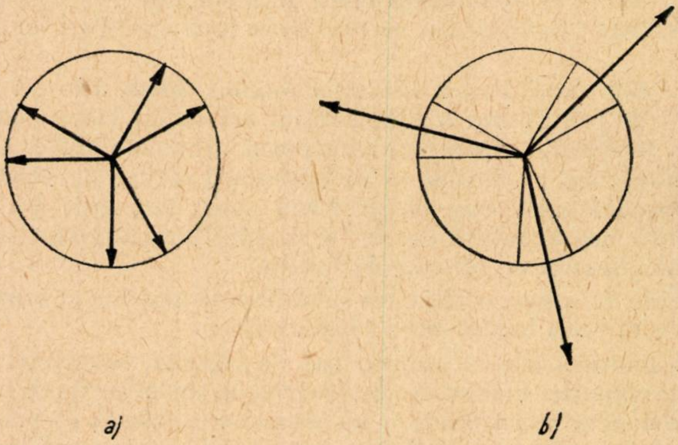


Fig. 7. — Exemplu de reducere a unui sistem de vectori egali, distribuiți simetric față de un punct, la un sistem de vectori egali distribuiți uniform în jurul unui punct
$i = 12$, $m = 2$, $n = 3$.

la sistemul din figura $7b$ în care vectorii sînt uniform distribuiți în jurul unui punct.

Se numerotează consecutiv cei n vectori din distribuția uniformă în jurul unui punct. Dacă n este par, unghiul dintre vectorul numărul q și vectorul numărul $q + \frac{n}{2}$ este

$$\frac{n}{2} \frac{2\pi}{n} = \pi,$$

adică vectorii sînt situați pe aceeași direcție. Cum vectorii au în mod organic direcții diferite rezultă că pentru a se echilibra, numărul n trebuie să fie impar.

---

*) Vectorii ocupă poziții diferite în spațiu. Ei sînt însă situați în planuri normale pe axa de rotație și ca atare problema echilibrării lor se reduce la o problemă în plan.

Astfel cei $\frac{i}{2}$ vectori moment pot da o rezultantă nulă numai cînd numărul lor poate fi exprimat ca un multiplu al unui număr impar n

$$\frac{i}{2} = mn \quad (n \neq 2k;\ k = 1,2,3,\ldots). \tag{6}$$

Această condiție nu este îndeplinită cînd numărul vectorilor moment este o putere de doi. Dar numărul de vectori este egal cu jumătatea numărului de cilindri. Rezultă deci că metoda poate fi aplicată numai dacă numărul de cilindri nu este o putere de doi, în care caz anularea vectorilor se face prin m grupe, numărul n de vectori din fiecare grupă fiind impar. Dacă se limitează numărul de cilindri în linie la 12, motoarele la care se poate obține echilibrarea momentului armonicii întîia prin dispunerea manivelelor sînt cele cu 6, 10 și 12 cilindri.

O dată fixate motoarele la care metoda poate fi aplicată rămîne să se precizeze posibilitățile de plasare a manivelelor în opoziție pentru ca distanța dintre manivelelele în opoziție să fie aceeași precum și posibilitățile de orientare a grupelor de manivele în opoziție astfel ca momentul rezultant să fie nul.

Posibilitățile de plasare a manivelelor în opoziție la aceeași distanță una de alta sînt determinate de toți divizorii numărului de cilindri pentru care rezultatul diviziunii este un număr par. Se formează astfel un număr par de grupe care se numerotează succesiv cu I, II, III... $\frac{i}{d}$, unde d este oricare din divizorii menționați ai numărului de cilindri ; gruparea căutată se obține plasînd în opoziție manivela numărul q dintr-o grupă cu număr de ordine impar, cu manivela numărul $q + d$ din grupa următoare.

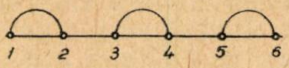
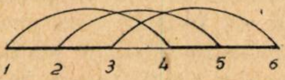
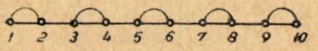
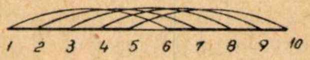
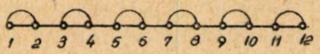
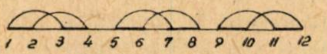
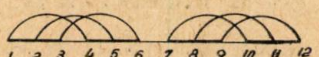
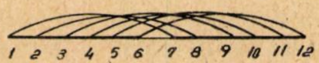
Pentru motoarele luate în considerare, diversele posibilități de grupare a manivelelor în opoziție la egală distanță una de alta sînt arătate în tabela 1.

Posibilitățile de orientare a grupelor de manivele în opoziție care conduc la echilibrarea momentului armonicii întîia se stabilesc după cum urmează :

Una din manivele trebuie menținută fixă pentru a obține soluții distincte de arbori cotiți. Ca urmare, fix va fi și vectorul moment corespunzător grupei de manivele în opoziție din care face parte manivela fixă. Fiindcă echilibrarea vectorilor moment se realizează prin m grupe de cîte n vectori, grupa care conține vectorul moment fix va fi de asemenea fixă. Față de această grupă urmează să fie plasate pe cele $\frac{i}{2}$ direcții uniform distribuite în jurul unui punct restul de m-1 grupe de vectori moment, astfel ca în ori ce variantă să nu existe vectori dispuși pe aceeași direcție. Deoarece în fiecare din cele m grupe vectorii moment sînt uniform distribuiți în jurul unui punct, rezultă că pentru a obține toate variantele posibile este suficient să se plaseze cîte un vector moment din fiecare din cele $m-1$ grupe pe direcțiile disponibile situate între doi vectori consecutivi ai grupei fixe.

Tabela 1

Posibilitățile de grupare a manivelelor în opoziție la distanță egală una de alta, la motoarele în doi timpi cu șase, zece și doisprezece cilindri

Numarul de cilindri	Divizorul numarului de cilindri	Numărul de grupe	Gruparea manivelelor în opoziție	
i	d	$\frac{i}{d}$	Schema	Gruparea
6	1	6		1,2 ; 3,4 ; 5,6
	3	2		1,4 ; 2,5 ; 3,6
10	1	10	 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	1,2; 3,4; 5,6; 7,8; 9,10.
	5	2	 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	1,6; 2,7; 3,8; 4,9; 5,10.
12	1	12	 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,2 ; 3,4 ; 5,6 ; 7,8 ; 9,10 ; 11,12
	2	6	 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,3 ; 2,4 ; 5,7 ; 6,8 ; 9,11 ; 10,12
	3	4	 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,4 ; 2,5 ; 3,6 ; 7,10 ; 8,11 ; 9,12
	6	2	 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,7 ; 2,8 ; 3,9 ; 4,10 ; 5,11 ; 6,12

Unghiul dintre două direcții consecutive este $\frac{2\pi}{i}$ și deci între doi vectori consecutivi ai grupei fixe se pot înscrie

$$\frac{\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{i}} = \frac{i}{n},$$

unghiuri la centru de mărime $\frac{2\pi}{i}$, adică există $\frac{i}{n} - 1$ direcții radiale după care pot fi plasați vectorii moment.

Deoarece numărul de cilindri este par iar numărul de vectori n este impar, rezultă că numărul de sectoare $\frac{i}{n}$ delimitate de direcțiile radiale disponibile dintre doi vectori consecutivi ai grupei fixe va fi par; direcția radială care separă jumătate din sectoare este deci bisectoarea unghiului dintre cei doi vectori ai grupei fixe. Să numerotăm consecutiv vectorii grupei fixe începînd de la vectorul cel mai apropiat de bisectoare; unghiul pe care îl face bisectoarea cu vectorul numărul q este

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{n} + (q-1)\frac{2\pi}{n},$$

și pentru $q = \frac{n+1}{2}$ rezultă $\theta = \pi$. În prelungirea bisectoarei se situează deci un vector al grupei fixe și ca atare pe direcția bisectoarei nu se mai poate plasa nici unul din vectorii celorlalte $m-1$ grupe.

Astfel, între doi vectori consecutivi ai grupei fixe, numărul de direcții radiale disponibile este

$$\left(\frac{i}{n} - 1\right) - 1 = \frac{i}{n} - 2.$$

Ținînd seama de relația (6) se obține $\frac{i}{n} - 2 = 2\,(m-1)$ direcții disponibile, situate cîte $m-1$ de o parte și de alta a bisectoarei unghiului dintre doi vectori consecutivi ai grupei fixe.

De exemplu, la motorul cu 18 cilindri în linie avem $18 = 2\cdot3\cdot3$ ceea ce înseamnă că echilibrarea vectorilor moment se face prin trei grupe de cîte trei vectori. S-a numerotat cu 1, 2, 3, vectorii grupei din care face parte vectorul fix 1. Între doi vectori consecutivi ai grupei fixe, de exemplu între vectorii 1 și 2 se înscriu $\frac{i}{n} = \frac{18}{3} = 6$ unghiuri la centru de mărime $\frac{2\pi}{i} = \frac{2\pi}{18} = 20^\circ$, care determină $\frac{i}{n} - 1 = 5$ direcții radiale după care pot fi plasați vectorii moment și anume direcțiile *ob*, *oc*, *od*, *oe*, *of* (fig. 8). Pe direcția *od*, care este bisectoarea unghiului dintre vectorii 1 și 2, se află plasat vectorul 3 al grupei fixe și ca urmare pe această direcție nu se mai poate plasa nici unul din vectorii moment ai celorlalte $m - 1 = 2$ grupe. Între cei doi vectori consecutivi ai grupei fixe rămîn disponibile

$2(m-1) = 4$ direcţii, situate cîte $m - 1 = 2$ la fiecare parte a bisectoarei *od*.

Dacă se plasează cei $m - 1$ vectori de o parte a bisectoarei, rămîn $m - 1$ direcţii de cealaltă parte a bisectoarei care nu sînt libere deoarece în prelungirea fiecăreia se află plasat cîte un vector al uneia din cele $m - 1$ grupe. În adevăr, să alegem un sens de parcurgere al stelajului direcţiilor radiale şi să numerotăm cu I, II, III... *r*... $(m - 1)$, direcţiile radiale consecutive situate de o parte a bisectoarei şi cu I′, II′, III′,... *r′*... $(m-1)'$, direcţiile radiale consecutive situate de cealaltă parte a bisectoarei *). Unghiul dintre două direcţii radiale care au acelaşi număr de ordine, de exemplu unghiul dintre direcţiile *r* şi *r′* este $m\frac{2\pi}{i} = \frac{i}{2n}\frac{2\pi}{i} = \frac{\pi}{n}$. Se consideră grupa de vectori moment care are unul din vectori situat pe direcţia *r* şi se numerotează consecutiv în sensul de parcurgere ales vectorii acestei grupe, începînd cu vectorul de pe direcţia *r*. Unghiul dintre vectorii numărul 1 şi q va fi $\theta_r = (q-1)\cdot\frac{2\pi}{n}$; pentru $q = \frac{n+3}{2}$ rezultă $\theta_r = \pi + \frac{\pi}{n}$ ceea ce înseamnă că vectorul numărul *q* este situat pe direcţia *r′*.

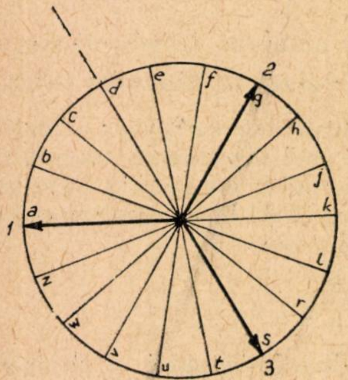


Fig. 8.— Direcţiile după care se pot dispune vectorii moment ai armonicii întîia, la motorul în doi timpi cu optsprezece cilindri în linie.

Să căutăm alte poziţii ale vectorilor. Pentru vectorul situat pe direcţia *r* mai există o singură poziţie posibilă şi anume după direcţia *r′*, deoarece manevrarea vectorului *r* înseamnă manevrarea tuturor vectorilor grupei din care face parte vectorul *r*, ceea ce are ca urmare liberarea direcţiei *r′*.

Fiecare vector poate deci ocupa numai două poziţii, situate cîte una de fiecare parte a bisectoarei. Deoarece fiecare poziţie a unui vector poate fi asociată cu orice poziţie a celorlalţi vectori, sînt posibile 2^{m-1} variante distincte de dispunere a vectorilor.

În figura 9 sînt reprezentate variantele de plasare a vectorilor moment pentru motorul în doi timpi cu 18 cilindri în linie. Cele trei grupe de vectori au fost numerotate cu 123, 456, 789.

La fiecare variantă de dispunere a vectorilor este precizată numai direcţia ocupată de vectorul grupei de manivele în opoziţie care conţine manivela fixă. Celelalte direcţii radiale după care pot fi plasaţi vectorii moment se pot atribui oricărei grupe de manivele în opoziţie. Sînt deci posibile $\left(\frac{i}{2} - 1\right)!$ soluţii. Numărul de soluţii de arbori cotiţi ţinînd seama și de variantele de dispunere a vectorilor este $2^{m-1}\left(\frac{i}{2}-1\right)!$, dintre care sînt distincte din punct de vedere dinamic numai

---

*) În exemplul din figura 8 am avea în locul punctelor *b*, *c*, *e*, *f*, respectiv I, II şi I′, II′.

$$s = 2^{m-2}\left(\frac{i}{2}-1\right)!,$$

deoarece soluțiile sînt două cîte două simetrice în oglindă. Dacă g este numărul de posibilități de plasare a manivelelor în opoziție la aceeași

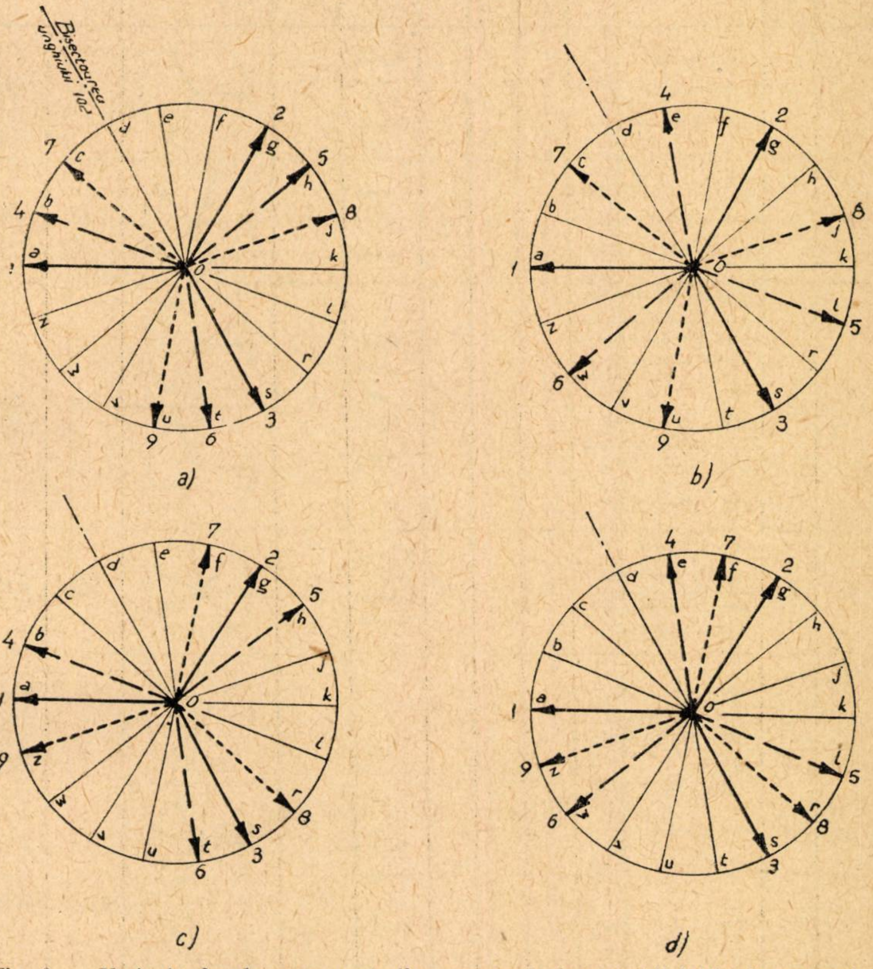

Bisectoarea unghiului 102
a b c d e f g h j k l r s t u v x z
O
1 2 3 4 5 6 7 8 9
a)
b)
c)
d)

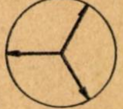
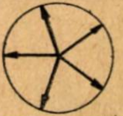
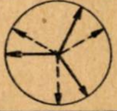
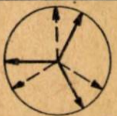
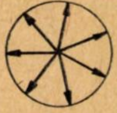
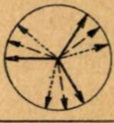
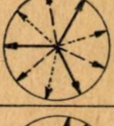
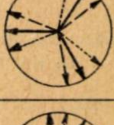
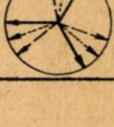
Fig. 9. — Variante de plasare a vectorilor moment ai armonicii întîia, la motorul în doi timpi cu optsprezece cilindri în linie.

distanță una de alta, numărul total de soluții distincte din punct de vedere dinamic este

$$S = gs = g\cdot 2^{m-2}\left(\frac{i}{2}-1\right)!. \tag{7}$$

Tabela 2

Echilibrarea momentului de galop al armonicii întîia prin plasarea convenabilă a manivelelor la motoarele în linie în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate

Numărul de cilindri	Gruparea manivelelor în opoziție		Numărul de vectori moment	Numărul de grupe de vectori	Numărul de vectori într-o grupă	Modul de echilibrare al vectorilor	Numărul de soluții de plasare a vectorilor	Distribuția vectorilor moment	Numărul de variante de arbori cotiți pentru un singur tip de grupare a manivelelor	Numărul total de variante de arbori cotiți
	Numărul de tipuri de grupare	Gruparea pentru fiecare tip								
i	g	—	$\frac{i}{2}$	m	n	—	2^{m-1}	—	s	S
6	2	1,2 . 3,4 , 5,6	3	1	3	O grupă de trei vectori	1		1	2
		1,4 . 2,5 , 3,6								
10	2	1,2 , 3,4, 5,6 , 7,8 , 9,10	5	1	5	O grupă de cinci vectori	1		12	24
		1,6 . 2,7, 3,8 . 4,9 ; 5,10								
12	4	1,2;3,4,5,6 ; 7,8 ; 9,10 ; 11,12 .	6	2	3	Două grupe de trei vectori	2		120	480
		1,3; 2,4 , 5,7 , 6,8 . 9,11 ; 10 ; 12								
		1,4 , 2,5 , 3,6 , 7,10 , 8,11 , 9,12								
		1,7 , 2,8 , 3,9 , 4,10 , 5,11 , 6,12								
14	2	1,2 ; 3,4 , 5,6 , 7,8 , 9,10 , 11,12 , 13,14	7	1	7	O grupă de șapte vectori	1		360	720
		1,8 ; 2,9 , 3,10 ; 4,11 , 5,12 . 6,13 , 7,14								
18	3	1,2 , 3,4 . 5,6 , 7,8 , 9,10 , 11,12 ; 13,14 , 15,16 , 17,18	9	3	3	Trei grupe de trei vectori	4		80 640	241.920
		1,4 . 2,5 , 3,6 ; 7,10 , 8,11 , 9,12 ; 13,16 ; 14,17 , 15,18						 		
		1,10 ; 2,11 , 3,12 , 4,13 ; 5,14 , 6,15 ; 7,16 , 8,17 ; 9,18								

În tabela 2 sînt trecute valorile mărimilor de mai sus pentru unele din motoarele în doi timpi la care se poate aplica această metodă de echilibrare a momentului armonicii întîia.

Pînă acum s-a considerat cazul cînd manivelele în opoziție se plasează la aceeași distanță una de alta și ca urmare vectorii moment sînt egali. Dacă anularea vectorilor moment se face prin mai multe grupe, există și alte posibilități de echilibrare a momentului armonicii întîia. Se plasează manivelele în opoziție la distanțe diferite d_1, d_2, $d_3, \ldots$; armonica întîia va produce momente de tipul d_1, d_2, $d_3, \ldots$ Dacă numărul de momente de fiecare tip este un multiplu al numărului n de vectori al celor m grupe, se poate repartiza fiecărei grupe momente de același tip și prin aceasta rezultanta tuturor momentelor va fi nulă.

Numărul minim de cilindri la care se poate aplica această metodă se stabilește ținînd seama că numărul minim de vectori într-o grupă este 3 (primul număr impar mai mare ca 1), iar numărul minim de tipuri de vectori este 2 ; în total trebuie să existe șase vectori moment adică doisprezece cilindri.

În tabela 3 se arată posibilități de plasare a manivelelor în opoziție la motorul cu doisprezece cilindri, conform celor de mai sus.

Cînd distanța dintre manivelele în opoziție este diferită, numărul de soluții de arbori cotiți se stabilește ținînd seama că pentru o variantă de dispunere a vectorilor moment se pot permuta numai vectorii de același tip.

Să presupunem că echilibrarea vectorilor moment se realizează prin m grupe de cîte n vectori și că manivelele în opoziție au fost plasate astfel încît se realizează na vectori de tipul d_1, nb vectori de tipul d_2, nc vectori de tipul d_3, etc. Numărul total de vectori moment este

$$\frac{i}{2} = na + nb + nc + \ldots,$$

din care rezultă

$$a + b + c + \ldots = m.$$

Pentru o variantă de dispunere a vectorilor moment se repartizează cei $\frac{i}{2}$ vectori astfel ca fiecăreia din cele m grupe să-i revină vectori de același tip. Dacă grupa de manivele în opoziție care conține manivela fixă produce un moment de tipul d_1, la repartizarea aleasă a tipurilor de vectori pe cele m grupe se pot efectua următorele permutări : la vectorii de tipul d_1 unul din vectori este fix și deci se pot permuta na-1 vectori iar la celelalte tipuri de vectori se pot permuta toți vectorii ; se obțin astfel $(na-1)!\,(nb)!\,(nc)!\ldots$ soluții. Însă în cadrul aceleiași variante de dispunere a vectorilor moment sînt posibile $(m-1)!$ repartiții ale tipurilor de vectori, dintre care sînt distincte numai $\frac{(m-1)!}{(a-1)!\,b!\,c!\,\ldots}$, deoarece repartițiile care diferă între ele prin permutarea vectorilor de același tip au fost luate în considerare prin faptul că la o repartiție dată vectorii de același tip au fost permutați în toate modurile posibile.

Tabela 3

Posibilitățile de plasare a manivelelor în opoziție la motorul în doi timpi cu doisprezece cilindri în linie, pentru echilibrarea momentului de galop al armonicii întîia prin metoda cu momente de mărimi diferite

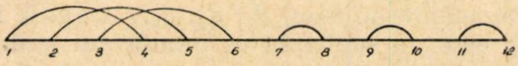
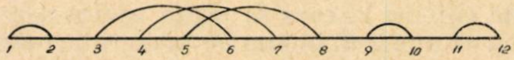
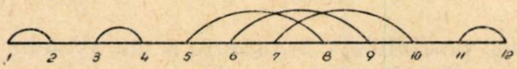
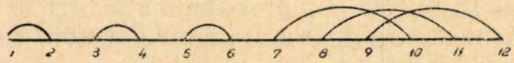
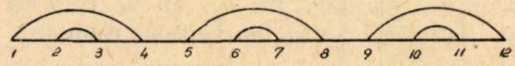
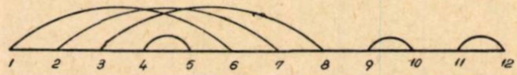
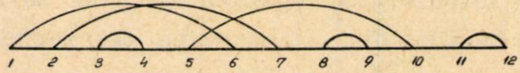
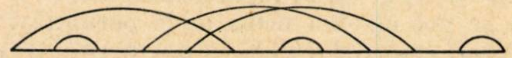
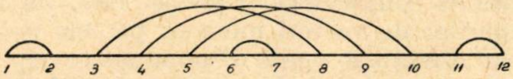
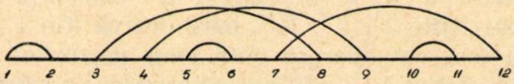
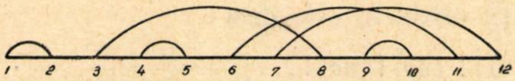
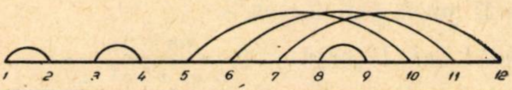
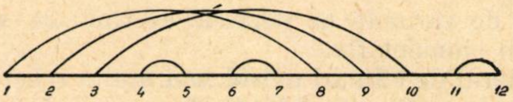
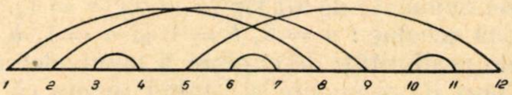
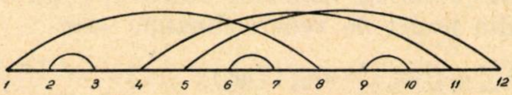
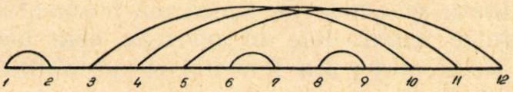
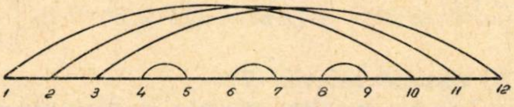
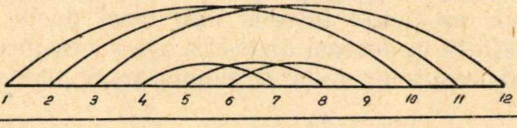
Schema	Gruparea manivelelor în opoziție
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,4 , 2,5 ; 3,6 ; 7,8 , 9,10 ; 11,12
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	3,6 , 4,7 ; 5,8 ; 1,2 ; 9,10 ; 11,12
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	5,8 ; 6,9 ; 7,10 ; 1,2 ; 3,4 ; 11, 12
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	7,10 , 8,11 , 9,12 ; 1,2 , 3,4 ; 5,6
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,4 , 5,8 ; 9,12 , 2,3 , 6,7 ; 10,11.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,6 ; 2,7 ; 3,8 , 4,5 , 9,10 ; 11,12.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,6 , 2,7 ; 5,10 ; 3,4 , 8,9 ; 11,12.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,6 , 4,9 ; 5,10 ; 2,3 ; 7,8 , 11,12

tabela 3 (continuare)

 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	3,8 ; 4,9 ; 5,10; 1,2 ; 6,7 ; 11,12.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	3,8 ; 4,9 ; 7,12; 1,2 ; 5,6 ; 10,11.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	3,8 ; 6,11 ; 7,12; 1,2 ; 4,5; 9,10
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	5,10 ; 6,11; 7,12; 1,2; 3,4 ; 8,9
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,8 ; 2,9 ; 3,10; 4,5; 6,7; 11,12
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,8 ; 2,9; 5,12; 3,4 ; 6,7 ; 10,11.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,8 ; 4,11; 5,12; 2,3; 6,7; 9,10.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	3,10 ; 4,11; 5,12; 1,2; 6,7 ; 8,9.
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,10 ; 2,11; 3,12; 4,5 ; 6,7 ; 8,9
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	1,10 ; 2,11; 3,12; 4,7 ; 5,8; 6,9

Pentru exemplificare se presupune cazul $m = 5$, $a = 3$, $b = 2$ (fig. 10). Fie una din variantele de dispunere a vectorilor moment, de exemplu varianta în care vectorii sînt situați de-o parte a bisectoarei unghiului dintre doi vectori consecutivi ai grupei fixe. Se realizează o repartiție oarecare a tipurilor de vectori moment pe cele $m - 1$ direcții (fig. 10.1). Cum pe aceste direcții se poate dispune ori ce tip de moment sînt posibile $(m - 1)! = 24$ repartiții. Unele din ele diferă numai prin permutarea vectorilor moment de același tip și în consecință nu sînt distincte. De exemplu repartițiile 1′, 1″, 1‴, care derivă din 1 nu sînt distincte, deoarece ele au fost considerate cînd s-au permutat vectorii de același tip în cadrul repartiției 1; distincte sînt numai repartițiile 1...6 (fig. 10).

Numărul de soluții distincte este deci

$$s = [(na - 1)!\,(nb)!\,(nc)!\ldots]\,\frac{(m-1)!}{(a-1)!\,b!\,c!\ldots}.$$

Această expresie poate fi pusă sub forma

$$s = [(na)!\,(nb)!\,(nc)!\ldots]\,\frac{(m-1)}{n\cdot a!\,b!\,c!\ldots},$$

care arată că numărul de variante nu depinde de tipul de moment din care face parte vectorul moment fix.

În raport cu numărul de cilindri există mai multe scheme de tipuri de momente. La motorul cu 12 cilindri există o singură schemă: trei momente de un tip și trei momente de alt tip ($a = 1$) ($b = 1$). La motorul cu 18 cilindri există două scheme: $a = 2$, $b = 1$ și $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Notînd cu g_s numărul de posibilități de cuplare a manivelelor în opoziție pentru o schemă de tipuri de momente și ținînd seama că există 2^{m-1} variante de dispunere a vectorilor moment, numărul total de soluții de arbori cotiți distincte din punct de vedere dinamic este

$$S = 2^{m-2}\sum g_s s_s = 2^{m-2}\sum g_s\,[(na_s)!\,(nb_s)!\,(nc_s)!\ldots]\,\frac{(m-1)!}{n\cdot a_s!\,b_s!\,c_s!\ldots} \tag{8}$$

suma fiind extinsă la toate schemele de tipuri de momente.

Dacă distanța dintre manivelele în opoziție este aceeași, avem $g_s = g$, $a_s = m$, $b_s = c_s = \ldots = 0$; din formula (8) se obține

$$S = 2^{m-2}\,g\,\frac{(n\,m)!\,(m-1)!}{n\cdot m!} = 2^{m-2}\cdot g\cdot(n\,m - 1)! = 2^{m-2}\cdot g\cdot\left(\frac{i}{2} - 1\right)!,$$

adică numărul de soluții dat de relația (7).

Soluțiile cu manivelele în opoziție plasate la distanță inegală prezintă dezavantajul unor momente interne mai mari decît soluțiile cu manivele în opoziție plasate la aceeași distanță. De asemenea, posibilitățile de echilibrare a momentelor unor armonici pare sînt mai reduse.

*

Echilibrarea momentului armonicii întîia antrenează și echilibrarea momentelor anumitor armonici impare de ordin superior.

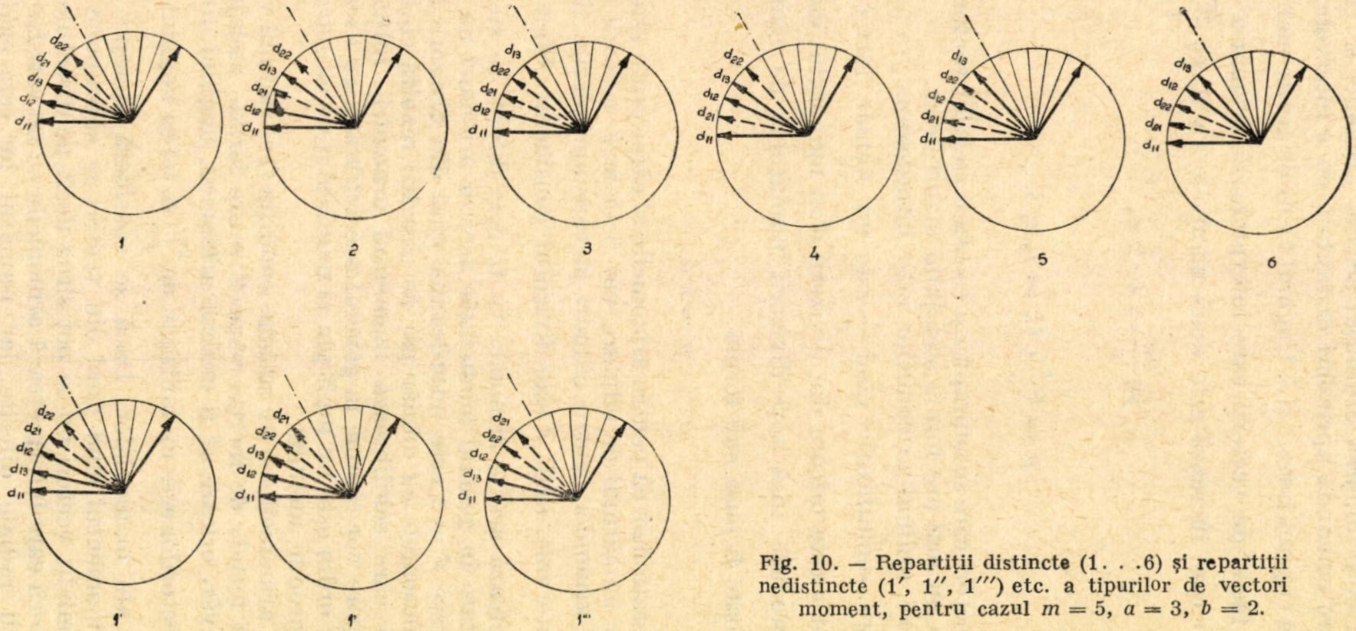

d22
d21
d13
d12
d11
1
d22
d13
d21
d12
d11
2
d13
d22
d21
d12
d11
3
d22
d13
d12
d21
d11
4
d13
d22
d12
d21
d11
5
d13
d12
d22
d21
d11
6
d22
d21
d12
d13
d11
1'
d21
d22
d13
d12
d11
1''
d21
d22
d12
d13
d11
1'''

Fig. 10. — Repartiții distincte (1. . .6) și repartiții nedistincte (1′, 1″, 1‴) etc. a tipurilor de vectori moment, pentru cazul $m = 5$, $a = 3$, $b = 2$.

Pentru determinarea ordinului acestor armonici se consideră două manivele care comandă aprinderi distanțate cu q intervale, q fiind orice număr întreg cuprins între 1 și i. Unghiul făcut de aceste manivele este $q\frac{2\pi}{i}$ iar unghiul făcut de vectorii care interpretează armonica de ordin p a cilindrilor în care lucrează cele două manivele va fi $pq\frac{2\pi}{i}$. Dacă

$$pq\frac{2\pi}{i} = k \cdot 2\pi,$$

adică

$$p = k\frac{i}{q}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

vor exista vectori care se suprapun și ca atare stelajul vectorilor armonicii de ordinul p nu mai are forma stelajului manivelelor.

Deoarece ordinul armonicilor este întotdeauna un număr întreg, relația (9) are semnificație cînd $\frac{i}{q}$ este un număr întreg, ceea ce se întîmplă cînd q este oricare din divizorii d ai numărului de cilindri. Raportul $\frac{i}{q}$ reproduce însă toți divizorii numărului de cilindri astfel că relația (9) poate fi pusă sub forma

$$p = k\,d. \tag{10}$$

Se constată deci că pentru armonicile al căror ordin este un multiplu al divizorilor numărului de cilindri, vor fi în fază vectorii care interpretează aceste armonici pentru cilindri la care aprinderile sînt distanțate cu $q = \frac{i}{d}$ intervale, unde d este divizorul considerat. Stelajul vectorilor care interpretează aceste armonici va fi deci diferit de stelajul manivelelor și ca atare în general momentele acestor armonici nu vor fi echilibrate. Deoarece $d = 2$ este întotdeauna unul din divizorii numărului de cilindri (la motoarele cu număr par de cilindri) rezultă că la soluțiile de arbori cotiți care echilibrează momentul armonicii întîia, momentele armonicilor pare vor rămîne în general neechilibrate, cu excepția armonicilor al căror ordin este un multiplu al numărului de cilindri, care în mod organic nu produc moment.

Pentru armonicile ce nu satisfac condiția (10) stelajul vectorilor care interpretează forțele de inerție respective are forma stelajului manivelelor. În adevăr, oricare ar fi ordinul armonicii, unghiul dintre direcțiile radiale ale vectorilor este un multiplu de $\frac{2\pi}{i}$, la fel ca unghiul dintre direcțiile radiale ale manivelelor. Dacă se consideră stelajul vectorilor de exemplu în momentul cînd unul din vectori se suprapune cu manivela respectivă, ceilalți vectori nu se pot situa decît pe direcțiile manivelelor. Întrucît vectorii care interpretează armonicile ce nu satisfac condiția (10) ocupă direcții radiale diferite, iar numărul lor este egal cu numărul manivelelor, rezultă că stelajul acestor vectori are forma stelajului manivelelor. Pentru două manivele în opoziție vectorii care interpretează o armonică impară sînt în opoziție și deci vor produce un moment. În total vor lua naștere $\frac{i}{2}$ momente a căror mărime depinde de distanțele la care sînt plasate manivelele în opoziție și care sînt distribuite pe direcții care fac între ele unghiul $\frac{2\pi}{i}$, întocmai ca vectorii moment ai armonicii întîia. Deoarece se folosește o soluție de arbore cotit care conduce la echilibrarea momentului armonicii întîia, este posibil ca și momentele armonicilor al căror ordin nu satisface relația (10) să fie echilibrate.

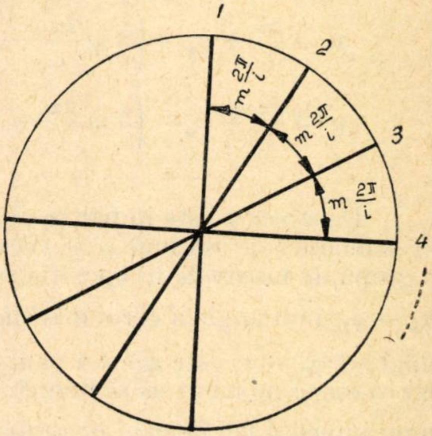


Fig. 11. — Schemă pentru stabilirea decalajului vectorului moment al armonicii de ordinul *p* față de vectorul moment al armonicii întîia.

Să considerăm o soluție de arbore cotit care echilibrează momentul armonicii întîia. În general, echilibrarea se face prin m grupe de cîte n vectori moment, vectorii din fiecare grupă fiind egali. Unghiul dintre doi vectori consecutivi dintr-o grupă oarecare este $\frac{2\pi}{n} = 2\,m\frac{2\pi}{i}$; dacă unul din vectori este ales ca origine, unghiul dintre direcțiile celorlalți vectori moment și vectorul origine este deci un multiplu al unghiului $2\,m\,\frac{2\pi}{i}$. Fiindcă vectorii dintr-o grupă sînt uniform distribuiți în jurul unui punct, și manivelele aferente — al căror număr este $2n$ — vor fi uniform distribuite în jurul unui punct; unghiul dintre două manivele consecutive ale seriei de manivele care conduce la grupa de momente considerată va fi

$$\frac{2\pi}{2n} = m\,\frac{2\pi}{i}.$$

Ținînd seama de aceste particularități, care există la toți arborii cotiți ce echilibrează momentul armonicii întîia, se poate demonstra că vectorii momentelor armonicilor al căror ordin nu satisface relația (10) dau o rezultantă nulă.

Fie o serie de manivele care produce momente ce revin uneia din cele m grupe. Se presupune stelajul acestor manivele într-o poziție în care una din manivelele lui se află în punctul mort interior, și se numerotează consecutiv grupele de manivele în opoziție (fig. 11).

Pentru grupa a doua de manivele în opoziție unghiul dintre vectorul moment al armonicii de ordinul p și vectorul moment al armonicii întîia, măsurat de exemplu în sensul de rotație al arborelui cotit, va fi egal cu unghiul cu care este rotit în același sens vectorul care interpretează armonica de ordinul p pentru una din manivelele grupei față de vectorul care interpretează armonica întîia pentru aceeași manivelă, deoarece un vector moment este legat indeformabil față de vectorii forțe care îl produc. Se obține deci

$$pm\frac{2\pi}{i} + \varphi_p - \left(m\frac{2\pi}{i} + \varphi_1\right) = m\frac{2\pi}{i}(p-1) + \varphi_p - \varphi_1 \cdot$$

Același unghi pentru celelalte grupe de manivele în opoziție va fi

$$p \cdot 2\frac{2\pi}{i} + \varphi_p - \left(2\,m\frac{2\pi}{i} + \varphi_1\right) = 2\,m\frac{2\pi}{i}(p-1) + \varphi_p - \varphi_1,$$

$$p \cdot 3\frac{2\pi}{i} + \varphi_p - \left(3\,m\frac{2\pi}{i} + \varphi_1\right) = 3\,m\frac{2\pi}{i}(p-1) + \varphi_p - \varphi_1,$$

. . . .

Deoarece p este impar se observă că unghiul dintre vectorul moment al armonicii de ordinul p și vectorul moment al armonicii întîia pentru o grupă de manivele în opoziție este egal cu suma dintre unghiul constant $\varphi_p - \varphi_1$ și un unghi a cărui mărime este un multiplu par de $m\frac{2\pi}{i}$. Întrucît unghiul $\varphi_p - \varphi_1$ este același pentru toate grupele de manivele în opoziție iar vectorii moment ai armonicii întîia sînt uniform repartizați în jurul unui punct și fac între ei unghiurile $2\,m\frac{2\pi}{i}$, rezultă că și vectorii moment ai armonicii de ordinul p vor fi uniform repartizați în jurul unui punct; ca urmare rezultanta lor va fi nulă.

În concluzie, soluțiile de arbori cotiți care echilibrează momentul armonicii întîia, echilibrează și momentele armonicilor al căror ordin nu este un multiplu al unuia din divizorii numărului de cilindri.

Există și cazuri în care se pot echilibra și momentele unor armonici pare. De exemplu, pentru a găsi soluția care echilibrează momentul armonicii a doua se raționează în modul următor : la o grupă de două manivele în opoziție armonica a doua produce o rezultantă. Dacă se consideră două grupe de manivele în opoziție dispuse în cvadratură, armonica a doua va produce un moment. Luînd trei serii de două grupe de manivele în opoziție dispuse în cvadratură apar trei momente ale armonicii a doua, care pot fi făcute egale într-o plasare corespunzătoare a manivelelor în lungul arborelui cotit și echilibrate prin orientarea convenabilă a manivelelor una față de alta. Numărul minim de cilindri la care se poate obține pe această cale echilibrarea momentului armonicii a doua este deci doisprezece.

O dată cu echilibrarea momentului unei armonici pare de ordinul $p_2 < i$ se echilibrează și toate armonicile de ordinul

$$p = ki \pm p_2,$$

deoarece stelajele vectorilor care interpretează aceste armonici sînt identice sau simetrice în oglindă.

4. CONCLUZII

Teoria precedentă a echilibrajului motoarelor policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri este generală. Ea poate fi aplicată oricare ar fi numărul de cilindri al motorului. Precizarea tuturor variantelor posibile permite studierea sistematică din punctul de vedere al echilibrajului a oricărui motor şi ca urmare se pot găsi soluţiile optime fiecărui caz.

Teoria poate fi aplicată şi la unele motoare în patru timpi cu număr par de cilindri. La aceste motoare există posibilitatea realizării unui plan central de simetrie al arborelui cotit, în care caz se echilibrează momentele externe ale tuturor forţelor de inerţie. Trierea soluţiilor posibile se face în baza momentelor interne, acestea fiind definite ca momentele faţă de mijlocul arborelui cotit produse de forţele de inerţie, ale cilindrilor situaţi de-o parte a punctului în raport cu care se calculează momentul. Jumătatea unui arbore cotit cu plan central de simetrie pentru un motor în patru timpi cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate reprezintă arborele unui motor în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate. Ca urmare trierea diverselor soluţii de arbori cotiţi ale unui astfel de motor revine la trierea unor soluţii de arbori cotiţi pentru motoare în doi timpi. Dacă numărul de cilindri al motorului în 4 timpi este multiplu, de patru, jumătatea numărului de cilindri este un număr par şi în consecinţă studiul echilibrajului motorului în 4 timpi se poate face cu ajutorul teoriei precedente.

Primit la redacţie la 15 aprilie 1959

ТЕОРИЯ УРАВНОВЕШИВАНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ В РЯДНЫХ ДВУХТАКТНЫХ МНОГОЦИЛИНДРОВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ЦИЛИНДРОВ И С РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАЖИГАНИЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Приводится метод исследования уравновешивания рядных двухтактных двигателей с четными числом цилиндров и с равномерно распределенными зажиганиями. Прежде всего устанавливается теорема об уравновешивании инерционных сил. Для уравновешивания моментов инерционных сил рассматривается случай, когда уравновешиваются моменты четных гармоник и случай, когда уравновешивается момент первой гармоники. Для каждого случая исследуется различные возможные варианты.

Полученные соотношения и выводы являются общими и применимы при любом числе цилиндров двигателя. Метод позволяет находить решение, оптимальное по отношению к наложенным на двигатель условиям уравновешивания.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Интерпретация инерционной силы частей с вращательным движением.

Рис. 2. — Интерпретация гармоники порядка p инерционной силы частей с поступательным движением.

Рис. 3. — Схема для установления направления векторов интерпретирующих гармонику порядка p инерционных сил частей с поступательным движением.

Рис. 4. — Устройство для уравновешивания момента первой гармоники.

Рис. 5. — Варианты соединения в противофазу кривошипов в восьмицилиндровом двухтактном двигателе с целью уравновешивания моментов четных гармоник, некратных $\frac{i}{d} = \frac{8}{2} = 4$.

Рис. 6. — Вариант соединения в противофазу кривошипов в двенадцатицилиндровом двухтактном двигателе с целью уравновешивания моментов некоторых четных гармоник.

Рис. 7. — Пример приведения системы равных векторов, симметрично распределенных относительно точки к системе равных векторов, равномерно распределенных вокруг точки $i = 12$, $m = 2$, $n = 3$.

Рис. 8. — Направления, по которым могут располагаться векторы моментов первой гармоники для восемнадцатицилиндрового двухтактного рядного двигателя.

Рис. 9. — Варианты расположения векторов моментов первой гармоники для восемнадцатицилиндрового двухтактного рядного двигателя.

Рис. 10. — Различные (1 . . .6) и неразличные ($1'$, $1''$, $1'''$) распределения типов векторов моментов для случая $m = 5$, $a = 3$, $b = 2$.

Рис. 11. — Схема для установления смещения вектора момента гармоники порядка p по отношению к вектору момента первой гармоники.

A THEORY OF THE BALANCING OF INERTIA FORCES FOR IN-LINE MULTICYLINDER TWO-STROKE ENGINES WITH EVEN NUMBER OF CYLINDERS AND UNIFORMLY DISTRIBUTED IGNITION

ABSTRACT

A method of investigation on the balancing of the in-line multicylinder two-stroke engines with even number of cylinders and uniformly distributed ignition, is presented. The general theorem of the balancing of the forces of inertia is first established. For balancing the moments of the forces of inertia, the case when the moments of the even harmonics balance and the case when the moment of the first harmonic balances are considered. For each of these cases, various possible forms are studied.

The relations and conclusions obtained are general and are applicable, whatever number of cylinders the engine has. The method allows an optimum solution to be found, with respect to the balancing conditions assigned to the engine.

EXPLANATION OF FIGURES

Fig. 1. — Interpretation of the inertia forces for parts having a rotating motion.

Fig. 2. — Interpretation of the p order harmonic of the inertia forces for parts having a translation motion.

Fig. 3. — Diagram for establishing the vector orientation whichis interpreting the p order harmonic of the inertia forces for parts having a translation motion.

Fig. 4. — Device for balancing the moment of the 1st harmonic.

Fig. 5. — Coupling variants of the cranks working oppositely, for the eight-cylinder two-stroke engine, leading to the balancing of the even harmonic moments which are not multiples of $\frac{i}{d} = \frac{8}{2} = 4$.

Fig. 6. — Coupling variants of the cranks working oppositely, for twelve-cylinder two-stroke engines, in view of balancing the moments of even harmonics.

Fig. 7. — Example of reduction of a system of equal vectors, symmetrically distributed in relation to a point, at a system of equal and uniformly distributed vectors around a point $i = 12$, $m = 2$, $n = 3$.

Fig. 8. — Directions along which the moment vectors of the first harmonic can be arranged for an in-line eighteen-cylinder two-stroke engine.

Fig. 9. — Placing variants of the moment vectors of the first harmonic for an in-line eighteen-cylinder two-stroke engine.

Fig. 10. — Distinct distributions (1...6) and indistinct distributions ($1'$, $1''$, $1'''$), etc., of moment vector types for the case $m = 5$, $a = 3$, $b = 2$.

Fig. 11. — Diagram for determining the shift of the moment vector of the p order harmonic with respect to the moment vector of the first harmonic.

BIBLIOGRAFIE

1. BIEZENO, C. B., GRAMMEL, R., Technische Dynamik. Berlin, Springer, 1939.
2. NISOLLE, L., *Leçons sur la mécanique et la résistance des matériaux*. Paris, 1946.
3. SCHRÖN, H., *Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine*. Wien, Springer, 1947.
4. — *Die Zündfolge*. Berlin, R. Oldenbourg, 1938.

EXPLANATION OF FIGURES

Fig. 1. [illegible]

Fig. 2. [illegible]

Fig. 3. [illegible]

Fig. 4. [illegible]

[illegible]

Fig. 6. [illegible]

Fig. 7. [illegible]

Fig. 8. [illegible]

Fig. 9. [illegible]

Fig. 10. [illegible]

Fig. 11. [illegible]

BIBLIOGRAPHY

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]

ECHILIBRAREA DE FRECVENȚĂ MULTIPLĂ A UNITĂȚILOR DE POMPARE DE LA ADÎNCIME

DE

N. S. PÎRVULESCU

1. INFLUENȚA SIMULTANĂ A BIELEI ȘI A BALANSIERULUI *)

S-a arătat [1] că expresia efortului tangențial P_{ta} la butonul manivelei simplu echilibrată pe balansier și pe manivelă, sub influența lungimii finite a bielei este dată de

$$P_{ta} \approx P \sum_{j=1}^{3} C_{aj} \sin j\varphi, \tag{1}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} C_{a1} &= \pm \frac{\varkappa a}{2b} - \frac{rB}{4l}, \\ C_{a2} &= \frac{rA}{2l} + \frac{B}{2}\ ;\quad C_{a3} = \frac{3rB}{4l}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a}{b}\left[\nu\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right) \pm \frac{\varkappa}{2}\right], \\ B &= \frac{a^2}{b^2}\left[\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\left(1+\mu\,\frac{c}{a}\right) \pm \frac{\varkappa}{2}\right]\chi, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\chi = \frac{r\omega_1^2}{g} = \frac{r\pi^2 n_1^2}{900\,g}, \tag{4}$$

$$\varkappa = G/P, \tag{5}$$

$$Q_A = P\left(1 + \frac{\varkappa}{2} \pm \frac{\varkappa}{2}\right), \tag{6}$$

$$X_1' = \mu\,\frac{a}{c}\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)P\ ;\quad X_1'' = \nu\,\frac{ar}{bR_1}\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)P, \tag{7}$$

$$\mu + \nu = 1$$

---

*) Cititorilor nefamiliarizați cu acest subiect, li se recomandă să înceapă citirea cu exemplul din [7].

cu notațiile următoare :

P — greutatea aparentă a garniturii prăjinilor de pompare,

G — greutatea lichidului ridicat de piston,

Q_A — sarcina statică aplicată nemijlocit la capătul A (capul de cal) al manivelei (fig. 1),

a — distanța dintre axul garniturii de prăjini și axul O al balansierului principal,

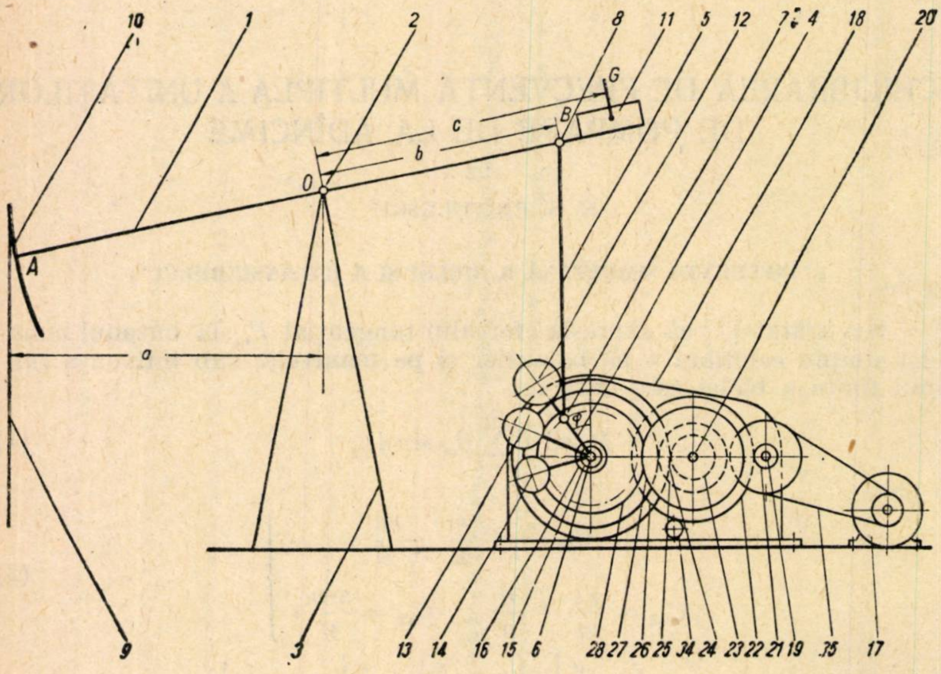


Fig. 1

b — distanța dintre axul O și axul articulațiilor bielei la balansierul transversal,

c — distanța dintre axul O și centrul C al contragreutății de pe balansier,

r — raza cercului descris de butonul manivelei,

R_1 — raza cercului descris de centrul contragreutății de pe manivelă,

μ — gradul de repartizare al contragreutății pe balansier,

ν — gradul de repartizare al contragreutății pe manivelă,

φ — unghiul manivelei cu direcția verticală,

ω_1 — viteza unghiulară de rotație a manivelei,

n_1 — numărul de ture pe minut al manivelei,

g — accelerația gravității.

Semnul superior (în acest caz $+$) al ultimului termen din relația (6) se referă la cursa ascendentă, iar semnul inferior (în acest caz $-$) se referă la cursa descendentă.

Înlocuind valorile A şi B din (3) relaţiile (2) devin

$$
\begin{aligned}
C_{a1} &= \frac{a}{b}\left[\pm\frac{\varkappa}{2}\left(1-\frac{ra}{4lb}\,\chi\right)-\frac{ra}{4lb}\,\chi\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\left(1+\mu\frac{c}{a}\right)\right],\\
C_{a2} &= \frac{a}{2b}\left\{\pm\frac{\varkappa}{2}\left[\frac{r}{l}+\frac{a}{b}\,\chi\right]+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{l}\,\nu+\frac{a}{b}\,\chi\left(1+\mu\frac{c}{a}\right)\right]\right\}, \qquad (8)\\
C_{a3} &= \frac{3a^2r}{4b^2l}\,\chi\left[\pm\frac{\varkappa}{2}+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\left(1+\mu\frac{c}{a}\right)\right].
\end{aligned}
$$

De asemenea, s-a arătat [2] că sub influenţa lungimii finite a balansierului, expresia efortului tangenţial P_{tb} devine

$$P_{tb} \approx P\sum_{j=1}^{4} C_{bj}\sin j\varphi \qquad (9)$$

în care

$$
\begin{aligned}
&C_{b1} = \pm\frac{a}{b}\,\frac{\varkappa}{2}+\frac{r^2a}{8b^3}\left[\pm\frac{\varkappa}{2}+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\right], \quad C_{b2}=\frac{B}{2},\\
&C_{b3} = \frac{r^2a}{8b^3}\left[\pm\frac{\varkappa}{2}+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\right], \quad C_{b4}=\frac{r^2}{4b^2}\,B.
\end{aligned} \qquad (10)
$$

Înlocuind valorile B din (3) relaţiile (10) se pot pune sub forma

$$
\begin{aligned}
&C_{b1}=\frac{a}{b}\left[\pm\frac{\varkappa}{2}\left(1+\frac{r^2}{8b^2}\right)+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\frac{r^2}{8b^2}\right], \; C_{b2}=\frac{a^2}{2b^2}\chi\left[\pm\frac{\varkappa}{2}+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\left(1+\mu\frac{c}{a}\right)\right],\\
&C_{b3}=\frac{r^2a}{8b^3}\left[\pm\frac{\varkappa}{2}+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\right], \; C_{b4}=\frac{r^2a^2}{4b^4}\,\chi\left[\pm\frac{\varkappa}{2}+\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)\left(1+\mu\frac{c}{a}\right)\right. . \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Suprapunînd efectele, expresia efortului tangenţial P_t, sub influenţa simultană atît a lungimii finite a bielei cît şi aceea a lungimii finite a balansierului, devine

$$P_t \approx P\sum_{j=1}^{4} C_j\sin j\varphi \qquad (12)$$

în care

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C_{a1}+C_{b1}\mp\frac{a}{b}\,\frac{\varkappa}{2}, \qquad C_2 = C_{a2},\\
&C_3 = C_{a3}+C_{b3}, \qquad C_4 = C_{b4}.
\end{aligned} \qquad (13)
$$

Înlocuind valorile A, B, C_{aj}, C_{bj} din (2), (3), (10) relațiile (13) devin

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{a}{b}\left\{ \pm \frac{\varkappa}{2}\left[1 + \frac{r}{4b}\left(\frac{r}{2b} - \frac{a}{l}\chi\right)\right] + \frac{r}{4b}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{2b} - \frac{a}{l}\left(1 + \frac{c}{a}\mu\right)\chi\right]\right\},\\
C_2 &= \frac{a}{2b}\left\{ \pm \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{r}{l} + \frac{a}{b}\chi\right) + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{l}\nu + \frac{a}{b}\left(1 + \frac{c}{a}\mu\right)\chi\right]\right\},\\
C_3 &= \frac{ra}{4b^2}\left\{ \pm \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{r}{2b} + 3\frac{a}{l}\chi\right) + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{2b} + 3\frac{a}{l}\left(1 + \frac{c}{a}\mu\right)\chi\right]\right\},\\
C_4 &= \frac{r^2a^2}{4b^4}\left[\pm \frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\mu\right)\right]\chi,
\end{aligned} \tag{14}$$

care se mai pot pune sub forma

$$C_1 = C_{a1} + \alpha + \beta, \quad C_2 = C_{a2}, \quad C_3 = C_{a3} + \alpha + \beta, \quad C_4 = C_{b4}, \tag{15}$$

unde

$$\alpha = \pm \frac{r^2a}{8b^3}\frac{\varkappa}{2}, \qquad \beta = \frac{r^2a}{8b^3}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right). \tag{16}$$

Notînd cu C'_{aj}, C'_{bj}, C'_j ce devin valorile C_{aj}, C_{bj}, C_j pentru $\nu = 0$, $\mu = 1$ (echilibrare pe balansier) și C''_{aj}, C''_{bj}, C''_j ce devin aceleași valori pentru $\mu = 0$, $\nu = 1$ (echilibrare pe manivelă), expresiile (8), (11), (14) devin

$$\begin{aligned}
C''_{a1} &= \frac{a}{b}\left[\pm \frac{\varkappa}{2}\left(1 - \frac{ra}{4lb}\chi\right) - \frac{ra}{4lb}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)\chi\right],\\
C'_{a1} &= C''_{a1} - \frac{rac}{4lb^2}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\chi,\\
C''_{a2} &= \frac{a}{2b}\left(\frac{r}{l} + \frac{a}{b}\chi\right)\left(\pm \frac{\varkappa}{2} + 1 + \frac{\varkappa}{2}\right), \quad C'_{a2} = C''_{a2} - \frac{a}{2b}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(\frac{r}{l} - \frac{c}{b}\chi\right),\\
C''_{a3} &= \frac{3ra^2}{4lb^2}\left[\pm \frac{\varkappa}{2} + \left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\chi\right], \quad C'_{a3} = C''_{a3} + \frac{3rac}{4lb^2}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\chi,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&C''_1 = C''_{a1} + \alpha + \beta, \quad C'_1 = C'_{a1} + \alpha + \beta, \quad C''_2 = C''_{a2},\\
&C''_3 = C''_{a3} + \alpha + \beta, \quad C'_3 = C'_{a3} + \alpha + \beta, \quad C'_2 = C'_{a2},\\
&C''_4 = 2\frac{a}{b}(\alpha + \beta)\chi, \quad C'_4 = 2\frac{a}{b}\left[\alpha + \left(1 + \frac{c}{a}\right)\beta\right]\chi.
\end{aligned} \tag{18}$$

2. ECHILIBRAREA DE FRECVENȚĂ DUBLĂ

S-a arătat [1], [2] că lungimile finite ale balansierului și mai ales ale bielei, au ca efect agravarea variației efortului tangențial.

Pentru ameliorarea variației efortului tangențial se poate introduce contrabalansarea de frecvență dublă. Aceasta se poate realiza prin contragreutăți montate pe brațe de pîrghie conexate la un arbore de frecvență dublă. Sincronizarea arborelui, care poartă contragreutățile de frecvență dublă, cu arborele manivelei, se poate face prin transmisie directă sau indirectă.

În literatură, [3], se menționează încercări de folosire a acestui sistem.

În acest scop s-au propus :

— O contragreutate suplimentară instalată excentric pe un ax separat, care s-ar pune în mișcare, cu o frecvență dublă față de cea a balansierului, prin intermediul unei transmisii cu lanț, de la axul principal al unității de pompare.

— O contragreutate suplimentară montată excentric pe axul unei biele de tip Watt, care ar avea același număr de dinți la angrenajele planetare, pentru a avea un număr de turații de două ori mai mare decît numărul de curse al balansierului.

— O contragreutate suplimentară instalată excentric pe axul intermediar al reductorului unităților moderne, care ar avea o frecvență dublă față de axul manivelei.

În exemplul descris la [7], axul de frecvență dublă este coaxial cu axul manivelei pe care-l îmbracă, prezentînd secțiuni concentrice.

Fie X_2 valoarea contragreutății de frecvență dublă, montată la depărtarea R_2 de axul corespunzător. Efortul tangențial corespunzător Ps_2 care se introduce suplimentar la butonul manivelei, este dat de expresia

$$P_{s2} = \frac{R_2}{r} X_2 \sin 2\varphi. \tag{19}$$

Componenta de frecvență dublă rezultantă P_{22} a efortului tangențial, în cazul introducerii contragreutății de frecvență dublă, este dat de relația

$$P_{22} = C_2 P \sin 2\varphi - P_{s2}. \tag{20}$$

Pentru ca să avem o echilibrare la frecvență dublă, trebuie ca $P_{22} = 0$ și ținînd seama de (19), (20) condiția de echilibrare devine

$$C_2 - \frac{R_2}{r} X_2 = 0. \tag{21}$$

Deoarece C_2 are valori diferite la cursa ascendentă față de cursa descendentă, luăm media lor, ceea ce revine la a menține pentru C_2 numai ultimul termen din acolada expresiei (14), încît relația (21) devine

$$X_2 = \frac{ra}{2R_2b}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{l}\,\nu + \frac{a}{b}\left(1 + \frac{c}{a}\,\mu\right)\chi\right] P, \tag{22}$$

care se mai poate pune sub forma

$$X_2 \approx \frac{ra}{2R_2 b}\left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{l}\,\nu + \frac{a}{b}\left(1 + \frac{c}{a}\,\mu\right)\chi\right] Q_{A1}, \tag{23}$$

în care, conform relației (6), sarcina statică la cursa ascendentă Q_{A1} este dată de expresia

$$Q_{A1} = P\,(1 + \varkappa). \tag{24}$$

În acest caz, ceea ce mai rămîne, C_{20}, din C_2, este dat de expresia

$$C_{20} = \pm \frac{a}{2b}\,\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{r}{l} + \frac{a}{b}\,\chi\right), \tag{25}$$

încît efortul tangențial P_{t2} al unității cu echilibrare de frecvență simplă și dublă, este dat de expresia

$$P_{t2} = P\,[C_1 \sin\varphi + C_{20}\sin 2\varphi + C_3 \sin 3\varphi + C_4 \sin 4\varphi]. \tag{26}$$

3. ECHILIBRAREA DE FRECVENȚĂ MULTIPLĂ

În mod analog se deduce componenta de frecvență j

$$P_{sj} = \frac{R_j}{r} X_j \sin j\varphi, \tag{27}$$

condiția de echilibrare corespunzătoare

$$C_j P \sin j\varphi - P_{sj} = 0 \tag{28}$$

și prin urmare

$$X_j = \frac{r}{R_j}\, C_j. \tag{29}$$

Pentru $j = 3$ și ținînd seama de relațiile (14), expresia (29) devine

$$X_3 = \frac{r^2 a}{4 R_3 b^2}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left[\frac{r}{2b} + 3\,\frac{a}{l}\left(1 + \frac{c}{a}\,\mu\right)\chi\right] P, \tag{30}$$

iar

$$C_{30} = \pm \frac{ra}{4b^2}\,\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{r}{2b} + 3\,\frac{a}{l}\,\chi\right), \tag{31}$$

$$P_{t3} = P\,[C_1 \sin\varphi + C_{20}\sin 2\varphi + C_{30}\sin 3\varphi + C_4 \sin 4\varphi]$$

unde P_{t3} este efortul tangențial în cazul instalației echilibrată simplu, dublu și triplu.

Pentru $j = 4$ se obține în mod analog

$$X_4 = \frac{r^3 a^2}{4 R_4 b^4}\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\,\mu\right)\chi\,\mathrm{P}, \tag{32}$$

$$C_{40} = \pm \frac{r^2 a}{4 b^4}\,\frac{\varkappa}{2}\,\chi, \tag{33}$$

$$P_{t4} = P\,[C_1 \sin\varphi + C_{20}\sin 2\varphi + C_{30}\sin 3\varphi + C_{40}\sin 4\varphi] \tag{34}$$

unde P_{t4} este efortul tangențial în cazul instalației echilibrată simplu, dublu, triplu și quadruplu.

Deoarece r/b este în general mic, X_4 devine foarte mic, încît poate fi considerat neglijabil.

4. PUTEREA MOTORULUI

Calculăm puterea motorului folosind noțiunea de efort tangențial eficace P_{t_e} [4] dat de expresia

$$P_{te}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P_t^2\, d\varphi. \tag{35}$$

Înlocuind pe P_t cu expresia (12) relația precedentă devine

$$P_{te}^2 = \frac{P^2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{4} C_j^2 \sin^2 j\varphi + 2\sum_{i=1}^{3} C_i \sin i\varphi \sum_{j=i+1}^{4} C_j \sin j\varphi\right] d\varphi. \tag{36}$$

Se efectuează integrarea observînd că

$$\int_0^{\pi} \sin^2 i\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi} \sin i\varphi \sin j\varphi = 0 \tag{37}$$

și prin urmare

$$P_{te} = P\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} C_j^2}\,. \tag{38}$$

Puterea N a motorului are expresia

$$N = \frac{\omega_1 r}{75\,\eta}\, P_{te}, \tag{39}$$

care devine

$$N = \frac{\pi n_1 r}{30 \cdot 75\,\eta}\, P\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} C_j^2}, \tag{40}$$

unde η este randamentul motorului.

În aplicații interesează rapoartele puterilor motorului în diferitele cazuri de echilibrare pentru comparația lor. În acest scop introducem notațiile următoare :

$$\bar{\zeta}_{1a} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{a1} + C'^{2}_{a2} + C'^{2}_{a3}}{C''^{2}_{a1} + C''^{2}_{a2} + C''^{2}_{a3}}}, \quad \bar{\zeta}_{1} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{1} + C'^{2}_{2} + C'^{2}_{3}}{C''^{2}_{1} + C''^{2}_{2} + C''^{2}_{3}}}, \tag{41}$$

$$\zeta'_{2a} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{a1} + C^{2}_{20} + C'^{2}_{a3}}{C'^{2}_{a1} + C'^{2}_{a2} + C'^{2}_{a3}}}, \quad \zeta'_{2} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{1} + C^{2}_{20} + C'^{2}_{3}}{C'^{2}_{1} + C'^{2}_{2} + C'^{2}_{3}}}, \tag{42}$$

$$\zeta''_{2a} = \sqrt{\frac{C''^{2}_{a1} + C^{2}_{20} + C''^{2}_{a3}}{C''^{2}_{a1} + C''^{2}_{a2} + C''^{2}_{a3}}}, \quad \zeta''_{2} = \sqrt{\frac{C''^{2}_{1} + C^{2}_{20} + C''^{2}_{3}}{C''^{2}_{1} + C''^{2}_{2} + C''^{2}_{3}}}, \tag{43}$$

$$\bar{\zeta}''_{2a} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{a1} + C^{2}_{20} + C'^{2}_{a3}}{C''^{2}_{a1} + C''^{2}_{a2} + C''^{2}_{a3}}}, \quad \bar{\zeta}''_{2} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{1} + C'^{2}_{20} + C'^{2}_{3}}{C''^{2}_{1} + C''^{2}_{2} + C''^{2}_{3}}}, \tag{44}$$

$$\zeta'_{3a} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{a1} + C^{2}_{20} + C^{2}_{30}}{C'^{2}_{a1} + C'^{2}_{a2} + C'^{2}_{a3}}}, \quad \zeta'_{3} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{1} + C^{2}_{20} + C^{2}_{30}}{C'^{2}_{1} + C'^{2}_{2} + C'^{2}_{3}}}, \tag{45}$$

$$\zeta''_{3a} = \sqrt{\frac{C''^{2}_{a1} + C^{2}_{20} + C^{2}_{30}}{C''^{2}_{a1} + C''^{2}_{a2} + C''^{2}_{a3}}}, \quad \zeta''_{3} = \sqrt{\frac{C''^{2}_{1} + C^{2}_{20} + C^{2}_{30}}{C''^{2}_{1} + C''^{2}_{2} + C''^{2}_{3}}}, \tag{46}$$

$$\bar{\zeta}''_{3a} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{a1} + C^{2}_{20} + C^{2}_{30}}{C''^{2}_{a1} + C''^{2}_{a2} + C''^{2}_{a3}}}, \quad \bar{\zeta}''_{3} = \sqrt{\frac{C'^{2}_{1} + C^{2}_{20} + C^{2}_{30}}{C''^{2}_{1} + C''^{2}_{2} + C''^{2}_{3}}}. \tag{47}$$

Indicii inferiori 1, 2, 3 se referă respectiv la echilibrare simplă, simplă + dublă, simplă + dublă + triplă. Indicele inferior *a* se referă la cazul cînd se neglijează influența balansierului.

Indicii superiori (prim și secund) se referă la echilibrarea inițială pe balansier și respectiv pe manivelă. Suprabarajul se referă la trecerea contragreutății de pe manivelă pe balansier.

5. APLICAȚII

S-au aplicat formulele precedente la patru exemple, ai căror parametri caracteristici sînt trecuți în tabela 1. Primul exemplu se referă la sonde de adîncimi mijlocii. Al doilea exemplu se referă la sonde foarte adînci. Al treilea exemplu diferă de al doilea prin aceea că are o turație mai coborîtă. Al patrulea exemplu diferă de al treilea prin aceea că are biela și brațele balansierului mai scurte.

Diminuarea puterii necesare prin trecerea contragreutății lor pe balansier este trecută în tabela 1.

Tabela 1

$\frac{a}{b}$	$\frac{r}{l}$	$\frac{r}{b}$	$\varkappa$	χ	$\frac{r}{m}$	$\frac{P+G}{t}$	$\bar{\zeta}_{10}$	$\bar{\zeta}_{1}$
1,11	0,25	0,30	0,4	0,1	0,9	9	0,82	0,83
1,25	0,30	0,333	0,2	0,1	1,2	15	0,70	0,76
1,25	0,30	0,333	0,2	0,06	1,2	15	0,59	0,64
1,25	0,40	0,50	0,2	0,06	1,2	15	0,56	0,61

Valorile contragreutăților de frecvență simplă, dublă și triplă sînt trecute în tabela 2.

Tabela 2

μ	ν	X_1'	R_1X_1''	R_2X_2	R_3X_3
		t	mt	mt	mt
1	0	7,20	—	0,80	0,38
0	1	—	7,2	1,30	0,23
1	0	13,5	—	2,52	1,67
0	1	—	22,5	4,31	0,85
1	0	13,5	—	1,57	1,02
0	1	—	22,5	3,59	0,51
1	0	13,5	—	1,70	1,55
0	1	—	22,5	4,80	1,09

Diminuarea puterii necesare prin echilibrare dublă și triplă sînt trecute în tabela 3.

Tabela 3

ζ_{2a}	ζ_2	$\bar{\zeta}_{2a}$	$\bar{\zeta}_2$	ζ_{3a}	ζ_3	$\bar{\zeta}_{3a}$	$\bar{\zeta}_3$
0,76	0,80			0,67	0,70		
0,61	0,66	0,60	0,66	0,58	0,61	0,54	0,58
0,58	0,66			0,37	0,46		
0,36	0,40	0,41	0,53	0,30	0,32	0,26	0,35
0,73	0,79			0,57	0,61		
0,41	0,48	0,43	0,51	0,34	0,41	0,34	0,39
0,75	0,85			0,50	0,58		
0,35	0,51	0,39	0,55	0,29	0,41	0,26	0,37

6. ANGRENAJELE TRANSMISIILOR LA ARBORII DE FRECVENȚĂ MULTIPLĂ

Fie angrenajele $z_1 - z_1'$, $z_2 - z_2'$, $z_3 - z_3'$ (fig. 2) al transmisiilor de la arborele intermediar, la arborele manivelei, și la arborii de contrabalansare cu frecvență dublă, triplă, unde

z_1, z_2, z_3 — numărul de dinți al roților de pe arborele intermediar,
z_1', z_2', z_3' — numărul de dinți de pe arborele manivelei și de pe arborii de contrabalansare cu frecvență dublă, triplă.

Dacă arborii de contrabalansare multiplă sînt coaxiali, distanța A dintre axul acestora și axul intermediar este dată [5] de relațiile

$$A = \frac{z_i - z_i'}{2} m_i \tag{48}$$

pentru $i = 1, 2, 3$ și unde m_i este modulul angrenajelor.

Păstrînd pe m_i acelaşi pentru toate angrenajele, relaţia (48) devine

$$z_1 + z_1' = z_2 + z_2' = z_3 + z_3' = s, \tag{49}$$

unde s este suma dinţilor de la ambele roţi ale angrenajului.

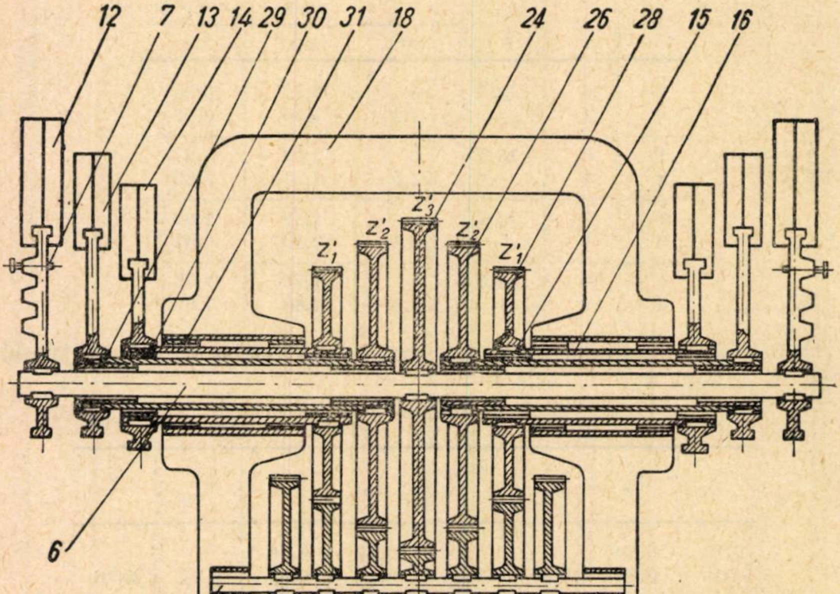

12
7
13
14
29
30
31
18
24
26
28
15
16
z'3
z'2
z'1
z'2
z'1
6
z1
z2
z3
z2
z1
20
32
35
22
21
23
17
25
27
33
19
36

Fig. 2

Notînd cu n_1, n_2, n_3 rapoartele de transmisie

$$n_1 = z_1'/z_1, \quad n_2 = z_2'/z_2, \quad n_3 = z_3'/z_3, \tag{50}$$

în cazul frecvențelor multiple, avem

$$n_1 = hn_2 = kn_3 \tag{51}$$

unde

$$h = 2, \ k = 3, \tag{52}$$

dacă ne referim la frecvența dublă și respectiv triplă.

Ținînd seama de (49), (50) relațiile (51) se pot pune sub forma

$$\frac{s - z_1}{z_1} = h \frac{s - z_2}{z_2} = k \frac{s - z_3}{z_3}. \tag{53}$$

Întrucît z_1, z_2, z_3 sînt întregi, ca și z_1', z_2', z_3' și deci, conform relației (49), s este de asemenea întreg, relațiile (53) reprezintă un sistem de ecuații diofantice [6] unde s, z_1, z_2, z_3 sînt necunoscutele, iar h, k numere întregi date.

Servindu-ne tot de relațiile (49), (50), (51) pentru a rezolva ecuațiile (53), acestea pot fi puse sub forma :

$$z_1 = \frac{s}{n_1 + 1}, \quad z_2 = \frac{hs}{n_1 + h}, \quad z_3 = \frac{ks}{n_1 + k}, \tag{54}$$

$$z_1' = \frac{n_1 s}{n_1 + 1}, \quad z_2' = \frac{n_1 s}{n_1 + h}, \quad z_3' = \frac{n_1 s}{n_1 + k}, \tag{55}$$

unde n_1, conform primei relații din (50), este un număr rațional și poate fi chiar întreg.

Notînd cu d cel mai mare divizor comun al numerelor z_i, z_i' pentru $i = 1, 2, 3$ conform relației (53), ținînd seamă de (49), (50), d este și un divizor al numărului s.

Prin urmare

$$z_1 = z_1^{\star} d, \quad z_1' = z_1'^{\star} d, \quad s = s^{\star} d \tag{56}$$

și înlocuind în ecuațiile (54), (55) acestea devin

$$z_i^{\star} = \frac{js^{\star}}{n_1 + j}, \quad z_i'^{\star} = \frac{n_1 s^{\star}}{n_1 + j}, \tag{57}$$

în care $j = 1, h, k$, notațiile stelate reprezintă valorile cele mai mici.

Pentru ca ecuațiile (57) să fie posibile, trebuie ca fiecare numitor să fie un divizor al numărătorului respectiv și prin urmare, trebuie să avem

$$s^{\star} = \text{c.m.m.m.c.} \left(\frac{n_1}{j} + 1, \ 1 + \frac{j}{n_1} \right) \cdot \tag{58}$$

Pentru n_1 întreg este suficient ca

$$s^{\star} = \text{c.m.m.m.c.} \left(\frac{n_1}{j} + 1 \right), \tag{59}$$

deoarece, conform relației (57), se satisface și condiția (58).

Dacă n_1 nu este întreg, se ajunge la valori mari pentru z_1, ceea ce în general nu mai interesează.

Cunoscînd pe n_1, se calculează succesiv s^*, s, z_i, z_i' cu relațiile (59), (56), (54), (55).

În tabela 4 sînt trecute numerile z_i, z_i', s pentru $h = 2$, $k = 3$.

Tabela 4

n_1	4			5			6		
d	1	2	3	1	2	3	1	2	3
s	105	210	315	168	336	504	84	168	252
z_1	21	42	63	28	56	84	12	24	36
z_1'	84	168	252	140	280	420	72	144	216
z_2	35	70	105	48	96	144	21	42	63
z_2'	70	140	210	120	240	360	63	126	189
z_3	45	90	135	63	126	189	28	56	84
z_3'	60	120	180	105	210	315	56	112	168

7. UN EXEMPLU DE UNITATE CU CONTRABALANSARE MULTIPLĂ

Se poate urmări descrierea instalației de frecvență multiplă pe schema instalației din plan vertical (fig. 1), cît și secțiunea orizontală prin reductor (fig. 2).

Un balansier principal *1*, rezemat prin articulația *2* pe capra *3*, este acționat printr-un dublu sistem de manivelă *4* și bielă *5*. Manivelele se rotesc în jurul axului *6* și sînt articulate cu bielele prin butoanele *7*, iar celelalte capete ale bielelor sînt legate prin articulații de balansierul transversal *8* și prin intermediul acestuia de balansierul principal.

Sarcina garniturii de prăjini *9* este preluată de balansier prin intermediul „capului de cal'' *10*. Contragreutatea de pe balansier este amplasată în *11*. Contragreutatea de pe manivelă este amplasată în *12*. Contragreutatea de frecvență dublă este amplasată în *13*, iar cea de frecvență triplă este amplasată în *14*.

Arborii contragreutăților de frecvență dublă *15*, triplă *16* și acel al manivelei, coaxiali, sînt acționați de motorul instalației *17* prin intermediul unui reductor, care cuprinde în cutia sa *18*, în afară de arborii coaxiali menționați în arborele de mare turație *19*, precum și arborele intermediar *20*. Transmiterea mișcării de la arborele de mare turație la cel intermediar, precum și de la acesta din urmă la arborii coaxiali este realizată prin angrenajele *21—22*, *23—24*, *25—26*, *27—28*.

Arborii exteriori *15* și *16* sînt întrerupți pentru a permite angrenajului *23—24* și respectiv *25—26* să acționeze arborele manivelei și respectiv al contragreutății *13* de frecvență dublă. Lagărele manivelei *29* sînt cuprinse în interiorul arborelui de frecvență dublă *15*, care la rîndul său se reazămă pe lagărele *30* cuprinse în arborele de frecvență triplă *16*, care la rîndul său se reazămă pe lagărele *31* amplasate pe cutia reductorului. Ceilalți arbori se reazămă pe lagărele *32* și *33*, de asemenea amplasați pe cutia reductorului. O pompă de ulei acționată pe angrenajul *34* asigură ungerea lagărelor coaxiale.

Acționarea reductorului de către motor se face prin transmisia *35*, iar o frînă de mînă *36* completează instalația.

CONCLUZII

Prin suprapunerea efectelor, influențele bielei și a balansierului, studiate separat anterior [1], [2], sînt cuprinse în expresia (12) și următoarele. Examinînd aceste expresii, observăm că expresia efortului tangențial la butonul manivelei se poate descompune în componente sinusoidale de frecvență simplă, dublă, triplă și quadruplă. Dacă se poate neglija efectul componentei cvadruple în ceea ce privește variația acestui efort, celelalte componente nu sînt neglijabile.

Pentru uniformizarea efortului tangențial este deci necesar de a contrabalansa nu numai componenta de frecvență simplă, dar și componenta de frecvență dublă și chiar aceea de frecvență triplă.

Efectele acestor componente de frecvență multiplă se manifestă asupra puterii necesare a motorului și sînt cuprinse în formulele (38) și (40).

În aplicațiile făcute cu 4 exemple cuprinse în tabelele 1, 2, 3, constatăm că prin contrabalansarea de frecvență dublă, puterea necesară se reduce considerabil, mai ales la sondele adînci, unde poate ajunge la o reducere a puterii de aproape 50% în cazul contrabalansării pe manivelă a componentei de frecvență simplă și în jurul a 20% în cazul contrabalansării inițiale pe balansier, întrucît diferența provine din reducerea de putere de 30% ce se obține prin trecerea contragreutății simple pe balansier.

Dacă folosim și contrabalansarea de frecvență triplă se obține încă o reducere de 25%, ajungînd la o reducere totală de sub 40% față de contrabalansarea simplă pe balansier.

Examinînd tabela 2, observăm că trecînd contragreutatea de frecvență simplă de pe manivelă pe balansier, se reduce aproximativ la jumătate contragreutatea de frecvență dublă, în schimb se dublează contragreutatea de frecvență triplă. Întrucît contragreutatea de frecvență triplă este mai mică de cît cea de frecvență dublă, soluția indicată rămîne mai avantajoasă.

În continuare, s-au stabilit angrenajele arborilor de frecvență multiplă, reducînd sistemul de ecuații diofantice (53) de gradul doi, la un sistem de ecuații diofantice (54), (55) de gradul unu, a căror soluție (58) se reduce la expresia (59) mai simplă.

În aplicațiile trecute în tabela 4 s-au folosit pentru raportul de transmisie n_1 numere întregi, întrucît numerele raționale conduc la un număr prea mare de dinți pentru roțile dințate.

Din examinarea tabelei 4 se observă că soluția $n_1 = 6$, $d = 2$ conducînd la $z_1 = 24$, este recomandabilă.

Echilibrarea multiplă prezintă următoarele avantaje :

— reducerea puterii motorului și a părților aferente din reductor, ceea ce ușurează instalația și reduce costul ei ;

— reducerea puterii dewatate, în cazul motorului electric, ceea ce ameliorează factorul de putere al rețelei electrice;

— posibilitatea reducerii dimensiunilor caprei, balansierului și bielei, ceea ce face instalația mai compactă, mai ușoară, mai ieftină, mai ușor de transportat și montat.

Primit la redacție la 4 aprilie 1959

УРАВНОВЕШИВАНИЕ НА КРАТНОЙ ЧАСТОТЕ НАСОСНЫХ АГРЕГАТОВ ГЛУБИННОЙ ОТКАЧКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

После указания влияний шатуна и коромысла на уравновешивание насосных агрегатов, исследованных ранее отдельно, путем наложения эффектов, устанавливается выражение касательного усилия у пальца кривошипа. Оказывается, что это выражение может быть разложено на синусоидальные составляющие с основной, двойной, тройной и четырехкратной частотой.

Для уравнивания касательного усилия предлагается уравновешивание кратной частоты.

Устанавливается необходимая мощность двигателя и приводятся приложения к нескольким примерам, где сравнивается уменьшение необходимой мощности в различных случаях.

Исследуются передачи валов, несущих противовесы кратной частоты.

В заключюние разбираются преимущества кратного уравновешивания.

L'ÉQUILIBRAGE DE FRÉQUENCE MULTIPLE DES INSTALLATIONS PROFONDES DE POMPAGE

RÉSUMÉ

L'auteur revient sur l'influence de la bielle et du balancier, déjà étudiée, pour chacun en particulier, et établit, en superposant ces effets, l'expression de l'effort tangentiel au maneton. Il relève le fait que cette expression peut être décomposée en plusieurs composantes de fréquence simple, double, triple et quadruple.

L'équilibrage de fréquence multiple est proposé en vue d'uniformiser les variations de l'effort tangentiel.

L'auteur établit la puissance nécessaire du moteur et compare la réduction de cette puissance dans diverses alternatives dont il donne quelques exemples.

Il étudie les engrenages des arbres qui portent les contrepoids de fréquence multiple.

Finalement, il analyse les avantages du contrebalancement de fréquence multiple.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, *Influenţa lungimii bielei asupra echilibrării unităţilor de pompare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *1* (1959).
2. — *Influenţa lungimii balansierului asupra echilibrării unităţilor de pompare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *3* (1959).
3. A. S. Virnovschi, I. I. Golberg, O. S. Tateişvili, *Unităţi de pompaj, avînd o diagramă aplatisată a eforturilor tangenţiale.* Nefteanoe Hoziaistvo, *9* (1947).
4. R. J. Siscenco, *Maşini şi mecanisme pentru forarea şi exploatarea sondelor.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1951.
5. Emil Botez, *Angrenaje.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
6. Gr. C. Moisil, *Introducere în algebră.* Ed. Acad. R.P.R., 1954.

REZISTENȚA MATERIALELOR–ELASTICITATE

TORSIUNEA DINAMICĂ A BARELOR ELASTICE CU SECȚIUNE CONSTANTĂ

DE

M. MIȘICU

Problema torsiunii statice a barelor elastice cu secțiune constantă a fost formulată de Coulomb și extinsă în cazul barelor cu secțiune transversală oarecare de Barré de Saint-Venant. Prin analogii adecvate, problema torsiunii a fost transpusă și în alte domenii ale fizicii matematice ca hidrodinamica, electrostatica, statica membranelor etc. datorită modelelor lui Boussinesq, Greenhill, Prandtl, Thomson și Tait, precum și ale altora.

În ultimii ani, mulțimea soluțiilor cunoscute în problema torsiunii a sporit într-un mod deosebit, în urma întroducerii unor procedee de calcul mai avansate, astfel că acest capitol al teoriei elasticității a cîștigat în importanță.

S-au dat de asemenea formulări ale problemei de torsiune și în cazuri mai generale, anume pentru bare cu secțiune circulară variabilă în lungul axei. Această extindere datorită lui F. Willers și A. Timpe a fost tratată și de L. S. Abramian și M. M. Djrbașian. Într-un caz mai general, problema a fost studiată de autor.

Din punct de vedere dinamic, problema torsiunii este rezolvată în cazul barelor cu secțiune constantă de lungime indefinită. Această soluție exactă din punct de vedere al teoriei elasticității doar pentru bare cu secțiune circulară este utilizată în rezistența materialelor pentru orice formă a arborilor, ceea ce atrage aproximări depinzînd de forma secțiunii transversale.

În cuprinsul acestei lucrări se dă o formulare generală a problemei torsiunii barelor supuse la momente de torsiune dinamice, determinîndu-se corecțiile necesare proporționale cu $(\omega L/c_t)^n$; $n=2,4,\cdots$ ω fiind o frecvență fixată a unei componente monocromatice a vibrațiilor, L dimensiunea maximă a barei în sens transversal iar c_t viteza de propagare a undelor transversale. Întrucît în cazurile care intervin în mod practic, această mărime este mult mai mică decît unitatea, a fost suficient de a limita studiul la aceste corecţii şi implicit la considerarea doar a undelor transversale. Nu s-a considerat perturbarea provocată de reflectarea undelor pe conturul de capăt sub forma unor vibraţii longitudinale, presupunînd condiţii la limită corespunzătoare acestei ipoteze şi observînd că efectul acestora este de ordin superior. De asemenea prin considerarea unei soluţii suplimentare date de funcţia ψ (2.3) s-ar putea studia torsiunea barelor cu condiţii complete la capete.

1. ECUAŢII DIFERENŢIALE

Vom considera o bară cu secţiunea transversală (normală pe axa z a barei) constantă. Deplasarea în sensul axei z o vom nota cu w iar deplasările în sens transversal după axele x şi y cu u şi v. Vom presupune conturul lateral al barei liber, la capete putînd fi aplicate momente de răsucire.

Nu vom preciza în prealabil alte condiţii la capetele barelor, acestea decurgînd din cele ce vor urma. Vom menţiona ca o ipoteză suplimentară că undele de vibraţie se propagă în sensul axei cu viteza $c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, caracteristică vibraţiilor transversale. Justificarea acestei ipoteze va apare ulterior.

Pentru deducerea ecuaţiilor vom considera condiţiile de continuitate ale lui Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad (1.1) \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

ρ fiind densitatea presupusă omogenă.

Admitem, de asemenea, următoarea lege a lui Hooke între tensiuni şi deformări :

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\,; \quad \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \quad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad (1.2) \\ &\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

În baza supoziţiilor anterioare vom considera următoarea formă a deplasărilor :

$$u = \mathfrak{S}(z \mp c_t t).\ U(x,y)\,; \quad v = \mathfrak{S}(z \mp c_t t).\ V(x,y)\,; \quad w = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z}(z \mp c_t t).\ W(x,y) \qquad (1.3)$$

Pentru claritate, să presupunem că $\mathfrak{T}(z \mp c_t t)$ are următoarea formă particulară :

$$\mathfrak{T}(z \mp c_t t) = \frac{\cos \omega t \cdot \sin \frac{\omega z}{c_t}}{\omega / c_t}. \tag{1.4}$$

Este clar că pentru frecvențe joase, funcția $\mathfrak{T}$ tinde către valoarea z, ca în cazul static. Acest caz corespunde unei vibrații monocromatice staționare de frecvență ω cu condițiile inițiale $\mathfrak{T} = \frac{\sin \omega z / c_t}{\omega z / c_t}$. În general, vor fi de suprapus mai multe vibrații de acest tip. Problema generală putîndu-se reduce la studiul unei vibrații armonice, ne vom limita, pentru simplitate, la acest din urmă caz.

Forma (1.3) este compatibilă cu (1.1) și (1.2). Pentru deducerea ecuațiilor diferențiale ce urmează să fie satisfăcute de noile funcții U, V, W vom observa că (1.1) se mai scrie în baza relațiilor (1.2) :

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Box_t u = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Box_t v = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Box_t w = 0, \tag{1.5}$$

$\Box_t$ fiind simbolul caracterizînd operatorul

$$\Box_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_t^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{1.6}$$

Pentru o vibrație staționară monocromatică vom avea, cu notațiile introduse mai sus,

$$\omega^2 \mathfrak{T} + \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial t^2} = 0 \, ; \quad \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathfrak{T} + \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial z^2} = 0. \tag{1.7}$$

Cu aceste relații se verifică următoarele ecuații satisfăcute identic de deplasările u, v, w și funcțiile U, V, W, θ :

$$\begin{gathered} \Box_t u = \mathfrak{T} \Delta U \, ; \quad \Box_t v = \mathfrak{T} \Delta V \, ; \quad \Box_t w = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \Delta W \\ \theta = \mathfrak{T}\left(\vartheta - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W\right) ; \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \end{gathered} \tag{1.8}$$

Δ reprezentînd operatorul lui Laplace în plan

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{1.9}$$

Ţinînd seama de aceste relaţii (1.5) devine

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W-\vartheta\right]=\mu\,\Delta U,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W-\vartheta\right]=\mu\,\Delta V, \tag{1.10}$$
$$(\lambda+\mu)\cdot\left[\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W-\vartheta\right]=\mu\,\Delta W.$$

Din (1.8) se deduce că primele două relaţii din (1.10) se mai pot scrie

$$\Delta\left(U-\frac{\partial W}{\partial x}\right)=0\,;\quad \Delta\left(V-\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0. \tag{1.11}$$

Vom introduce o funcţie armonică φ

$$\Delta\varphi=0, \tag{1.12}$$

astfel ca

$$W=\varphi+W'\,;\quad U=U'+\frac{\partial W'}{\partial x}\,;\quad V=V'+\frac{\partial W'}{\partial y}, \tag{1.13}$$

U', V', W' fiind funcţii care urmează a fi stabilite. Pentru aceasta este suficient a observa că în baza relaţiilor (1.12) şi (1.13)

$$\Delta U'=\Delta V'=0. \tag{1.14}$$

Vom nota

$$\vartheta'=\frac{\partial U'}{\partial x}+\frac{\partial V'}{\partial y}. \tag{1.15}$$

Din ultima relaţie se deduce că

$$\vartheta'=\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\cdot W-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,\Delta W, \tag{1.16}$$

ecuaţie care împreună cu (1.12) şi prima din (1.13), defineşte condiţia diferenţială satisfăcută de funcţia W'.

2. EXPRIMAREA CONDIŢIILOR DIFERENŢIALE CU AJUTORUL FUNCŢIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

Funcţia complexă

$$\mathfrak{U}'=U'+iV' \tag{2.1}$$

este armonică în baza relaţiei (1.14). Vom putea deci introduce două funcţii de variabilă complexă $\Phi(\mathfrak{z})$ şi $\Psi(\mathfrak{z})$ unde

$$\mathfrak{z}=x+iy, \tag{2.2}$$

astfel că

$$\mathfrak{U}' = \Phi(\mathfrak{z}) + \overline{\Psi(\mathfrak{z})}. \tag{2.3}$$

Să căutăm a exprima atît funcția ϑ' cît și funcția

$$\Omega' = \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial y}, \tag{2.4}$$

în raport cu funcțiile $\Phi(\mathfrak{z})$ și $\Psi(\mathfrak{z})$. Întrucît

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{z}} ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = i\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{z}} \tag{2.5}$$

și notînd $\Phi' = \partial \Phi / \partial \mathfrak{z}$ se deduce că

$$\frac{\partial \mathfrak{U}'}{} = \Phi' + \overline{\Psi}' ; \quad \frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial y} = i\,\Phi' + (\overline{i\Psi'}) = i(\Phi' - \overline{\Psi}') \tag{2.6}$$

și deci că

$$\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial x} - i\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial y} \equiv \vartheta' + i\,\Omega' = 2\,\Phi'. \tag{2.7}$$

Cu acestea ecuația (1.16) devine

$$2\,\mathcal{Re}\,\Phi' = \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W - 2(1-\sigma)\Delta W, \tag{2.8}$$

σ fiind coeficientul lui Poisson astfel ca

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} ; \quad 2(1-\sigma) = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}. \tag{2.9}$$

Vom introduce de asemenea funcțiile de variabilă complexă f, Γ_n

$$f(\mathfrak{z}) = \varphi + i\psi ; \quad W' = \mathcal{Re} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} \cdot \bar{\mathfrak{z}}^n\,\Gamma_n(\mathfrak{z}), \tag{2.10}$$

unde Γ_n trebuie astfel ales ca să fie satisfăcută relația (2.8) iar ψ este o funcție armonic conjugată cu φ (conform (1.12))

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Introducînd (2.10) în (2.8) vom avea grupul de condiții

$$\begin{gathered} 2\,\mathcal{Re}\,\Phi' = \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathcal{Re} f - 8(1-\sigma)\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \cdot \mathcal{Re}\,\Gamma_1' \\ \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2(n+1)} \cdot \mathcal{Re}\,\Gamma_n \bar{\mathfrak{z}}^n - 8(1-\sigma)\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2(n+1)} \cdot (n+1)\,\mathcal{Re}\,\bar{\mathfrak{z}}^n\,\Gamma'_{n+1} = 0 ; \; n = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{2.12}$$

Integrînd grupul acestor relații se obțin următoarele expresii pentru funcțiile $\Gamma_n(\mathfrak{z})$:

$$\begin{gathered} \Gamma_1(\mathfrak{z}) = \frac{1}{8(1-\sigma)} \int \left\{ f - \frac{2\,\Phi'}{(\omega/c_t)^2} \right\} d\mathfrak{z} = \frac{1}{1-\sigma)} \left\{ g - \frac{2\,\Phi}{(\omega/c_t)^2} \right\} ; \; g = \int f d\mathfrak{z}, \\ \Gamma_n(\mathfrak{z}) = \frac{1}{8(1-\sigma)n} \cdot \int d\mathfrak{z}\,\Gamma_{n-1}(\mathfrak{z}) ; \; n = 2,3,\ldots \end{gathered} \tag{2.13}$$

Ultimul rezultat se mai scrie

$$\Gamma_n(\mathfrak{z}) = \left[\frac{1}{8\,(1-\sigma)}\right]^n \cdot \frac{1}{n\,!} \cdot (f\,d\mathfrak{z})^n \left\{ f - \frac{2\,\Phi'}{(\omega/c_t)^2} \right\};\; n = 1,2,3,\ldots \qquad (2.14)$$

unde simbolul $\left(\int d\mathfrak{z}\right)^n$ reprezintă integrarea de la 0 la z de n ori.

În cele din urmă avem că

$$W' = \mathcal{R}e \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} \cdot \left[\frac{1}{8(1-\sigma)}\right]^n \cdot \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{n}}{n\,!} \left(\int d\mathfrak{z}\right)^n \cdot \left\{ f - \frac{2\,\Phi'}{(\omega/c_t)^2} \right\} \cdot \qquad (2.15)$$

Vom observa că în cazul torsiunii statice, funcţia Φ se reduce la termenul $i\mathfrak{z} = -y + ix$. Notînd orice funcţie sub forma

$$\mathfrak{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} \mathfrak{F}_n$$

unde $\mathfrak{F}_n$ nu conţine termeni în $\frac{\omega}{c_t}$, vom avea conform observaţiei precedente că

$$\Phi_0 = i\mathfrak{z}. \qquad (2.16)$$

În relaţia (2.15) nu vom considera decît dezvoltarea $\Phi = \sum_{1}^{n} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} \cdot \Phi_n$ deoarece Φ_0 nu intervine în (2.12).

3. EXPRESIILE TENSIUNILOR

În baza relaţiilor (1.2) şi (1.3) expresiile tensiunilor devin

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\lambda \left(\vartheta - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W \right) + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right], \\
\sigma_y &= \mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\lambda \left(\vartheta - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W \right) + 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} \right], \\
\sigma_z &= \mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\lambda \left(\vartheta - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W \right) - 2\mu \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \cdot W \right], \\
\tau_{xy} &= \mu\, \mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right], \\
\tau_{yz} &= \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \cdot \left[v + \frac{\partial W}{\partial y} \right];\; \tau_{zx} = \mu \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} \left[U + \frac{\partial W}{\partial z} \right], \\
\mathfrak{T} &= \mathcal{R}e \left[A e^{i(\omega t - z/c_t)} + B e^{-i(\omega t - z/c_t)} + C e^{i(\omega t + z/c_t)} + D e^{-i(\omega t + z/c_t)} \right].
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Ţinînd seama de relaţia ultimă din (1.10) care se mai scrie

$$\vartheta - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W = -\frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \Delta W', \qquad (3.2)$$

precum și de relațiile (1.13) se obține în locul expresiilor de mai sus (3.1) a tensiunilor, următoarea formă

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\mu\,\mathfrak{T}\,(z \mp c_t t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U' + \frac{\partial W'}{\partial x}\right) - \sigma \Delta W'\right],\\
\sigma_y &= 2\mu\,\mathfrak{T}\,(z \mp c_t t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(V' + \frac{\partial W'}{\partial y}\right) - \sigma \Delta W'\right],\\
\sigma_z &= -2\mu\,\mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 (\varphi + W') + \sigma \Delta W'\right],\\
\tau_{xy} &= \mu\,\mathfrak{T}\,(z \mp c_t t) \cdot \left[\frac{\partial U'}{\partial y} + \frac{\partial V'}{\partial x} + 2\,\frac{\partial^2 W'}{\partial x\,\partial y}\right],\\
\tau_{yz} &= \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + V' + 2\,\frac{\partial W'}{\partial y}\right],\\
\tau_{zx} &= \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + U' + 2\,\frac{\partial W'}{\partial x}\right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Vom stabili acum și expresiile componentelor tensiunii aplicate în secțiuni paralele cu axul de normală, formînd cu axele unghiuri de cosinuși

$$n_x = \frac{dy}{ds}\,;\quad n_y = -\frac{dx}{ds}. \tag{3.4}$$

Aceste componente sînt

$$T_x = n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy}\,;\quad T_y = n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y\,;$$
$$T_z = n_x\tau_{zx} + n_y\,\tau_{zy} \tag{3.5}$$

și au conform relațiilor (3.3) expresiile

$$\begin{aligned}
T_x &= 2\mu\,\mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(U' + \frac{\partial W'}{\partial x}\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} n_y \Omega' - n_x\sigma\, \Delta W'\right],\\
T_y &= 2\mu\,\mathfrak{T}(z \mp c_t t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(V' + \frac{\partial W'}{\partial y}\right) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{2}\, n_x \Omega' - n_y\sigma \Delta W'\right], \qquad (3.6)\\
T_z &= 2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(W' + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}(n_x U' + n_y V')\right],
\end{aligned}$$

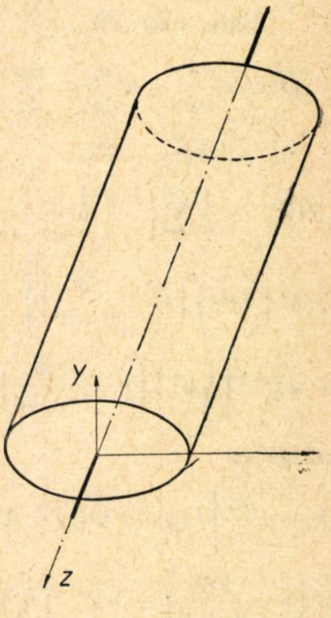


Fig. 1

în care apare derivata normală

$$\frac{\partial}{\partial n}=n_x\frac{\partial}{\partial x}+n_y\frac{\partial}{\partial y}\tag{3.7}$$

şi rotaţia produsă de deplasările U', V' :

$$\Omega'=\frac{\partial V'}{\partial x}-\frac{\partial U'}{\partial y}\cdot\tag{3.8}$$

Vom da acum o exprimare cu ajutorul funcţiilor de variabilă complexă a tensiunilor. Vom considera în primul rînd tensiunea tangenţială complexă

$$Q=\tau_{zx}-i\,\tau_{zy},\tag{3.9}$$

care se scrie

$$Q=\mu\cdot\frac{\partial\varpi}{\partial z}\cdot\{\overline{D}\varphi+\overline{\mathfrak{U}}'+2\overline{D}W'\},\tag{3.10}$$

unde D reprezintă operatorul de monogenitate (derivata areolară în sens restrîns)

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\cdot\tag{3.11}$$

Este clar că

$$\begin{aligned}
\overline{D}\varphi&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(\mathfrak{z})=f'(\mathfrak{z})\\
\overline{\mathfrak{U}}'&=\overline{\Phi(z)}+\Psi(z)\\
\overline{D}W'&=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n}\cdot\left[\frac{1}{8(1-\sigma)}\right]^n\frac{1}{n!}\overline{D}\left\{\bar{\mathfrak{z}}^n\left(\int d\mathfrak{z}\right)^n\left[f-\frac{\Phi}{(\omega/c_t)^2}\right]+\right.\\
&\left.+\mathfrak{z}^n\left(\int d\bar{\mathfrak{z}}\right)^n\left(\bar{f}-\frac{2\overline{\Phi}'}{(\omega/c_t)^2}\right)\right\}=\sum_1^\infty\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n}\cdot\left[\frac{1}{8(1-\sigma)}\right]^n\frac{1}{n!}\left\{\bar{\mathfrak{z}}^n\left(\int d\mathfrak{z}\right)^{n-1}\left(f-\frac{2\Phi'}{(\omega/c_t)^2}\right)+\right.\\
&\left.+n\,\mathfrak{z}^{n-1}\left(\int d\bar{\mathfrak{z}}\right)^n\left(\bar{f}-\frac{2\overline{\Phi}'}{(\omega/c_t)^2}\right)\right\},
\end{aligned}\tag{3.12}$$

astfel că

$$\begin{aligned}
Q&=\mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\left[f'(\mathfrak{z})+\overline{\Phi(\mathfrak{z})}+\Psi(\mathfrak{z})+2\sum_1^\infty\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1}{8(1-\sigma)}\right)^n\frac{1}{n!}\cdot\left\{\bar{\mathfrak{z}}^n\left(\int d\mathfrak{z}\right)^{n-1}\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left(f-\frac{2\Phi'}{(\omega/c_t)^2}\right)+n\,\mathfrak{z}^{n-1}\left(\int d\bar{\mathfrak{z}}\right)^n\left(\bar{f}-\frac{2\overline{\Phi}'}{(\omega/c_t)^2}\right)\right\}\right]=\\
&=\mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\left\{f'(\mathfrak{z})+\overline{\Phi(\mathfrak{z})}+\frac{1}{4(1-\sigma)}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2(\bar{\mathfrak{z}}\,(f_0-2\,\Phi_1')+\int d\bar{\mathfrak{z}}\,(\bar{f}_0-2\,\overline{\Phi}_1')+\ldots)\right\}\cdot
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Să mai formăm expresia

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\mu\, \mathfrak{G}(z \mp c_t t) \cdot \{\vartheta' + (1-\sigma)\Delta W'\}. \tag{3.14}$$

Ținînd seama de (2.7) și (2.8), aceasta se scrie

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\mu\, \mathfrak{G}(z \mp c_t t) \cdot \left\{ 2\, \mathcal{R}e\, \Phi' + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \cdot W - 2\, \mathcal{R}e\, \Phi' \right]\right\} = \\ &= \mu\, \mathfrak{G}(z \mp c_t t) \cdot \left\{ 2\, \mathcal{R}e\, \Phi' + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 (\mathcal{R}e\, \varphi + W') \right\}. \end{aligned} \tag{3.14'}$$

Vom introduce apoi tensiunea complexă

$$T = T_x + i T_y. \tag{3.15}$$

Din primele relații (3.6) se deduce că

$$T = 2\mu\, \mathfrak{G}(z \mp c_t t) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(\mathfrak{U}' + DW') - \frac{i}{2} n\, \Omega' - \sigma n\, \Delta W \right\}, \tag{3.16}$$

unde s-a notat

$$n = n_x + i n_y. \tag{3.17}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(\Phi + \overline{\Psi}) = n_x\, \Phi' + i n_y\, \Phi' + n_x \overline{\Psi}' + n_y \overline{i\Psi}' = n\, \Phi' + \overline{n\Psi}', \\ &i\Omega' = \Phi' - \overline{\Phi}', \\ &\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{2}(\overline{n}\, D + n \overline{D}), \end{aligned} \tag{3.18}$$

se deduce că

$$T = 2\mu\, \mathfrak{G}(z \mp c_t t) \cdot \left\{ n\left(\Phi' - \frac{1}{2}(\Phi' - \overline{\Phi}') + \left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \Delta W' \right) + \overline{n}\, \Xi \right\}, \tag{3.19}$$

unde $\Xi = \overline{\Psi}' + \frac{1}{2} D^2 W'$. Din (2.8) se mai deduce că

$$\begin{aligned} T &= 2\mu\, \mathfrak{G}(z - c_t t) \left\{ n\, \mathcal{R}e\left(\Phi' + \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}\left[\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W - 2\, \mathcal{R}e\, \Phi' \right]\right) + \overline{n}\, \Xi \right\} = \\ &= 2\mu\, \mathfrak{G}(z - c_t t) \cdot \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)}\, n\, \mathcal{R}e\left[\Phi' + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{1-2\sigma}{2} W \right] + \overline{n}\, \Xi \right\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Din ultima relație (3.12) se deduce că

$$\begin{aligned} D^2 W' &= \sum_1^\infty \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} \left[\frac{1}{8(1-\sigma)}\right]^n \frac{1}{n!} D\left\{ \mathfrak{z}^n \left(\int d\overline{\mathfrak{z}}\right)^{n-1} \left[\overline{f} - \frac{2\overline{\Phi}'}{(\omega/c_t)^2} \right] + n \overline{\mathfrak{z}}^{n-1} \left(\int d\mathfrak{z}\right)^n \left[f - \frac{2\Phi'}{(\omega/c_t)^2} \right] \right\} = \\ &= 2 \sum_2^\infty \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} \left[\frac{1}{8(1-\sigma)}\right]^n \frac{1}{n!} \left\{ \mathfrak{z}^n \left(\int d\overline{\mathfrak{z}}\right)^{n-2} \cdot \left[\overline{f} - \frac{2\Phi'}{(\omega/c_t)^2} \right] + n(n-1) \overline{\mathfrak{z}}^{n-2} \left(\int d\mathfrak{z}\right)^n \left[f - \frac{2\Phi'}{(\omega/c_t)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Asupra tensiunilor complexe vom reveni aducînd simplificările ce vor rezulta ca urmare a studierii condițiilor la limită. Vom mai observa că funcțiile Ψ_0, Ψ_1 pot fi luate nule, astfel că funcția Ψ conține termeni în $(\omega/c_t)^4, \cdots, (\omega/c_t)^{2n}, \cdots$ la fel ca și funcțiile $D^2 W'$ și Ξ. La fel se observă că $W_0' = 0$, în cazul static neexistînd decît funcția $W_0 = \varphi_0$. Tensiunea T_z se mai scrie

$$T_z = 2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}(z \mp c_t t)}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(W' + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{R}e\, \bar{n}\, \mathfrak{U}' \right]. \tag{3.22}$$

4. CONDIŢIILE LA LIMITĂ ALE BAREI

Pe conturul lateral al barei, componentele tensiunii sînt nule :

$$T_x = T_y = T_z = 0. \tag{4.1}$$

În baza relației (3.20) și a ultimei relații în (3.6), condițiile la limită se vor scrie atunci astfel

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}e\, \Phi_0' = 0\,; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = -\mathcal{R}e\, \bar{n}(\Phi_0 + \bar{\Psi}_0) \\ &\mathcal{R}e\, \Phi_1' = -\frac{1-2\sigma}{2} W_0\,; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\mathcal{R}e\, \bar{n}\mathfrak{U}_1' - 2\frac{\partial}{\partial n} W_1' \\ &\frac{1}{2(1-\sigma)}\, n\, \mathcal{R}e \left[\Phi_n' + \frac{1-2\sigma}{2} W_{n-1} \right] + n\, \Xi_n = 0\,; \quad n = 2, 3, \cdots \\ &\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = -\mathcal{R}e\, \bar{n}\, \mathfrak{U}_n' - 2\frac{\partial W_n'}{\partial n}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Soluția corespunzătoare primelor două condiții este soluția cunoscută în cazul static pentru $\Phi_0 = i\mathfrak{z}, \varphi_0$ fiind dată prin condiția de tip Neumann sau Dirichlet :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = -\mathcal{R}e\, \bar{n}\, i\mathfrak{z}\,; \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial s} = \frac{1}{2} \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}\,; \quad \frac{\partial}{\partial s} = n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x}\,; \quad \Psi_0 = 0\,. \tag{4.3}$$

Observînd că $W_0 = \varphi_0$ se deduce din (4.2) că

$$\Phi_1 = -\frac{1-2\sigma}{2} g_0(\mathfrak{z}); \quad g_0(\mathfrak{z}) = \int d\mathfrak{z}\, f_0(\mathfrak{z}). \tag{4.4}$$

Din (2.15) rezultă că

$$W_1' = \mathcal{R}e \frac{1}{8(1-\sigma)} \bar{\mathfrak{z}} \{g_0(\mathfrak{z}) - 2\Phi_1\} = \frac{1}{4} \mathcal{R}e\, \bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}). \tag{4.5}$$

Condiția la limită pentru determinarea funcției φ_1 se scrie întrucît $\mathfrak{U}'_1 = \Phi_1 ;\ \Psi_1 = 0$ sub forma

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \mathcal{R}e \left\{ \frac{1-2\sigma}{2} \bar{n} g_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \bar{\mathfrak{z}} g_0 \right\} . \tag{4.6}$$

Deoarece $\partial(\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}))/\partial n = \bar{n} g_0(\mathfrak{z}) + \bar{\mathfrak{z}} n f_0(\mathfrak{z})$, condiția (4.6) se mai scrie

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{1}{2} \mathcal{R}e \{ 2\sigma \bar{n}\, g_0(\mathfrak{z}) + n \bar{\mathfrak{z}} f_0(\mathfrak{z}) \} . \tag{4.7}$$

Vom transforma condiția la limită (4.7) punînd

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1 ;\ \frac{\partial \varphi''_1}{\partial n} = -\frac{1+2\sigma}{4} \mathcal{R}e \frac{\partial}{\partial n} \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) , \quad \text{(la limită)} \tag{4.8}$$

astfel că (4.7) se mai scrie

$$\mathcal{R}e \left[-\bar{n} \cdot \frac{1+2\sigma}{4} \cdot g_0(\mathfrak{z}) - \bar{\mathfrak{z}}\, n \cdot \frac{1+2\sigma}{4} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} (2\sigma \bar{n}\, g_0(\mathfrak{z}) + n \bar{\mathfrak{z}} f_0(\mathfrak{z})) \right] = 0 , \tag{4.9}$$

sau

$$\mathcal{R}e \left\{ -\frac{1-2\sigma}{4} \bar{n}\, g_0(\mathfrak{z}) + \frac{1-2\sigma}{4} n \bar{\mathfrak{z}} f_0(\mathfrak{z}) + \frac{\partial \psi'_1}{\partial s} \right\} = 0 ;\ \frac{\partial}{\partial s} = n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x} . \tag{4.10}$$

Ultima condiție se poate pune sub forma

$$\mathcal{R}e \frac{\partial}{\partial s} \left[\Psi'_1 - \frac{1-2\sigma}{4} i \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) \right] = 0 . \tag{4.11}$$

În cele din urmă s-au obținut condițiile la limită

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\varphi''_1 + \frac{1+2\sigma}{4} \mathcal{R}e\, \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) \right] = 0, \text{ sau } \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{R}e \left[f''_1(\mathfrak{z}) + \frac{1+2\sigma}{4} \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) \right] = 0 ,$$
$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\psi'_1 - \frac{1-2\sigma}{4} \mathcal{R}e\, i \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) \right] = 0, \text{ sau } \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}e\, i \left[f'_1(\mathfrak{z}) + \frac{1-2\sigma}{4} \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z}) \right] = 0. \tag{4.12}$$

Se pot studia în continuare și celelalte condiții. Pentru cazurile practice este suficient de a ne limita la corecția introdusă prin considerarea funcției φ_1. Problema integrării simultane a tuturor soluțiilor rămîne o problemă deschisă.

5. EXPRESIA SOLICITĂRILOR ÎN SECŢIA TRANSVERSALĂ A BAREI

Vom considera în primul rînd lunecările rezultante într-o secțiune transversală date de integrala

$$\mathfrak{T} = \iint dx \cdot dy \cdot Q = \iint dx\, dy\, (\tau_{zx} - i\, \tau_{zy})\,. \tag{5.1}$$

Pentru a calcula expresia acestei integrale vom observa că

$$\int ds \cdot x T_z = \int ds \cdot x [n_x\, \tau_{zx} + n_y \tau_{zy}] = \iint dx\, dy \cdot x \cdot \left[\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}\right] + \iint dx dy\, \tau_{zx}. \tag{5.2}$$

La limită însă $T_z = 0$. Ținînd seama de ultima ecuație din (1.1) se deduce

$$\iint dx\, dy\, \tau_{zx} = \iint dx\, dy. x. \left[\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \cdot \tag{5.3}$$

Integrala (5.1) se va scrie

$$\mathfrak{T} = \iint dx\, dy \cdot \bar{\mathfrak{z}} \left[\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] \cdot \tag{5.4}$$

Este clar că $\mathfrak{T}_0 = 0$ corespunzînd termenului static. Din (3.3) se deduce

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\, 2\mu \frac{\partial \mathfrak{S}(z \mp c_t t)}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W + \sigma \Delta\, W \right\}, \tag{5.5}$$

iar din (1.3)

$$\varphi\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\, \mu \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}(z \mp c_t t)}{\partial z}\, W\,. \tag{5.6}$$

Din (2.8) rezultă

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\, 2\mu \frac{\partial \mathfrak{S}(z \mp c_t t)}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)}\right) W - \frac{\sigma}{1-\sigma}\, \mathcal{R}e\, \Phi' \right\} \cdot \tag{5.7}$$

În cele din urmă (5.4) se va scrie

$$\mathfrak{T} = -\iint dx\, dy \cdot \frac{\mu}{1-\sigma} \cdot \bar{\mathfrak{z}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}(z \mp c_t t)}{\partial z} \cdot \left\{ \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \cdot W - 2\sigma\, \mathcal{R}e\, \Phi' \right\} \cdot \tag{5.8}$$

Se deduce

$$\mathfrak{T} = -\, \frac{\mu}{1-\sigma} \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}(z \mp c_t t)}{\partial z} \iint dx\, dy\, \bar{\mathfrak{z}} \left[\varphi_0 + W_0' + 2\sigma \cdot \frac{1-2\sigma}{2}\, \mathcal{R}e\, f_0(\mathfrak{z})\right] \cdot \tag{5.9}$$

Cu ajutorul formulei (4.5) urmează că ($W_0' = 0$)

$$\mathcal{T}_1 = -\mu(1+2\sigma)\frac{\partial\mathfrak{T}(z \mp c_t t)}{\partial z}\cdot\iint dx\, dy \cdot \bar{\mathfrak{z}}\, \mathcal{R}e\, f_0(\mathfrak{z}), \tag{5.10}$$

deoarece $1 + \sigma(1-2\sigma) = (1-\sigma)(1+2\sigma)$. În cele de mai sus s-a notat

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathcal{T}_1 + \cdots;\ \mathcal{T}_0 = 0. \tag{5.11}$$

Va fi necesar a transforma această ecuație într-o integrală de contur. Pentru aceasta vom observa că

$$\iint dx\, dy\, \bar{\mathfrak{z}}\, \mathcal{R}e\, f_0 = \frac{1}{2}\iint dx\, dy\, \bar{\mathfrak{z}}\,(f_0 + \bar{f}_0) = \frac{1}{2}\iint dx\, dy \cdot D\left[\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{4} f_0 + \mathcal{R}e \int d\mathfrak{z}\cdot \mathfrak{z} f_0\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\int_\gamma ds \cdot n \cdot \left[\bar{\mathfrak{z}}^2 f_0 + 4\,\mathcal{R}e \int d\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{z}\, f_0\right] = -\frac{i}{8}\int_\gamma d\mathfrak{z}\,(\bar{\mathfrak{z}}^2 f_0 + 4\,\mathcal{R}e\,(\mathfrak{z} g_0 - h_0));$$

$$h_0 = \int g_0 \cdot d\mathfrak{z}. \tag{5.12}$$

Cu acestea rezultă

$$\mathcal{T} = \frac{1+2\sigma}{8}\,\mu\cdot\frac{\partial\mathfrak{T}(z \mp c_t t)}{\partial z}\; i\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \int_\gamma d\mathfrak{z}\,[\bar{\mathfrak{z}}^2 f_0(\mathfrak{z}) + 4\,\mathcal{R}e\,(\mathfrak{z} g_0(\mathfrak{z}) - h_0(\mathfrak{z}))]. \tag{5.13}$$

Vom nota

$$\mathcal{C} = \frac{1+2\sigma}{8}\,\mu i\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \int_\gamma d\mathfrak{z}\,[\bar{\mathfrak{z}}^2 f_0(\mathfrak{z}) + 4\,\mathcal{R}e\,(\mathfrak{z}\, g_0(\mathfrak{z}) - h_0(\mathfrak{z}))], \tag{5.14}$$

astfel că efortul de lunecare total devine

$$\mathcal{T} = \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}\cdot\mathcal{C} = \mu\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}\,\mathcal{C}_1 \tag{5.15}$$

unde

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1+2\sigma}{8}\, i\int_\gamma d\mathfrak{z}\,[\bar{\mathfrak{z}}^2\, f_0(\mathfrak{z}) + 4\,\mathcal{R}e\,(\mathfrak{z}\, g_0(\mathfrak{z}) - h_0(\mathfrak{z}))]. \tag{5.16}$$

Această formulă are avantajul de a exprima eforturi doar în raport cu funcții cunoscute din cazul static.

Să calculăm acum rezultanta momentelor de torsiune create în secțiile transversale ale barei de către tensiunile τ_{yz} și τ_{zx}. Expresia momentului de torsiune este dată de către integrala

$$\mathfrak{M}_t = \iint dx\, dy \cdot (x\,\tau_{yz} - y\,\tau_{zx}) = -\iint dx\, dy\; \mathcal{R}e\; i\mathfrak{z}\,(\tau_{xz} + i\tau_{yz}) \tag{5.17}$$

unde, în baza relațiilor

$$\tau_{xz} + i\tau_{yz} = 2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left[D\left(W' + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\Phi}{2} + \frac{\overline{\Psi}}{2}\right] \tag{5.18}$$

şi deoarece

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \varphi_1 + \cdots ; \Phi = i\mathfrak{z} - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{1 - 2\sigma}{2} g_0(\mathfrak{z}) + \cdots \tag{5.19}$$

$$\Psi = \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^4 \Psi_2 + \cdots ; \; W_1' = \frac{1}{8(1 - \sigma)} \mathcal{R}e\, \bar{\mathfrak{z}} \int d\mathfrak{z}\, (f + (1 - 2\sigma) f) = \frac{1}{4} \mathcal{R}e\, \bar{\mathfrak{z}}\, g(\mathfrak{z}) \tag{5.20}$$

momentul de torsiune se va putea exprima astfel

$$\mathfrak{M}_t = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \cdot \mathfrak{D} \; ; \; \mathfrak{D} = -2\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}} \left[D\left(W' + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\Phi}{2} + \frac{\overline{\Psi}}{2}\right] . \quad \begin{matrix}(5.21)\\(5.22)\end{matrix}$$

Vom nota

$$I_0 = -2\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}} \frac{\Phi_0}{2} \; ; \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 I_1 = -2\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{\Phi_1}{2}$$

$$D_0 = -2\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, D \frac{\varphi_0}{2} \; ; \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 D_1 = -2\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, D \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \varphi_1 \tag{5.23}$$

$$K_1 = -2\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, D\, W_1' .$$

Mărimile I_0, D_0 sînt cunoscute din cazul static. Pentru claritate vom expune calculul tuturor constantelor din (5.23). Avem astfel că

$$\begin{aligned} I_0 &= -\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}} \cdot i\mathfrak{z} = \mu \iint dx\, dy\, (x^2 + y^2) = \\ &= \mu \iint dx\, dy \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial x}(x y^2)\right] = -\mu \int_\gamma xy\, (x dx - y dy) = \\ &= -\frac{1}{8i}\, \mu \int_\gamma (\mathfrak{z}^2 - \bar{\mathfrak{z}}^2)\, (\mathfrak{z} d\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}} d\mathfrak{z}) = \frac{\mu}{4i} \int \bar{\mathfrak{z}}^2 \mathfrak{z}\, dz , \end{aligned} \tag{5.24}$$

deoarece

$$\int_\gamma \mathfrak{z}^3\, d\mathfrak{z} = \int_\gamma \bar{\mathfrak{z}}^3 d\mathfrak{z} = 0 \; ; \int \mathfrak{z}^2 \bar{\mathfrak{z}}\, d\bar{\mathfrak{z}} + \int \bar{\mathfrak{z}}^2 \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = 0 ,$$

şi

$$\begin{aligned} D_0 &= -\mu \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\, \bar{\mathfrak{z}} D \varphi_0 = -\mu \iint dx\, dy \left[-x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}\right] \varphi_0 = \\ &= -\mu \iint \varphi_0\, d\, \frac{x^2 + y^2}{2} = -\frac{\mu}{4} \int_\gamma (f_0(\mathfrak{z}) + \overline{f_0(\mathfrak{z})})\, d(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) . \end{aligned} \tag{5.25}$$

În mod analog se deduce că

$$D_1 = -\frac{\mu}{4}\int_{\gamma} (f_1(\mathfrak{z}) + \overline{f_1(\mathfrak{z})})\, d(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) \tag{5.26}$$

iar

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mu\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\frac{1-2\sigma}{2}\, g_0(\mathfrak{z}) = \frac{1-2\sigma}{2}\,\mu\iint dx\, dy [y\, \mathcal{R}e - x\, \mathcal{I}m]\, g_0 = \\
&= \frac{1-2\sigma}{2}\,\mu\iint dx\, dy\left[\frac{\partial}{\partial x}\,(y\, \mathcal{R}e\, h_0) + \frac{\partial}{\partial y}\,(x\, \mathcal{R}e\, h_0)\right] = \\
&= \frac{1-2\sigma}{2}\,\mu\, \mathcal{R}e\int_{\gamma} [dy\cdot y - dx\cdot x]\, h_0 = \\
&= -\frac{1-2\sigma}{2}\,\mu\, \mathcal{R}e\int_{\gamma} (\mathcal{R}e\, \mathfrak{z}\cdot d\mathfrak{z})\; h_0(\mathfrak{z}) = -\frac{1-2\sigma}{4}\,\mu\, \mathcal{R}e\int_{\gamma} \bar{\mathfrak{z}}\, d\bar{\mathfrak{z}}\, h_0(\mathfrak{z}).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

În sfîrşit, rămîne de calculat expresia

$$\begin{aligned}
K_1 &= -2\mu\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\,\frac{D}{4}\, \mathcal{R}e\, \bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}) = \\
&= -\frac{\mu}{2}\iint dx\cdot dy\cdot \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, D(x\, \mathcal{R}e\, g_0 + y\, \mathcal{I}m\, g_0) = \\
&= -\frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, [g_0(\mathfrak{z}) + x\, D\, \mathcal{R}e\, g_0 + y D\, \mathcal{I}m\, g_0] = \\
&= -\frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}) - \\
&- \frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\left[x\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{R}e\, g_0 + y\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{I}m\; g_0\right] = \\
&= -\frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}) - \\
&- \frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\left[\frac{\partial}{\partial x}\,(xy\, \mathcal{R}e\, g_0 + y^2\, \mathcal{I}m) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2\, \mathcal{R}e\, g_0 + xy\, \mathcal{I}m\, g_0) - \right. \\
&\left. - y\, \mathcal{R}e\, g_0 + x\, \mathcal{I}m\, g_0\right] = -\frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}) - \\
&- \frac{1}{2}\,\mu\int dy\,(xy\, \mathcal{R}e\, g_0 + y^2\, \mathcal{I}m\, g_0) + dx(x^2\, \mathcal{R}e\, g_0 + xy\, \mathcal{I}m\, g_0) + \\
&+ \frac{\mu}{2}\iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, i\bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}) = -\frac{\mu}{2}\int_{\gamma} (x dx + y\, dy)\,(x\, \mathcal{R}e\, g_0 + y\, \mathcal{I}m\, g_0) = \\
&= -\frac{\mu}{2}\int_{\gamma} (\mathcal{R}e\, \bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z}))\, d\,\frac{x^2+y^2}{2} = -\frac{\mu}{4}\int_{\gamma} (\mathcal{R}e\, (\bar{\mathfrak{z}})\, g_0(\mathfrak{z}))\, d(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}})\,.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

În baza acestor rezultate, constanta de torsiune $\mathfrak{D}$ are expresia

$$\mathfrak{D} = \left[I_0 + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 I_1 + D_0 + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 (D_1 + k_1)\right]. \tag{5.29}$$

O altă solicitare care apare în secția transversală a barei este rezultanta forțelor axiale

$$\mathcal{N} = \mu \iint dx\, dy\, \sigma_z\,. \tag{5.30}$$

Se calculează

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \mu \iint dx\, dy \int^{\star} dz \left[\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{zy}\right)\right] = \\ &= \mu\mathfrak{T} \iint dx\, dy \left[-\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W\right] - \int^{\star} dz \int_{\gamma} (dy \tau_{zx} - dx\, \tau_{zv}) = \\ &= -\mu \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathfrak{T} \iint dx\, dy\ W - \mu\mathfrak{T} \int^{\star} dz \cdot \int_{\gamma} ds \cdot (n_x\, \tau_{zx} + n_y \tau_{zy})\,. \end{aligned} \tag{5.31}$$

La limită avem însă condiția $T_z = n_x\, \tau_{xz} + n_y\, \tau_{yz} = 0$ și deci

$$\mathcal{N} = -\mu \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathfrak{T}(z - c_t t) \cdot \iint dx\, dy\, W\,, \tag{5.32}$$

formulă care arată că forța axială este proporțională cu volumul deplasat în sens axial. Mărginindu-ne la termeni în $(\omega/c_t)^2$

$$\mathcal{N} = -\mu \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathfrak{T}(z - c_t t) \,.\, \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, f_0(\mathfrak{z})\,. \tag{5.33}$$

Întrucît

$$\frac{1}{2}\left(\int dy\, \mathcal{R}e\, g_0 - dx\, \mathcal{I}m\, g_0\right) = \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, f_0(\mathfrak{z})\,, \tag{5.34}$$

formula (5.32) se mai scrie astfel

$$\mathcal{N} = -\mu \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{1}{2} \mathfrak{T}(z - c_t t)\, \mathcal{R}e\, i \int d\mathfrak{z} . g_0(\mathfrak{z}) = -\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{\mathfrak{T}}{2} \cdot \mathfrak{F}\,. \tag{5.35}$$

Momentele încovoietoare care apar în secțiile transversale ale barei au expresia complexă

$$\mathcal{M} = M_x + i\, M_y = \iint dx\, dy\, \mathfrak{z}\, \sigma_z\,. \tag{5.36}$$

Analog ca în cazul forței axiale se efectuează următorul calcul:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\iint dx\, dy\, \mathfrak{z} \int^{\star} dz \left[\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{zy} \right) \right] = \\ &= \left(\frac{\omega}{c_t} \right)^2 \mu \mathcal{T} \iint dx\, dy\, \mathfrak{z}\, W + \int_{\gamma}\!\int^{\star} dz\, (dy\, \tau_{zx} - dx\, \tau_{zy})\, \mathfrak{z} - \\ &\quad - \iint dx\, dy \int^{\star} dz (\tau_{zx} + i \tau_{zy}) .\end{aligned} \tag{5.37}$$

Deoarece pe contur $dy\tau_{zx} - dx\tau_{zy} = ds\,(n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy}) = 0$, se deduce că

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \left(\frac{\omega}{c_t} \right)^2 \mu \mathcal{T} \iint dx\, dy\, \mathfrak{z}\, W - \iint dx\, dy \int^{\star} dz\, \overline{Q} = \\ &= \mu \left(\frac{\omega}{c_t} \right)^2 \mathcal{T} \iint dx\, dy\, \mathfrak{z}\, W - \int^{\star} dz\, \overline{\mathfrak{F}} .\end{aligned} \tag{5.38}$$

Mărginindu-ne la termeni în $(\omega/c_t)^2$ rezultă expresia

$$\mathcal{M} = \mu \left(\frac{\omega}{c_t} \right)^2 \mathcal{T} \iint dx\, dy\, \mathfrak{z}\, \varphi_0 - \mathcal{T} (z - c_t t)\, \overline{\mathcal{C}}. \tag{5.39}$$

Pentru a transforma prima integrală într-o integrală de linie vom recurge la următoarele relații

$$\begin{aligned}\iint dx\, dy\, \mathfrak{z}\, \mathcal{R}e\, f_0 &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathfrak{z}\, \mathcal{R}e\, d\bar{\mathfrak{z}}\, i\, g_0 - \frac{1}{2} \iint dx\, dy\, g_0(\mathfrak{z}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathfrak{z}\, \mathcal{R}e\, d\bar{\mathfrak{z}}\, i\, g_0 - \frac{i}{4} \int d\mathfrak{z}\, h_0\end{aligned} \tag{5.40}$$

În cele din urmă se ajunge la următoarea expresie a momentului încovoietor:

$$\mathcal{M} = \left(\frac{\omega}{c_t} \right)^2 \mu \mathcal{T}\, \mathcal{E}_1 , \tag{5.41}$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathfrak{z}\, \mathcal{R}e\, d\bar{\mathfrak{z}}\, i\, g_0(\mathfrak{z}) - \overline{\mathcal{C}}_1 - \frac{i}{4} \int d\bar{\mathfrak{z}}\, h_0 . \tag{5.42}$$

6. UTILIZAREA TRANSFORMĂRILOR CONFORME PE CERCUL UNITATE

Vom considera transformarea conformă a domeniului S al secției transversale a barei pe un cerc de rază unitate, S fiind bineînțeles presupus simplu conex, reprezentare dată de transformarea

$$\mathfrak{z} = x + iy = \omega(\zeta)\, ; \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta}, \tag{6.1}$$

ζ fiind variabila complexă în domeniul transformat dat de condiția $|\zeta|<1$. Conturul cercului în planul transformat îl vom nota cu γ. Este clar că

$$f(\mathfrak{z}) = \varphi + i\psi = f(\omega(\zeta)) = \sum\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^{2n} f_n(\omega(\zeta)). \tag{6.2}$$

Condiția la limită pentru $f_0(\zeta)$ este

$$\mathcal{R}e\,\frac{1}{i} f_0(\zeta) = \psi_0 = \frac{1}{2}\,\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)} \qquad \text{pe } \gamma \tag{6.3}$$

unde $\sigma = e^{i\vartheta}$; $\zeta_0 = \rho_0 e^{i\vartheta}$; $\rho_0 = 1$ pe γ.

În baza formulei lui Cauchy vom avea

$$\frac{1}{i} f_0(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)}}{2(\sigma-\xi)}\,d\sigma + \text{const.} \tag{6.4}$$

Pentru demonstrația acestei formule trimitem la lucrarea citată a lui N. I. Mushelişvili, p. 284, § 77, formula (5).

Vom presupune că $\omega(\zeta)$ este o funcție rațională astfel că se poate arăta că soluția (5.4) se poate exprima prin funcții elementare. De asemenea, în ipoteza că funcția $\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)} = \omega(\sigma)\cdot\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ este o funcție analitică uniformă de σ în interiorul lui γ (sau în exterior), continuă pe γ cu un număr finit de poluri, integrala (5.4) poate fi de asemenea calculată conform unor teoreme cunoscute. Din (4.12) se deduce de asemenea că

$$\frac{1}{i} f_1'(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}\,\mathcal{R}e\left\{\frac{1-2\sigma}{4}\, i\,\overline{\omega(\sigma)}\, g_0(\sigma)\right\} + \text{const.} \tag{6.5}$$

unde

$$g_0(\mathfrak{z}) = \int d\mathfrak{z}\, f_0'(\mathfrak{z});\quad g_0(\zeta) = \int d\zeta\cdot\omega'(\zeta)\, f_0(\zeta). \tag{6.6}$$

Utilizînd formula lui Boggio avem de asemenea

$$f_1''(\zeta) = \frac{-1}{\pi i}\cdot\frac{1+2\sigma}{4}\cdot\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma}\cdot\log(\sigma-\zeta)\cdot\mathcal{R}e\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\,\overline{(\omega(\zeta)}\cdot g_0(\zeta))\right]_{\rho=1,\,\zeta=\sigma} + \text{const.},$$

deoarece pe γ, $\partial/\partial n = \partial/\partial\rho$. Integrarea este posibilă dacă $\partial\overline{(\omega(\zeta)}.g_0(\zeta))/\partial\rho = \mathcal{F}(\sigma)$ nu conține o constantă. Într-adevăr, avem atunci că $\int_\gamma d\vartheta\,\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{G}(\vartheta)\Big|_0^{2\pi} = 0$ unde $\mathcal{G}(\sigma) = \int \mathcal{F}(\vartheta)\cdot d(\vartheta) = \int \mathcal{F}(\vartheta)\cdot\frac{d\sigma}{i\sigma}$. Acest fapt se mai deduce din aceea că $\int_\gamma d\vartheta\,\mathcal{F}(\sigma) = 0$.

Se mai poate utiliza formula

$$\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi} f_1''(\xi) = -\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1+2\sigma}{4}\cdot\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma-\xi}\cdot\mathcal{R}e\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\overline{(\omega(\xi)}.\,g_0(\xi)). \tag{6.7}$$

Prin transformare se obțin următoarele expresii ale funcțiilor

$$\Phi_0 = i\omega(\zeta)\,;\ \Phi_1 = -\frac{1-2\sigma}{2}\,g_0(\zeta)\,;\ W_1' = \mathcal{R}e\,\frac{1}{4}\,\overline{\omega(\zeta)}\cdot g_0(\zeta).$$

Să trecem acum la exprimarea solicitărilor în planul ζ. Din (5.16) se deduce că

$$\mathfrak{T}_1 = (1+2\sigma)\mu\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial z}\cdot\frac{i}{8}\int_\gamma d\omega(\sigma)[\overline{\omega^2(\sigma)}\,f_0(\sigma) + 4\,\mathcal{R}e\,(\omega(\sigma)\,g_0(\sigma) - h_0(\sigma)). \qquad (6.8)$$

Din (5.24) rezultă

$$I_0 = \frac{\mu}{4i}\int_\gamma \overline{\omega^2(\sigma)}\cdot\omega(\sigma)\cdot d\omega(\sigma), \qquad (6.9)$$

iar din (5.25)

$$D_0 = -\frac{\mu}{4}\int_\gamma \{f_0(\sigma) + \overline{f_0(\sigma)}\}\cdot d\{\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)}\}. \qquad (6.10)$$

Din (5.26), (5.27), (5.28) se obține succesiv

$$D_1 = -\frac{\mu}{4}\int_\gamma [f_1(\sigma) + \overline{f_1(\sigma)}]\cdot d\{\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)}\}, \qquad (6.11)$$

$$I_1 = -\frac{1-2\sigma}{4}\,\mu\,\mathcal{R}e\int_\gamma d\,\overline{\omega(\sigma)}\cdot\overline{\omega(\sigma)}\,h_0(\sigma), \qquad (6.12)$$

$$K_1 = -\frac{\mu}{4}\int_\gamma (\mathcal{R}e\,\overline{\omega(\sigma)}\,g_0(\sigma))\,d\{\omega(\sigma)\cdot\overline{\omega(\sigma)}\}. \qquad (6.13)$$

Transformînd (5.35) se deduce expresia forței axiale

$$\mathcal{N} = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\mathcal{T}(z\mp c_t t)\,\mathcal{R}e\,i\int \overline{d\,\omega(\sigma)}\cdot g_0(\sigma). \qquad (6.14)$$

Pentru momentul încovoietor (5.41) furnizează următorul rezultat :

$$\mathcal{M} = \mu\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\mathcal{T}\mathcal{E}_1\,;\ \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\int_\gamma \omega(\zeta)\,\mathcal{R}e\,\overline{d\omega(\zeta)}\,i g_0(\zeta) - \overline{\mathcal{C}}_1 - \frac{i}{4}\int \overline{d\omega(\zeta)}\cdot h_0(\zeta),$$

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1+2\sigma}{8}\,i\,\mu\int_\gamma d\omega(\zeta)\,[\overline{\omega(\sigma)}^2 f_0(\sigma) + 4(\mathcal{R}e\,\omega(\sigma)\,g_0(\sigma) - h_0(\sigma))]. \qquad (6.15)$$

Vom calcula și tensiunea tangențială complexă, observînd că (3.13) se mai scrie

$$Q = \mu\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial z}\left[f'(\zeta) + \overline{i\mathfrak{z} - \frac{1-2\sigma}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 g_0(\mathfrak{z})} + 2\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\frac{1}{8(1-\sigma)}\left[\bar{\mathfrak{z}}\,f_0(\mathfrak{z}) + (1-2\sigma)\,f_0(\mathfrak{z})) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int d\bar{\mathfrak{z}}(\bar{f}_0 + (1-2\sigma)\bar{f}_0)\right]\right] = \mu\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial z}\left[f'(\mathfrak{z}) - i\bar{\mathfrak{z}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\{\bar{\mathfrak{z}}f_0(\mathfrak{z}) + 2\sigma\overline{g_0(\mathfrak{z})}\}\right]. \qquad (6.16)$$

Conform formulei (4), § 49 din lucrarea citată a lui N. I. Mushelişvili avem că proiecţiile $Q\,\rho\vartheta = Q_{\rho-i}\,Q\vartheta$ după axele ρ, ϑ ale coordonatelor curbilinii $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ au valoarea complexă

$$Q_\rho\,\vartheta = Q_{\rho-i}\,Q\vartheta = \frac{\zeta}{\rho}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,Q = \frac{\zeta}{\rho}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,\mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{1}{\omega'(\zeta)} - i\overline{\omega(\zeta)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\{\overline{\omega(\zeta)}\,f_0(\xi) + 2\sigma\overline{g_0(\xi)}\}\right]. \tag{6.17}$$

Expresia (3.14) se mai scrie

$$\sigma_x + \sigma_y = \mu\varpi\left[2\,\mathcal{R}e\left(-\frac{1-2\sigma}{2}\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 f_0\;(\;)\right) + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e\,f_0\right] =$$
$$= \mu\varpi\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e\left[f_0(\mathfrak{z}) - \frac{1-2\sigma}{2}\,2f_0(\mathfrak{z})\right] = 2\sigma\mu\varpi\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e f_0(\mathfrak{z}). \tag{6.18}$$

Prin transformare (6.18) devine

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\sigma\mu\varpi\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e f_0(\zeta). \tag{6.19}$$

Din (3.20), pentru termenii în $(\omega/(ct)^{2n}$, $n \leqslant 1$ avem că $T = 0$ iar din (3.22)

$$T_z = 2\mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e\,\frac{1}{4}\,\bar{\mathfrak{z}}g_0(\mathfrak{z}) + \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e f(\mathfrak{z})\right] + \frac{1}{2}\,\mathcal{R}e\,\bar{n}\left(i\mathfrak{z} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\frac{1-2\sigma}{2}\,g_0(\mathfrak{z})\right)\right] = \mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\left\{\mathcal{R}e\left(\frac{\partial}{\partial n}f_0(\mathfrak{z}) + \bar{n}i\mathfrak{z}\right) + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e\left[\frac{\partial}{\partial n}f_1(\mathfrak{z}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\,\bar{n}g_0(\mathfrak{z}) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{z}\frac{\partial g_0}{\partial n} - \frac{1-2\sigma}{2}\,\bar{n}g_0(\mathfrak{z})\right]\right\} = \mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\psi_0 - \frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{2}\right) + \right. \tag{6.20}$$
$$\left. + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\varphi_1'' + \frac{1+2\sigma}{4}\,\mathcal{R}e\,(\bar{\mathfrak{z}}g_0\,\mathfrak{z})\right)\cdot + \frac{\partial}{\partial s}\left(\psi_1' - \frac{1-2\sigma}{4}\,\mathcal{R}e\,i\,\bar{\mathfrak{z}}g_0(\mathfrak{z})\right)\right]\right\}.$$

Este clar că pe contur $T_z = 0$. Prin transformare se mai obţine :

$$\int T_z\,ds = \mu\frac{\partial\varpi}{\partial z}\left\{\mathcal{R}e\,i\overline{f_0(\zeta)} - \omega(\xi)\cdot\overline{\omega(\zeta)}/2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathcal{R}e\left[\int\limits_{\mathfrak{z}=\omega(\zeta)} ds\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\varphi_1'' + \frac{1+2\sigma}{4}\,\bar{\mathfrak{z}}g_0(\mathfrak{z})\right) - if_1'(\zeta) - \frac{1-2\sigma}{4}\,i\overline{\omega(\zeta)}\,g_0(\zeta)\right]\right\}. \tag{6.21}$$

7. TORSIUNEA BARELOR MULTIPLU CONEXE ŞI ARMATE

Vom considera o bară multiplu conexă, compusă eventual din mai multe bare din material omogen şi izotrop, mărginite de conturul multiplu conex dat, format din curbele închise $L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_k, \ldots, L_{m+1}$ limitînd domeniile $S_0, \ldots, S_j, \ldots, S_m$. Este clar că se presupune aceeaşi formă a secţiei transversale în orice punct al axei, barele fiind cilindrice.

Vom admite aceleaşi ipoteze privind forma deplasărilor, conducînd la aceeaşi funcţie de torsiune $\varphi = \mathcal{R}e f(\mathfrak{z})$ şi la aceleaşi expresii ale tensiunilor. În privinţa condiţiilor la limită vor apare însă următoarele ipoteze suplimentare :

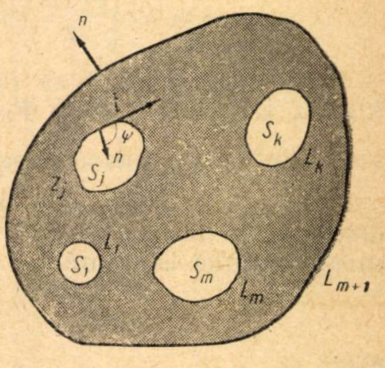


Fig. 2

1. Componentele tensiunilor pe contururile libere exterioare sau interioare sînt nule.
2. Eforturile în zona de contact sînt egale şi de sens contrar.
3. Deplasările variază în mod continuu de la o bară la alta.
4. Viteza de propagare a vibraţiilor transversale este aceeaşi în toate materialele.

Ultima condiţie, destul de restrictivă, este totuşi necesară pentru a păstra instrumentul de calcul elaborat în cazul secţiilor simplu conexe, care duce la studiul unei probleme bidimensionale prin eliminarea funcţiei

$$\mathcal{T}(z - c_t t)\,;\; c_t = \sqrt{\mu_1/\rho_1} = \ldots = \sqrt{\mu_m/\rho_m}.$$

Ipoteza 1 se scrie

$$T = T_z = 0 \quad \text{pe } L_{m+1} \tag{7.1}$$

iar ipoteza 2 se formulează astfel

$$T_j - T_k = (T_z)_j - (T_z)_k = 0 \quad \text{pe } L_j,\ L_k\,; \quad j, k \neq \mathrm{m} + 1 \tag{7.2}$$

sau

$$T_j - T_0 = (T_z)_j - (T_z)_k = 0 \text{ pe } L_1,\ \ldots,\ L_m. \tag{7.2$'$}$$

Aceste relaţii se pot grupa în următoarele :

$$\mu_k \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)_k - \mu_j \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)_j = (\mu_k - \mu_j)[y \cos(n, x) - x \cos(x, y)]$$

$$\begin{aligned}\mu_k \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_k - \mu_j \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_j &= \mu_k\ \mathcal{R}e \left[\frac{1 - 2\sigma}{2}\,\bar{n} g_0(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right]_k \\ &\quad - \mu_j\ \mathcal{R}e\ \frac{1 - 2\sigma}{2}\,\bar{n} g_0(z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\,\mathfrak{z} g_0(\mathfrak{z})\Big]_j\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\cos(n, x) = n_x\,; \quad \cos(n, y) = n_y\,; \quad n = \cos(n, x) + i \cos(n, y) = e^{i \operatorname{arc} \cos n_x}$$

condiţiile în $\mathfrak{T}$ fiind identic îndeplinite datorită faptului că este nul în tot domeniul. În cele de mai sus se va lua $\mu_j = 0$ pentru conturul liber. Relaţiile (7.3) se mai pot de altfel pune sub forma

$$\mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)_0 - \mu_j \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)_j = (\mu_0 - \mu_j)\,[y n_x - x n_y] \text{ pe } L_j,\ j = 1, \ldots, m+1,$$

$$\mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_0 - \mu_j \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_j = \mu_0 \cdot \mathcal{Re}\left[\frac{1-2\sigma}{2}\,\bar{n} g_0(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right]_0 \tag{7.4}$$

$$- \mu_j\, \mathcal{Re}\left[\frac{1-2\sigma}{2}\,\bar{n} g_0(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right]_j; \quad \mu_{m+1} = 0.$$

Condiţia 3 arată că funcţia $\varphi + W'$ este continuă în domeniul $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_m$. Este clar că mărimile I_0, I_1, D_0, $D_1\,K_1$ etc. se vor obţine prin sumarea integralelor pe tot domeniul $S = \sum\limits_1^{m+1} S_j$.

În sfîrşit, se ştie că problema lui Neumann are soluţie unică şi bine determinată (abstracţie de o constantă aditivă) atunci şi numai dacă, în cazul condiţiei la limită

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_j = f_j \tag{7.5}$$

avem că

$$\sum \int f_j\, ds = 0.$$

În cazul nostru avem $\int f_0\, ds = \oint d \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} = 0$ şi $\int_{Lj} f_1\, ds = 0$

deoarece

$$\int ds\, \bar{n} g_0(\mathfrak{z}) = \int (dg + i dx)\, g_0 = \int\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) g_0\, dx\, dy =$$

$$= i\int\left(dx\frac{\partial}{\partial x} - dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right) h_0 = -\, i \iint dx\, dy\, \Delta\, h_0 = 0 \tag{7.6}$$

iar

$$\int ds\, \frac{\partial}{\partial n}(\bar{\mathfrak{z}} g_0) = \int\left(dy\frac{\partial}{\partial x} - dx\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathfrak{z} g_0 = \int (dy + i dx)\, g_0 + \int \bar{\mathfrak{z}}\left(dy\frac{\partial}{\partial x} -\right.$$

$$\left. -\, dx\,\frac{\partial}{\partial y}\right) g_0 = 0 + \iint dx\, dy\, \Delta\, \bar{\mathfrak{z}} q_0 = 2\iint dx\, dy \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) g_0 = 0 \tag{7.7}$$

(conform formulelor de mai sus). Cu atît mai mult vom avea $\sum \int f_j\, ds = 0$. Pentru justificarea teoretică a acestor considerente trimitem la lucrarea citată a lui Mushelişvili, § 131 şi § 139, 140, p. 551–555. Contururile s-au presupus regulate avînd în orice punct o tangentă variind continuu şi o curbură mărginită.

Nu vom insista asupra demonstrației necesității și suficienții condiției de mai sus pentru existența soluției problemei de torsiune. Vom sublinia însă modalitatea reducerii problemei de torsiune la două ecuații integrale, modalitate care decurge imediat de altfel din formulările anterioare. Pentru unitatea expunerii am crezut necesar de a o prezenta aici cu toate că reducerea problemei de tip Neumann la o ecuație integrală (generalizarea problemei Robin-Poincaré în sensul lui Plemelj) e bine cunoscută.

Funcțiile φ_0 și ψ_1 fiind presupuse continue și de clasă 1, vom considera reprezentarea potențialului de simplu strat

$$\varphi_i(x, y) = \int_L \rho_i(s)\, ln \frac{1}{r}\, ds = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} \rho_i(s) \cdot ln \frac{1}{r}\, ds\,; \quad i = 0,1 \tag{7.8}$$

unde r reprezintă distanța punctului (x, y) de s pe L_j, iar $\rho_i(s)$ densitățile straturilor în cadrul celor două probleme la limită, funcții continui de s. Vom avea relațiile bine cunoscute

$$\left(\frac{d\varphi_i}{dn}\right)_j = -\pi \rho_i(t) + \int_L \rho_i(s) \cdot \frac{\cos\psi}{r}\, ds\,; \left(\frac{d\varphi_i}{dn}\right)_0 = \pi \rho_i(t) + \int_L \rho_i(s) \frac{\cos\psi}{r}\, ds$$
$$j = 1,2, \ldots, m\,; \quad i = 0,1 \tag{7.9}$$

unde derivatele normale sînt luate în t pe L_j, r fiind distanța între s, t iar ψ unghiul $\widehat{ts}$, iar n normala exterioară în raport cu s_0 în t. Condițiile la limită (7.4) devin

$$\pi(\mu_0 + \mu_j)\, \rho_i(t) + (\mu_0 - \mu_j) \int_L \rho_i(s) \cdot \frac{\cos\psi}{r}\, ds = f_{i,j}(t) \tag{7.10}$$

t fiind pe L_j, $j = 1, \ldots, m + 1$, iar

$$f_{0,j}(t) = y n_x - x n_y \tag{7.11}$$

$$f_{1,j}(t) = \mathcal{Re}\left\{ \mu_0\left[\frac{1-2\sigma}{2}\,\bar{n} g_0(\mathfrak{z}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right] - \mu_j\left[\frac{1-2\sigma}{2}\,\bar{n} g_0(\mathfrak{z}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right]\right\} \frac{1}{\mu_0 - \mu_j}\,.$$

În alți termeni, se obține ecuația lui Fredholm

$$\rho_i(t) + \int_L k_i(t, s)\, \rho_i(s)\, ds = f_i(t)\,; \quad i = 0,1 \tag{7.12}$$

unde s-a notat

$$k_j(t, s) = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \frac{\cos\psi}{r}\,; \quad f_i(t) = \frac{f_{i,j}(t)}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \text{ pentru } t \text{ pe } L_j. \tag{7.13}$$

Rezolvarea acestor ecuaţii se poate face prin procedeele cunoscute. În privinţa integralelor de contur care apar la calculul constantelor I, D_0 etc. se vor aplica formulele următoare

$$\int_{L_{m+1}} (S_0) = \sum_{L_1, \ldots L_m} \int (S_0) + \sum_{1}^{m} \int_{L_i} (S_i)$$

unde prin (S_i) se înţelege considerarea funcţiilor şi constantelor elastice existente în domeniul S_i. Formula de mai sus se deduce pentru fiecare din aceste constante prin aplicarea formulelor Green ca în cazurile anterioare pe domeniile multiplu conexe.

8. ANALOGUL FUNCŢIILOR DE TENSIUNE AL LUI L. PRANDTL

Din relaţia (3.9) se deduce că

$$\overline{Q} = - i\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} D\left(\psi + \frac{1}{2}\bar{\mathfrak{z}} i\, \Phi + 2iW'\right). \tag{8.1}$$

În baza relaţiilor (4.4) şi (4.5) avem că $\Phi = i\mathfrak{z} - \frac{1-2\sigma}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 g_0(\mathfrak{z})$ $W' = \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \frac{1}{4} \mathcal{Re}\, \bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})$, astfel că

$$\overline{Q} = - i\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} D\left\{\psi_0 - \frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{2} + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \left[\left(\psi_1' - \frac{1-2\sigma}{4}\mathcal{Re}\, i\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + i\left(\frac{1+2\sigma}{4}\mathcal{Re}\,\bar{\mathfrak{z}} g_0(z) + \varphi_1''\right)\right]\right\}. \tag{8.2}$$

Vom nota funcţia complexă de tensiune :

$$F = \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left(\psi_0 - \frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{2} + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \left[\left(\psi_1' - \frac{1-2\sigma}{4}\mathcal{Re}\, i\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + i\left(\varphi_1'' + \frac{1+2\sigma}{4}\mathcal{Re}\,\bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z})\right)\right.\right. \tag{8.3}$$

de componente

$$F = G + iH\,; \quad G = \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left(\psi_0 - \frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{2} + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \left(\psi_1' - \frac{1-2\sigma}{4}\mathcal{Re}\, i\bar{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right)\right)$$
$$H = \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \left(\varphi_1'' + \frac{1+2\sigma}{4}\mathcal{Re}\,\bar{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z})\right). \tag{8.4}$$

Este clar că în baza condiţiilor la limită (4.12) componentele funcţiei de tensiune iau pe contur valorile

$$G = 0\,; \quad \partial H/\partial n = 0. \tag{8.5}$$

Se deduc de asemenea ecuațiile

$$\Delta G = -2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left[1 + \frac{1-2\sigma}{4}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \mathcal{R}e\, i\overline{D} g_0(\mathfrak{z})\right] = -2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left[1 - \frac{(1-2\sigma)}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \psi_0\right]$$

$$\Delta H = 2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{1+2\sigma}{4} \cdot 2\mathcal{R}e\, \overline{D} g_0(\mathfrak{z}) = 2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \frac{(1+2\sigma)}{2}\, \varphi_0 \tag{8.6}$$

$$\Delta F = -2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left\{1 - i\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\left[\frac{(1+2\sigma)}{2}\,\varphi_0 - i\,\frac{(1-2\sigma)}{2}\,\psi_0\right]\right\}.$$

Condițiile la limită se mai scriu, observînd că

$$\mathcal{R}e\, \overline{n}\,\overline{Q} = n_\lambda \tau_{zx} + n_y\, \tau_{zy} = 0 \tag{8.7}$$

sub forma

$$\mathcal{R}e\, i\overline{n}\, DF = \frac{\partial G}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial n} = 0. \tag{8.8}$$

Conform rezultatelor precedente avem chiar

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial s} = 0 \tag{8.9}$$

deci $G = 0$.

Punînd $G = G_0 + (\omega/c_t)^2 \cdot G_1$, $H = H_0 + H_1(\omega/c_t)^2$, $H_0 = 0$, se obține funcția lui Prandtl

$$G_0 = \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left(\psi_0 - \frac{\mathfrak{z}\overline{\mathfrak{z}}}{2}\right) \tag{8.10}$$

nulă pe contur și satisfăcînd ecuația lui Poisson

$$\Delta G_0 = -2\mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\,. \tag{8.11}$$

De asemenea se mai obțin funcțiile de tensiune

$$G_1 = \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left[\psi_1' - \frac{1-2\sigma}{4}\,\mathcal{R}e\, i\,\overline{\mathfrak{z}} g_0(\mathfrak{z})\right]$$

$$H_1 = \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\left[\varphi_1'' + \frac{1+2\sigma}{4}\,\mathcal{R}e\, \overline{\mathfrak{z}}\, g_0(\mathfrak{z})\right] \tag{8.12}$$

luînd pe contur valorile

$$G_1 = 0,\ \frac{\partial}{\partial n} H_1 = 0. \tag{8.13}$$

și satisfăcînd ecuațiile

$$\Delta G_1 = 2\mu \frac{(1-2\sigma)}{2}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\,\psi_0(\mathfrak{z}) = -(1-2\sigma)\cdot\left[G_0 + \mu \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\frac{\mathfrak{z}\overline{\mathfrak{z}}}{2}\right]$$

$$\Delta H_1 = 2\mu\left(\frac{1+2\sigma}{2}\cdot\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\cdot\varphi_0(\mathfrak{z}) = \mu(1+2\sigma)\cdot\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\cdot\varphi_0(\mathfrak{z}) \tag{8.14}$$

Condiţia la limită (8.8) se mai scrie

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial s}=\frac{1-2\sigma}{4}\,\mathcal{R}e\,i\frac{\partial}{\partial s}\,\bar{\mathfrak{z}}g_0(\mathfrak{z})-\frac{1+2\sigma}{4}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\mathcal{R}e\,\bar{\mathfrak{z}}\,g_0(\mathfrak{z}) \tag{8.15}$$

fiind aceeaşi cu (4.12). Vom deduce acum expresiile solicitărilor în secţiile transversale ale barei în raport cu funcţiile de tensiune introduse. Din (5.1) şi (8.1) se deduce că

$$\overline{\mathfrak{T}}=\iint dx\,dy\,\overline{Q}=-i\iint dx\,dy\,DF \tag{8.16}$$

sau în baza teoremei lui Green

$$\overline{\mathcal{F}}=-i\int_{\gamma} ds\,nF=-\int_{\gamma} d\mathfrak{z}\,F=-i\int_{\gamma} d\mathfrak{z}\,H \tag{8.17}$$

F luînd la limită valoarea (8.5).

Momentul de torsiune se scrie în baza relaţiilor (5.18), (3.9) şi (8.1) sub forma

$$\mathfrak{M}_t=-\iint dx\,dy\,\mathcal{R}e\,i\bar{\mathfrak{z}}\,\overline{Q}=-\iint dxdy\,\mathcal{R}e\,i\bar{\mathfrak{z}}(-i\,DF)=-\iint dx\,dy\,\mathcal{R}e\;\bar{\mathfrak{z}}\,DF \tag{8.18}$$

În baza teoremei lui Green se deduce că

$$\mathfrak{M}_t=\mathcal{R}e\left\{\iint dx\,dy\,2F-\int ds\,\bar{\mathfrak{z}}\,nF\right\}=\mathcal{R}e\left\{\iint dx\,dy\,2F-i\int ds\,\bar{\mathfrak{z}}\,nH\right\} \tag{8.19}$$

În ultima integrală din (8.19), F ia valoarea (8.5).

În baza relaţiei (5.38), momentul complex încovoietor se scrie

$$\mathfrak{M}=\mu\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathfrak{T}\iint dx\,dy\,\mathfrak{z}\varphi_0-\int^{\star} dz\,\overline{\mathfrak{T}}=\mu\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2\mathfrak{T}\,dx\,dy\,\mathfrak{z}\varphi_0+\int dz\int_{\gamma} d\mathfrak{z}\,F \tag{8.20}$$

F luînd valoarea (8.5).

În cazul barelor multiplu conexe vom avea pe frontierele $L_1,\ldots,L_m$ condiţiile

$$G=G_i;\qquad \partial H/\partial n=0 \tag{8.21}$$

iar pe frontiera exterioară L_{m+1}:

$$G=G_{m+1};\qquad \partial H/\partial n=0. \tag{8.22}$$

Momentul de torsiune (8.19) devine

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_t&=\mathcal{R}e\left\{2\iint dx\,dy\,F-\sum_{i=1}^{m} ds\bar{\mathfrak{z}}n\,(G_i+iH)\right\}=2\iint G\,dx\,dy\,-\\&-\mathcal{R}e\sum\int ds\bar{\mathfrak{z}}nG_i-M_t',\end{aligned} \tag{8.23}$$

unde

$$\mathfrak{M}_t' = \mathcal{R}e \sum_i \int ds \bar{\mathfrak{z}} n \, (iH) = \sum_i \int ds \, (yn_x - xn_y) \, H = \sum_i \int d \, \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot H. \quad (8.24)$$

Avem însă că

$$\begin{aligned} \sum_{=1}^{m} \int ds \bar{\mathfrak{z}} \, nG_i &= \sum_{i=1}^{m} \int_{L_i} ds \, (xn_x + yn_y) \, G_i - \int_{L_{m+1}} ds (xn_x + yn_y) G_{m+1} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{m} G_i \Omega_i - 2G_{m+1} \Omega_{m+1} \end{aligned} \quad (8.25)$$

unde

$$\Omega_i = 2 \iint dx \, dy = \int_{L_i} (x \, dy - y \, dx) = \int_{L_i} (xn_x + yn_y) \, ds \quad (8.26)$$

iar G_{m+1} se poate alege nul.

Forța de lunecare va avea expresia

$$\mathcal{T} = - i \int_{\gamma} dsnF = \int ds \, . \, n. \, (H - i \sum G_i). \quad (8.27)$$

Întrucît

$$\int_{L_i} ds \cdot n = \int_{L_i} dy - idx = i \int_{L_i} d\mathfrak{z} = 0 \quad (8.28)$$

vom avea că

$$\mathcal{T} = \int ds \, . \, nH \quad (8.29)$$

Pentru expresiile forțelor axiale și ale momentelor încovoietoare se pot utiliza rezultatele obținute în cazul secțiilor simplu conexe.

9. TEOREMA CIRCULAȚIEI TENSIUNILOR TANGENȚIALE

Vom considera ca și în cazul static studiat de R. Bredt integrala de contur

$$\mathcal{J} = \int_L T \, ds \quad (9.1)$$

unde

$$\begin{aligned} T &= - n_y \tau_{zx} + n_x \tau_{zy} = - \mathcal{R}e \, \bar{n} \, i (\tau_{zx} + i \tau_{zy}) = - \mathcal{R}e \, \bar{n} \, iQ = \mathcal{R}e \, i\bar{n} \, iDF = \\ &= - \mathcal{R}e \, \bar{n} \, DF = - \partial G / \partial n + \partial H / \partial s \end{aligned} \quad (9.2)$$

astfel că

$$\mathcal{J} = - \int_L \frac{\partial G}{\partial n} \, ds + (H)_L \quad (9.3)$$

$(H)_L$ fiind rezultatul integrării pe conturul închis L al integralei $\int_L \frac{\partial H}{\partial s}\, ds$ şi se poate lua nul. Pe de altă parte avem din (3.3) că

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \mu \frac{\partial \varpi}{\partial z} \int_L ds \left[- n_y \left(2 \frac{\partial W'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathcal{R}e\, \Phi \right) + n_x \left(2 \frac{\partial W'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathcal{J}m\, \Phi \right) \right] = \\ &= \mu \frac{\partial \varpi}{\partial z} \int_L d\,(\varphi + 2W') - ds\, \mathcal{R}e\, i \bar{n}\, \Phi = - \mu \frac{\partial \varpi}{\partial z} \int ds\, \mathcal{R}e\, i\bar{n} \Phi .\end{aligned} \tag{9.4}$$

Ultima integrală poate fi modificată în modul următor :

$$\int ds\, \mathcal{R}e\, \bar{n} i \Phi = \iint dx\, dy\, \mathcal{R}e\, \bar{D} i \Phi = \mathcal{R}e\, 2i \iint dx\, dy \Phi'. \tag{9.5}$$

Din (9.4), (9.5), (9.3) se deduce că

$$\mathcal{J} = + 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial z}\, \Omega\, \Psi = - \int_L \frac{\partial G}{\partial n}\, ds \tag{9.6}$$

unde

$$\Psi = - \frac{\mathcal{R}e \iint_L dx\, dy i\, \Phi'}{\Omega}, \quad \Omega = \iint dx\, dy. \tag{9.7}$$

În cazul unei secţii multiplu conexe în locul relaţiei (9.6) se va considera următoarea

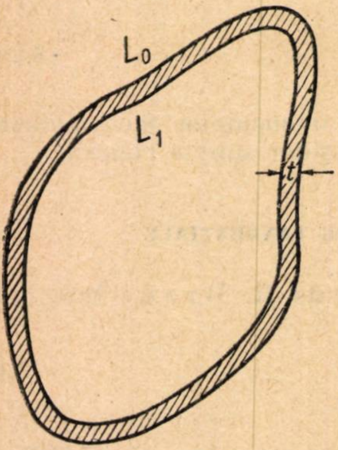


Fig. 3

$$\left. \begin{aligned} \int_{L_i} \frac{\partial G}{\partial n}\, ds &= + 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial z}\, \Omega_i\, \Psi_i \\ \Psi_i &= - \iint_{L_i} \mathcal{R}e\, \frac{dx\, dy}{\Omega_i}\, \Phi' \end{aligned} \right\} i = 1, \ldots, m. \tag{9.8}$$

În cazul barelor cu pereţi subţiri vom putea lua pe conturul exterior L_0 condiţia

$$\frac{\partial G}{\partial s} = - \frac{\partial H}{\partial n} = 0. \tag{9.9}$$

Din (8.23) şi (8.25) se deduce că momentul de torsiune are expresia

$$M_t = 2 \iint dx\, dy\, G + 2 G_1 \Omega_1 - M_t' \tag{9.10}$$

Ω_1 fiind suprafaţa secţiei transversale mărginită de L_1. Integrînd se deduce că

$$\iint G\, dx\, dy = \frac{G_1}{2} \oint_{L_1'} t\, ds \tag{9.11}$$

unde L_1' este linia mediană a peretelui barei, iar $G_1/2 = (G_0 + G_1)/2$ este valoarea medie a funcției G pentru $G_0 = 0$ pe L_0. Cu acestea

$$M_t = 2G_1\Omega_1' - M_t'; \quad \Omega_1' = \Omega_1 + \frac{1}{2}\int_{L_1'} t\, ds. \tag{9.12}$$

Din (9.2) și (9.6) avem însă că

$$-T = \int_{L_i} \mathcal{R}e\, \overline{n}\, DF = -2\mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z}\, \Omega_i \cdot \Psi_i = +\int_{L_i} \frac{\partial G}{\partial n} \cdot ds = -G_i \oint_{L_1'} \frac{ds}{t}$$

$$\Psi_i = -\mathcal{R}e \iint_{L_i} dx\, dy\, i\, \Phi'/\Omega i$$

și deci

$$M_t = 4\mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z}\, \Omega_1'^2\, \Psi_1 \Big/ \left(\oint ds/t\right) - M_t' \tag{9.13}$$

este expresia momentului de torsiune în cazul barelor cu pereți subțiri.

10. ANALOGII ALE PROBLEMEI TORSIUNII

Extinderea analogiei lui Greenhill la fluide vîscoase. Vom considera un tub avînd aceeași secție transversală ca a barei umplut cu un fluid vîscos compresibil. Fie $U = u + iv$ viteza complexă în fluid în sens transversal, pe care o vom pune în corespondență cu un potențial complex astfel ca

$$\mathcal{U} = -iDF. \tag{10.1}$$

Se deduce că

$$\overline{D}U = \vartheta + i\Omega = -i\Delta F; \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10.2}$$

La limita laterală a tubului vom avea condiția

$$\mathcal{R}e\, \overline{n}\mathcal{U} = 0, \quad \text{sau} \quad \mathcal{R}e\, \overline{n} DiF = 0. \tag{10.3}$$

Vom pune $\vartheta = \vartheta_0 + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \vartheta_1$, $\Omega = \Omega_0 + \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 \Omega_1$ astfel că

$$\vartheta_0 + i\Omega_0 = -i\Delta G_0 = i2\mu\partial\mathcal{T}/\partial z \tag{10.4}$$

și deci

$$\vartheta_0 = 0, \; \Omega_0 = 2\mu \cdot \partial\mathcal{T}/\partial z.$$

Așadar, în cazul primului termen (static) al problemei se obține analogia lui Greenhill pentru un fluid ideal incompresibil în rotație. Pentru primul termen dinamic se obține

$$\vartheta_1 + i\Omega_1 = -i\Delta F_1 = -i\Delta G_1 + \Delta H_1 \tag{10.5}$$

sau, cu (8.6)

$$\vartheta_1 = \Delta H_1 = 2\mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z}\left(\frac{1 + 2\sigma}{2}\right)\varphi_0; \quad \Omega_1 = -\Delta G_1 = -2\mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z}\left(\frac{1 - 2\sigma}{2}\right)\psi_0 \tag{10.6}$$

Momentul rotației fluidului este

$$M_t = -\mathcal{R}e\iint \rho\, dx\, dy\, \bar{\mathfrak{z}} i\mathcal{U} = -\mathcal{R}e\iint \rho\bar{\mathfrak{z}} i\,(-iDF = -\mathcal{R}e\iint \rho\bar{\mathfrak{z}}\, dx\, dy\, DF \tag{10,7}$$

şi coincide cu momentul de torsiune pentru $\rho = 1$. Mărimea fluxului transversal este

$$Q = \iint \rho\, dx\, dy\, \mathcal{U} = -i\iint \rho\, dx\, dy \cdot DF \tag{10.8}$$

şi corespunde intensității forței de lunecare pentru $\rho = 1 : Q = -i\int d\mathfrak{z} \cdot H.$

Funcția

$$f_0(\mathfrak{z}) = \varphi_0 + i\psi_0 = -\frac{1}{2\mu\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\dfrac{(1-2\sigma)}{2}} \cdot \left[-\frac{1-2\sigma}{1+2\sigma}\,\vartheta_1 + i\Omega_1\right] \tag{10.9}$$

este în mod evident analitică

$$\mathcal{F} = -\chi\vartheta_1 + i\Omega_1\,; \quad \chi_1 = \frac{1-2\sigma}{1+2\sigma} \tag{10.10}$$

corespunde mişcării unui fluid vîscos avînd legea

$$\sigma'_x = \lambda'\vartheta + 2\mu'\frac{\partial u}{\partial x}\,; \quad \sigma'_y = \lambda'\vartheta + 2\mu'\frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \tau'_{xy} = \mu'\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{10.11}$$

iar

$$\chi = \frac{\lambda' + 3\mu'}{\lambda' + \mu'}\,. \tag{10.12}$$

Analogia revine deci la considerarea rotației unui fluid vîscos compresibil cu constante λ', μ' satisfăcînd relația anterioară. Pentru $\partial\tau/\partial z$ se ia valoarea în secția considerată.

11. EXTINDEREA ANALOGIEI CU MEMBRANĂ A LUI L. PRANDTL

Vom considera o membrană elastică orizontală avînd în plan orizontal conturul barei. Vom considera în primul rînd deplasările în planul tangențial al membranei

$$u_1 = \frac{x}{2(\lambda' + \mu')} \cdot T\,; \quad v_1 = \frac{y}{2(\lambda' + \mu')} \cdot T \tag{11.1}$$

T reprezentînd tensiunea în membrană. Din legea lui Hooke se verifică relațiile dînd starea de tensiune plană în membrană

$$\sigma_x = \sigma_y = \lambda'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + 2\mu'\frac{\partial u_1}{\partial x} = \lambda'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + 2\mu'\frac{\partial v_1}{\partial y} = T$$

$$\tau_{xy} = \mu'\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = 0. \tag{11.2}$$

Prin marile deformări ale membranei apar, după cum rezultă din ecuațiile de proiecție, următoarele forțe tăietoare

$$Q_x^1 = T\frac{\partial W}{\partial x}, \quad Q_y^1 = T\frac{\partial W}{\partial y} \tag{11.3}$$

W fiind deplasarea verticală a membranei. Este clar că

$$\frac{\partial Q_x'}{\partial x} + \frac{\partial Q_y'}{\partial y} = T\,\Delta W = -\,q \tag{11.4}$$

q reprezentînd presiunea normală în punctul considerat al membranei. Luînd primul termen static : $G_0 = W_0$ avem că

$$-\frac{q_0}{T} = -\,2\mu\frac{\partial\varpi}{\partial z} \tag{11.5}$$

corespunzînd unei presiuni uniforme pe membrană. În acest rezultat rezidă analogia devenită clasică a lui L. Prandtl. Luînd apoi $W_1 = G_1$ avem că

$$-\frac{q_1}{T} = \Delta W_1 = \Delta G_1 = 2\mu\left(\frac{1-2\sigma}{2}\right)\frac{\partial\varpi}{\partial z}\,\psi_0(x, y) \tag{11.6}$$

indicînd, o presiune normală suplimentară. Pe contur $W_0 = W_1 = 0$.

Vom mai considera de asemenea o stare de tensiune suplimentară astfel ca $\partial\sigma_z'/\partial z = 0$ iar

$$\frac{\partial\tau_{zx}'}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}'}{\partial y} = 0 \tag{11.7}$$

și deci

$$\tau_{zx}' = -\,\mu'\,\frac{\partial P}{\partial y}; \quad \tau_{zy}' = \mu'\,\frac{\partial P}{\partial z}\cdot \tag{11.8}$$

Acestei stări îi corespunde o rotație elastică în membrană

$$\Delta P = \frac{\partial}{\partial x}\,\tau_{zy}' - \frac{\partial}{\partial y}\,\tau_{zx}' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\,\Omega'. \tag{11.9}$$

Luînd $u' = u'' \cdot z$; $v' = v'' \cdot z$; $P = TH_1/h\mu'$, h reprezentînd grosimea membranei, avem că

$$\frac{\partial \Omega''}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} z\left(\frac{\partial v''}{\partial x} - \frac{\partial u''}{\partial y}\right) = 2\mu \frac{\partial \varsigma}{\partial z} \frac{1 + 2\sigma}{2} \varphi_0 \cdot \frac{T}{h\mu'} \cdot \qquad (11.10)$$

Asupra membranei care suferă deci o deformare suplimentară se aplică şi momente de răsucire producînd rotaţii Ω''. Condiţia la limită pentru H se scrie

$$n_x \tau'_{zy} - n_y \tau'_{zx} = 0 \qquad (11.11)$$

reprezentînd cerinţa ca pe contur să nu poată subzista forţe tangenţiale în planul tangent al membranei. Aşadar conturul nu se tasează în sens normal şi nici nu preia lunecări.

Mai observăm că în baza formulei (8.14), relaţia (11.6) devine

$$\Delta W_1 = -\frac{q_1}{T} = 2\mu \frac{(1 - 2\sigma)}{2}\left[W_0 + \mu \frac{\partial \varsigma}{\partial z} \cdot \frac{r^2}{2}\right] \cdot \qquad (11.12)$$

Vom considera acum membrana situată sub un fluid de înălţime q_1/γ, γ fiind densitatea fluidului egală cu

$$\gamma = \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 2\mu \left(\frac{1 - 2\sigma}{2}\right) T. \qquad (11.13)$$

Prin producerea deplasărilor W_0, nivelul superior al fluidului fiind menţinut, apar presiunile suplimentare

$$-\left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 q'_1 = \gamma W_0 = \left(\frac{\omega}{ct}\right)^2 2\mu \frac{(1 - 2\sigma)}{2} T \cdot W_0 . \qquad (11.14)$$

De asemenea mai putem considera presiunea suplimentară

$$\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 q''_1 = -2T(1 - 2\sigma)\mu \frac{\partial \varsigma}{\partial z} \frac{r^2}{2} \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 = -\gamma\mu \frac{\partial \varsigma}{\partial z} \cdot \frac{r^2}{2} \qquad (11.15)$$

realizabilă printr-o încărcare statică sau o formă iniţială a membranei avînd săgeţile $\mu \frac{\partial \varsigma}{\partial z} \cdot \frac{r^2}{2}$. Într-un mod diferit, se poate considera o rotaţie a ansamblului producînd pe membrană presiuni datorită forţei centrifuge, dar acest procedeu e mai dificil de realizat practic.

În definitiv, în membrană avem o stare de deformare caracterizată în planul ei tangent, la nivelul $z = h$ de o funcţie a deformării

$$-\frac{\lambda' + 3\mu'}{\lambda' + \mu'} \cdot \vartheta + i\Omega; \quad z = h \qquad (11.16)$$

ϑ fiind dilatarea iar Ω rotația în planul tangent. Neglijînd ϑ_0 (static) care e constant şi nu intervine în considerațiile ulterioare, avem

$$\sigma_z = \lambda'\vartheta + 2\mu' \frac{\partial W}{\partial z} = -q, \quad z = h; \quad \sigma_z = 0, \quad z = 0. \tag{11.17}$$

În cazul membranei se poate neglija $\partial W/\partial z$ şi presupune o variație lineară în z a mărimilor

$$\vartheta = -\frac{q}{\lambda'}, \ \frac{z}{h} = \frac{1}{\lambda'}\, T 2\mu \frac{(1-2\sigma)}{2} \frac{\partial \varpi}{\partial z} \psi_0; \quad z = h. \tag{11.18}$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial z} \frac{(1+2\sigma)}{2} \varphi_0 \cdot \frac{T}{h\mu'} \cdot \tag{11.19}$$

Presupunînd o variație lineară în z pentru Ω vom avea în definitiv că la nivelul $z = h$ funcția deformării elastice este

$$-\frac{\lambda' + 3\mu'}{\lambda' + \mu'} \cdot \frac{T}{\lambda'} 2\mu \frac{(1-2\sigma)}{2} \frac{\partial \varpi}{\partial z} \psi_0 + i 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial z} \frac{(1+2\sigma)}{2} \frac{T}{\mu'} \varphi_0. \tag{11.20}$$

Această funcție va trebui conform teoriei elasticității plane să fie monogenă. Dar funcția $-\psi_0 + i\varphi_0$ este monogenă din teoria statică a torsiunii, deci va trebui ca

$$\frac{\lambda' + 3\mu'}{\lambda' + \mu'} \cdot \frac{T}{\lambda'} \cdot 2\mu \ \frac{(1-2\sigma)}{2} \frac{\partial \varpi}{\partial z} = 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial \cdot z} \frac{(1+2\sigma)}{2} \frac{T}{\mu'} \tag{11.21}$$

sau

$$\frac{\lambda' + 3\mu'}{\lambda' + \mu'} \cdot \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{1+2\sigma}{1-2\sigma} = k. \tag{11.22}$$

Notînd

$$\sigma' = \frac{\lambda'}{2(\lambda' + \mu')} \tag{11.23}$$

avem ecuația

$$(3 - 4\sigma')\left(\frac{1}{2\sigma'} - 1\right) = -5 + 4\sigma' + \frac{3}{2\sigma'} = k \tag{11.24}$$

sau

$$4\sigma'^2 - (5 + k)\,\sigma + 1{,}5 = 0. \tag{11.25}$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt pentru $\sigma = 1/6$; $k = 2$

$$\sigma' = \frac{7 \pm 5}{8} = \frac{1}{4}; \left(\frac{3}{2}\right) \tag{11.26}$$

înlăturînd o soluție incompatibilă cu problema fizică.

Remarcăm că în cadrul acestei analogii, rotațiile se produc în mod natural ca urmare a comportării plan-elastice ale materialului.

12. CONSIDERAŢII VARIAŢIONALE ÎN CADRUL PROBLEMEI DINAMICE A TORSIUNII

Fie expresia lucrului mecanic specific a tensiunilor elastice

$$A = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_{xx} + \sigma_y \varepsilon_{yy} + \sigma_z \varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\varepsilon_{xy} + \tau_{yz}\varepsilon_{yz} + \tau_{zx}\varepsilon_{zx}\right) \tag{12.1}$$

iar

$$L = \frac{1}{2}\iiint A\, dx\, dy\, dz. \tag{12.2}$$

Lucrul mecanic al tensiunilor elastice, a cărei variaţie este

$$\begin{aligned}\delta L = \iiint\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{xx}}\,\delta\varepsilon_{xx} + \ldots\right) dx\, dy\, dz = \iiint\left\{\left(X - \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u + \right.\\ \left. + \left(Y - \rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v + \left(Z - \rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\right\} dx\, dy\, dz + \iint\left(T_x\,\delta u + \right.\\ \left. + T_y\,\delta v + T_z\,\delta w\right) ds\end{aligned} \tag{12.3}$$

X, Y, Z fiind forţe de masă iar T_x, T_y, T_z de suprafaţă va da împreună cu energia cinetică ale cărei expresie şi variaţie sînt

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dy\, dz \tag{12.4}$$

$$dT = \iiint \rho\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\cdot dt + \ldots\right] dx\, dy\, dz \tag{12.5}$$

dau următoarea expresie a lucrului mecanic

$$d(L + T) = \iiint dx\, dy\, dz\left[X\,\frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \ldots\right] + \iint\left(T_x\,\frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \ldots\right) dS. \tag{12.6}$$

Funcţia $\Phi = L - W - T$ reprezintă lagrangeianul iar W este dată de expresia :

$$\begin{aligned}W = \iiint dx\, dy\, dz\,[X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w] + \\ + \iint[T_x\,\delta u + T_y\,\delta v + T_z\,\delta w]\, dS.\end{aligned} \tag{12.7}$$

Principiul lui Hamilton pentru variaţii δu, δv, δw nule la momentul t_0 şi t_1 se scrie

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Phi\, dt = 0 \tag{12.8}$$

Cu aceste relații binecunoscute vom studia condițiile extremale ale torsiunii dinamice ale barelor. Vom calcula în primul rînd lucrul mecanic al tensiunilor elastice

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}\Biggl\{ & 2\,\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+ \\ & +\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\Biggr\}=\frac{1}{2}\Biggl\{2\,\mu\vartheta^2\biggl[U_x^2+V_y^2+ \\ & +\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^4 W^2\biggr]+\lambda\vartheta^2\left[U_x+V_y-\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 W\right]^2+\mu\Bigl[\vartheta^2\,(U_y+V_x)^2+ \\ & +\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\left(U+\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\left(V+\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\Biggr\}. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Vom neglija în expresia de mai sus termenii în $(\omega/c_t)^4$ astfel că

$$\begin{aligned} A = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\cdot\Biggl\{ & \left(-y+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(x+\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\Biggl[\biggl(-y+ \\ & +\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\biggr)\left(\mathcal{Re}\,\Phi_1+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+2\,\frac{\partial W_1'}{\partial x}\right)+\left(x+\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)\left(\mathcal{J}\Phi_1+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+2\,\frac{\partial W_1'}{\partial y}\right)\Biggr]\Biggr\} \end{aligned} \tag{12.10}$$

cantitatea A continuînd să fie pozitiv definită. Substituind expresiile funcțiilor Φ, W_1' avem că

$$\begin{aligned} A = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\Biggl\{ & \left(-y+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(x+\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\mathcal{Re}\Biggl[\biggl(-y+ \\ & +\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\biggr)\left(-\frac{1-2\sigma}{2}\,g_0(\mathfrak{z})+\frac{1}{2}\,(g_0+\bar{\mathfrak{z}}f_0)+2\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)+ \\ & +\left(x+\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)\left(\frac{1-2\sigma}{2}\,i g_0(\mathfrak{z})+\frac{i}{2}(-g_0+\bar{\mathfrak{z}}f_0)+2\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)\Biggr]\Biggr\}. \end{aligned} \tag{12.11}$$

Energia cinetică este

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\iiint \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dy\,dz= \\ &= \frac{\rho}{2}\iiint\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2(U^2+V^2)+\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t\,\partial z}\right)^2 W^2\right]dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Neglijînd termenii de ordin superior se obține

$$T=\frac{\rho}{2}\iiint dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial_t}\right)^2(x^2+y^2)+\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t \partial z}\right)^2\varphi_0^2\right]. \tag{12.13}$$

Lucrul mecanic al forțelor de masă fiind nul rămîne de calculat lucrul mecanic al forțelor exterioare. Astfel, lucrul mecanic al momentului de torsiune este

$$L_t = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\mathfrak{D}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}_{\substack{z=L\\ x,\,y=0}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^2}{\partial z}\right)_{z=L}\cdot\mathfrak{D}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I} - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}e\right]\Phi_1\right\}_{x,\,y=0};\quad \frac{\partial \mathcal{I}\Phi_1}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{R}e\Phi_1}{\partial y};\quad \Phi_1 = -\frac{1-2\sigma}{2}g_0(\mathfrak{z}). \tag{12.14}$$

În definitiv se obține

$$L_t = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^2}{\partial z}\right)_{z=L}\cdot\mathfrak{D}\left[1 - \frac{1-2\sigma}{2}\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\psi_0\right]_{x,\,y=0}.$$

Va mai trebui să considerăm lucrul mecanic dat de lunecări (5.15):

$$\mathfrak{L}_l = \mathcal{R}e\,\mathcal{T}\bar{\mathfrak{U}} = \mu\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\cdot\left\{\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\mathcal{R}e\,\mathcal{C}_1\cdot\mathfrak{T}(U - iV)\right\}_{z=L;\,x,\,y=0} =$$
$$= \mu\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^2}{\partial z}\right)_{z=L}\cdot\mathcal{R}e\,\mathcal{C}_1(-i\bar{\mathfrak{z}})_{x,\,y=0} = 0 \tag{12.15}$$

lucrul mecanic al forței axiale

$$\mathfrak{L}_n = \left\{\mathfrak{N}\cdot w\right\}_{\substack{z=L\\ x,\,y=0}} = \mu\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\frac{\mathfrak{T}^2}{2}\mathcal{E}_1(\varphi_0)_{x,\,y=0} \tag{21.16}$$

și lucrul mecanic de încovoiere (5.39) care se reduce la

$$\mathfrak{L}_i = -\mathcal{R}e\{\mathfrak{T}\mathcal{C}\bar{D}W\}_{\substack{z=L\\ x,\,y=0}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^2}{\partial z}\right)_{z=L}\cdot\mu\left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\mathcal{R}e\{(\mathcal{C}_1\cdot\bar{D})\varphi_0\}_{x,\,y=0}. \tag{12.17}$$

L_n, L_i, în afară de faptul că sînt proporționale cu $(\omega/c_t)^2$, mai sînt proporționale cu φ_0 sau derivatele sale, care sînt mici în raport cu răsucirea $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. În general se va putea considera ca lucru mecanic exterior total doar L_z. Pentru soluții efective, primul termen din (12.6) e minim cu (12.8), așadar soluții apropiate de cele reale vom avea întotdeauna că

$$\mathfrak{D} \leqslant \frac{(A + T)_{\max}}{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^2}{\partial z}\right)_{\substack{z=L\\ t=\pi/2\omega}}\cdot\left[1 - \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2\frac{1-2\sigma}{2}\psi_0\right]_{x,\,y=0}}$$

$(A + \mathrm{T})_{\max}$ poate fi luat aproximativ pentru $(\partial\mathfrak{T}/dz)_{\max} = (\partial\mathfrak{T}/dz)_{\substack{z=L\\ t=\pi/2\omega}}$.

În încheierea acestor considerații observăm că problema dinamică a torsiunii este pusă în ipoteza propagării tipurilor de unde de lunecare creînd anumite solicitări la capete. Corecția necesară pentru capetele libere va duce la o problemă de alt tip. Considerăm, pentru actuala dezvoltare a teoriei torsiunii suficientă analiza efectuată.

Primit la redacție la 5 mai 1959

ДИНАМИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Работа содержит исследование динамической задачи кручения цилиндрических стержней произвольного сечения. В первом этапе исследуются дифференциальные уравнения (§1), выражение дифференциальных условий при помощи функций комплексного переменного (§2), выражения напряжений (§3), боковые граничные условия стержня (§4), выражение усилий в поперечном сечении стержня (§5), применение конформных отображений на единичный круг (§6), кручение многосвязных и армированных стержней (§7), аналог функции кручения Л. Прандтля (§8), теорема циркуляции касательных напряжений (§9), аналогии задачи динамического кручения (§10), обобщение аналогии с мембраной Л. Прандтля (§11) и приводится ряд вариационных рассмотрений (§12).

Предполагается существование одних только поперечных колебаний. При рассмотрении дополнительного решения, выражаемого указанной в работе функцией, можно было бы получить результаты более общего характера.

TORSION DYNAMIQUE DES BARRES ÉLASTIQUES À SECTION CONSTANTE

RÉSUMÉ

Le présent travail est consacré à l'étude du problème dynamique de la torsion des barres cylindriques à section constante quelconque. A une première étape, l'auteur étudie : les équations différentielles (§ 1), l'expression des conditions différentielles à l'aide des fonctions de variable complexe (§ 2), les expressions des tensions (§ 3), les conditions à la limite latérale de la barre (§ 4), l'expression des sollicitations dans la section transversale de la barre (§ 5), l'application des transformations conformes sur le cercle unité (§ 6), la torsion des barres à connexion multiple et armées (§ 7), l'analogue de la fonction de torsion de L. Prandtl (§ 8), le problème de la circulation des tensions tangentielles (§ 9), des analo-

gies du problème de la torsion dynamique (§ 10), l'extension de l'analogie avec la membrane de L. Prandtl (§ 11). On donne également certaines considérations variationnelles (§ 12).

L'auteur n'a admis que l'existence des vibrations transversales. En prenant en considération une solution supplémentaire, donnée par une fonction mentionnée dans le travail, il serait possible d'obtenir des résultats ayant un caractère plus général.

BIBLIOGRAFIE

1. SAINT-VENANT (Barré de), *Mémoire sur la torsion des prismes etc.* Mém. des Savants Etrangers, XIV, Paris, 33 (1855).
2. F. A. WILLERS, *Torsiunea barelor cu secţie variabilă.* Z. Math. Phys. 1907, t. 55, p. 25. Leipzig, 1862.
3. A. TIMPE, *Torsiunea barelor cu secţie variabilă.* Math. Ann., 1912, t. 71, p. 480.
4. В. И. АВРАМИАН, М. М. ДЖРБАШИАН, *О кручении валов переменноов сечения.* ПММ, **15**, *4*, 451—472. (1951).
5. Н. И. МУШЕЛИШВИЛИ, *К задаче кручения и изгибу упругих брусьев, составленных из различнык материалов.* Изв. АН СССР, *6* 907—945 (1932).
6. N. I. MUSHELIŞVILI, *Sur le problème de torsion des poutres élastiques composées.* C.R. Paris, t. 194, 1932, p. 1435.
7. L. PRANDTL, Phys. Zeitschr., 4, 1903, p. 758 şi Jahresbericht Dtsch. Math. Vereinigung, t. 13, 1904.
8. M. MIŞICU, *Extinderea problemei de torsiune.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, 9—10, 1954, 509—513.
9. А. Н. ДИННИК, *Кручение. Теория и приложение.* М.-Л, 1938.
10. — *Продольный изгиб и кручения.* АН СРСР, 1955.
11. Н. И. МУШЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Изд. АН СССР, Москва, 1954, 514—555.
12. I. I. SOKOLNICOFF, *Math. Th. of elasticity*, Mc. Graw Hill, ed. a II-a, 1956, p. 476.
13. A. E. H. Love, *Elasticity*, ed. a 2-a, p. 307.
14. CONSTANTIN WEBER, WILHELM GÜNTHER, *Torsionstheorie.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig Akad. Verlag Berlin.
15. W. THOMSON, P. G. TAIT, *Handbuch der Th. Phys.* Bd. I., Braunschweig, 1874.
16. A. C. GREENHILL, Mess. of. Math., t. 2, fasc. 9, 1879.
17. E. PESTEL, Ein neues Strömungsgleichniss der Torsion, ZAMM. 34, 1954.
18. — *Eine neue hydrodynamische Analogie zur Torsion prismatischer Stäbe.* Ing. Archiv, XXIII, 1955.
19. G. GROSSMANN, *Experimentelle Durchführung einer neuen hydrodynamischen der Torsionproblem.* Ing. Archiv., XXV, 1957.

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

FOLOSIREA TEORIEI MATRICELOR LA CALCULUL SISTEMELOR CU BARE

DE

K. K. PONOMAREV
Moscova

În scopul de a lămuri caracterul metodelor folosite la rezolvarea problemelor de calcul ale sistemelor cu bare şi plăci precum şi modul lor de simplificare cu ajutorul formulării prin matrici, ţinînd seama de eventuala folosire a electronicii, se dau mai jos principiile teoretice de bază necesare atît pentru claritatea expunerii ulterioare, cît şi pentru uşurarea rezolvării problemelor mecanicii construcţiilor.

Fie în intervalul de variaţie a variabilei o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul m de forma cea mai generală (care cuprinde ca un caz particular, ecuaţii cu coeficienţi constanţi), unde $g_i(x)$ sînt funcţii continue şi mărginite de x, $g_m(x)$ funcţie care în intervalul considerat nu se anulează

$$L[y] = g_m(x)y^{(m)} + \dots + g_2(x)y'' + g_1(x)\,y' + g_0(x)y = r(x). \qquad (1)$$

Ecuaţia (1) are, după cum se ştie, o soluţie care depinde de m constante de integrare arbitrare, formată din soluţiile liniar independente ale ecuaţiei omogene corespunzătoare (1) şi din soluţia particulară a ecuaţiei neomogene (1).

Soluţia generală împreună cu cele $m - 1$ derivate de ordinul întîi ale ei are forma :

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x) + p(x) \\ y'(x) &= c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_m f_m'(x) + p'(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(m-1)}(x) &= c_1 f_1^{(m-1)}(x) + c_2 f_2^{(m-1)}(x) + \dots + c_m f_m^{(m-1)}(x) + p^{(m-1)}(x) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

sau sub forma matricială

$$\{Y(x)\} = [F(x)]\cdot[c] + \{P(x)\}. \qquad (3)$$

Aici : $\{Y(x)\}$ matrice-coloană sau *vector* al funcțiilor $y(x), y'(x), \ldots$ $y^{(m-1)}(x)$; $[C]$ – matricea (vectorul) constantelor de integrare arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_m$;

$\{P(x)\}$ – matricea-coloană a soluției particulare a ecuației (1) cu $m-1$ derivate : $p(x)$; $p'(x), \ldots, p^{(m-1)}(x)$;

$[F(x)]$ – matrice pătratică m^2 a funcțiilor $f_1^{(k)}(x)$ ale ecuației omogene (1).

Matricea $[F(x)]$ depinde de alegerea vectorului $[C]$, deoarece din sistemul fundamental putem forma orice combinații liniare, ceea ce corespunde introducerii unor noi constante de integrare C_i.

Introducînd în ecuația (3) în locul variabilei x valoarea ei x_i la extremitatea din stînga a intervalului considerat, obținem :

$$\{Y(x_i)\} = [F(x_i)]\,[C] + \{P(x_i)\}. \tag{4}$$

Deoarece vronskianul sistemului $W = |[F(x)]|$ nu se anulează, atunci pentru orice x al intervalului considerat există o astfel de matrice inversă $[F^{-1}(x)]$, încît

$$[C] = [F^{-1}(x)]\cdot(\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\}). \tag{5}$$

Introducînd valoarea lui (5) în ecuația (3) obținem

$$\{Y(x)\} = [F(x)]\cdot[F^{-1}(x_i)]\cdot[\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\}] + \{P(x)\} \tag{6}$$

sau, notînd pentru prescurtare

$$[F(x)]\,[F^{-1}(x)] = [F^{*}(x)], \tag{7}$$

obținem în mod definitiv

$$\{Y(x)\} - \{P(x)\} = [F^{*}(x)](\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\})\ldots \tag{8}$$

Din egalitatea (8) rezultă că cu ajutorul valorilor $\{Y(x_i)\}$ și $\{P(x_i)\}$ la extremitatea din stînga a intervalului considerat, se exprimă liniar orice valoare a lui $\{Y(x)\} - \{P(x)\}$ în interiorul acestui interval.

Matricea intervalului $[F^{*}(x)]$ pentru $x = x_i$ trece în matricea unitară $[E]$:

$$[F^{*}(x_i)] = [F(x_i)]\cdot[F^{-1}(x_i)] = [E], \tag{9}$$

iar pentru $x = x_{i+1}$ trece în matricea principală $[\alpha]$

$$[F^{*}(X_{i+1})] = [L]. \tag{9'}$$

În felul acesta, la extremitatea din stînga a intervalului :

$$\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\} = [E](\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\}); \tag{10}$$

în interiorul intervalului

$$\{Y(x)\} - \{P(x)\} = [F^{*}(x)](\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\}); \tag{10'}$$

la extremitatea din dreapta a intervalului :

$$\{Y(x_{i+1})\} - \{P(x_{i+1})\} = [L](\{Y(x_i)\} - \{P(x_i)\}). \tag{10''}$$

Matricea principală $[L]$ conform (10″) reunește valorile soluției generale și cele $m-1$ derivate de la extremitatea din stînga pînă la cea din dreapta ale intervalului. Acest fapt are o importanță fundamentală pentru elaborarea teoriei grinzilor static nedeterminate.

Ecuațiile diferențiale ale încovoierii, stabilității și vibrațiilor grinzilor cu multe deschideri sînt ecuații de ordinul 4 ($m=4$) și, deci problema se reduce la cercetarea matricei de ordinul patru. Fie rigiditatea grinzii $EI_i=\alpha_i$, densitatea μ_i, forța longitudinală S_1 și celelalte mărimi în deschiderea i de lungime l_i, mărimi constante. Aceasta permite să se determine soluția generală și matricele corespunzătoare. Ca componente ale matricei-coloană $\{y_i(x)\}$ în deschiderea i introducem următoarele patru mărimi: deschiderea $y_i(x)$ unghiul de înclinare a tangentei $y_i'(x)$, momentul încovoietor $-\alpha_i y_i''(x)=M_i(x)$ și forța transversală $-\alpha_i y_i'''(x)=Q_i(x)$.

A. CALCULUL LA ÎNCOVOIERE

1.1. Matricea deschiderii (matricea principală) a grinzii

Ecuația diferențială corespunzătoare a încovoierii grinzii are forma:

$$y_i^{(\mathrm{IV})}=\frac{q_i(x)}{\alpha_i}, \tag{11}$$

unde $g_i(x)$ — sarcina pe unitatea de lungime, kg cm^{-1}.

Sistemul fundamental corespunzător al ecuației omogene (10) cu cele $m-1=3$ derivate ale sale de ordinul întîi are forma:

$$\begin{aligned}
y_i(x) &= 1\cdot C_1+(x-x_1)\cdot C_2+(x-x_i)^2C_3+(x-x_i)^3C_4;\\
y_i'(x) &= 0\cdot C_1+1\cdot C_2+2(x-x_i)C_3+3(x-x_i)^2C_4;\\
-\alpha_i y_i''(x) &= 0\cdot C_1+0\cdot C_2-2\alpha_i C_3-6\alpha_i(x-x_i)C_4;\\
-\alpha_i y_i'''(x) &= 0\cdot C_1+0\cdot C_2+0\cdot C_3-6\alpha_i\cdot C_4.
\end{aligned}$$

În matricea funcțiilor acestui sistem se substituie valoarea variabilei la marginea din stînga $x=x_i$ și atunci se obține

$$[F_i(x_i)]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2\alpha_i&0\\0&0&0&-6\alpha_i\end{bmatrix}$$

de unde matricea inversă respectivă este egală cu

$$[F_i^{-1}(x_i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6\alpha_i} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Conform formulei (7) matricea deschiderii este egală cu

$$[F_i^{\star}(x)] = [F_i(x)][F_i^{-1}(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x - x_i & -\frac{(x-x_i)^2}{2\alpha_i} & -\frac{(x-x_i)^3}{6\alpha_i} \\ 0 & 1 & -\frac{(x-x_i)}{\alpha_i} & -\frac{(x-x_i)^2}{2\alpha_i} \\ 0 & 0 & 1 & x - x_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Substituind pentru control $x = x_i$ (deoarece conform formulei a 9-a $[F_i^{\star}(x_i)] = [E]$) obținem o matrice unitară.

Matricea principală $[\pounds_1]$ pentru $x = x_{i+1}$, punînd $x_{i+1} - x_i = l_1$ va fi

$$[\pounds_1] = [F_i^{\star}(x_{i+1})] = \begin{bmatrix} 1 & l_i & -\frac{l_i^2}{2\alpha_i} & -\frac{l_i^3}{6\alpha_i} \\ 0 & 1 & -\frac{l_i}{\alpha_i} & -\frac{l_i^2}{2\alpha_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i & Q_i \\ O & K_i \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Aici

$$[K_i] = \begin{bmatrix} 1 & l_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \ [Q_i] = -\frac{l_i}{6\alpha_i}\begin{bmatrix} 3l_i & l_i^2 \\ 6 & 3l_i \end{bmatrix}; \ [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

sînt matrici bloc de ordinul al doilea.

1.2. Matrice de tranziție

Considerăm acum tranziția între două deschideri în fiecare din ele dîndu-se o ecuație diferențială de forma (1).

Valorile lui $\{Y_i(x_i + 1)\}$ vor varia, în cazul general (fig. 1), prin salturi în jurul unui vector $\{S_{i+1}\}$

$$\{Y_{i+1}(x_{i+1} + 1)\} = \{Y_i(x_{i+1})\} + \{S_{i+1}\}. \tag{16}$$

Vectorul saltului $\{S_{i+1}\}$ este în acest caz o funcție liniară de valoare $\{Y_i(x_{i+1})\}$ la stînga marginii deschiderii x_{i+1} :

$$\{S_{i+1}\} = [G_{i+1}] \cdot \{Y_i(x_{i+1}^-)\} + \{k_{i+1}\}, \tag{17}$$

cu matrice constantă dată $[G_{i+1}]$ și cu vector constant dat $[k_{i+1}^-]$. Plecînd de la ecuațiile (16), (17) din acest paragraf și de la ecuația (10′) și punînd pentru prescurtare $[E] + [G_{i+1}] = [A_{i+1}]$ se obține :

$$\{Y_{i+1}(x_{i+1})\} = [A_{i+1}]\,[\{P_i(x_{i+1})\} + [\mathfrak{L}_i]\,(\{Y_i(x_i)\} - \{P_i(x_i)\})] + \{k_{i+1}\}. \tag{18}$$

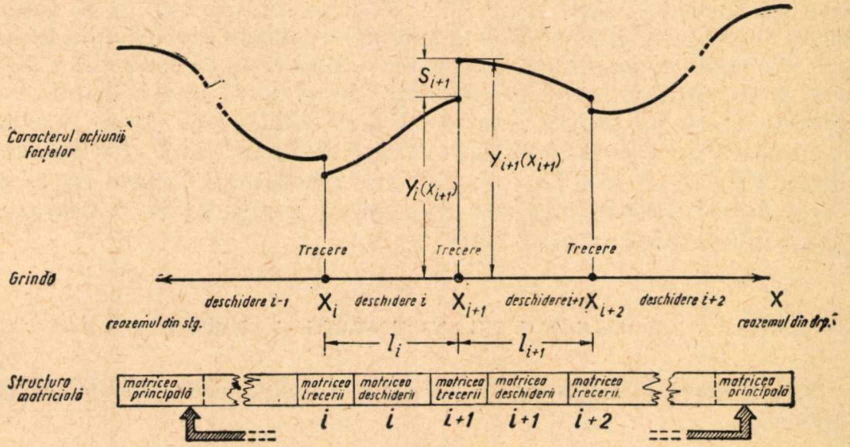

S_{i+1}
Caracterul acțiunii forțelor
$Y_{i+1}(x_{i+1})$
$Y_i(x_{i+1})$
Trecere
Trecere
Trecere
Grindă
deschidere i-1
X_i
deschidere i
X_{i+1}
deschidere i+1
X_{i+2}
deschidere i+2
X
reazemul din stg.
reazemul din drp.
l_i
l_{i+1}
Structura matricială
matricea principală
matricea trecerii
matricea deschiderii
matricea trecerii
matricea deschiderii
matricea trecerii
matricea principală
i
i
i+1
i+1
i+2

Fig. 1

Dacă, în particular, ecuația diferențială și condiția de tranziție sînt omogene, atunci în ecuația (1) $r(x) \equiv 0$ iar în ecuația (17) $\{k_{i+1}\} = 0$. Atunci pe baza (18), rezultă :

$$\{Y_{i+1}(x_{i+1})\} = [A_{i+1}^-]\,[L_i]\,\{Y_i(x_i)\}. \tag{19}$$

Produsul matricelor $[A_{i+1}]\,[L_i]$ formează o matrice de tranziție. O formulă asemănătoare se obține din ecuația (18), dacă una sau toate ecuațiile diferențiale și condițiile de tranziție sînt neomogene. În felul acesta s-a demonstrat că valorile $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ pe marginea din dreapta a deschiderii n se exprimă liniar prin intermediul valorilor corespunzătoare de pe marginea din stînga a primei deschideri.

1.3. Condițiile la limită

Fie date $m = l + r$ condiții la limită exterioare liniar independente : l la capătul din stînga al deschiderii și la capătul din dreapta al deschiderii n, adică în l (r) condiții la capătul din stînga (dreapta) se iau numai valorile $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ în punctul x_1 (x_{n+1}).

Prin intermediul a l condiții la capătul din stînga al unei grinzi cu mai multe deschideri se stabilesc l constante de integrare

$$[A_1, \ldots, A_m] = [a],$$

prin urmare

$$\{Y_1(x_1), \ldots, Y_1^{(m-1)}(x_1)\} = \{Y_1(x_1)\}. \tag{20}$$

sau cu alte cuvinte l combinații ale lor. Celelalte r constante de integrare trec cu vectorul $\{Y_1(x_1)\}$ conform (18) prin tot calculul și se determină la sfîrșit cu ajutorul a r condiții la limită la capătul din dreapta al deschiderii n. În cazul omogenității ecuațiilor diferențiale, a condițiilor de tranziție și a condițiilor la limită se obțin în general numai soluții triviale $y_i(x) \equiv 0$. Dacă pe partea interioară a deschiderii la stînga reazemului x_{i+1}, în afară de cele m condiții existente mai avem și $S \leqslant r$ valori independente $\{Y_i(x_{i+1})\}$ sau $\{Y_{i+1}(x_{i+1})\}$ sau combinații liniare ale acestora, atunci datorită acestui fapt vor fi stabilite următoarele S constante de integrare libere pînă în acel loc r.

B. CALCULUL DE STABILITATE ȘI VIBRAȚII

2.1. Ecuațiile diferențiale corespunzătoare ale stabilității grinzii au forma :

$$y_i^{(IV)} + \lambda_i^2 y_i'' = r_i(x);$$

$$\lambda_i^2 = \frac{S_i}{\alpha_i}\,[cm^{-2}]. \tag{21}$$

Se stabilește sistemul fundamental $y_i(x) = 1 \cdot C_1 + (x - x_i)\,C_2 + {}$ $+ \cos\lambda_i(x - x_i)\,C_3 + \sin\lambda_i(x - x_i)\,C_4$ și se formează din nou funcțiile y_i', $-\alpha_i y_i''$ și $-\alpha_i y_i'''$. Pe baza unor calcule analoage (ca și în paragraful 1.1) se obține matricea deschiderii (matrice principală)

$$[F_i^*(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x - x_i & \dfrac{\cos\lambda_i(x - x_i) - 1}{S_i} & \dfrac{\sin\lambda_i(x - x_i)}{\lambda_i S_i} - \dfrac{x - x_i}{S_i} \\ 0 & 1 & \dfrac{-\lambda_i\sin\lambda_i(x - x_i)}{S_i} & \dfrac{\cos\lambda_i(x - x_i) - 1}{S_i} \\ 0 & 0 & \cos\lambda_i(x - x_i) & \sqrt{\dfrac{\alpha_i}{S_i}}\sin\lambda_i(x - x_i) \\ 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{S_i}{\alpha_i}}\sin\lambda_i(x - x_i) & \cos\lambda_i(x - x_i) \end{bmatrix} \tag{22}$$

sau

$$[L_i] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & l_i & \dfrac{\cos\lambda_i l_i - 1}{S_i} & \dfrac{\sin\lambda_i l_i}{\lambda_i S_i} - \dfrac{l_i}{S_i} \\ 0 & 1 & \dfrac{\lambda_i \sin\lambda_i l_i}{S_i} & \dfrac{\cos\lambda_i l_i - 1}{S_i} \\ \hdashline 0 & 0 & \cos\lambda_i l_i & \sqrt{\dfrac{\alpha_i}{S_i}}\sin\lambda_i l_i \\ 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{S_i}{\alpha_i}}\sin\lambda_i l_i & \cos\lambda_i l_i \end{array}\right] = \begin{bmatrix} k_i\,; & \dfrac{\bar{k}_i - k_i}{S_i} \\ 0\,; & \bar{k}_i \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Luînd pentru prescurtarea notațiilor

$$\left.\begin{array}{l} \cos\lambda_i l_i = c_{ii} \\ \sin\lambda_i l_i = s_{ii} \end{array}\right\} \tag{24}$$

matricele-bloc (23) vor fi egale cu :

$$[k_i] = \begin{bmatrix} 1 & l_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ [\bar{k}_i] = \begin{bmatrix} C_{ii} & \dfrac{S_{ii}}{\lambda_i} \\ \lambda_i S_{ii} & C_{ii} \end{bmatrix};\ [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

2.2. Ecuația diferențială corespunzătoare a vibrațiilor are forma :

$$\left.\begin{array}{l} y_i^{(IV)} - k_i^4 y_i = r_i(x), \\ k_i^4 = \dfrac{\mu_i \omega^2}{\alpha_i}\ [\mathrm{cm}^{-4}]. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Analog cu paragrafele 1.1 și 2.1 se obține matricea deschiderii (matricea principală) :

$$[F_i^{\star}(x)] \text{ sau } \Big[L_i\Big] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} [A_i]\,[B_i] \\ \alpha_i^2 k_i^4\,[B_i]\,[A_i] \end{bmatrix}, \tag{27}$$

unde

$$\left.\begin{array}{l} [A_i] = \begin{bmatrix} C_{ii} + c_{ii} & \dfrac{S_{ii} + s_{ii}}{k_i} \\ k_i(S_{ii} - s_{ii}) & C_{ii} + c_{ii} \end{bmatrix}, \\ |\,[A_i]\,| = 2\,(1 - C_{ii} - c_{ii}), \end{array}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{l} [B_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{(c_{ii} - C_{ii})}{\alpha_i k_i^2} & \dfrac{s_{ii} - S_{ii}}{\alpha_i k_i^3} \\ -\dfrac{s_{ii} + S_{ii}}{\alpha_i k_i} & \dfrac{c_{ii} - C_{ii}}{\alpha_i k_i^2} \end{bmatrix}, \\ |[B_i]| = \dfrac{2\,(1 + C_{ii} - c_{ii})}{\alpha_i^2 k_i^4}. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Aici au fost folosite prescurtările

$$
\begin{aligned}
c_{ii} &= \cos k_i l_i, \\
s_{ii} &= \sin k_i l_i, \\
C_{ii} &= \operatorname{ch} k_i l_i, \\
S_{ii} &= \operatorname{sh} k_i l_i.
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

În mod analog se stabilesc matricele respective ale deschiderilor pentru multe alte probleme de mecanică, care se bazează pe ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

2.3. Întocmim matricele de tranziție pentru cazurile importante din punct de vedere practic. Vom distinge două cazuri :

1. Grinda este încărcată vertical (încovoiere și vibrații),
2. Grinda este încărcată cu o forță longitudinală (stabilitate).

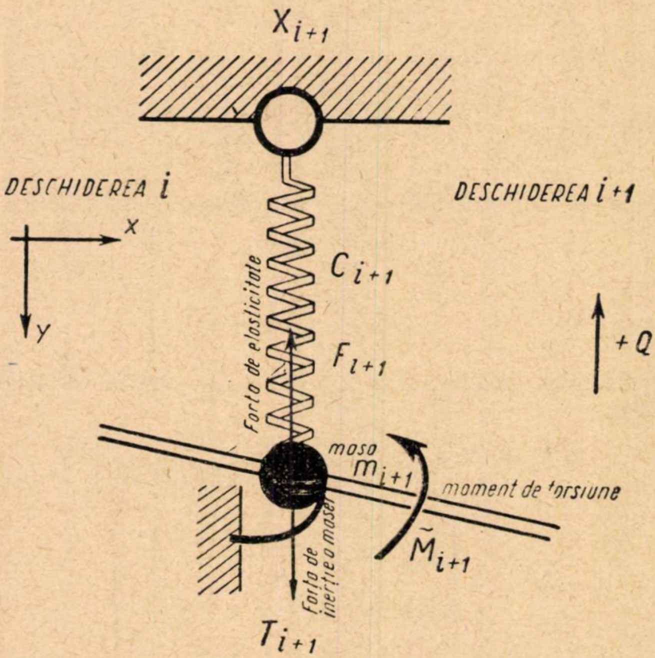

X_{i+1}
DESCHIDEREA i
DESCHIDEREA $i+1$
x
y
C_{i+1}
Forța de elasticitate
F_{i+1}
$+Q$
masa
m_{i+1}
moment de torsiune
$\tilde{M}_{i+1}$
Forța de inerție a masei
T_{i+1}

Fig. 2

Cazul 1. Matricea de tranziție la calculul de încovoiere și vibrații. Pe figura 2 este arătată tranziția deschiderii cu reazem care se rotește elastic, și care vibrează simultan sub acțiunea unei mase unitare a cărei forță de inerție este egală cu

$$T_{i+1} = y_i \cdot m_{i+1} \cdot \omega^2.$$

Săgeata și înclinarea tangentei trec continuu una în alta, adică în punctul x_{i+1} rezultă

$$\left.\begin{aligned} &y_{i+1} = y_i, \\ &y'_{i+1} = y'_i, \\ &M_{i+1} = M_i - \overline{M}_{i+1} = M_i - C_{i+1}\, y'_i, \\ &Q_{i+1} = Q_i + F_{i+1} - \bar{T}_{i+1} = Q_i + (C_{i+1} - m_{i+1}\,\omega^2)\, y_i. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

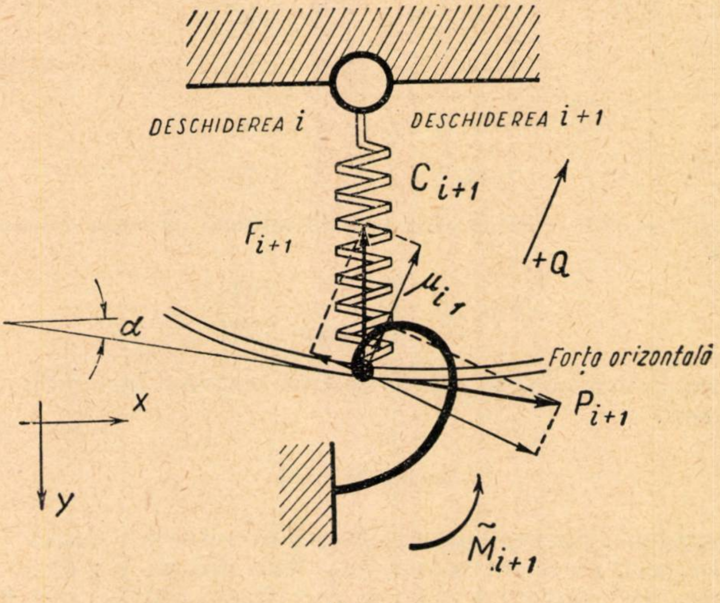


Fig. 3

În felul acesta, matricea de tranziție

$$[A_{i+1}] = [E] + [G_{i+1}]$$

capătă forma:

$$[A_{i+1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{i+1} & 1 & 0 \\ \beta_{i+1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

unde

$$\beta_{i+1} = C_{i+1} - \bar{m}_{i+1} \cdot \omega^2 \, (\text{pentru încovoiere } \omega^2 = 0).$$

Cazul 2. Matricea de tranziție în calculul de stabilitate. La trecerea prin reazemul elastic (fig. 3) de tipul cedare-rotație cu forță orizontală unitară P_{i+1}, forțele F_{i+1} și P_{i+1} se descompun pe direcțiile tangențială și normală, avînd în vedere $\cos\alpha \approx 1$ și $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = y'_i$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Componenta tangențială a forței elastice $c_{i+1} y_i \cdot y'_i$ se neglijează ca fiind un infinit mic de ordin superior. În felul acesta, obținem patru condiții :

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i, \; M_{i+1} = M_i - \overline{M}_{i+1} = M_i - C_{i+1} y'_i, \\ y'_{i+1} &= y'_i, \; Q_{i+1} = Q_i + F_{i+1} + P_{i+1} y'_i = Q_i + C_{i+1} y + P_{i+1} y_i. \end{aligned} \tag{33}$$

Matricea de tranziție $[A_{i+1}] = [E] + [G_{i+1}]$ capătă forma

$$[A_{i+1}] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & C_{i+1} & 1 & 0 \\ C_i & P_{i+1} & 0 & 1 \end{array} \right]. \tag{34}$$

Ecuațiile (32) și (34), introducînd matricele-bloc, se scriu cel mai simplu sub forma

$$[A_{i+1}] = \begin{bmatrix} [E] & [0] \\ [V_{i+1}] & [E] \end{bmatrix}.$$

Toate mărimile mecanice se găsesc aici în matricea-bloc $[V_{i+1}]$. Există și alte treceri.

Condiții de limită

La capetele exterioare ale deschiderii se scriu totdeauna $l = r = 2$ condiții. Deseori, chiar de la început, două din y ; y' ; M și Q se iau egale cu zero, de exemplu $y = 0$; $y' = 0$ (fixare rigidă) ; $y = 0$; $M = 0$ (articulație) ; $y' = 0$; $Q = 0$ (fixare care se deplasează vertical) ; $M = 0$, $Q = 0$ (capăt liber).

În cazul cînd la capetele grinzii reazemele elastice sau la încovoiere longitudinală forțele unitare sînt orizontale, atunci cu ajutorul matricelor corespunzătoare de tranziție se poate lua în deschidere numărul zero sau $n + 1$ și să se pună o condiție suplimentară ca $M = 0$ și $Q = 0$. În felul acesta, în fiecare caz două constante de integrare la început sînt nule și calculul se face numai cu celelalte două. Dacă există și condiții la limită interioare, atunci distingem două cazuri :

a) La marginea interioară a deschiderii sînt date două condiții, de exemplu $y = 0$, $y' = 0$ (fixare rigidă) sau $y = 0$, $M = 0$ (articulație rigidă). Atunci se poate pune în acest loc două constante pînă acum libere. Calculul încetează și aceasta înseamnă că liniile de încovoiere la dreapta și stînga de locul dat nu depind unele de altele.

b) La unul din capetele interioare ale deschiderii trebuie să se îndeplinească numai o singură condiție, de exemplu $y = 0$ (articulație rigidă) sau $y' = 0$ (fixare deplasabilă). În acest caz, una din constantele de integrare pînă acum liberă poate fi exprimată liniar prin altele.

CONCLUZII

Dezvoltarea rapidă a celor mai noi maşini de calculat pe baza aplicării electronicii, în prezent devansează mult dezvoltarea noilor metode de calcul din mecanica construcţiilor care corespund nivelului actual al tehnicii calculatorii. Între tehnica modernă a calculării şi mecanica construcţiilor s-a creat o discontinuitate prin rămînerea în urmă a acesteia.

Actualitatea punerii problemei decurge dintr-o serie întreagă de importante avantaje care se obţin la aplicarea calculului matricial la problemele de mecanica construcţiilor, şi anume : se obţine o automatizare completă a proceselor de calcul laborioase, posibilitatea de variaţie pe scară largă a soluţiilor tehnico-inginereşti ale construcţiilor, efectuarea calculelor cu un personal mai puţin calificat, rezolvarea sistemelor cu un grad ridicat al nedeterminării statice, ceea ce dă la rîndul său un efect tehnico-economic esenţial.

În legătură cu cele expuse mai sus, în articol sînt expuse principiile generale ale abordării noi a calculului sistemelor static nedeterminate şi este expusă într-o formă mai completă teoria matematică generală a metodei matriciale de rezolvare a problemelor celor mai dificile ale mecanicii construcţiilor. De asemenea, se expune interpretarea matematică generală a metodei matriciale pentru sistemele de tip bloc în cazul calculului de încovoiere, stabilitate şi vibraţii.

Primit la redacţie la 15 ianuarie 1959, revăzut la 23 iunie 1959

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе излагается оригинальная идея применения теории матриц к наиболее сложной с математической точки зрения задаче механики стержневых систем.

Матричная формулировка и матричный метод решения этих задач принципиально облегчают решение многих сложных задач и особенно удобны при использовании электронных вычислительных машин. В работе рассматриваются общие принципы подхода к расчету статически неопределимых систем, в более полном виде излагается общая математическая теория матричного метода решения одной из наиболее трудоемких задач строительной механики, а также общая механическая интерпретация матричного метода для систем типа балок в случае расчета на изгиб, устойчивость и колебания.

USE OF THE MATRIX THEORY TO THE COMPUTATION OF BAR SYSTEMS

ABSTRACT

An original idea is presented concerning the application of the matrix theory to the most intricate problem, from the mathematical standpoint of the mechanics of bar systems.

The matrix formulation and the matrix method of solving these problems in principle facilitate the solution of many intricate problems and are particularly convenient when electronic computers are used. The general approach principles of the computation of statically undetermined systems are described in this paper, while the general mathematical theory of the matrix theory for solving some of the most laborious problems in the theory of structures is presented in a more complete form. The general mechanical interpretation of the matrix method for systems of the beam type in the case of bending stability and vibration computation is likewise described.

BIBLIOGRAFIE

1. A. F. Cornock, *The numerical solution of Poisson's and bi-harmonic equations by matrices,* Proceedings of the Cambrige philosophical Society, **50**, *4* (1954).
2. M. Denis-Papin std C. Kaufmann, *Cours de calcul matriciel appliqué.* Paris, 1957.
3. S. Falk, *Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balken.* Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftliche Gesellschaft, **7** (1955).
4. O. Karlquist, *Numerical solution of elliptic difference equations,* „Tellus". A. Quarterly Journal of geophysics, **4**, *4* (1952).
5. * * * National physical laboratory, Notes on applied science No. 16, „Modern computing methods". London, 1957.
6. Augustin Petre, *Aplicarea analogiilor electrice la studiul vibrațiilor mediilor elastice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2* (1956).
7. Ф. П. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, 1954.
8. И. М. Рабинович, *Курс строительной механики.* Часть II, Москва, 1954.
9. А. Р. Ржаницын, *Устойчивость равновесия упругих систем.* Москва, 1955.

NOUĂ CONTRIBUȚIE LA PROBLEMA REPARTIZĂRII PRESIUNII HIDROSTATICE LA BARAJELE ARCUITE

DE

RADU PRIȘCU *)

1. INTRODUCERE

Este cunoscut faptul că eforturile care acționează în corpul barajelor arcuite sub efectul diferitelor solicitări nu pot fi determinate în mod riguros. Rezolvarea acestei probleme întîmpină încă serioase dificultăți, create în special de forma în spațiu a acestor baraje și de condițiile de rezemare.

Unele metode aproximative consideră o asemenea structură constituită dintr-o rețea de arce orizontale, încastrate în versanți, și de console verticale, încastrate la bază. În această ipoteză repartiția diferitelor solicitări după elementele orizontale și verticale se determină în mod obișnuit pe două căi :

— fie direct, punînd condiția ca deplasările arcelor și consolelor să fie identice în nodurile rețelei (metoda egalării deplasărilor, preconizată de S. H. Woodgard, H. Ritter și A. Stucky);

— fie indirect, admițînd o anumită repartiție și verificînd egalitatea deplasărilor, prin încercări succesive (metoda sarcinilor de probă, preconizată de F. A. Noetzli și dezvoltată de inginerii americani).

La barajele simetrice față de secțiunea centrală, denumită și secțiune maestră, precum și la cele ușor asimetrice, condiția egalității deplasărilor poate fi pusă, într-o primă fază de calcul, numai în nodurile din această secțiune. În acest caz, dacă ne referim la presiunea hidrostatică, se admite că arcele orizontale sînt încărcate respectiv cu o sarcină constantă, normală pe extrados.

Într-o lucrare anterioară [1], elaborată în colaborare cu M. Constantinescu, s-a prezentat o metodă de calcul a repartiției presiunii hidrostatice în secțiunea maestră, neglijînd efectul forțelor tăietoare.

---

*) Institutul de construcții, București.

Aplicînd această metodă la calculul unor baraje de forme şi dimensiuni diferite, s-au constatat unele nepotriviri în regiunile inferioare unde arcele se încărcau excesiv de mult. De această deficienţă suferă toate metodele de calcul care neglijează atît efectul forţelor tăietoare cît şi faptul că la arcele groase (pentru care raportul între raza de curbură şi grosime este mai mic de 5) axa neutră nu mai coincide cu fibra medie.

În cele ce urmează, se extinde metoda amintită ţinînd seama de aceste elemente şi se prezintă comparativ unele rezultate practice.

2. EXPUNEREA METODEI

Se porneşte de la ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate a secţiunii maestre [2], fibră medie considerată verticală în starea iniţială

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M}{EI} + \frac{\varphi}{GS}\frac{dQ}{dz},$$

în care

w = deplasarea radială orizontală,
z = ordonata curentă,
M = momentul încovoietor într-o secţiune oarecare,
Q = forţa tăietoare,
I = momentul de inerţie al secţiunii,
S = suprafaţa secţiunii,
E = modulul de elasticitate al materialului,
G = modulul de tăiere,
φ = raportul între efortul de alunecare în centrul unei secţiuni şi efortul de alunecare mediu.

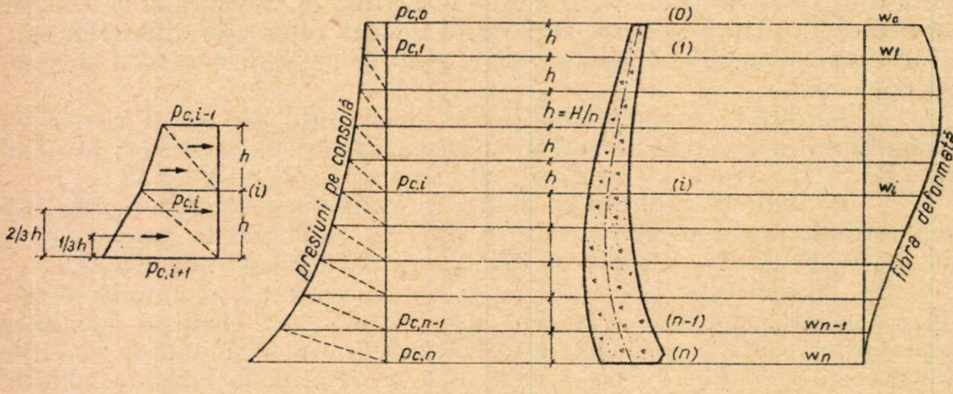


Fig. 1. — Schema de calcul pentru secţiunea maestră.

Deoarece încărcarea care revine consolei din presiunea hidrostatică este continuă, de asemenea şi forţa tăietoare este o funcţie continuă, funcţie care poate fi derivată în raport cu variabila z

$$\frac{dQ}{dz} = p_c,$$

astfel încît ecuaţia fibrei medii deformate devine

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M}{EI} + \frac{\varphi p_c}{GS} \quad \text{sau} \quad M = EI\left(\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{\varphi p_c}{GS}\right).$$

Împărţind consola în n intervale egale, de înălţime h (fig. 1), se scrie ecuaţia fibrei medii prin diferenţe finite în secţiunile (0), (1),..., (i),..., (n), după cum urmează :

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}
M_0 &= EI_0\left(\frac{w_{-1} - 2w_0 + w_1}{h^2} - \frac{\varphi p_{c,0}}{GS_0}\right), && (0)\\
M_1 &= EI_1\left(\frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{h^2} - \frac{\varphi p_{c,1}}{GS_1}\right), && (1)\\
&\vdots && \vdots\\
M_i &= EI_i\left(\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} - \frac{\varphi p_{c,i}}{GS_i}\right), && (i)\\
&\vdots && \vdots\\
M_n &= EI_n\left(\frac{w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}}{h^2} - \frac{\varphi p_{c,n}}{GS_n}\right). && (n)
\end{aligned}\right.$$

Un al doilea grup de ecuaţii se obţine scriind expresiile momentelor funcţie de sarcinile necunoscute ce revin consolei : $p_{c,0}, p_{c,1}, \ldots, p_{c,i}, \ldots, p_{c,n}$. În acest scop, se face aproximaţia că aceste sarcini variază liniar pe un interval de înălţime h. Pentru uşurinţă, trapezele respective se împart în cîte două triunghiuri componente, cum apare în schema din figura 1. Rezultă succesiv :

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}
M_0 &= 0, && (0)\\
M_1 &= \frac{h^2}{6}(2p_{c,0} + p_{c,1}), && (1)\\
M_2 &= \frac{h^2}{6}(5p_{c,0} + 6p_{c,1} + p_{c,2}), && (2)\\
&\vdots && \vdots\\
M_i &= \frac{h^2}{6}[(3i - 1)p_{c,0} + 6(i - 1)p_{c,1} + 6(i - 2)p_{c,2} + \\
&\qquad + \ldots + 6p_{c,i-1} + p_{c,i}], && (i)\\
&\vdots && \vdots\\
M_n &= \frac{h^2}{6}[(3n - 1)p_{c,0} + 6(n - 1)p_{c,1} + 6(n - 2)p_{c,2} + \\
&\qquad + \ldots + 6p_{c,n-1} + p_{c,n}]. && (n)
\end{aligned}\right.$$

Cunoscînd că deplasarea radială (w_i) în secţiunea de la cheie a unui arc (i), încărcat uniform la extrados cu presiunea $p_{a.i}$, se poate exprima, indiferent de faptul că grosimea arcului este constantă sau variabilă, sub forma generală

$$w_i = p_{a,i}\,\frac{a_i}{E} \quad \text{şi deci} \quad p_{a,i} = \frac{E\,w_i}{a_i}$$

în care coeficientul a_i este funcţie numai de elementele geometrice, se poate scrie al treilea grup de ecuaţii, în care se arată că presiunea $p_{c,i}$ ce revine consolei într-o secţiune oarecare (i) este egală cu diferenţa dintre presiunea hidrostatică totală p_i şi presiunea ce revine arcului $p_{a,i}$

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{array}{llr} p_{c,0} = p_0 - \dfrac{E\,w_0}{a_0}, & & (0)\\ p_{c,1} = p_1 - \dfrac{E\,w_1}{a_1}, & & (1)\\ \vdots & & \vdots\\ p_{c,i} = p_i - \dfrac{E\,w_i}{a_i}, & & (i)\\ \vdots & & \vdots\\ p_{c,n} = p_n - \dfrac{E\,w_n}{a_n}. & & (n) \end{array}\right.$$

Deplasările radiale ale consolei din grupul (I) de ecuaţii trebuie să fie identice cu cele ale arcelor, care figurează în grupul (III) de ecuaţii. Se obţine astfel un sistem de $(3n + 3)$ ecuaţii cu $(3n + 5)$ necunoscute : $(n + 1)$ necunoscute M_i, $(n + 3)$ necunoscute w_i şi $(n + 1)$ necunoscute $p_{c,i}$.

Pentru a se limita la maximum cinci numărul necunoscutelor w care vor figura în ecuaţiile sistemului final, se scrie în prealabil un sistem echivalent grupului (II), de forma

$$(\text{II},\ i + 1) - 2\,(\text{II},\ i) + (\text{II},\ i - 1),$$

şi anume

$$\text{(II}'\text{)}\quad\left\{\begin{array}{llr} M_1 - 2M_0 & = \dfrac{h^2}{6}\,(2p_{c,0} + p_{c,1}), & (0)\\ M_2 - 2M_1 + M_0 & = \dfrac{h^2}{6}\,(p_{c,0} + 4p_{c,1} + p_{c,2}), & (1)\\ \vdots & & \vdots\\ M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} & = \dfrac{h^2}{6}\,(p_{c,i-1} + 4p_{c,i} + p_{c,i+1}), & (i)\\ \vdots & & \vdots\\ M_n - 2M_{n-1} + M_{n-2} & = \dfrac{h^2}{6}\,(p_{c,n-2} + 4p_{c,n-1} + p_{c,n}). & (n-1) \end{array}\right.$$

În acest sistem de ecuaţii se înlocuiesc momentele cu expresiile lor funcţie de deplasări, conform grupului (I), şi presiunile pe consolă funcţie de deplasări, conform grupului (III). Trecînd deplasările în membrul întîi şi presiunile în al doilea, cu notaţiile $k_i = h^4/6a_i$ şi

$l_i = \varphi h^2 EI_i/a_i GS_i$, se obține sistemul general de n ecuații cu $(n+3)$ necunoscute

$$
\text{(IV)}\left\{
\begin{array}{lr}
-2I_0 w_{-1} + (4I_0 + I_1 + 2k_0 - 2l_0)\, w_0 - & \\
\quad - (2I_0 + 2I_1 - k_1 - l_1)\, w_1 + I_1 w_2 = & \\
\quad = \dfrac{h^4}{6E}(2p_0 + p_1) + \dfrac{1}{E}(a_1 l_1 p_1 - 2a_0 l_0 p_0)\,, & (0) \\[2ex]
I_0 w_{-1} - (2I_0 + 2I_1 - k_0 - l_0)\, w_0 + & \\
\quad + (I_0 + 4I_1 + I_2 + 4k_1 - 2l_1)\, w_1 - & \\
\quad - (2I_1 + 2I_2 - k_2 - l_2)\, w_2 + I_2 w_3 = & \\
\quad = \dfrac{h^4}{6E}(p_0 + 4p_1 + p_2) + \dfrac{1}{E}(a_0 l_0 p_0 - 2a_1 l_1 p_1 + a_2 l_2 p_2)\,, & (1) \\[2ex]
I_{i-1} w_{i-2} - (2I_{i-1} + 2I_i - k_{i-1} - l_{i-1})\, w_{i-1} + & \\
\quad + (I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + 4k_i - 2l_i)\, w_i - & \\
\quad - (2I_i + 2I_{i+1} - k_{i+1} - l_{i+1})\, w_{i+1} + I_{i+1} w_{i+2} = & \\
\quad = \dfrac{h^4}{6E}(p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1}) + & \\
\quad + \dfrac{1}{E}(a_{i-1} l_{i-1} p_{i-1} - 2a_i l_i p_i + a_{i+1} l_{i+1} p_{i+1})\,, & (i) \\[2ex]
I_{n-2} w_{n-3} - (2I_{n-2} + 2I_{n-1} - k_{n-2} - l_{n-2})\, w_{n-2} + & \\
\quad + (I_{n-2} + 4I_{n-1} + I_n + 4k_{n-1} - 2l_{n-1})\, w_{n-1} - & \\
\quad - (2I_{n-1} + 2I_n - k_n - l_n)\, w_n + I_n w_{n+1} = & \\
\quad = \dfrac{h^4}{6E}(p_{n-2} + 4p_{n-1} + p_n) + & \\
\quad + \dfrac{1}{E}(a_{n-2} l_{n-2} p_{n-2} - 2a_{n-1} l_{n-1} p_{n-1} + a_n l_n p_n)\,. & (n-1)
\end{array}
\right.
$$

Pentru determinarea celor trei necunoscute suplimentare din grupul $w_{-1}, w_0, w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$, sînt necesare încă trei relații care se obțin punînd condițiile de margine.

Încastrarea consolei în fundație fiind elastică, problema se poate rezolva în două moduri (după F. Vogt):

— fie exprimînd deplasarea radială w_n și rotația fibrei medii funcție de solicitările consolei în secțiunea de fundație (n);

— fie prelungind suprafața mediană a barajului cu 40—50% din grosime în fundații și calculînd un baraj fictiv, perfect încastrat pe contur.

Admițînd cea de-a doua cale, care prezintă același grad de aproximație ca restul ipotezelor din lucrarea de față, se pun condițiile unei încastrări perfecte în secțiunea (n), și anume:

a) deplasarea radială să fie nulă

$w_n = 0$, ceea ce conduce după (III, n) la $p_{c.n} = p_n$;

b) rotația fibrei medii să fie nulă

$\dfrac{dw_n}{dz} = 0$, ceea ce, prin diferențe finite, conduce la $\dfrac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2h} = 0$ sau $w_{n+1} = w_{n-1}$.

La coronamentul barajului, în secţiunea (0), momentul încovoietor M_0 este nul; după relaţia (I, 0) această condiţie conduce la

$$c)\quad w_{-1} = \left(2 - \frac{l_0}{I_0}\right) w_0 - w_1 + \frac{a_0 l_0}{E I_0} p_0 .$$

Înlocuind condiţiile de margine, formulate mai sus, în grupul (IV) de ecuaţii, se obţine sistemul final de n ecuaţii cu n necunoscute $(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$

$$\begin{aligned}
&(I_1 + 2k_0) w_0 - (2I_1 - k_1 - l_1) w_1 + I_1 w_2 = \\
&\quad = \frac{h^4}{6E}(2p_0 + p_1) + \frac{a_1 l_1}{E} p_1 , \qquad (0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-(2I_1 - k_0) w_0 + (4I_1 + I_2 + 4k_1 - 2l_1) w_1 - \\
&\quad - (2I_1 + 2I_2 - k_2 - l_2) w_2 + I_2 w_3 = \\
&\quad = \frac{h^4}{6E}(p_0 + 4p_1 + p_2) + \frac{1}{E}(-2a_1 l_1 p_1 + a_2 l_2 p_2) , \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&I_{i-1} w_{i-2} - (2I_{i-1} + 2I_i - k_{i-1} - l_{i-1}) w_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + \\
&\quad + 4k_i - 2l_i) w_i - (2I_i + 2I_{i+1} - k_{i+1} - l_{i+1}) w_{i+1} + I_{i+1} w_{i+2} = \\
&\quad = \frac{h^4}{6E}(p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1}) + \\
&\quad + \frac{1}{E}(a_{i-1} l_{i-1} p_{i-1} - 2a_i l_i p_i + a_{i+1} l_{i+1} p_{i+1}) , \qquad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&I_{n-3} w_{n-4} - (2I_{n-3} + 2I_{n-2} - k_{n-3} - l_{n-3}) w_{n-3} + \\
&\quad + (I_{n-3} + 4I_{n-2} + I_{n-1} + 4k_{n-2} - 2l_{n-2}) w_{n-2} - \\
&\quad - (2I_{n-2} + 2I_{n-1} - k_{n-1} - l_{n-1}) w_{n-1} = \\
&\quad = \frac{h^4}{6E}(p_{n-3} + 4p_{n-2} + p_{n-1}) + \\
&\quad + \frac{1}{E}(a_{n-3} l_{n-3} p_{n-3} - 2a_{n-2} l_{n-2} p_{n-2} + a_{n-1} l_{n-1} p_{n-1}) , \qquad (n-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&I_{n-2} w_{n-3} - (2I_{n-2} + 2I_{n-1} - k_{n-2} - l_{n-2}) w_{n-2} + \\
&\quad + (I_{n-2} + 4I_{n-1} + 2I_n + 4k_{n-1} - 2l_{n-1}) w_{n-1} = \\
&\quad = \frac{h^4}{6E}(p_{n-2} + 4p_{n-1} + p_n) + \\
&\quad + \frac{1}{E}(a_{n-2} l_{n-2} p_{n-2} - 2a_{n-1} l_{n-1} p_{n-1} + a_n l_n p_n) . \qquad (n-1)
\end{aligned}$$

3. MODUL DE APLICARE

Pentru calculul deplasărilor radiale ale arcelor în secţiunea de la cheie se poate folosi formula lui W. Cain [3], care ţine seama de efectul forţelor tăietoare

$$w = p_a \frac{r r_e}{Ed} \frac{(1 - \cos\alpha)\left[\left(1 + \frac{d^2}{12r^2}\right)(\alpha - \sin\alpha) + \frac{d^2}{4r^2}(\alpha + \sin\alpha)\right]}{\left(1 + \frac{d^2}{12r^2}\right)\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}\right) + \frac{d^2}{4r^2}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}$$

în care

p_a = presiunea uniformă pe extradosul arcului,
r_e = raza exterioară a arcului,
r_i = raza interioară a arcului,
r = raza medie a arcului,
d = grosimea arcului,
α = semiunghiul la centru al arcului,
E = modulul de elasticitate.

Dacă arcele sînt groase [2], pentru a ține seama de excentricitatea axei neutre, raza medie din formula precedentă se înlocuiește prin $r = d/Ln\,\frac{r_e}{r_i}$.

Modulul de tăiere G poate fi exprimat funcție de modulul de elasticitate E și de μ, coeficientul lui Poisson, sub forma $G = E/2\,(1 + \mu)$. Dacă, după recomandările a diverși autori [3], se admite $\mu = 0{,}20$ și coeficientul $\varphi = 1{,}25$, atunci factorul l_i care figurează în grupurile de ecuații (IV) și (V) devine $l_i = h^2 d_i^2/4\,a_i$.

Pentru arce subțiri, la care efectul forței tăietoare este mai puțin important și poate fi neglijat, formula lui W. Cain are expresia simplificată [3]

$$w = p_a \frac{r\,r_e}{Ed} \frac{(\alpha - \sin\alpha)(1 - \cos\alpha)}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha\left(1 + \frac{d^2}{12\,r^2}\right)}},$$

cu aceleași notații ca mai înainte.

În grupul de ecuații finale (IV) și (V) neglijarea efectului forței tăietoare se traduce prin anularea termenilor care conțin factorul l_i.

★

Metoda expusă mai sus a fost aplicată la calculul preliminar al unui baraj de 70 m înălțime, cu grosimea la coronament de 3,80 m, iar la bază de 22 m. La coronament raza medie este de 115 m și unghiul la centru de 122°. Arcele componente sînt de grosime constantă.

Pentru a se ține seama de rezemarea elastică, barajul a fost prelungit de-a lungul suprafeței de fundație cu aproximativ 45% din grosime. În secțiunea maestră a rezultat o înălțime de 80 m care a fost împărțită în zece intervale egale, cu $h = 8$ m (fig. 2).

Calculele au fost efectuate în paralel, ținînd și neținînd seama de efectul forțelor tăietoare și de poziția axei neutre.

Calculînd coeficienții sistemului de ecuații (V) s-a obținut matricea indicată mai departe. Termenii liberi din ultima coloană corespund situației în care nivelul apei se găsește la cota coronamentului. Al doilea rînd de

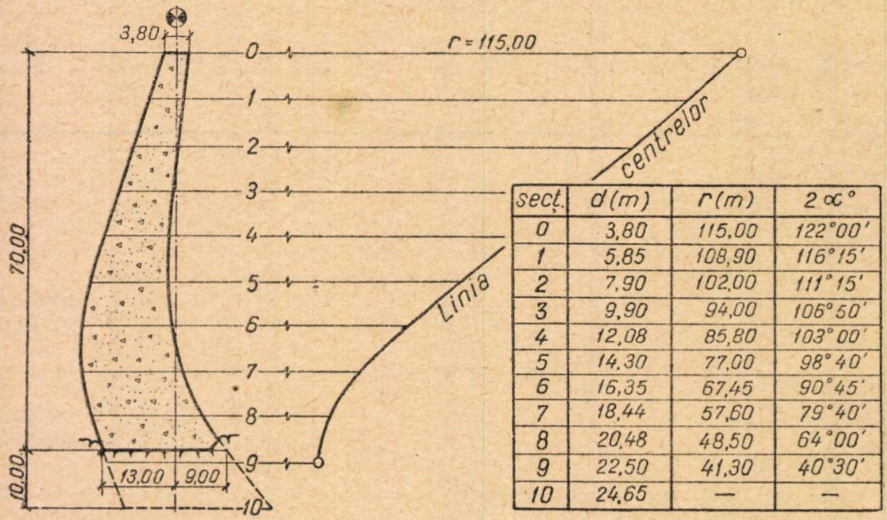
Matricea

Secţiunea	Ew_0	Ew_1	Ew_2	Ew_3	Ew_4
0	16,88766 16,88752	−33,05211 −33,19253	16,68347 16,68347		
1	−33,26484 −33,26491	108,23901 108,51806	−114,87694 −115,27185	41,08658 41,08658	
2	16,68347 16,68347	−115,22528 −115,36570	262,17740 262,96105	−242,56902 −243,49176	80,85825 80,85825
3		41,08658 41,08658	−243,22650 −243,62142	511,18081 513,01046	−452,87305 −454,92326
4			80,85825 80,85825	−454,19434 −455,11707	910,44147 914,50600
5				146,89924 146,89924	−778,52437 −780,57458
6					243,68391 243,68391
7					
8					
9					

ecuațiilor

Ew_5	Ew_6	Ew_7	Ew_8	Ew_9	Termenul liber
					9841,8133 5461,3333
					39984,0000 32768,0000
					75598,4000 65536,0000
146,89924 146,89924					113723,5968 98304,0000
−775,89140 −780,26622	243,68391 243,68391				150152,8064 131072,0000
1480,77562 1489,46210	−1205,15348 −1214,35463	364,22690 364,22690			182110,7968 163840,0000
−1210,54672 −1214,92154	2210,58364 2228,97776	−1749,82762 −1770,69107	522,51829 522,51829		221544,3456 196608,0000
364,22690 364,22690	−1762,82224 −1772,02339	3138,63117 3181,32518	−2419,79129 −2469,83330	715,82788 715,82788	254836,1996 229376,0000
	522,51829 522,51829	−2453,02958 −2473,89303	4250,48945 4362,48471	−3199,53503 −3302,05059	291020,6464 262144,0000
		715,82788 715,82788	−3273,19218 −3323,23422	6808,79088 7121,18913	335765,5296 294912,0000

cifre scrise în casete corespund ipotezei în care nu se ţine seama de efectul forţelor tăietoare. Se remarcă diferenţele mari între valorile termenilor



secţ.	d (m)	r (m)	2 ∝°
0	3,80	115,00	122°00′
1	5,85	108,90	116°15′
2	7,90	102,00	111°15′
3	9,90	94,00	106°50′
4	12,08	85,80	103°00′
5	14,30	77,00	98°40′
6	16,35	67,45	90°45′
7	18,44	57,60	79°40′
8	20,48	48,50	64°00′
9	22,50	41,30	40°30′
10	24,65	—	—

Fig. 2. — Secţiunea maestră a unui baraj arcuit înalt de 70 m.

liberi precum şi diferenţele mai reduse între coeficienţii necunoscutelor, diferenţe care se accentuează în regiunea inferioară a barajului.

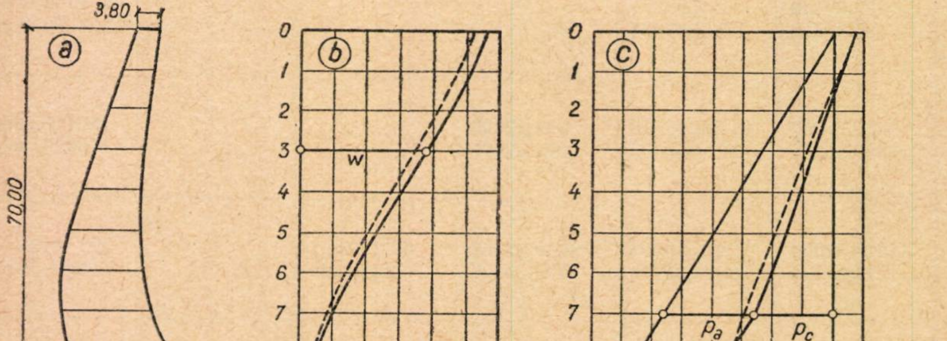


Fig. 3. — Secţiunea maestră *a*), deplasările radiale *b*) şi repartiţia presiunii hidrostatice *c*) : ţinînd seama de forţele tăietoare şi de excentricitatea axei neutre — linie plină — şi neţinînd seama de aceste elemente — linie întreruptă.

Rezolvarea sistemului de ecuaţii se poate face pornind de la ultima ecuaţie către prima, prin eliminarea succesivă a necunoscutelor. Se grupează ultimele trei ecuații care conțin pe w_9 împărțind pe fiecare cu coeficientul lui w_9 și aranjînd semnul lui w_9 la două ecuații cu (+), iar la cea cu termeni mai puțini cu (—). Adunînd ecuațiile cu semnul (+) respectiv cu ecuația cu semnul (—), se obțin două ecuații echivalente care nu mai conțin pe w_9. Se asociază ecuația următoare care se termină cu w_8 și acestui nou grup de trei ecuații i se aplică același procedeu, eliminîndu-se w_8. În acest mod, se ajunge la valoarea lui w_0 și apoi, succesiv, la valoarea celorlalte necunoscute.

Tabela 1

Secțiunea	a_i	Ew_i	$p_{a,i}$ (t/m²)	p_i (t/m²)	$p_{c,i}$ (t/m²)	w_i (mm)
0	6686,481 6690,976	44484,781 41253,881	6,65 6,17	0,00	−6,65 −6,17	27,80 25,78
1	3907,651 3914,331	40428,164 37218,369	0,35 9,51	8,00	−2,35 −1,51	25,27 23,26
2	2535,155 2544,898	35654,153 32616,539	14,06 12,82	16,00	1,94 3,18	22,28 20,39
3	1704,341 1715,630	30172,793 27404,964	17,70 15,97	24,00	6,30 8,03	18,86 17,13
4	1142,153 1153,699	24277,674 21859,154	21,26 18,94	32,00	10,74 13,06	15,17 13,66
5	749,684 758,451	18350,397 16322,015	24,48 21,52	40,00	15,52 18,48	11,47 10,20
6	464,919 465,352	12746,298 11149,251	27,42 23,96	48,00	20,58 24,04	7,97 6,97
7	258,770 248,870	7794,449 6555,758	30,12 27,29	56,00	25,88 28,71	4,87 4,16
8	128,988 99,528	3792,518 3129,384	29,40 30,44	64,00	34,60 33,56	2,37 1,96
9	67,270 24,344	1053,037 837,753	15,65 34,21	72,00	56,35 37,79	0,66 0,52
10	—	0	0	80,00	80,00 80,00	0

Procedînd în modul indicat, s-a ajuns la rezultatele trecute în tabela 1 (al doilea rînd de cifre scrise în casete se referă la cazul în care nu s-a ținut seama de efectul forțelor tăietoare și al excentricității axei neutre) și reprezentate grafic în figura 3. Pentru modulul de elasticitate al betonului s-a admis valoarea $E = 1{,}6 . 10^6$ t/m².

În cazul în care se ține seama de efectul forțelor tăietoare și al excentricității axei neutre, sînt de remarcat :

— deplasările radiale cu valori mai mari,

— încărcarea mai pronunțată a arcelor în regiunea superioară şi a consolei în regiunea inferioară a barajului,

— continuitatea diagramei de încărcare, conformă cu modul în care variază elementele geometrice şi rigiditatea barajului.

În ceea ce priveşte timpul necesar pentru efectuarea calculelor numerice după această metodă, el este destul de redus. Pentru barajul calculat mai sus, care s-a împărțit în zece intervale, au fost necesare 25 ore de lucru.

Primit la redacție la 30 aprilie, 1959

НОВЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В АРОЧНЫХ ПЛОТИНАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе изложен метод распределения гидростатического давления в центральном сечении арочных плотин. Учитываются только радиальные перемещения и принимается во внимание эффект срезывающих сил и эксцентричность нулевой линии. Разделив центральное сечение на (*n*) равных отрезков, пишут три группы уравнений:

—первая группа (I), в которой выражено уравнение средней линии, деформированной конечными разностями;

— вторая группа (II), в которой выписаны выражения зависимости изгибающих моментов от неизвестных нагрузок, действующих на консоль;

— третья группа (III), в которой указано, что давление, приходящееся на консоль, в любом сечении, равно разности между общим давлением и давлением, приходящимся на арку.

Комбинируя эти три группы уравнений, получаем систему (IV) (*n*) уравнений с $(n+3)$ неизвестными. Поставив конечные условия, получаем окончательную систему (*n*) уравнений с (*n*) неизвестными (V). Следует отметить, что коэффициенты неизвестных находятся в зависимости только от геометрических элементов плотины, а свободные члены — от нагрузок. Следовательно, можно легко производить распределение гидростатического давления для любого горизонта воды в водохранилище.

В конце работы с помощью практического примера показан способ применения предложенного метода. Выявляется влияние срезывающих сил и эксцентричности нулевой линии на распределение гидростатического давления.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Расчетная схема для центрального сечения.

Рис. 2. — Центральное сечение арочной плотины высотой 70 м.

Рис. 3. — Центральное сечение (*a*), радиальные перемещения (*b*) и распределение гидростатического давления (*c*) с учетом срезывающих сил и эксцентричности нулевой линии — сплошной линией и без учета этих элементов — штриховой.

NOUVELLE CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE LA RÉPARTITION DE LA PRESSION HYDROSTATIQUE DANS LES BARRAGES-VOÛTES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, on expose une méthode de répartition de la pression hydrostatique dans la section centrale des barrages-voûtes, en tenant compte des déplacements radiaux, de l'effet des efforts tranchants et de l'excentricité de l'axe neutre. En divisant la section centrale en (n) intervalles égaux, on écrit trois groupes d'équations :

— un premier groupe (I), dans lequel est exprimé l'équation de la fibre moyenne déformée, par différences finies ;

— un second groupe (II), qui comprend les expressions des moments fléchissants, fonction des charges inconnues qui reviennent à la console ;

— un troisième groupe (III), dans lequel il est montré que la pression qui revient à la console, dans une section quelconque, est égale à la différence entre la pression totale et la pression qui revient à l'arc.

De la combinaison des trois groupes d'équations, on obtient un système de (n) équations avec ($n + 3$) inconnues (IV) et, en posant ensuite les conditions aux limites, on obtient le système final de (n) équations avec (n) inconnues (V). A remarquer que les coefficients des inconnues ne sont fonction que des éléments géométriques du barrage, tandis que les termes libres sont fonction des charges. La répartition de la pression hydrostatique peut donc être calculée facilement, pour n'importe quel niveau de l'eau du lac.

A la fin de l'étude, on montre, à l'aide d'un exemple pratique, le mode d'application de la méthode proposée, tout en insistant sur l'effet des efforts tranchants et de l'excentricité de l'axe neutre sur la distribution de la pression hydrostatique.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma de calcul pour la section centrale.

Fig. 2. — Section centrale d'un barrage-voûte de 70 m de hauteur.

Fig. 3. — Section centrale (*a*), déplacements radiaux (*b*) et répartition de la pression hydrostatique (*c*) : en tenant compte des efforts tranchants et de l'excentricité de l'axe neutre (tracé continu) et en négligeant ces éléments (tirets).

BIBLIOGRAFIE

1. R. PRIȘCU și M. CONSTANTINESCU, *O metodă de determinare a distribuției presiunii hidrostatice în secțiunea maestră a barajelor arcuite.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
2. S. TIMOSHENKO, *Résistance des matériaux.* Paris, 1947—1949.
3. C. V. DAVIS, *Handbook of applied hydraulics.* New York, 1942.

STRUCTURI SUBȚIRI DE FORMĂ CILINDRICĂ CIRCULARĂ, CONSTRUITE DIN STRATURI ELASTICE, IZOTROPE

DE

LIVIU LIBRESCU

În lucrările [1], [2] am studiat cîteva probleme ale structurilor subțiri, de formă arbitrară, construite din straturi elastice, izotrope simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafața mediană.

În cele ce urmează, reluînd metodica folosită de A. L. Goldenweiser în studiul stării de tensiune a cocilor cilindrice omogene [3], vom analiza starea de tensiune a structurilor de formă cilindrică circulară, cu neomogenitate de tipul arătat mai sus.

1. IPOTEZE

Vom adopta ipotezele utilizate de noi în lucrările [1], [2], ipoteze formulate de S. A. Ambarțumian [4] și E. I. Grigoliuc [5]. Conform acestor ipoteze, straturile sînt împreunate rigid. Se exclude astfel posibilitatea ca ele să alunece pe suprafețele de contact, fiind astfel forțate a se deforma împreună ca un tot.

Pentru structura în ansamblu vom considera valabile :

a) ipoteza nedeformabilității elementului normal la suprafața mediană a structurii ;

b) ipoteza nulității eforturilor unitare normale pe suprafețele echidistante față de suprafața mediană.

2. CONSIDERAȚII GEOMETRICE

Vom alege sistemul de axe cartezian xyz în așa fel încît axa x să fie paralelă cu generatoarele cilindrului (fig. 1). În cele ce urmează vom referi suprafața mediană a structurii la un sistem curbiliniu ortogonal ξ, θ unde ξ și θ sînt parametrii adimensionali definiți prin relațiile

$$\xi = \frac{\alpha}{r}, \quad \theta = \frac{\beta}{r}, \tag{1}$$

r fiind raza cilindrului, iar α şi β reprezentînd corespunzător lungimile arcurilor generatoarei şi a cercului director. În felul acesta elementul de arc al cilindrului va fi dat de relaţia

$$ds^2 = r^2 d\xi^2 + r^2 d\theta^2. \tag{2}$$

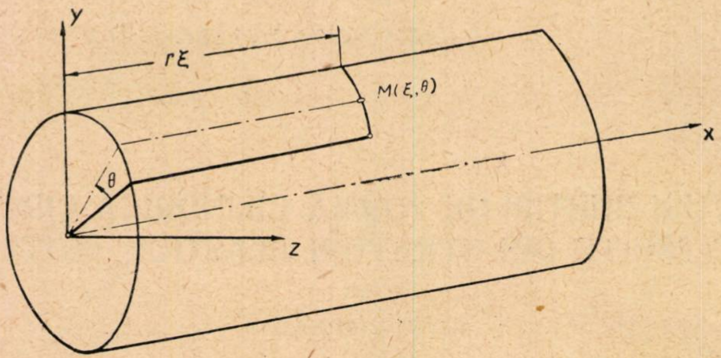


Fig. 1

Astfel, coeficienţii primei forme patratice A, B şi razele principale de curbură ale suprafeţei R_1' şi R_2' se vor determina cu ajutorul formulelor

$$A = r, \qquad \chi = \frac{\pi}{2}, \qquad B = r,$$

$$\frac{1}{R_1'} = 0, \qquad \frac{1}{R_{12}} = 0, \qquad \frac{1}{R_2'} = \frac{1}{r}.$$

3. ECUAŢIILE DE BAZĂ

Ecuaţiile de echilibru precum şi relaţiile deformaţii-deplasări îşi menţin aceeaşi formă ca şi în cazul omogen. Ele sînt date de relaţiile (3).

a) Ecuaţii de echilibru

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + r X = 0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{\partial G_2}{\partial \theta} + r N_2 = 0,\\ \frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} - N_2 + rY = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta} - r N_1 = 0,\\ T_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + rZ = 0, \quad S_1 + S_2 + \frac{H_2}{r} = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

b) Ecuaţiile geometrice deformaţii-deplasări

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right), \quad \omega = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right),\\ \varkappa_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right), \quad \tau = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\right),\\ \gamma_1 = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\right).\end{gathered} \tag{4}$$

Ecuațiile fizice ce le vom utiliza au fost deduse după procedeul propus de V. N. Novojilov [6]. Ele au marele avantaj de a satisface identic ecuația a șasea de echilibru, ecuație ce va fi complet ignorată din considerațiile ulterioare. Ele au fost stabilite considerînd fiecare strat component ca fiind omogen, izotrop și ascultînd de legea fizică a lui Hooke. Aceste ecuații particularizate pentru cazul cilindrului sînt date de relațiile *c*)

c) Ecuații fizice

$$T_1 = 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2} \left[\varepsilon_1 + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}} \varepsilon_2 \right],$$

$$T_2 = 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2} \left[\varepsilon_2 + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1-\mu_j^2}} \varepsilon_1 \right],$$

$$S_1 = 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1+\mu_j} \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3)}{1+\mu_j}}{\displaystyle 3\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1+\mu_j}} \frac{\tau}{r} \right),$$

$$S_2 = -2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1+\mu_j} \frac{\omega}{2}, \qquad (5)^{*)}$$

$$G_1 = -\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2} \left[\varkappa_1 + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}} \varkappa_2 \right],$$

$$G_2 = -\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2} \left[\varkappa_2 + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1-\mu_j^2}} \varkappa_1 \right],$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1+\mu_j} \tau .$$

---

*) În aceste relații și în cele ce vor urma, vom nota cu *j* un strat oarecare din cele $2n + 1$ straturi considerate, iar mărimile statice, fizice și geometrice ce caracterizează stratul *j* le vom afecta cu indicele *j*.

Vom introduce în cele ce urmează următoarele notații :

$$\mu^{\star} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j E_j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_j (\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}, \quad \mu^{\star\star} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{\mu_j E_j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_j^2}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_j \left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_j^2}}, \qquad (5')^{*)}$$

$$F^{\star} = 2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1 - \mu_j^2}, \quad G^{\star\star} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 - \mu_j^2}, \quad h^{\star 2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 + \mu_j}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1 + \mu_j}}.$$

$$a^2 = \frac{h^{\star 2}}{3r^2}$$

Eliminînd eforturile tăietoare în primele cinci ecuații de echilibru (3) și ignorînd ecuația a șasea, sistemul ecuațiilor de echilibru devine

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + rX = 0, \\ &\frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_2}{\partial \theta} - \frac{\partial H_1}{\partial \xi}\right) + rY = 0, \qquad (6) \\ &T_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial G_2}{\partial \theta} - \frac{\partial H_1}{\partial \xi}\right) + rZ = 0. \end{aligned}$$

Exprimînd în aceste ecuații eforturile și momentele prin deplasări conform relațiilor

$$\begin{aligned} &T_2 = F^{\star}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w + \mu^{\star}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right], \quad T_1 = F^{\star}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \mu^{\star}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w\right)\right], \\ &S_1 = \frac{1}{r}F^{\star}(1 - \mu^{\star})\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\right)\right], \\ &S_2 = -\frac{1}{r}F^{\star}\frac{1 - \mu^{\star}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right), \qquad (7) \\ &G_1 = -\frac{1}{r^2}G^{\star\star}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu^{\star\star}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\right)\right], \\ &G_2 = -\frac{1}{r^2}G^{\star\star}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\right) + \mu^{\star\star}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right], \\ &H_1 = -H_2 = \frac{1}{r^2}G^{\star\star}(1 - \mu^{\star\star})\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\right), \end{aligned}$$

---

*) În virtutea lui (5′) se observă că avem și relațiile

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j(\delta_j - \delta_{j-1})}{1 + \mu_j} = F^{\star}(1 - \mu^{\star}), \quad \sum_{j=1}^{n+1} \frac{E_j\left(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3\right)}{1 + \mu_j} = G^{\star\star}(1 - \mu^{\star\star})$$

$$\frac{G^{\star\star}}{r^2} = \frac{F^{\star}(1 - \mu^{\star})}{1 - \mu^{\star\star}} a^2.$$

se obţin ecuaţiile de echilibru în deplasări date de

$$\begin{aligned} &L_{11}\,u + L_{12}\,v + L_{13}\,w + r^2\,\overline{X} = 0\,, \\ &L_{21}\,u + L_{22}\,v + L_{23}\,w + r^2\,\overline{Y} = 0\,, \\ &L_{31}\,u + L_{32}\,v + L_{33}\,w - r^2\,\overline{Z} = 0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

unde $L_{ik}(i,\ k = 1,2,3)$ sînt operatori diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi daţi de relaţiile

$$\begin{aligned} &L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\mu^*}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\mu^*}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\theta}\,, \\ &L_{13} = L_{31} = -\,\mu^*\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,, \\ &L_{22} = \frac{1}{2}(1-\mu^*)\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + a^2\left[2\,(1-\mu^*)\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1-\mu^*}{1-\mu^{**}}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right], \\ &L_{23} = L_{32} = -\,\frac{\partial}{\partial\theta} + a^2\left[(2-\mu^{**})\,\frac{1-\mu^*}{1-\mu^{**}}\,\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\theta} + \frac{1-\mu^*}{1-\mu^{**}}\,\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\right], \\ &L_{33} = 1 + \frac{1-\mu^*}{1-\mu^{**}}\,a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right), \\ &\qquad \overline{X} = \frac{X}{F^*}\,, \quad \overline{Y} = \frac{Y}{F^*}\,, \quad \overline{Z} = \frac{Z}{F^*}\,. \end{aligned} \tag{8'}$$

Sistemul de ecuaţii (8) cu cele trei necunoscute u, v, w stă la baza calculului stării de tensiune a structurilor pe care le avem în vedere.

4. ECUAŢIA REZOLVENTĂ ŞI FUNCŢIA POTENŢIALĂ DE DEPLASARE

În cele ce urmează vom considera cazul absenţei sarcinilor superficiale, caz la care putem reduce problema întotdeauna. Vom considera în consecinţă cunoscută integrala particulară a sistemului de ecuaţii (8)*).

În scopul reducerii celor trei ecuaţii (8) omogene la o singură ecuaţie rezolventă, vom relua un procedeu devenit clasic. În acest sens vom folosi metoda operatoare**). Considerînd sistemul (8) ca un sistem algebric în raport cu u, v, w în coeficienţii cărora în paralel cu alte mărimi constante intră și simbolii de diferențiere $\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$, se observă că deplasările u, v, w ale suprafeței mediane pot fi exprimate prin relațiile

---

*) Un studiu asupra integralei particulare corespunzînd diverselor cazuri de încărcare, inclusiv sarcini concentrate, se dă în articolele [7], [8] datorite lui V. M. Darevski, consacrate cilindrilor circulari, omogeni şi izotropi. În cadrul aceloraşi învelitori se vor putea consulta articolele publicate în [9], unde se tratează starea de tensiune ce rezultă în baza unor forţe marginale, concret date.

**) Metoda operatoare a fost utilizată la studiul stării de tensiune a cocilor cilindrice, izotrope şi omogene de către A. I. Lurie [10], V. M. Darevski [7] şi A. L. Goldenweiser [3].

$$u = \frac{2}{1-\mu^\star} D_{13}\Phi, \quad v = \frac{2}{1-\mu^\star} D_{23}\Phi, \quad w = \frac{2}{1-\mu^\star} D_{33}\Phi, \tag{9}$$

unde $D_{ik}(i, k = 1,2,3)$ reprezintă operatori diferențiali, determinați ca minori algebrici ai elementului L_{ik} în determinantul

$$D = \det(L_{ik}) = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Se constată ușor că deplasările astfel exprimate (9), satisfac identic primele două ecuații omogene ale sistemului (8), iar prin satisfacerea ecuației a treia a aceluiași sistem se obține condiția la care trebuie să satisfacă funcția Φ. Ea este dată de relația

$$D\,\Phi = 0 \tag{11}$$

unde operatorul diferențial D este dat prin determinantul (12).

În concluzie, deplasărilor u, v, w determinate prin relațiile (9) unde Φ satisface ecuația (11) le vor corespunde soluțiile ecuațiilor (8) omogene.

Calculînd minorii $D_{i3}(i = 1,2,3)$ se găsesc, în baza relațiilor (11), deplasările, exprimate prin intermediul funcției potențiale Φ.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi\,\partial\theta^2} + \mu^\star \frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + a^2\left[\frac{(2-\mu^{\star\star})(1+\mu^\star)}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^5\Phi}{\partial\xi^3\partial\theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^5\Phi}{\partial\xi\,\partial\theta^4} + 4\mu^\star \frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^3} + \frac{2\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi\,\partial\theta^2}\right], \\ v &= (2+\mu^\star)\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta} + \frac{\partial^3\Phi}{\partial\theta^3} - a^2\left[\frac{2(2-\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^5\Phi}{\partial\xi^4\partial\theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2+(2-\mu^{\star\star})(1-\mu^\star)}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^5\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta^3} + \frac{1-\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^5\Phi}{\partial\theta^5}\right], \\ w &= \frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial\theta^4} + a^2\left[4\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{1-\mu^{\star\star}}(2-\mu^\star-\mu^{\star\star}+\mu^\star\mu^{\star\star})\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + \frac{1-\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}} \frac{\partial^4\Phi}{\partial\theta^4}\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Ecuația (11) desfășurată în baza lui (8′) și (10) este dată sub forma

$$\begin{aligned}(1 + 4a^2)\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^8} &+ 4\left[1 + \frac{1}{2}a^2(2 - \mu^\star + \mu^{\star\star})\right]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^6\partial\theta^2} + \\ &+ [6 + a^2(1 - \mu^\star)\,(1 + \mu^{\star\star})]\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^4\partial\theta^4} + 4\frac{\partial^8\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta^6} + \frac{\partial^8\Phi}{\partial\theta^8} + \\ &+ (8 + 4\mu^\star - 4\mu^{\star\star} - 2\mu^\star\mu^{\star\star})\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^4\partial\theta^2} + (8 + 2\mu^\star - 2\mu^{\star\star})\frac{\partial^6\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta^4} + \\ &+ 2\frac{\partial^6\Phi}{\partial\theta^6} + \frac{1 - \mu^{\star\star}}{1 - \mu^\star}(1 - \mu^{\star 2})\left(\frac{1}{a^2} + 4\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + \\ &+ (4 - 2\mu^{\star\star} + 2\mu^\star)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial\theta^4} = 0\,.\end{aligned} \tag{13}$$

5. UTILIZAREA SERIILOR FOURIER ÎN DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE ȘI DEFORMARE A STRUCTURII

Integralele ecuației rezolvente (13) le vom căuta cu ajutorul descompunerii funcției potențiale în șiruri trigonometrice. Vom pune

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}[\varphi_m'(\xi)\cos m\theta + \varphi_m''(\xi)\sin m\theta)]\,. \tag{14}$$

Corespunzător acestei dezvoltări a funcției potențiale, starea de tensiune și deformare se defalcă într-o stare simetrică și alta nesimetrică față de generatoarea primară $\theta = 0$. Introducînd (14) în ecuația rezolventă (13) se obține pentru φ_m' și φ_m'' una și aceeași ecuație

$$\begin{aligned}(1 + 4a^2)\frac{d^8\varphi_m}{d\xi^8} &- 4\left[1 + \frac{1}{2}a^2(2 - \mu^\star + \mu^{\star\star})\right]m^2\frac{d^6\varphi_m}{d\xi^6} + \\ &+ [6 + a^2(1 - \mu^\star)(1 + \mu^{\star\star})]m^4 - (8 + 4\mu^\star - 4\mu^{\star\star} - 2\mu^\star\mu^{\star\star})m^2 + \\ &+ \frac{1 - \mu^{\star\star}}{1 - \mu^\star}(1 - \mu^{\star 2})\left(\frac{1}{a^2} + 4\right)\frac{d^4\varphi_m}{d\xi^4} - 4m^2\left[m^4 - \left(2 + \frac{\mu^\star}{2} - \frac{\mu^{\star\star}}{2}\right)m^2 + \right. \\ &\left. + \left(1 + \frac{\mu^\star}{2} - \frac{\mu^{\star\star}}{2}\right)\right]\frac{d^2\varphi_m}{d\xi^2} + m^4(m^2 - 1)^2\varphi_m = 0\,. \\ &\qquad m = 0,1,2\ldots\end{aligned} \tag{15}$$

Vom căuta soluția generală a acestei ecuații diferențiale sub forma unei sume de termeni de forma

$$A_{im}\,e^{k_i\xi}\,, \tag{16}$$

unde k_i este o rădăcină a ecuației

$$(1 + 4a^2)\, k^8 - 4\left[1 + \frac{1}{2}\, a^2(2 - \mu^\star + \mu^{\star\star})\right] m^2k^6 +$$

$$+\Big\{[6 + a^2(1 - \mu^\star)(1 + \mu^{\star\star})]m^4 - (8 + 4\mu^\star - 4\mu^{\star\star} - 2\mu^\star\mu^{\star\star})\, m^2 -$$

$$-\frac{1 - \mu^{\star\star}}{1 - \mu^\star}\,(1 - \mu^{\star 2})\left(\frac{1}{a^2} + 4\right)\Big\}k^4 -$$

$$-4m^2\left[m^4 - \left(2 + \frac{\mu^\star}{2} - \frac{\mu^{\star\star}}{2}\right)m^2 + \left(1 + \frac{\mu^\star}{2} - \frac{\mu^{\star\star}}{2}\right)\right]k^2 + m^4(m^2 - 1) = 0\,,$$

$$(1 + 4a^2)\, k^8 - 4\left[1 + \frac{1}{2}\, a^2(2 - \mu^\star + \mu^{\star\star})\right] m^2k^6 +$$

$$+\Big\{[6 + a^2(1 - \mu^\star)(1 + \mu^{\star\star})]m^4 - (8 + 4\mu^\star - 4\mu^{\star\star} - 2\mu^\star\mu^{\star\star})\, m^2 -$$

$$-\frac{1 - \mu^{\star\star}}{1 - \mu^\star}\,(1 - \mu^\star)\left(\frac{1}{a^2} + 4\right)\Big\}\, k^4 - \tag{17}$$

$$-\, 4m^2\,\Big[\Big(m^4 - \Big(2 + \frac{\mu^\star}{2} - \frac{\mu^{\star\star}}{2}\Big)m^2 + \Big(1 + \frac{\mu^\star}{2} - \frac{\mu^{\star\star}}{2}\Big)\Big]k^2 +$$

$$+\, m^4(m^2 - 1) = 0\,.$$

Rădăcinile acestei ecuații, în cazul cînd $m \neq 0$, 1 sînt de forma

$$k_{1,2} = \pm(p_1 + iq_1)\,, \qquad k_{3,4} = \pm(p_1 - iq_1)\,,$$
$$k_{5,6} = \pm(p_2 + iq_2)\,, \qquad k_{7,8} = \pm(p_2 - iq_2)\,.$$

În cazul $m = 0$ și $m = 1$, patru din cele opt rădăcini ale ecuației caracteristice se transformă în zero, celelalte patru rădăcini fiind de asemenea complexe.

În modul acesta dacă ne referim la starea simetrică de solicitare, funcția potențială va avea forma

$$\Phi = \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im}e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta. \tag{18}$$

Ținînd în continuare seama în relațiile (12) de (18) se obțin următoarele expresii pentru componentele vectorului deplasare :

$$u = \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im}P_{u_{im}}\, e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta\,,$$
$$v = \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im}Q_{v_{im}}\, e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta\,, \tag{19}$$
$$w = \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im}Q_{w_{im}}\, e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta\,,$$

unde $P_{v_{im}}$, $Q_{v_{im}}$ şi $Q_{w_{im}}$ sînt constante complexe depinzînd de k (atît aici cît şi în cele ce vor urma, este demn de remarcat că mărimile P şi Q cu diverşi indici, oricare ar fi acel indice, se supun relaţiei $P(-k) = -P(+k)$, $Q(-k) = Q(+k)$.

$$\begin{aligned}
P_{v_{im}} &= \alpha_u + i\beta_u = k(m^2 + \mu^* k^2) + a^2\Big[-\frac{(2-\mu^{**})(1+\mu^*)}{1-\mu^{**}} m^2k^3 + m^4 \frac{1+\mu^*}{1-\mu^{**}} + \\
&\quad + 4\mu^* k^3 - \frac{2\mu^*}{1-\mu^{**}} m^2 k \Big], \\
Q_{v_{im}} &= a_v + ib_v = -(2+\mu^*)mk^2 + m^3 + a^2\Big[\frac{2m(2-\mu^{**})}{1-\mu^{**}} k^4 - \\
&\quad - \frac{2+(2-\mu^{**})(1-\mu^*)}{1-\mu^{**}} m^3k^2 + \frac{1-\mu^*}{1-\mu^{**}} m^5\Big], \qquad (20) \\
Q_{w_{im}} &= a_w + ib_w = (k^2 - m^2)^2 + \\
&\quad + a^2\Big[4k^4 - \frac{2}{1-\mu^{**}}(2 - \mu^* - \mu^{**} + \mu^*\mu^{**}) m^2k^2 + \frac{1-\mu^*}{1-\mu^{**}} m^4\Big].
\end{aligned}$$

De asemenea, ţinînd seama de (16) în expresiile (7) ale eforturilor şi momentelor şi în expresiile (4) ale componentelor deformaţiilor tangenţiale şi de încovoiere, vom avea pentru acestea

$$\begin{aligned}
T_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{T_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, & T_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{T_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, \\
S_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{S_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta, & S_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{S_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta, \\
G_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{G_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, & G_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{G_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, \\
H_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{H_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta, & H_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{H_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta, \qquad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{\varepsilon_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, & \varepsilon_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{\varepsilon_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, \\
\omega &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{\omega_{im}} e^{k_j\xi}\Big)\sin m\theta, & \gamma_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{\gamma_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta; \\
& & \gamma_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{\gamma_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta, \qquad (22) \\
\varkappa_1 &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} Q_{\varkappa_{1im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, & \varkappa_2 &= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_{im} Q_{\varkappa_{2im}} e^{k_i\xi}\Big)\cos m\theta, \\
& & \tau &= \Big(\sum_{i=1}^{8} A_{im} P_{\tau_{im}} e^{k_i\xi}\Big)\sin m\theta.
\end{aligned}$$

unde expresiile mărimilor P şi Q sînt date în tabela 1 (relaţiile (23)).

Tabela 1

Relaţiile (23)

$$
\begin{aligned}
Q_{T_{1im}} &= a_{T_1} + ib_{T_1} = \frac{F^{\star}}{r}\biggl\{(1-\mu^{\star 2})\, m^2 k^2 + a^2\biggl[-\frac{(2-\mu^{\star\star})(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^2 k^4 + \\
&\quad + \frac{(1-\mu^{\star})(1-2\mu^{\star}+\mu^{\star}\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^4 k^2 + \frac{\mu^{\star}(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^6 + 2\mu^{\star}(1-\mu^{\star})\, m^2 k^2 - \\
&\quad - \frac{\mu^{\star}(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^4\biggr]\biggr\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{T_{2im}} &= a_{T_2} + ib_{T_2} = \frac{F^{\star}}{r}\biggl\{-(1-\mu^{\star 2})\, k^4 + a^2\biggl[\frac{(\mu^{\star\star}-2)(\mu^{\star 2}+\mu^{\star}-2)}{1-\mu^{\star\star}}\, m^2 k^4 + \\
&\quad + \frac{(1-\mu^{\star})(-4-\mu^{\star}+\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^4 k^2 + \frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\, m^6 - 4(1-\mu^{\star 2})\, k^4 + \\
&\quad + \frac{(1-\mu^{\star})(4+2\mu^{\star}-2\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}} - \frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\, m^4\biggr]\biggr\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{S_{1im}} &= \alpha_{S_1} + i\beta_{S_1} = -\frac{F^{\star}}{r}\biggl\{(1-\mu^{\star 2})\, mk^3 + a^2\biggl[-2\,\frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\, mk^5 - \\
&\quad - \frac{(1-2\mu^{\star\star}+2\mu^{\star}-\mu^{\star}\mu^{\star\star})(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^3 k^3 + \frac{(1-\mu^{\star})(1+\mu^{\star}-\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^5 k + \\
&\quad + (1-\mu^{\star})(2+3\mu^{\star})\, mk^3 - m^3 k\,\frac{(1-\mu^{\star})(1+\mu^{\star}-\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\biggr] + \\
&\quad + a^4\biggl[-2\,\mu^{\star\star}\,\frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\, mk^5 + \frac{\mu^{\star\star}(1-\mu^{\star})^2}{1-\mu^{\star\star}}\, m^3 k^3\biggr]\biggr\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{S_{2im}} &= \alpha_{S_2} + i\beta_{S_2} = -\frac{F^{\star}}{r}\biggl\{-(1-\mu^{\star 2})\, mk^5 + a^2\biggl[\frac{(2-\mu^{\star\star})(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, mk^5 + \\
&\quad + \frac{(-1+2\mu^{\star}-\mu^{\star}\mu^{\star\star})(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^3 k^3 - \frac{\mu^{\star}(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^5 k + \frac{\mu^{\star}(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^3 k - \\
&\quad - 2\,\mu^{\star}(1-\mu^{\star})\, mk^3\biggr]\biggr\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{G_{1im}} &= a_{G_1} + ib_{G_1} = -F^{\star}\,\frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\, a^2\biggl\{(k^2-m^2)^2(k^2-m^2\mu^{\star\star}) - \\
&\quad - (2+\mu^{\star})\,\mu^{\star\star} m^2 k^2 + \mu^{\star\star} m^4 + a^2\biggl[4k^6 + (1-\mu^{\star})(1-\mu^{\star\star})\, m^4 k^2 - \\
&\quad - \frac{2(2-\mu^{\star}-\mu^{\star\star}+\mu^{\star}\mu^{\star\star}-\mu^{\star\star 2})}{1-\mu^{\star\star}}\, m^2 k^4\biggr]\biggr\},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} Q_{G_{2im}} &= a_{G_2} + ib_{G_2} = -F^{\star}\,\frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,a^2\,\{(k^2-m^2)^2(\mu^{\star\star}k^2-m^2) - \\ &\quad -(2+\mu^{\star})m^2k^2 + m^4 + a^2\,[4\,\mu^{\star\star}k^6 - 2\,\mu^{\star\star}(1-\mu^{\star})\,m^2k^4]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{H_{1im}} &= -P_{H_{2im}} = \alpha_{H_1} + i\beta_{H_1} = -(\alpha_{H_2} + i\beta_{H_2}) = F^{\star}(1-\mu^{\star})a^2\Big\{-mk\,(k^2-m^2)^2 - \\ &\quad -(2+\mu^{\star})\,mk^3 + m^3k + a^2\left[\frac{2\mu^{\star\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,mk^5 - \frac{\mu^{\star\star}(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,m^3k^3\right]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\gamma_{1im}} &= \alpha_{\gamma_1} + i\beta_{\gamma_1} = -\frac{1}{r}\Big\{k\,(k^2-m^2)^2 + a^2\Big[4\,k^5 - \frac{2}{1-\mu^{\star\star}}\,(2-\mu^{\star}-\mu^{\star\star} + \\ &\quad +\mu^{\star}\mu^{\star\star})\,m^2k^3 + \frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^4\,k\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\gamma_{2im}} &= a_{\gamma_2} + ib_{\gamma_2} = -\frac{1}{r}\Big\{-m\,(k^2-m^2)^2 - (2+\mu^{\star})\,mk^2 + m^3 + \\ &\quad + a^2\left[\frac{2\mu^{\star\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,mk^4 - \frac{\mu^{\star\star}(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,m^3k^2\right]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon_{1im}} &= a_{\varepsilon_1} + ib_{\varepsilon_1} = \frac{1}{r}\Big\{k^2(m^2+\mu^{\star}k^2) + a^2\Big[-\frac{(2-\mu^{\star\star})(1+\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,m^2k^4 + \\ &\quad + \frac{1+\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^4k^2 + 4\,\mu^{\star}k^4 - \frac{2\,\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^2k^2\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon_{2im}} &= a_{\varepsilon_2} + ib_{\varepsilon_2} = \frac{1}{r}\Big\{-\mu^{\star}m^2k^2 - k^4 + a^2\Big[\frac{2\,(2-\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,m^2k^4 - \\ &\quad - \frac{2+(2-\mu^{\star\star})(1-\mu^{\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,m^4k^2 + \frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^6 - 4\,k^4 + \\ &\quad + \frac{2}{1-\mu^{\star\star}}\,(2-\mu^{\star}-\mu^{\star\star}+\mu^{\star}\mu^{\star\star})\,m^2k^2 - \frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^4\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\omega_{im}} &= \alpha_{\omega} + i\beta_{\omega} = -\frac{1}{r}\Big\{2\,(1+\mu^{\star})\,mk^3 - a^2\Big[\frac{2\,(2-\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,mk^5 - \\ &\quad - \frac{2\,(1-2\,\mu^{\star}+\mu^{\star}\mu^{\star\star})}{1-\mu^{\star\star}}\,m^3k^3 - \frac{2\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^5k - 4\,\mu^{\star}mk^3 + \frac{\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^3k\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\varkappa_{1im}} &= a_{\varkappa_1} + ib_{\varkappa_1} = \frac{1}{r^2}\Big\{k^2(k^2-m^2)^2 + a^2\Big[4\,k^6 - \frac{2}{1-\mu^{\star\star}}\,(2-\mu^{\star}-\mu^{\star\star} + \\ &\quad + \mu^{\star}\mu^{\star\star})\,m^2k^4 + \frac{1-\mu^{\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^4k^2\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$Q_{\varkappa_{2im}} = a_{\varkappa_2} + ib_{\varkappa_2} = \frac{1}{r^2}\left\{ -m^2(k^2-m^2)^2 - (2+\mu^\star)\,m^2k^2 + m^4 + \right.$$

$$\left. + a^2\left[\frac{-\mu^{\star\star}(1-\mu^\star)}{1-\mu^{\star\star}}\,m^4k^2 + \frac{2\mu^{\star\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,m^2k^4\right]\right\},$$

$$P_{\tau_{im}} = \alpha_\tau + i\beta_\tau = \frac{1}{r^2}\left\{ -km(k^2-m^2)^2 - (2+\mu^\star)\,mk^3 + m^3k + \right.$$

$$\left. + a^2\left[\frac{2\mu^{\star\star}}{1-\mu^{\star\star}}\,mk^5 - \mu^{\star\star}\frac{1-\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}}\,m^3k^3\right]\right\}.$$

De relațiile (20), (21) și (22) ne putem folosi pentru determinarea stării de solicitare nesimetrică ce corespunde lui

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi''_m \sin m\theta\,. \tag{24}$$

În cazul acesta în aceste relații se va înlocui m cu $-m$. Dacă condițiile la limită de-a lungul marginilor $\xi = \xi_0$ și $\xi = \xi_1$ sînt dezvoltate în serie Fourier după variabila θ, putem determina constantele A_{im} pentru orice valoare a lui m și problema este complet determinată.

6. SENSUL FIZIC AL RĂDĂCINILOR NULE ALE ECUAȚIEI CARACTERISTICE *)

Ecuația caracteristică (17) pentru $m = 0$ și $m = 1$ are o rădăcină nulă de multiplicitate patru. Acest lucru înseamnă că la $m = 0$ și $m = 1$ patru din soluțiile parțiale (16) ale ecuației (15) se vor transforma astfel încît funcția potențială va avea următoarea dezvoltare

$$\begin{aligned}\Phi = A'_0 + A'_1\xi + A'_2\xi^2 + A'_3\xi^3 + (B'_0 + B'_1\xi + B'_2\xi^2 + B'_3\xi^3)\cos\theta + \\ + (B''_0 + B''_1\xi + B''_2\xi^2 + B''_3\xi^3)\sin\theta.\end{aligned} \tag{25}$$

Deplasările ce corespund funcției potențiale (25) le vom determina introducînd expresia (25) în relațiile (12). Vom face o simplificare neglijînd mărimile de ordinul a^2 în comparație cu unitatea. Vom avea :

$$\begin{aligned} u &= 6\mu^\star A'_3 + [(B'_1 + 2B'_2\xi + 3B'_3\xi^2) + 6\mu^\star B'_3]\cos\theta + \\ &\quad + [(B''_1 + 2B''_2\xi + 3B''_3\xi^2) + 6\mu^\star B''_3]\sin\theta, \\ v &= [-(2+\mu^\star)(2B'_2 + 6B'_3\xi) + (B'_0 + B'_1\xi + B'_2\xi^2 + B'_3\xi^3)]\sin\theta + \\ &\quad + [(2+\mu^\star)(2B''_2 + 6B''_3\xi) - (B''_0 + B''_1\xi + B''_2\xi^2 + B''_3\xi^3)]\cos\theta, \\ w &= [-2(2B'_2 + 6B'_3\xi) + (B'_0 + B'_1\xi + B'_2\xi^2 + B'_3\xi^3)]\cos\theta + \\ &\quad + [-2(2B''_2 + 6B''_3\xi) + (B''_0 + B''_1\xi + B''_2\xi^2 + B''_3\xi^3)]\sin\theta. \end{aligned} \tag{26}$$

---

*) Demonstrațiile din acest capitol se datoresc lui Cristian Stănescu.

Eforturile şi momentele ce corespund acestor deplasări au următoarea expresie

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{F^\star}{r}(1-\mu^{\star 2})\,[(2B_2'+6B_3'\xi)\cos\theta+(2B_2''+6B_3''\xi)\sin\theta],\\
T_2 &= 0,\\
S_1 &= -\frac{F^\star}{r}(1-\mu^\star)\,[1+\mu^\star(1+a^2)]\,[6B_3'\sin\theta-6B_3''\cos\theta),\\
S_2 &= \frac{F^\star}{r}(1-\mu^{\star 2})\,(6B_3'\sin\theta-6B_3''\cos\theta),\\
G_1 &= -F^\star a^2\frac{1-\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}}(1-\mu^\star\mu^{\star\star})\,[(2B_2'+6B_3'\xi)\cos\theta+(2B_2''+6B_3''\xi)\sin\theta],\\
G_2 &= -F^\star a^2(\mu^{\star\star}-\mu^\star)\frac{1-\mu^\star}{1-\mu^{\star\star}}\,[(2B_2'+6B_3'\xi)\cos\theta+(2B_2''+6B_3''\xi)\sin\theta],\\
H_1 &= -H_2 = -F^\star a^2_{\mu^\star}(1-\mu^\star)\,(6B_3'\sin\theta-6B_3''\cos\theta),\\
N_1 &= -\frac{F^\star}{r}a^2\frac{(1-\mu^\star)^2}{1-\mu^{\star\star}}(6B_3'\cos\theta+6B_3''\sin\theta),\\
N_2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Din cele 12 constante de care depinde funcţia potenţială, în expresia pentru deplasări, eforturi şi momente intră numai 9 constante, deoarece constantele A_0', A_1', A_2' dispar prin diferenţiere. Ca urmare, apare o incompatibilitate între numărul condiţiilor pe contur şi numărul de constante arbitrare.

În continuare, se remarcă că prin diferenţiere pentru aflarea eforturilor şi momentelor dispar constantele A_3', B_0', B_1', B_0'', B_1'' care intră numai în expresiile pentru deplasări. Aceste constante caracterizează aşadar deplasarea suprafeţei mediane a structurii ca un tot rigid. Pentru a găsi sensul fizic al acestor constante, să notăm cu $\overline{U}_0$ vectorul deplasării rigide

$$
\overline{U}_0 = u\frac{\overline{M}_\xi}{A} + v\frac{\overline{M}_0}{B} - w\bar{n}, \tag{28}
$$

u, v, w fiind daţi de relaţiile (26), din care vom reţine numai constantele al căror sens avem să-l descoperim.

Vom avea deci pentru u, v, w expresiile

$$
\begin{aligned}
u &= 6\mu^\star A_3' + B_1'\cos\theta + B_1''\sin\theta,\\
v &= (B_0' + B_1'\xi)\sin\theta - (B_0'' + B_1''\xi)\cos\theta,\\
w &= (B_0' + B_1'\xi)\cos\theta + (B_0'' + B_1''\xi)\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Pe de altă parte vectorul deplasării rigide $\overline{U}_0$ se poate exprima astfel

$$\overline{U}_0 = \overline{V}_0 - \overline{\omega} \wedge \overline{M}, \tag{30}$$

unde notațiile sînt evidente. $\overline{V}_0$ și $\bar{\omega}$ în dezvoltare după axele triedrului lui Descartes au expresia

$$\begin{aligned} \overline{V}_0 &= V_{0x}\,\overline{i} + V_{0y}\,\overline{j} + V_{0z}\,\overline{k} \\ \overline{\omega} &= \omega_2\,\overline{i} + \omega_y\,\overline{j} + \omega_z\,\overline{k} \end{aligned} \tag{31}$$

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ fiind respectiv versorii pe axele sistemului lui Descartes, iar $\overline{M}$ vectorul de poziție al suprafeței mediane a structurii care în sistemul de axe ales are următoarea expresie :

$$\overline{M} = r\xi\overline{i} + r\sin\theta\,\overline{j} + r\cos\theta\,\overline{k}. \tag{32}$$

Ținînd seama de relațiile (29) și (28) se obține dezvoltarea vectorului $\overline{U}_0$ în sistemul axelor lui Descartes

$$\overline{U}_0 = (6\mu^{\star}A_3' + B_1'\cos\theta + B_1''\sin\theta)\,\overline{i} - (B_0'' + B_1''\xi)\,j - (B_0' + B_1'\xi)\,\overline{k}, \tag{33}$$

vector, care, exprimat cu ajutorul relației (30), capătă dezvoltarea

$$\begin{aligned} \overline{U}_0 = (V_{0x} - \omega_y r\cos\theta + \omega_z r\sin\theta)\,\overline{i} + (V_{0y} - \omega_x r\cos\theta + {} \\ + \omega_z r\xi)\,\overline{j} + (V_{0z} + \omega_x r\sin\theta - \omega_y r\xi)\,\overline{k}. \end{aligned} \tag{34}$$

Din compararea relațiilor (33) și (34) reiese în mod evident sensul constantelor amintite ; constanta A_3' corespunde deplasării în direcția generatoarei cilindrului, constantele B_0' și B_0'' corespund deplasărilor în direcțiile z și y iar constantele B_1' și B_1'' corespund rotirii rigide în raport cu axele y și z. Se constată că lipsește numai rotirea rigidă a suprafeței mediane în raport cu axa x (axa cilindrului). Unei asemenea rotiri îi corespund următoarele deplasări

$$u = 0,\ v = \omega_x r,\ w = 0, \tag{35}$$

care satisfac ecuațiile omogene de echilibru în deplasări. Să punem în evidență sensul fizic al constantelor B_2', B_3', B_2'', B_3''. Să notăm cu (P_x, P_y, P_z) și (M_x, M_y, M_z) respectiv componentele forței și momentului aplicat la extremitatea învelitorii. Deoarece vectorii efortului $\overline{R}^{(\theta)}$ și ai momentului $\overline{H}^{(\theta)}$ sînt definiți de relațiile

$$\begin{aligned} \overline{R}^{(\theta)} &= -T_1\frac{\overline{M}_\xi}{A} - S_1\frac{\overline{M}_\theta}{B} + N_1\overline{n}, \\ \overline{H}^{(\theta)} &= -H_1\frac{\overline{M}_\xi}{A} - G_1\frac{\overline{M}_\theta}{B}, \end{aligned} \tag{36}$$

relații ce transcrise în sistemul axelor lui Descartes ne dau

$$\begin{aligned} \overline{R}^{(\theta)} &= - T_1 \overline{i} + (N_1 \sin\theta - S_1 \cos\theta)\, \overline{j} + (N_1 \cos\theta + S_1 \sin\theta)\, \overline{k}, \\ \overline{H}^{(\theta)} &= - H_1 \overline{i} - G_1 \cos\theta\, \overline{j} + G_1 \sin\theta\, \overline{k}. \end{aligned} \tag{37}$$

Rezultanta acestor eforturi este dată de

$$\overline{P} = \int_0^{2\pi} \overline{R}^{(\theta)} r d\theta = - \overline{j}\,[6 B_3'' \pi F^\star (1 - \mu^{\star 2})] - \overline{k}\; 6 B_3' \pi F^\star (1 - \mu^{\star 2}). \tag{38}$$

De aici se citeşte sensul constantelor B_3'', B_3'; ele corespund încovoierii transversale a structurii de către forțe îndreptate după direcțiile y și z. Considerînd acum momentul eforturilor

$$\begin{aligned} \overline{M} = \int_0^{2\pi} (\overline{R}^{(\theta)} \wedge \overline{M})\, r d\theta + \int_0^{2\pi} \overline{H}^{(\theta)} r d\theta = [2 B_2' \pi F^\star r (1 - \mu^{\star 2})]\, \overline{J} - \\ - [2 B_2'' \pi F^\star r (1 - \mu^{\star 2})]\, \overline{k}. \end{aligned} \tag{39}$$

De aici se vede că constantelor B_2' și B_2'' le corespund încovoieri datorită momentelor marginale cu vectori îndreptați pe axele z și y. În felul acesta, se constată că dintre toate stările de solicitare elementară lipseşte starea de solicitare ce corespunde întinderii şi torsiunii. Admițînd că structura este întinsă cu forța P_x vom avea

$$T_1 = \frac{P_x}{2\pi r}, \; S_1 = - S_2 = 0, \quad T_2 = 0. \tag{40}$$

Această soluție satisface sistemul omogen de echilibru în eforturi şi momente. Corespunzător acestei solicitări, deplasările sînt

$$u = \frac{P_x \xi}{2\pi F^\star (1 - \mu^{\star 2})}, \; v = 0\,; \quad w = \frac{P_x \mu^\star}{2\pi F^\star (1 - \mu^{\star 2})}\,. \tag{40'}$$

Pentru cazul torsiunii, admițînd că învelitoarea este solicitată de momentul de torsiune M_x, vom satisface ecuațiile de echilibru omogene luînd

$$S_1 = - S_2 = \frac{M_x}{2\pi r^2}, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0. \tag{41}$$

de unde rezultă expresia deplasărilor

$$u = 0\,; \; v = \frac{M_x}{\pi r^2 F^\star (1 - \mu^\star)}\, \xi, \quad w = 0. \tag{41'}$$

Acestea ne dau două soluții rămase pierdute. Deci rădăcinile nule ale ecuației caracteristice corespund la douăsprezece stări liniar independente de efort şi deformații din care şase reprezintă deplasările suprafeței mediane a învelitorii ca un corp rigid iar restul de şase, stările elementare de solicitare ale structurii lucrînd ca o bară cu pereți subțiri.

Trebuie să menționăm că calculele ce se bazează pe utilizarea funcției potențiale nu dau toate aceste douăsprezece stări de solicitare, încît este necesar să se folosească soluțiile (35), (40), (41). Vom avea deci ținînd seama de relațiile (26) și (27)

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{\pi r}\left\{\left[\frac{M_y}{r} - P_z\xi\right]\cos\theta - \left[\frac{M_z}{r} + P_y\xi\right]\sin\theta + \frac{P_x}{2}\right\},\\
T_2 &= 0,\\
S_1 &= -\frac{1}{\pi r}\left[-P_z\sin\theta + P_y\cos\theta - \frac{M_x}{2r}\right],\\
S_2 &= \frac{1}{\pi r}\left[P_y\cos\theta - P_z\sin\theta - \frac{M_x}{2r}\right],\\
G_1 &= -\frac{a^2(1-\mu^\star\mu^{\star\star})}{\pi(1-\mu^{\star\star})(1+\mu^\star)}\left\{\left(\frac{M_y}{r} - P_z\xi\right)\cos\theta - \left(\frac{M_z}{r} + P_y\xi\right)\sin\theta\right\},\\
G_2 &= -\frac{a^2(\mu^{\star\star}-\mu^\star)}{\pi(1-\mu^{\star\star})(1+\mu^\star)}\left\{\left(\frac{M_y}{r} - P_z\xi\right)\cos\theta - \left(\frac{M_z}{r} + P_y\xi\right)\sin\theta\right\},\\
H_1 &= -H_2 = -\frac{a^2\mu^\star}{\pi(1+\mu^\star)}(P_y\cos\theta - P_z\sin\theta),\\
N_1 &= \frac{a^2}{r\pi}\,\frac{1-\mu^\star}{(1+\mu^\star)(1-\mu^{\star\star})}[P_z\cos\theta + P_y\sin\theta],\\
N_2 &= 0,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= V_{0x} + \omega_y r\cos\theta - \omega_z r\sin\theta + \frac{1}{\pi F^\star(1-\mu^{\star 2})}\left[\left(\frac{M_y\xi}{r} - \right.\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{P_z\xi^2}{2} - P_z\mu^\star\right)\cos\theta - \left(\frac{M_z\xi}{r} + \frac{P_y\xi^2}{2} + P_y\mu^\star\right)\sin\theta + \frac{P_x\xi}{2}\right],\\
v &= (-V_{0z} + \omega_y r\xi)\sin\theta + (V_{0y} + \omega_z r\xi)\cos\theta +\\
&\quad + \frac{1}{\pi F^\star(1-\mu^{\star 2})}\left\{\left[-(2+\mu^\star)\left(\frac{M_y}{r} - P_z\xi\right) + \frac{M_y\xi^2}{2r} - \frac{P_z\xi^3}{6}\right]\sin\theta - \right.\\
&\quad \left. - \left[(2+\mu^\star)\left(\frac{M_z}{r} + P_y\xi\right) - \left(\frac{M_z\xi^2}{2r} + \frac{P_y\xi^3}{6}\right)\right]\cos\theta + \frac{M_x\xi}{r}(1+\mu^\star)\right\},\\
w &= -V_{0z} - V_{0y} + \omega_y r\xi - \omega_z r\xi + \frac{1}{\pi F^\star(1-\mu^{\star 2})}\left\{\left[-2\left(\frac{M_y}{r} - P_z\xi\right) + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \frac{M_y\xi^2}{2r} - \frac{P_z\xi^3}{6}\right]\cos\theta + \left[2\left(\frac{M_z}{r} + P_y\xi\right) - \left(\frac{M_z\xi^2}{2r} + \frac{P_y\xi^3}{6}\right)\right]\sin\theta + \frac{P_x\mu^\star}{2}\right\}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Primit la redacție la 22 iunie 1959

ТОНКИЕ СТРУКТУРЫ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СЛОЕВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется общее напряженное состояние замкнутых цилиндрических структур кругового сечения, состоящих из изотропных упругих слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности.

Задача определения картины общего напряженного состояния в целом (перемещений, усилий) сводится к определению потенциала перемещения Ф [ур. (13)].

Далее приводятся различные соображения относительно решений резольвентного уравнения, которые записываются в зависимости от произвольных постоянных, определенных конкретно заданными краевыми условиями.

STRUCTURES MINCES DE FORME CYLINDRIQUE CIRCULAIRE, CONSTITUÉES DE COUCHES ÉLASTIQUES, ISOTROPES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'état de tension globale des structures cylindriques fermées, de section circulaire, constituées de couches élastiques, isotropes, symétriquement disposées sur l'épaisseur par rapport à la surface médiane.

Le problème de la détermination du tableau de l'état de tension globale (déplacements, contraintes) se réduit à la détermination d'un potentiel Φ de déplacement (13).

L'auteur fait ensuite diverses considérations sur les solutions de l'équation résolvante, que l'on exprime en fonction des constantes arbitraires qu'il faut déterminer par les conditions aux limites effectivement données.

BIBLIOGRAFIE

1 L. Librescu, *Cîteva probleme ale teoriei unei clase de învelitori elastice subțiri neomogene.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, X, *1* (1959).

2. Л. Либреску, *Задачи теорий тонких упругих оболочек, построенных из упругих изотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности.* Revue de Mecanique appliquée, 2 (1959).

3. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек.* Гостехиздат, Москва, 1953.

4. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев.* Известия Акад. Наук Армянской ССР. **IV**, *5* (1951).
5. Е. И. ГРИГОЛЮК, *О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек* Инж. сб, **XVI** (1953).
6. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек.* Судпромгиз, 1951.
7. В. М. ДАРЕВСКИЙ, *К теории цилиндрических оболочек.* Прикл. Матем. и Механ., **XV**, *5* (1951).
8. В. М. ДАРЕВСКИЙ, *Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки.* Прикл. Матем. и Механ., **XVI**, *2* (1952).
9. * * * *Прочность цилиндрических оболочек* Сборник статей под редакцией В. М. Даревского. Госуд. издат. оборонной промышл. Москва, 1959.
10. А. И. ЛУРЬЕ, *Статика тонкостенных упругих оболочек.* Гостехиздат, 1947.

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

VIZUALIZAREA UNOR FENOMENE FIZICO-MECANICE CE AU LOC LA PENETRAREA SOLULUI

DE

C. I. FLORESCU şi colab.

Pentru lucrările mecanizate ale solului, criteriile actuale de clasificare dau indicaţii insuficiente pentru stabilirea forţei de tracţiune necesare.

Prin măsurarea rezistenţei la penetrare a solului, se pot stabili unele criterii de clasificare, care să ne poată da indicaţii asupra necesarului de forţă la aceste lucrări.

Se cunosc mai multe propuneri de clasificare a solului din punct de vedere al rezistenţei la penetrare, dintre care cităm două :

Una din propuneri stabileşte următoarea clasificare [1] :

Categoria solului	Rezistenţa la penetrare kg/cm²
I	0– 35
II	40– 75
III	80–125
IV	130–175

O altă propunere stabileşte următoarea clasificare [2] :

Denumirea solului	Rezistenţa specifică la penetrare kg/cm²
Soluri cu compactitate accentuată	60
Soluri cu compactitate moderată	40–60
Soluri cu compactitate redusă	30–40
Soluri fără compactitate	20–30
Soluri friabile	5–20

Pentru a se putea utiliza aceste propuneri de clasificare la normarea lucrărilor, precum şi la determinarea necesarului de forţă, trebuie în prealabil stabilit dacă există o relaţie între rezistenţa la penetrare şi forţa de tracţiune.

Într-o lucrare precedentă [3] s-a stabilit pentru unele soluri din țara noastră, următoarea relație empirică între rezistența la penetrare K_p, umiditate U şi rezistența la tăiere în plan vertical K_{tv}

$$\log 10 \frac{K_{tv}}{K_p} = 0{,}63\ (\log U)^2 - 0{,}393\ (\log U) + 0{,}31.$$

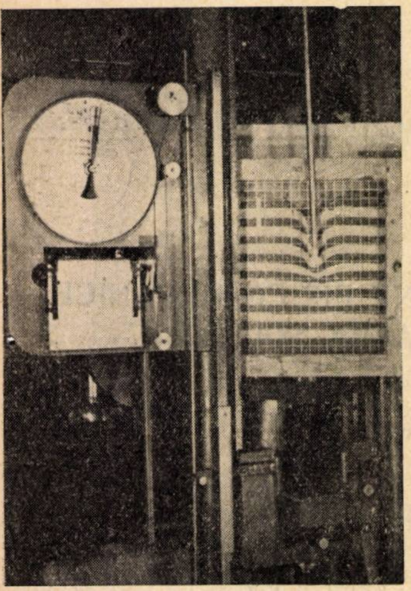


Fig. 1

Prin aceasta se poate determina, cu metode indirecte, forța de tracțiune necesară pentru acționarea diverselor maşini agricole ce execută tăierea în plan vertical a solului.

Măsurarea rezistenței la penetrare se poate face comod, iar rezultatele măsurătorilor pot da criterii multiple pentru cunoaşterea caracteristicilor fizico-mecanice ale solului [4], [5], [6], [7].

Este deci important să se cunoască fenomenele fizico-mecanice ce au loc la executarea măsurătorilor de rezistență la penetrare şi să se stabilească factorii ce o influențează.

Punerea în evidență a deformațiilor ce au loc la pătrunderea unui corp solid poate ajuta în studiul fenomenelor mai sus menționate. În acest scop, s-au efectuat experimentări de vizualizarea deformațiilor, folosindu-se ca mediu de studiu nisip cu straturi divers colorate şi penetratoare statice cu vîrfuri de pătrundere cu forme geometrice diferite: prismă dreptunghiulară, prismă triunghiulară şi semicilindru.

În figura 1 este redată imaginea de ansamblu a instalației experimentale folosite.

Să considerăm schema din figura 2 echivalentă cu cazul penetrării cu un vîrf în formă de prismă dreptunghiulară.

În acest caz se demonstrează că avem următoarele expresii ale eforturilor principale *):

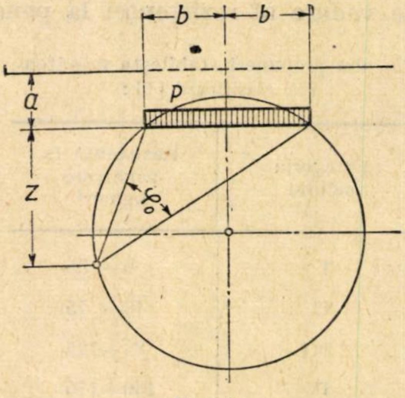


Fig. 2

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{P - \gamma a}{\pi} (\psi_0 + \sin \psi_0) + \gamma (h + z), \tag{1}$$

$$\sigma_{\mathrm{III}} = \frac{P - \gamma a}{\pi} (\psi_0 - \sin \psi_0) + \gamma (h + z). \tag{2}$$

---

*) [8], p. 311.

Condiția de echilibru limită în cazul nisipului este*)

$$(\sigma_{I} + \sigma_{III}) \sin \varphi = \sigma_{I} - \sigma_{III}. \tag{3}$$

În expresiile de mai sus s-au utilizat următoarele notații :

P = presiunea,
γ = greutatea volumetrică,

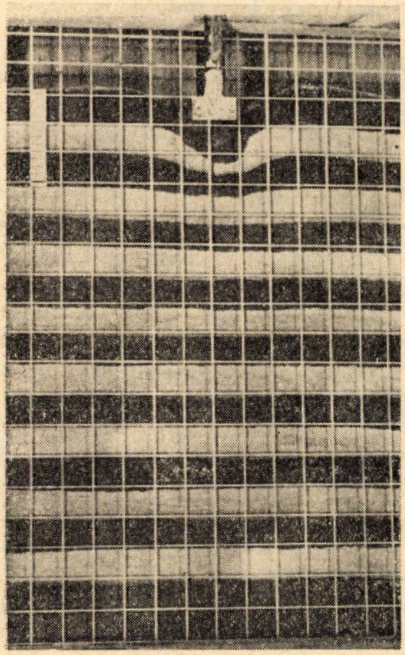


Fig. 3

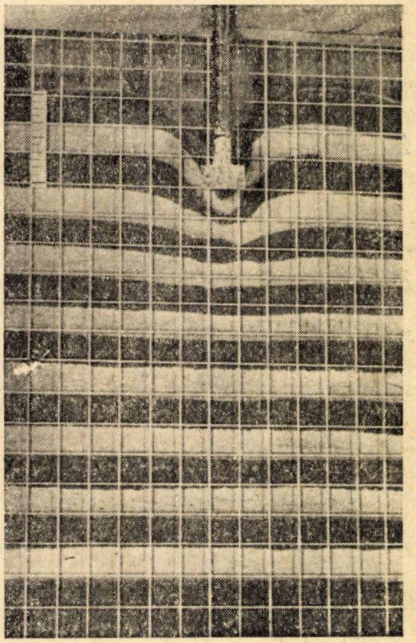


Fig. 4

a = adîncimea de pătrundere a penetrometrului,
z = adîncimea pînă la care au loc deformațiile plastice,
ψ_0 = unghi vizual,
$\operatorname{tg} \varphi$ = coeficient de frecare.

Eliminînd pe σ_{I} și σ_{III} între expresiile (1), (2), (3) se obține următoarea relație între z și ψ_0

$$Z = \frac{P - \gamma a}{\pi \gamma} \left(\frac{\sin \psi_0}{\sin \varphi} - \psi_0 \right) - a. \tag{4}$$

Pe noi ne interesează valoarea maximă a lui z care se obține anulînd derivata expresiei (4) în raport cu ψ_0

$$\frac{dz}{d\psi_0} = \frac{P - \gamma a}{\pi \gamma} \left(\frac{\cos \psi_0}{\sin \varphi} - 1 \right) = 0,$$

---

*) [8], p. 195.

sau

$$\cos \psi_0 = \sin \varphi, \ \psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

înlocuind în (4) obținem

$$Z_{\max} = \frac{P - \gamma a}{\pi \gamma} \left[\operatorname{ctg} \varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] - a. \tag{5}$$

În figurile 3 și 4 sînt prinse două momente de pătrundere a unui vîrf de penetrare, prismă dreptunghiulară.

În aceste momente, precum și în altele intermediare s-a măsurat a, $Z_d = a + Z_{\max}$ și P; celelalte valori din (5) fiind constante, au fost măsurate la începutul experienței. La efectuarea măsurătorilor s-a luat în considerație influența peretelui de sticlă, făcîndu-se corecțiile necesare.

În figura 5 s-a reprezentat grafic $Z_d = f(a)$, pe baza rezultatelor experimentale; pentru aceleași valori ale lui a s-au determinat cu ajutorul formulei (5) valorile corespunzătoare lui Z_d introducîndu-se valorile corespunzătoare lui P. Se constată că rezultatele experimentale sînt foarte apropiate de cele teoretice.

În general, rezistența la penetrare se măsoară cu penetratoare în formă de prismă triunghiulară, de con, sau de semicilindru.

Deci s-a pus problema determinării relației care există între Z_d obținut în cazul utilizării unui profil paralelipipedic dreptunghiular și Z_t obținut în cazul utilizării unui profil paralelipipedic triunghiular.

S-au repetat experiențele în aceleași condiții ca mai sus și s-a reprezentat grafic $Z_t = f(a)$ pentru acest caz (vezi fig. 6 și 7, unde sînt redate două momente experimentale).

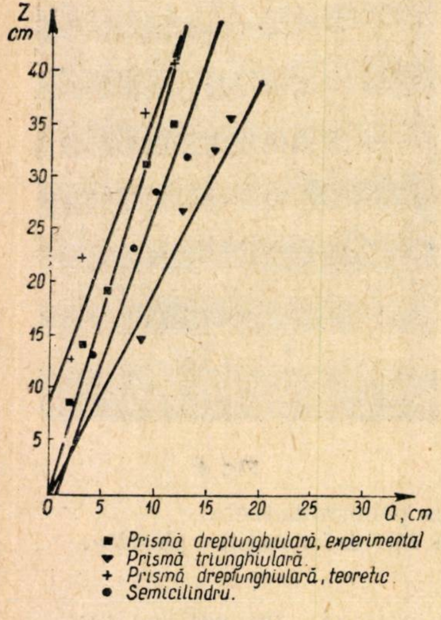


Fig. 5

Se constată că pentru aceeași adîncime de pătrundere a penetratorului, adîncimea maximă de deformare este mai mare în cazul prismei dreptunghiulare decît în cazul prismei triunghiulare.

În tabela 1 sînt trecute rezultatele experimentale (fig. 5).

Utilizînd aceste valori și aplicînd metoda celor mai mici pătrate, s-a determinat ecuația $Z_d = f(a)$ și $Z_t = f(a)$

$$Z_d = 3{,}4\, a - 0{,}1\,, \quad Z_t = 1{,}9\, a - 0{,}3.$$

Eliminînd pe a între aceste două expresii, obținem următoarea relație între deformațiile ce se obțin cu cele două forme ale vîrfului de penetrare :

$$Z_d = 1{,}8\, Z_t + 0{,}4. \qquad (6)$$

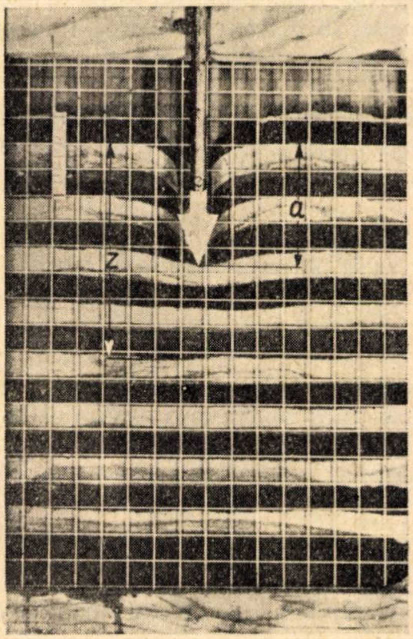


Fig. 6

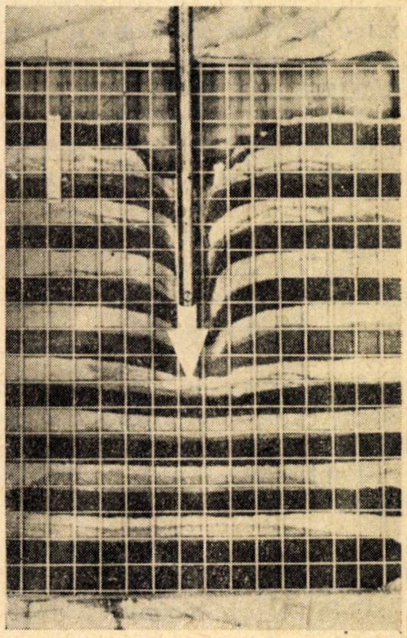


Fig. 7

Tabela 1

Profilul penetrometrului	P kg/cm²	a cm	$Z = Z_{\max} + a$ cm
Prismă dreptunghiulară	1,1	2	8
	1,7	3	14
	1,7	5,5	19
	2,8	9	31
	3,3	12	35
Prismă triunghiulară	1,1	8,5	14,5
	2,4	12,5	26,5
	3,8	15,5	32,5
	5,5	17,0	35,5
Semicilindru	2	4	13
	3,3	7	24
	4,7	10	28
	7,2	13	32

De asemenea s-au făcut experiențe în aceleași condiții pentru determinarea deformațiilor ce au loc, cînd vîrful de penetrare este un semicilindru și s-a determinat următoarea relație :

$$Z_c = 2{,}9\, a - 1{,}5.$$

Reprezentînd grafic această relație (fig. 5) se constată că deformațiile maxime pe verticală ce au loc în acest caz, se plasează între deformațiile maxime în cazul utilizării unui vîrf prismă dreptunghiulară și a unui vîrf prismă triunghiulară.

Pentru a putea avea o unitate de referință, s-au raportat deformațiile ce se obțin în acest caz la deformațiile ce se obțin în cazul unei prisme dreptunghiulare și s-a obținut următoarea relație :

$$Z_d = 1{,}2\, Z_c + 1{,}5. \qquad (7)$$

Deci cu ajutorul expresiilor (6) și (7) se pot compara rezultatele ce se obțin în cazul măsurării rezistenței la penetrare cu diverse profile ale vîrfului utilizat.

★

În continuare, s-a pus problema determinării influenței pe care o au unele caracteristici fizice ale solului asupra rezistenței dinamice la penetrare.

Pentru măsurarea rezistenței dinamice la penetrare, se poate folosi formula

$$\frac{R^2 b_0}{2EF} + Ra - [a(G_1 + G_2) + nG_1 h\beta] = 0, \qquad (8)$$

dedusă din teoria ciocnirii a două corpuri, unde s-au utilizat următoarele notații :

R = rezistența la penetrare,
F = secțiunea maximă a vîrfului de penetrare,
E = coeficientul de elasticitate a materialului din care este construit penetrometrul,
l_0 = lungimea liberă a penetrometrului,
a = adîncimea de pătrundere,
G_1 = greutatea berbecului,
G_2 = greutatea penetrometrului,
h = înălțimea de cădere a berbecului,
$\beta = \frac{G_1 + \eta^2 G_2}{G_1 + G_2}$,
n = numărul de lovituri,

în cazul ciocnirii plastice $\eta = 0$.

Deoarece $E \gg R^2$ termenul $\frac{R^2 b_0}{2EF}$ este foarte mic și deci se poate neglija, astfel că (8) se poate scrie

$$R = G_1 + G_2 + \frac{h \cdot n}{a} \cdot \frac{G_1^2}{G_1 + G_2},$$

sau dacă raportăm la secțiunea F avem

$$\frac{R}{F} = K_p = \frac{G_1 + G_2}{F} + \frac{nh}{a} \cdot \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{1}{F} \cdot \tag{9}$$

Valorile G_1, G_2, F, h sînt constante ale aparatului. Măsurînd pe a, putem determina pe K_p.

Dacă considerăm penetrometrul asemenea unui pilon, putem să stabilim capacitatea lui portantă (în cazul nostru corespunde unei condiții de echilibru).

Problema capacității portante a pilonilor a fost mult studiată, ajungîndu-se la concluzia că formulele deduse pe baza calculului curbelor de alunecare, al presiunilor active și pasive care se exercită de-a lungul acestor curbe, dau o soluție mai exactă a problemei de mai sus*).

Sarcina specifică C_p ce o poate suporta un pilon înfipt pînă la o anumită adîncime într-un strat cu greutatea volumetrică γ_1, cu unghiul de frecare interioară φ_1, străbătînd un strat cu caracteristicile γ_2 și φ_2 este egală cu

$$C_p = \left(\frac{d}{4}\gamma_1 S_1 + a\gamma_2 S_2 S_2' + \frac{1}{2}\gamma_2 \frac{l^2}{\frac{d}{4}} S_3'\right) \cdot \tag{10}$$

Primul termen al expresiei (10) se referă la capacitatea portantă a vîrfului pilonului; al doilea termen reprezintă rezistența la vîrf datorită sarcinilor care apasă asupra planului orizontal ce trece prin baza pilonului, corectat cu un factor care ia în considerație rezistența laterală a straturilor de deasupra bazei pilonilor; al treilea termen reprezintă rezistența laterală ce apare la frecarea dintre pilon și pămînt. În cazul măsurării rezistenței la penetrare, datorită construcției speciale a penetrometrului, al treilea termen este nul, deoarece frecările laterale au fost înlăturate.

S_1 și S_2 sînt calculate în funcție de unghiul de frecare φ_1 iar S_2' în funcție de**) φ_2

$$S_1 = 0{,}192 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)(e^{4{,}55 \operatorname{tg} \varphi_1 - 1}),$$

$$S_2 = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi_1},$$

$$S_2' = (1 + 0{,}32 \operatorname{tg}^2 \varphi_2).$$

În cazul pătrunderii penetrometrului sîntem în prezența unei forțe mai mari decît capacitatea portantă, ceea ce se poate exprima astfel: $K_p > C_p$ sau

$$\frac{G_1 + G_2}{F} + \frac{nh}{a} \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} \frac{1}{F} \geqslant \frac{d}{4} \gamma_1 S_1 + a\gamma_2 S_2 S_2',$$

---

*) [8], p. 342.

**) [8], p. 335.

sau

$$\frac{G_1 + G_2}{F} + \frac{nh}{a}\,\frac{G_2^2}{G_1 + G_2}\,\frac{1}{F} = \frac{d}{4}\,\gamma_1 S_1 + a\,\gamma_2\,S_2 S_2' + \varepsilon. \tag{11}$$

În tabela 2 sînt date cîteva valori experimentale pentru S_1, S_2 şi S_2' corespunzătoare unor anumite tipuri de sol.

Tabela 2

Tipul de sol*	tg φ	φ	S_1**)	S_2**)	S_2'**)
Zăcămînt de 2 ani pe pămînt nisipos	0,76	37°	23,04	42,92	1,182
Idem	0,84	40°	23,3	64,2	1,225
Pămînt nisipos greu . . .	0,76	37°	23,04	42,92	1,182
Lucernă pe pămînt de cernoziom argilos	0,79	38°	27,43	48,93	1,195
Mirişte pe cernoziom argilos în stare de praf . .	1,1	47°	161,05–202,7	187,2–222,3	1,386

---

*) [1], p. 96.

**) [8], p. 335–338.

Dacă se consideră un sol nisipos greu cu $S_1 = 23{,}04$, $S_2 = 42{,}9$ şi $S_2' = 1{,}18$ şi dacă se lucrează cu un penetrometru cu următoarele

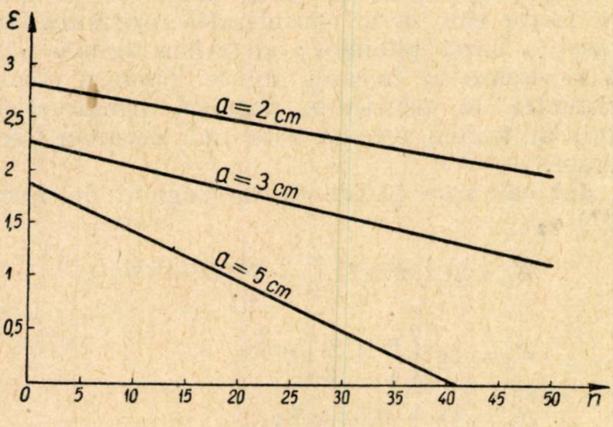


Fig. 8

caracteristici: $G_1 = 2$ kg, $G_2 = 2$ kg, $d = 2$ cm, $h = 10$ cm, se obţine o relaţie de forma

$$\varepsilon = 1{,}27 + \frac{3{,}1}{a} - 0{,}008\,a. \tag{12}$$

Dacă pentru o lovitură a berbecului se obţine pe rînd $a = 2$, 3,5 cm se reprezintă grafic $\varepsilon = f\,(n,\ a\,(n))$ (fig. 8). Se constată că în cazul cînd în acest teren penetrometrul cu caracteristicile de mai sus pătrunde la fiecare lovitură cu cîte 5 cm, în medie, atunci la 41 lovituri corespunzătoare unei adîncimi totale de pătrundere egală cu 205 cm $\varepsilon = 0$ şi deci $K_p = C_p$.

În acest caz, dacă rezistenţa la penetrare se măsoară într-un sol cu $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ avem

$$K_p = \gamma\left(\frac{d}{4} S_1 + a S_2 S_2'\right),$$

se vede că pentru acelaşi coeficient de frecare, rezistenţa la penetrare este direct proporţională cu greutatea volumetrică.

CONCLUZII

Ca urmare a cercetărilor întreprinse cu dispozitivul de vizualizare prezentat în cursul lucrării s-au desprins următoarele constatări :

— Există o relaţie liniară între adîncimea de pătrundere a unui corp în sol şi deformaţia maximă pe verticală a acestuia.

— Coeficienţii acestei relaţii sînt în funcţie de forma vîrfului de penetrare. Valoarea acestor coeficienţi a fost determinată experimental pentru un anumit tip de sol.

— Se constată o bună apropiere între rezultatele experimentale şi cele teoretice în cazul utilizării unui vîrf în formă de prismă dreptunghiulară.

— Se constată că rezultatele obţinute prin utilizarea unui anumit profil a vîrfului de penetrare pot fi comparate cu rezultatele obţinute prin utilizarea unui alt profil.

— Se constată că rezistenţa la penetrare a unui sol variază direct proporţional cu greutatea lui volumetrică.

Primit la redacţie la 22 aprilie 1959

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ, ПРОИСХОДЯЩИХ ПРИ ПРОНИКАНИИ В ГРУНТ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В статье выявляются визуальными методами деформации, происходящие при проникновении тела в грунт.

Получено соотношение между максимальной деформацией и приложенным давлением, причем использованы различные формы проникающего острия. Устанавливается также соотношение между максимальными деформациями, имеющими место при использовании различных форм проникающего острия.

На основании собственных опытных результатов и результатов других авторов доказывается, что при помощи измерения сопротивления грунта на проникновение острия можно установить, при некоторых условиях, его объемный вес.

SICHTBARMACHUNG EINIGER PHYSIKALISCH-MECHANISCHER ERSCHEINUNGEN BEI DER BODENDURCHDRINGUNG

ZUSAMMENFASSUNG

Die von den Verfassern durchgeführten Versuche lassen durch augenscheinliche Verfahren die beim Eindringen eines Körpers in den Boden auftretenden Verformungen erkennen.

Die zwischen der maximalen Verformung und dem ausgeübten Druck bestehende Beziehung wird unter Verwendung verschiedener Formen der eindringenden Spitze bestimmt. Weiterhin wird eine Beziehung zwischen den maximalen Verformungen aufgestellt, die bei Verwendung verschiedener Formen der eindringenden Spitzen auftreten.

Auf Grund eigener und von andern Autoren erzielten Versuchsergebnissen wird nachgewiesen, daß unter gewissen Bedingungen durch Messung des Eindringungswiderstandes einer Bodenart deren volumetrisches Gewicht bestimmt werden kann.

BIBLIOGRAFIE

1. А. Д. Далин, Р. В. Павлов, *Ротационные грунтообрабатывающие и землеройные машины.* Машгиз, Москва, 1950.
2. П. Ж. Бахтин, *Динамика физико-механических свойств почв в связи с вопросами их обработки.* Академия Наук СССР. Труды почвенного института им. Докучаева. XLV. *Физико-механические свойства почвы как фактор, определяющий условия работы сельскохозяйственных машин.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1954.
3. C. Florescu şi colaboratori, *Studii asupra rezistenţelor la penetrare şi tăiere verticală pe mai multe tipuri de sol din regiunea Craiova.* Analele Inst. Agronomic „T. Vladimirescu" Craiova, **III** (1959) (sub tipar).
4. C. W. Ferry, H. M. Wilson, *The Cornel soil penetrometer.* Agricultural Engineering, july 1952.
5. I. H. Mc. Clelland, *Apparatus for measuring the soil compactity.* Agricultural Engineering, july 1956.
6. A. Canarache, *Rezistenţa la arat la umiditate optimă pe solul brun-roşcat de pădure de la Moara Domnească şi pe cernoziomul castaniu de la Mărculeşti.* Probleme de pedologie, 1958.
7. C. Florescu şi colaboratori, *Penetrometrul dinamic pentru sol, cu acţionare manuală, tip IMA-II.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).
8. Hugo-Lehr, *Fundaţii — fizica şi mecanica pămînturilor.* Editura de stat pentru arhitectură şi construcţii, Bucureşti, 1954.

ASUPRA SUPRAFEȚEI ARIPII CORESPUNZĂTOARE UNEI DISTRIBUȚII DE PRESIUNI DATĂ

DE

M. IONESCU și GH. DARIE

Într-o lucrare anterioară [1] s-a stabilit o teorie generală a problemei indirecte în cazul scurgerilor omogene de ordin superior și s-a dat expresia generală a vitezei verticale w pentru o distribuție de presiuni dată.

În cele ce urmează vom da expresia generală a suprafeței unei astfel de aripi.

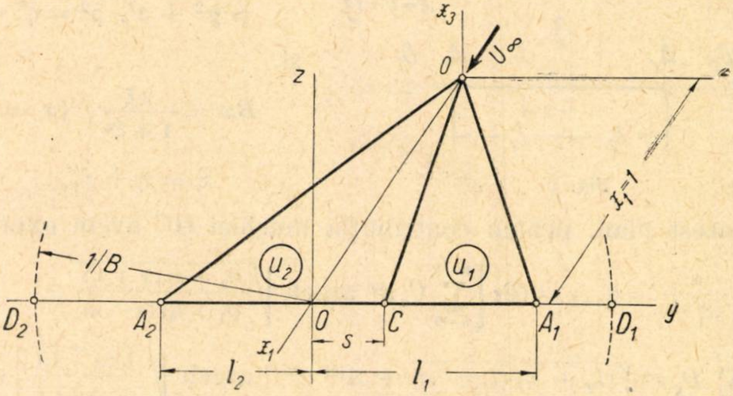


Fig. 1

Vom pleca pentru aceasta de la rezultatele obținute în lucrarea menționată și vom considera în acest sens o aripă groasă cu borduri de atac subsonice, OA_2A_1 pe care distribuția de presiuni, sau mai bine distribuția de viteză axială u (presiunea poate fi definită de această viteză,

$$C_p = -\frac{2u}{U_\infty}, \tag{1}$$

C_p fiind coeficientul de presiune şi U_∞ viteza în curentul neperturbat) este definită astfel (fig. 1)

$$u_2 = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(2)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q, \tag{2}$$

pe suprafaţa OA_2C şi

$$u_1 = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q, \tag{3}$$

pe suprafaţa OCA_1.

Spunem în acest caz că linia OC, care separă cele două regiuni cu regimuri diferite de viteză axială u, este o muchie.

Aşa cum s-a arătat în lucrarea [1] soluţia problemei se poate obţine suprapunînd efectul acestei muchii şi efectul bordurilor de atac subsonice.

Contribuţiile acestora le vom da în planul x obţinut din planul fizic $x_1 = 1$ prin intermediul transformărilor (fig. 2)

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2},\ \theta = \theta,\ (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2) \tag{4}$$

şi

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2},\ (x = y + iz,\ \xi = \eta + i\zeta). \tag{5}$$

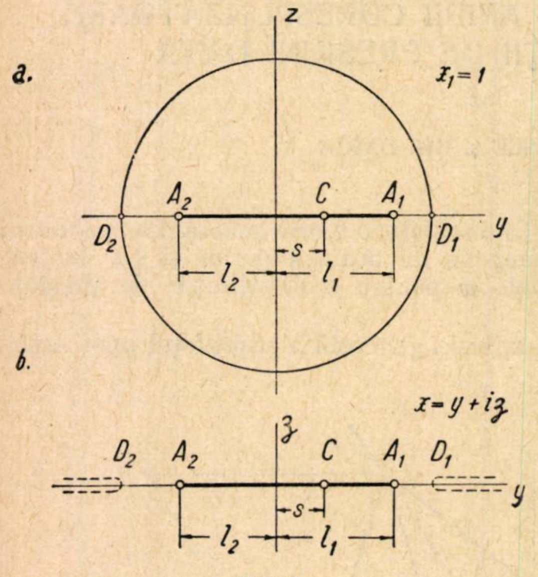


Fig. 2

În acest plan, pentru contribuţia muchiei OC avem expresia

$$\frac{\alpha}{x_1^{n-1}} = \alpha_{n-1} = \mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(l_1 - s)(x + l_2)}{(l_1 + l_2)(x - s)}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q x^q \sqrt{(l_2 + x)(l_1 - x)} + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(x + l_2)}{(l_1 + l_2)x}}\right], \tag{6}$$

iar pentru contribuţia bordurilor de atac OA_2 şi OA_1, respectiv expresiile

$$\frac{\alpha}{x_1^{n-1}} = \alpha_{n-1} = \mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q x^q \sqrt{\frac{l_1 - x}{l_2 + x}} + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(x + l_2)}{(l_1 + l_2)x}}\right], \tag{7}$$

$$\frac{\alpha}{x_1^{n-1}} = \alpha_{n-1} = \mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q x^q \sqrt{\frac{l_2 + x}{l_1 - x}} + A^{(0)} x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{l_1(x + l_2)}{(l_1 + l_2)x}}\right]. \tag{8}$$

Formula (6) este valabilă atît în cazul în care unul sau ambele borduri de atac devin supersonice cît şi în cazul în care în una din aceste situaţii muchia OC devine şi ea supersonică. Este suficient să înlocuim în acest scop l_1 (sau l_2) prin $1/B$, dacă bordul OA_1 (sau OA_2) devine supersonic, şi $l_1 = l_2 = 1/B$ dacă ambele borduri devin supersonice ; dacă muchia OC devine supersonică, trebuie să punem după ce am aplicat simbolul $\mathcal{R}e$ pentru punctele aripii, C_q argch $x = C'_q$ arc cos x [1].

În mod analog formulele (7) şi (8) sînt valabile, de asemenea, în cazul în care bordul de atac care nu a fost luat în consideraţie, OA_1, în formula (7) respectiv OA_2 în formula (8), devine supersonic. În acest caz nu avem decît să înlocuim l_1 respectiv l_2 prin $1/B$.

Posedăm astfel soluţia problemei pentru orice poziţie a bordurilor de atac sau a muchiei.

Mai departe, notînd cu $Z(x_1, x_2)$ cota unui punct de pe suprafaţa aripii, incidenţa (sau panta) în acest punct este dată de expresia

$$\alpha = \frac{\partial Z}{\partial x_1} \tag{9}$$

şi integrînd în funcţie de x_1 vom găsi Z.

Vom determina suprafaţa considerînd separat efectul unei muchii şi efectul bordurilor de atac subsonice.

Pentru cazul muchiei, aplicînd formula (9) sub forma

$$Z = \int \alpha\, dx_1 = \int x_1^{n-1}\, \alpha_{n-1}\, dx_1 = -\, x_2^n \int \frac{\alpha_{n-1}}{y^{n+1}}\, dy \tag{10}$$

şi înlocuind pe α_{n-1} cu expresia dată de (6) obţinem după cîteva calcule elementare, formula

$$Z = -\, \mathcal{R}e\; x_2^n \left[\sum_{p=2}^{n+1} C_{n+1-p} I_p(s) + \sum_{p=3}^{n+1} D_{n+1-p}\, H_p + A^{(0)}\, I_2(0) \right], \tag{11}$$

unde am făcut următoarele notaţii :

$$\begin{aligned} I_p(s) &= \int \frac{\operatorname{argch} \sqrt{\dfrac{(l_1 - s)(x + b_2)}{(l_1 + l_2)(x - s)}}}{x^p}\, dx = \\ &= \left[\frac{1}{s^{p-1}} - \frac{1}{x^{p-1}} \right] \frac{\operatorname{argch} \sqrt{\dfrac{(l_1 - s)(x + l_2)}{(l_1 + l_2)(x - s)}}}{p - 1} + \frac{\sqrt{(l_1 - s)(l_2 + s)}}{2 s^p (p - 1)} \sum_{j=1}^{p-1} s^j G_j , \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} H_p &= \int \frac{\sqrt{(l_2 + x)(l_1 - x)}}{x^p}\, dx = \int \frac{l_1 l_2 + (l_1 - l_2)\, x - x^2}{x^p \sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}}\, dx = \\ &= l_1 l_2\, G_p + (l_1 - l_2)\, G_{p-1} - G_{p-2} , \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} G_p = \int \frac{dx}{x^p \sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}} = -\frac{1}{(p-1)\, l_1 l_2} \Bigg[& \frac{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}}{x} + \\ & + \frac{(2p - 3)(l_1 - l_2)}{2}\, G_{p-1} - (p - 2)\, G_{p-2} \Bigg], \end{aligned} \tag{14}$$

cu

$$G_0 = \arcsin \frac{2\,x + (l_2 - l_1)}{l_1 + l_2}, \tag{15}$$

$$G_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}} = -\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{l_1(x + l_2)}{(l_1 + l_2)x}}, \tag{15'}$$

și

$$I_2(0) = \int \frac{\operatorname{argch} \sqrt{\dfrac{l_1(x + l_2)}{(l_1 + l_2)x}}}{x^2}\, dx = \frac{-\operatorname{arg\,ch} \sqrt{\dfrac{l_1(x + l_2)}{(l_1 + l_2)\, x}}}{x} - \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{2} G_2 . \tag{16}$$

În mod analog pentru efectul unuia din bordurile de atac subsonice, OA_1 spre exemplu, vom avea

$$Z = -\, x_2^n \left\{ \sum_{p=2}^{n+1} A_{n+1-p} \,(l_2 G_p + G_{p-1}) + A^{(0)} I_2(0) \right\}, \tag{17}$$

care se deduce ușor din formula (11) făcînd $C_q = 0$ și modificînd în conformitate cu expresia (7) limita superioară a sumei.

Se vede imediat că în punctul $x = s$ unde $w = \infty$ cota aripii este finită, deci suprafața aripii nu posedă discontinuitate în dreptul unei muchii în ciuda faptului că viteza verticală este infinită. Dar în punctul $x = 0$ în cazul $n = 1$ avem $Z = \infty$.

Combinînd convenabil expresiile de mai sus și ținînd seama de observațiile făcute la p. 1265 putem obține expresia generală a suprafeței aripii pentru orice poziție a bordurilor de atac și a muchiei față de conul Mach.

Aplicații

Vom da ca aplicație expresia suprafeței aripii subțiri pentru cazurile $n = 1$ și $n = 2$. Vom avea

— pentru $n = 1$

$$\alpha_0 = \mathcal{R}e \left\{ C_0' \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - Bl_1)(1 + Bx)}{2\,B(x - l_1)}} + C_0'' \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(l + Bx)}{2\,B(x + l_2)}} + \right.$$
$$\left. + A_0 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bx}{2\,Bx}} \right\}, \tag{18}$$

și

$$Z = -\mathcal{R}e\, x_2 \left\{ C_0' \left[\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{x} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - Bl_1)(1 + Bx)}{2\,B(x - l_1)}} - \frac{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{2\,l_1} \operatorname{argch} \frac{1}{Bx} \right] - \right.$$
$$- C_0'' \left[\left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{x} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2\,B(x + l_2)}} + \frac{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{2\,l_2} \operatorname{argch} \frac{1}{Bx} \right] + \tag{19}$$
$$\left. + \frac{A_0}{2\,x} \left[\sqrt{1 - B^2 x^2} - 2 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bx}{2\,Bx}} \right] \right\};$$

— pentru $n = 2$

$$\frac{1}{x_1}\,\alpha_1 = \mathcal{R}e\Biggl\{(C_0' + C_1'\,x)\,\mathrm{argch}\,\sqrt{\frac{(1 - Bl_1)\,(1 + Bx)}{2\,B\,(x - l_1)}} + (C_0'' + C_1''\,x)\,\mathrm{argch}\,\sqrt{\frac{(1 + Bl_2)\,(1 + Bx)}{2\,B\,(x + l_2)}} + A_0\,x\,\mathrm{argch}\,\sqrt{\frac{1 + Bx}{2\,Bx}} + D_0\sqrt{1 - B^2\,x^2}\Biggr\} \tag{20}$$

și

$$\begin{aligned} Z_1 = -\,\mathcal{R}e\,x_2^2\Biggl\{&\biggl[\biggl(\frac{1}{2\,l_1^2} - \frac{1}{2\,x^2}\biggr)C_0' + \biggl(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{x}\biggr)C_1'\biggr]\,\mathrm{argch}\,\sqrt{\frac{(1 - Bl_1)(1 + Bx)}{2\,B\,(x - l_1)}} - \\ &- \frac{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{4\,l_1^2}\,(C_0' + 2\,l_1\,C_1')\,\mathrm{argch}\,\frac{1}{Bx} - \frac{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{4\,l_1}\,C_0'\,\frac{\sqrt{1 - B^2\,x^2}}{x} + \\ &+ \biggl[\biggl(\frac{1}{2\,l_2^2} - \frac{1}{2\,x^2}\biggr)C_0'' - \biggl(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{x}\biggr)C_1''\biggr]\,\mathrm{argch}\,\sqrt{\frac{(1 + Bl_2)\,(1 + Bx)}{2\,B\,(x + l_2)}} - \\ &- \frac{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{4\,l_2^2}\,(C_0'' - 2\,l_2\,C_1'') + \frac{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{4\,l_2}\,C_0''\,\frac{\sqrt{1 - B^2\,x^2}}{x} + \\ &+ \frac{A_0}{2\,x}\biggl[\sqrt{1 - B^2\,x^2} - 2\,\mathrm{argch}\,\sqrt{\frac{1 + Bx}{2\,Bx}}\biggr] + \\ &+ \frac{D_0}{2\,Bx^2}\biggl[2\,B^2\,x^2\,\mathrm{argch}\,\frac{1}{Bx} - \sqrt{1 - B^2 x^2}\biggr]\Biggr\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Primit la redacție la 22 decembrie 1958

О ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДАВЛЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя из общего выражения вертикальной скорости вокруг треугольного крыла в случае заданного распределения давлений, авторы устанавливают форму поверхности такого крыла (11) — для влияния ребра и (17) — для влияния дозвуковой передней кромки.

Приводятся приложения к случаю тонкого крыла при $n=1$ и $n=2$.

SUR LA SURFACE DE L'AILE CORRESPONDANT À UNE DISTRIBUTION DE PRESSIONS DONNÉE

RÉSUMÉ

Partant de l'expression générale de la vitesse verticale autour d'une aile triangulaire, dans le cas d'une distribution de pressions donnée, les auteurs déterminent la forme de la surface d'une telle aile, (11) pour la contribution d'une arête, (17) pour la contribution d'un bord d'attaque subsonique.

Des applications sont données, pour l'aile mince, dans les cas où $n = 1$ et $n = 2$.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Théorie générale de l'aile triangulaire à distribution de pressions donnée (le problème indirect)*. Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *3* (1958).

ÎMBUNĂTĂŢIREA COMPORTĂRII LA UZURĂ A MATERIALELOR PRIN MODIFICĂRI SUPERFICIALE

DE

M. MARÎNESCU *)

Uzura organelor de frecare ale agregatelor mecanice este condiţionată de mulţi factori, a căror contribuţie individuală variază într-un interval foarte larg.

Unul din aceşti factori este materialul pieselor de frecare ; în regim de ungere hidrodinamică s-a dovedit că materialul intervine foarte puţin şi este inutil să se caute o caracterizare care să aibă însemnătate practică din acest punct de vedere.

Dar în regim hidrodinamic, intensitatea uzurii este atît de mică încît în general, ea poate fi neglijată. Uzura este *normală*.

Cînd regimul de lucru al agregatului devine *anormal* se constată însă că materialul are o comportare nemulţumitoare fie prin mărirea considerabilă a intensităţii uzurii, fie prin intervenţia accidentelor, între care cele mai importante sînt topirile şi ruperile.

Cu apariţia regimului nefavorabil, pentru uzură capătă însă importanţă din ce în ce mai mare comportarea superficială a materialului care, deşi nu este independentă de comportarea lui în masă, impune condiţii diferite şi uneori chiar opuse celor impuse masei materialului. De aceea, trebuie să se realizeze uneori straturi superficiale speciale şi cu totul diferite de cele ale materialului de construcţie folosit.

Scopul modificărilor superficiale

Pornind de la un material care îndeplineşte condiţiile de rezistenţă prescrise pentru un anumit regim, modificarea superficială trebuie să urmărească următoarele obiective :

1. durificare superficială,
2. apropiere din punct de vedere electrochimic,
3. miscibilitate limitată,
4. diametre atomice în raport diferit de 0,59 sau 1 ± 0,15,
5. căldură latentă de topire mică,
6. structură omogenă,
7. afinitate pentru lubrifiant,

---

*) Uzinele de tractoare „Ernst Thälmann", Oraşul Stalin.

8. posibilități de autolubrifiere,

9. formare eventuală de oxizi rezistenți dar neabrazivi.

În diferitele tipuri de uzură interesează numai unele din aceste obiective.

Astfel, în cazul uzurii de contact probabil că primează punctele 3 și 4. Dacă sarcina este foarte mare, intervine punctul 6 eventual 1 și 9. În cazul uzurii abrazive primează fără îndoială punctul 1. În cazul uzurii corosive primează susceptibilitatea față de acțiunea chimică a agenților specifici ș.a.m.d.

Deducerea proprietății care primează în fiecare ansamblu de condiții nu este o problemă dificilă. Modificarea suprafeței astfel ca să se îmbunătățească proprietatea dorită este însă o problemă mai grea.

Metode de modificare a structurii superficiale

Tehnica ne pune la dispoziție trei căi pentru realizarea modificărilor superficiaile : fizică, chimică, aport de material străin.

Modificările fizice se pot produce prin : tratament termic sau presiune (ecruisare).

Modificările chimice se pot produce prin : reacție chimică sau difuzie.

Modificările prin aport de material din afară sub formă de strat acoperitor se pot face prin : depunere fizică (aderență sau topire) sau depunere chimică (reacție controlată, acțiunea aditivilor).

Metode fizice

Tratament termic. Unele metale se combină sau se aliază în mai multe feluri, mai ales cînd se pot prezenta sub diferite forme alotropice ca de ex. : Fe(α, β, γ și δ), Cr(α și β), Co(α și β), Sn (α și β) etc.

Fiecare astfel de formă alotropică este stabilă la anumite temperaturi și are proprietăți fizico-chimice proprii. Astfel, Fe α este stabil la temperaturi mai mici de 906°C, cristalizează în sistem cubic cu volum centrat și aproape nu dizolvă deloc carbonul ; dimpotrivă, Fe γ care este stabil peste 906°C, cristalizează în sistemul cubic cu fețe centrate și dizolvă carbonul formînd austenita, eventual pînă la carbura de fier (Fe_3C), respectiv pînă la o concentrație de aproximativ 6,5% C.

La răcire, austenita își redistribuie carbonul formînd doi constituenți, carbura de fier și ferita.

Cei doi constituenți se orînduiesc în lamele alternînde și constituie perlita. La limită, grosimea acestor lame se afirmă că nu depășește 6 Å. Cu cît lamelele sînt mai fine, cu atît materialul are o structură mai omogenă și mai dură.

Toate acestea necesită condiții speciale de răcire pentru a se putea forma, respectiv un timp suficient de lung pentru a permite desăvîrșirea reacției și orînduirii interne.

Dacă viteza de răcire este prea mare și procesele cu evoluție lentă nu au timp să se producă, fierul γ trece în fier α (proces aproape spontan) atît de repede încît nici nu este posibilă eliminarea carbonului din cristal. Ca urmare, rezultă un cristal deformat, acicular, cu tensiuni interne puternice, din cauza atomilor de carbon care au fost sechestrați în cubul centrat de Fe α.

Această soluție suprarăcită de carbon în Fe α, martensita, este forma cea mai dură a sistemului Fe-C.

Astfel există mai multe trepte de temperatură la care se produc modificări profunde în material și practica a dovedit că în condițiile frecării, în absența — chiar ocazională — a lubrifiantului, poate fi atinsă orice temperatură pînă la punctul de topire al materialului.

Procesele metalografice care se pot desfăşura la suprafaţa organelor de frecare sînt astfel condiţionate de variaţiile de temperatură la locul respectiv.

Într-adevăr, la un lagăr, un punct de pe o suprafaţă de frecare vine periodic în contact intim, sub sarcină, cu un punct de pe suprafaţa de frecare opusă. Local, temperatura se poate ridica oricît de mult, putîndu-se produce orice modificări structurale.

În cazul unui punct A de pe ax, în momentul cînd ajunge în poziţia M (fig. 1) temperatura lui se ridică foarte repede, dar de îndată ce a părăsit zona de contact, temperatura scade brusc, dacă se trece în lubrifiant continuu primenit, sau ceva mai lent dacă se trece într-o atmosferă gazoasă mai stagnantă.

Fenomenul are probabil aspectul din figura 2.

Situaţia din adîncime însă diferă pentru că atît încălzirea cît şi răcirea se produc cu oarecare întîrziere.

Pe normală, temperatura se poate totuşi considera — la limită — că se propagă ca în cazul barei, adică conform unei legi de forma

$$T = T_0 \, e^{-kz}$$

unde se notează cu

T — temperatura într-un punct oarecare la adîncimea z de la suprafaţă,

T_0 —temperatura la suprafaţă,

k — constantă.

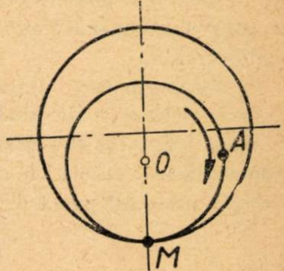


Fig. 1

Variaţiile de temperatură la fiecare nivel vor fi însă mai lente decît la suprafaţă, aproximativ ca în figura 3.

În astfel de condiţii se poate deduce că superficial sistemul Fe-C va da la încălzire austenită şi la răcire martensită, iar în adîncime va da perlită.

Suprafeţele astfel modificate au o comportare mult superioară la uzură, fiind mai dure şi mai omogene.

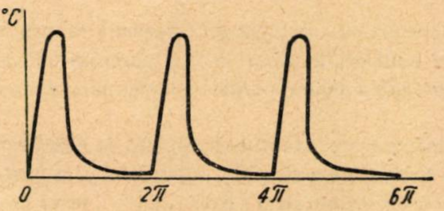


Fig. 2

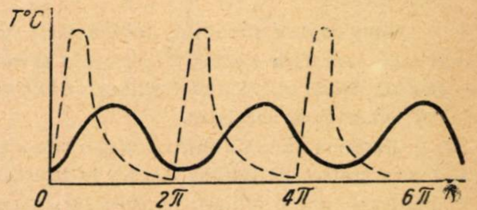


Fig. 3

Al doilea tip de modificări termice cu efect favorabil în ceea ce priveşte uzura este vitrificarea suprafeţelor prin topire şi răcire rapidă, fără a se mai reface o structură cristalină în sens metalografic.

Este vorba de bine cunoscutul strat Beilby a cărui natură este încă atît de controversată dar despre care se crede că nu şi-a putut dezvolta o reţea cristalină din cauza acţiunii inhibitoare a incluziunilor de oxizi şi alte impurităţi [1].

Oricare ar fi modul de formare sau natura acestui strat, este sigur că, în general, duritatea lui este mai mare decît duritatea materialului de bază, că este foarte puţin susceptibil la sudură şi că, în general, este deosebit de favorabil pentru comportarea la uzură.

În sfîrşit, temperatura mai are şi efectul de a vindeca superficial materialul de eventualele lui defecte, aducînd în exploatare suprafeţe convenabil pregătite.

Astfel temperatura, prin acţiunea ei directă, determină numai modificări favorabile din punct de vedere al uzurii, bine înţeles pînă la o anumită valoare critică, care depinde de natura chimică a materialului.

Temperatura este însă şi un parametru important în desfăşurarea altor procese, cum ar fi reacţiile chimice, procesele de difuziune, procesele de adsorbţie şi altele, dar efectul ei nu este întotdeauna favorabil.

Presiune. Problema este complexă şi nu a fost analizată în adîncime de cercetători.

Foarte schematic se pot semnala trei aspecte : un aspect indirect — prin ecruisarea bazei, şi două aspecte directe — prin densificarea reţelei şi prin modificarea efectivă a structurii metalografice.

Ecruisarea bazei. Experienţe citate în lucrările lui F. P. Bowden arată că materialele au o comportare cu atît mai bună cu cît duritatea oxidului este mai apropiată de duritatea bazei. În egală măsură se ştie că în general duritatea oxidului este mai mare decît duritatea materialului de suport. Tabela 1 în care se dau durităţile unor metale şi oxizi în kg/mm^2 [2] este semnificativă din acest punct de vedere.

Tabela 1

Simbol		Au	Ag	Sn	Al	Zn	Cu	Fe
Duritate	Metal	20	26	5	15	35	40	120
	Oxid	—	—	1650	1800	200	135	150
Sarcină critică în g		0	0,003	0,02	0,2	0,5	1	10

După cum se ştie însă, dacă o forţă acţionează cu o componentă normală asupra unei suprafeţe, suprafaţa rămîne intactă prin revenire elastică, în timp ce la o oarecare adîncime se produc cedări plastice cu durificarea corespunzătoare a materialului—fenomen bine cunoscut sub denumirea de ecruisare.

Creşterea durităţii prin ecruisare poate fi foarte mare, eventual apropiată de aceea rezultată prin tratament termic. Astfel, în imediata vecinătate a stratului superficial care poate fi un oxid, o clorură, o sulfură, o fosfură etc. sau chiar un simplu strat vitros (Beilby), se va forma o masă de suport mai dură care va menaja stratul friabil împiedicînd încovoierea excesivă a acestuia.

În ce măsură acest efect are o contribuţie pozitivă nu se ştie dar există toate motivele să se creadă că o astfel de contribuţie se obţine.

Densificarea materialului. Practica de atelier a arătat că vălţuirea şi mai ales bătaia cu alice influenţează favorabil comportarea la uzură. Cum din punct de vedere energetic este inadmisibil ca să existe poziţii de echilibru mai stabile decît cele corespunzătoare reţelei cristaline normale, această densificare trebuie înţeleasă numai în sensul că substituie tensiunilor de întindere (dovedite nefavorabile), tensiuni de compresiune favorabile.

Este, de asemenea, posibil ca unda de şoc a impactului (care ar trebui să determine densificarea materialului) să furnizeze energia de activare necesară pentru relaxarea materialului sau procesul mecanic însuşi să vindece golurile intercristaline prin readucerea atomilor în poziţiile de echilibru ale reţelei cristaline.

Pînă în prezent, nu există date care să permită elaborarea unei teorii ştiinţifice general valabile astfel că vor trebui acceptate numai unele observaţii experimentale care de altfel şi-au găsit largă aplicare în practică.

Modificarea efectivă a structurii metalografice. Experienţe mai recente au arătat că presiunea poate determina în materiale modificări similare celor produse de temperatură.

Ca exemplu se citează [3] cazul unui oţel din grupa oţelurilor cu Ni care, la presiuni peste 80 kg/mm^2 suferă transformări metalografice, în sensul că austenita (soluţie de carbon în fier γ), trece în martensită (soluţie suprasaturată de carbon în fier α) la 180 kg/mm^2 trecerea fiind integrală.

Este remarcabil că fenomenul este independent de temperatură (la temperaturi moderate) şi de timp, deci poate participa activ în toate condiţiile de frecare sub sarcină corespunzătoare.

La temperaturi mai ridicate intervine şi timpul, deoarece în general căldura furnizează energia de activare necesară proceselor de difuziune şi reanjare internă, deci se opune oricăror tentative de ieşire din echilibru.

Prin promovarea proceselor de difuziune se poate ajunge la forme mai stabile, de exemplu la structuri cu două faze cum ar fi bainita (ferită + carbură de fier). Procesul se produce pînă la aproximativ 500°C şi are de asemenea un prag de tensiune.

Se crede că modificările descrise se datorează tensiunilor locale de la intersecţia alunecărilor care pot fi de ordinul 3,7—10 kg/mm^2 $\pm$ 2 kg/mm^2.

În tot cazul, participarea acestor transformări structurale la tabloul modificărilor superficiale care intervin în procesul uzurii pare categoric dovedită şi trebuie avută în vedere la discutarea problemei.

Modificări superficiale prin reacţie chimică. Ambianţa naturală în care lucrează organele de frecare este suficient de agresivă pentru a face ca fenomenele de frecare să fie practic întotdeauna asociate cu diferite reacţii chimice. Unii cercetători au afirmat [4] că uzura — ca pierdere de material — nu se produce decît după oxidarea particulelor transferate, iar alţii au arătat [2], ceea ce de altfel apare just, că dacă nu s-ar produce oxidare, aşchierea metalelor nici nu s-ar putea realiza, aşchia sudîndu-se imediat la metalul de bază sau la cuţit [5].

Agentul activ cel mai comun este oxigenul. El participă la formarea oxizilor, iar aceştia, în majoritatea cazurilor au efect favorabil în combaterea uzurii.

Nu toţi oxizii se comportă la fel de bine. Astfel, oţelul formează trei oxizi FeO, Fe_3O_4 şi Fe_2O_3, dintre care ultimul poate avea chiar acţiune abrazivă. La fel oxidul de aluminiu este deosebit de nociv din cauza marii sale durităţi.

Se afirmă [6] că întotdeauna cînd se ajunge la accident, se constată prezenţa hematitei (Fe_2O_3), în timp ce uzurile minime sînt asociate cu prezenţa wustitei (FeO) sau magnetitei (Fe_3O_4).

Uneori efectul oxidului este direct surprinzător. Astfel, dacă înainte de a fi încercat la uzură, nichelul este încălzit pînă la 1000°C, se constată că intensitatea uzurii scade pînă la de 10 ori.

Reacţiile se pot produce şi cu alte elemente din ambianţă rezultînd sulfuri, cloruri etc. Pentru fiecare metal există o anumită combinaţie sau o anumită categorie de combinaţii care dau bune rezultate din punct de vedere al uzurii, de ex. : bisulfura de molibden, clorura de cadmiu, iodura de plumb, bromură de Cu, stearat de zinc etc.

Bunele rezultate date de straturile superficiale respective se explică, fie prin rezistenţa sporită a peliculelor formate, fie prin structura lor lamelară care asigură alunecarea straturilor succesive în modul bine cunoscut la grafit.

Dacă oxizii se produc în mod natural în procesul de frecare, ceilalţi compuşi se produc numai accidental sau în condiţii pregătite cu grijă.

Astfel se ştie că majoritatea aditivilor antigripanţi conţin un compus cu sulf, clor sau fosfor. La punctele calde, cînd energia de activare a reacţiei este depăşită, se produc sulfuri, cloruri, fosfuri sau produse mixte organometalice. În majoritatea cazurilor, formarea acestora este condiţionată de existenţa prealabilă a oxidului şi apei.

Există deci numeroase posibilităţi de protecţie a suprafeţelor, acţionînd asupra atmosferei ambiante, asupra agenţilor din lubrifiant sau asupra condiţiilor de exploatare.

Difuzie. Tehnica industrială foloseşte numeroase metode de modificare superficială prin difuzia unor elemente în material. Cel mai frecvent utilizat proces este cel de nitrurare a suprafeţelor. Cementarea este larg utilizată şi în ultima vreme sulfizarea a devenit foarte apreciată ; ambele implică, deşi în grade diferite, nitrurarea.

Difuzia, în cazul solidelor, se produce la planurile intercristaline sau la punctele slabe din reţea, neconstatîndu-se la monocristalele metalice. Nu toate elementele pot difuza şi uneori difuzia poate avea un singur sens. De exemplu : aurul poate difuza în platină, dar platina nu poate difuza în aur [7]. Pe de altă parte difuzia este mutuală între metale similare.

Difuzia este intensificată de căldură după o lege similară celei cunoscute de la reacţiile chimice.

Nemetalele difuzează mai greu în metale şi se crede că numai hidrogenul, oxigenul, azotul şi carbonul manifestă această proprietate. În privinţa ultimelor două, se afirmă că difuzează numai în metalele cu care dau nitruri sau carburi [8].

Straturile modificate prin difuzia unor elemente manifestă de obicei o duritate mai mare şi au o comportare superioară tocmai datorită acestui fapt. Uneori însă însăşi modificarea naturii lor le face mai puţin susceptibile la sudură şi în sfîrşit alteori în acest mod se măreşte apreciabil rezistenţa la coroziune.

Ca metode industriale, în afară de cementare, nitrurare, şi sulfizare se mai practică ocazional cromarea prin difuzie şi uneori chiar aluminarea.

Aport de material străin

Problema pare simplă sub forma sub care a fost enunţată, dar de fapt prezintă aspecte foarte variate, mai ales din cauza caracterului specific al fiecărei astfel de pelicule.

Astfel, ca tipuri reprezentative se pot deosebi

— pelicule de metal antifricţiune, aplicate prin topire ;
— pelicule de substanţe cu structură lamelară, aplicate prin frecare ;
— pelicule de substanţe cu structură lamelară, aplicate cu ajutorul unor lianţi ;
— pelicule de materiale nemetalice aplicate prin presare.

Metalele cu bune proprietăţi antifricţiune sînt de obicei cele plastice, cu punct de fuziune scăzut şi căldură latentă de topire mică. Cele mai cunoscute metale din această categorie sînt trecute în tabela 2.

Tabela 2

Metal	Punct de topire °C	Căldura latentă de topire cal/g
Indiu	156,4	
Staniu	232	14,5
Cadmiu	321	13,2
Plumb	327	
Argint	960	25,0

Cu excepția argintului care are o comportare excepțională la frecare, deși temperatura lui de topire este de aproape 1000°C, comportarea celorlalte pare să fie invers proporțională cu temperatura de topire, indiul fiind de departe cel mai bun din această categorie.

De obicei, aceste metale se aplică în straturi foarte subțiri, de ordinul sutimilor de milimetru, pe suprafețele de frecare ale cuzineților de tip bimetalic și trimetalic.

Teoria eficacității lor a fost făcută de F. P. Bowden și D. Tabor [9] și poate fi urmărită schematic în figura 4*a*, *b*, *c*.

Notînd cu A — aria de contact și cu τ — tensiunea de forfecare, se poate scrie că forța de frecare F este dată de relația

$$F = A \cdot \tau .$$

Dacă materialul de bază este moale, iar cel al piesei de încărcare dur, aria de contact este mare, astfel că deși este τ mic, produsul lor dă pentru forța de frecare o valoare mare.

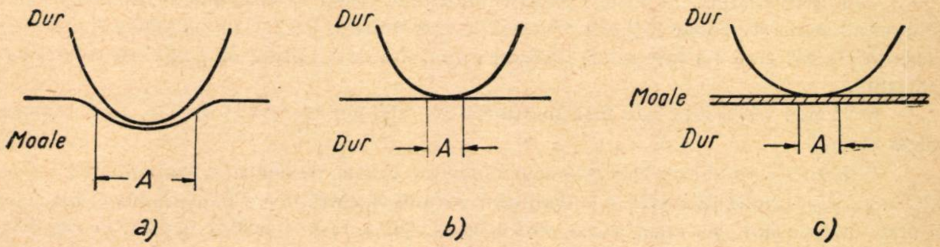


Fig. 4

Dacă atît materialul piesei de încărcare cît și cel de bază sînt dure, deși aria de contact este mică, F are o valoare mare, deoarece tensiunea de forfecare este mare.

Dacă între cele două materiale dure se intercalează un strat foarte subțire de material moale, astfel ca deformarea (și deci aria de contact) să fie determinate de materialul de bază dur iar rezistența la forfecare, τ, de materialul moale, se ajunge la un F mic explicînd buna comportare constatată în practică.

În afară de aplicarea la lagărele de alunecare, tehnica acoperirii suprafețelor de frecare cu metale plastice este recomandată în ultima vreme deosebit de insistent pentru al doilea segment de compresie. În acest caz, se consideră însă că în afară de bunele proprietăți antifricțiune, metalul plastic se deplasează în timpul lucrului asigurînd conformabilitatea pieselor ansamblului respectiv.

Între numeroasele substanțe cristaline cu structură lamelară, cele mai mult folosite pentru a reduce uzura sînt grafitul și bisulfura de molibden.

Grafitul, sub formă coloidală este folosit de multă vreme pentru a ameliora ungerea în condiții dificile. Practica a arătat că în toate cazurile grafitul înlătură riscul gripărilor și în mod obișnuit reduce coeficientul de frecare. Buna comportare a grafitului se menține la temperaturi la care uleiul își pierde orice eficacitate și se afirmă că temperatura maximă pentru ungere cu grafit este 500°C, deși oxidarea lui începe la temperaturi mai joase [10].

Toate aceste calități au făcut ca grafitul, în forma coloidală cunoscută sub denumirea comercială „Oil-dag" să fie folosit în toate situațiile și uneori chiar unde nu este util, după cum o dovedește utilizarea lui la rodaj.

Se afirmă că, în prezența aerului, ungerea numai cu grafit asigură protecția suprafețelor timp de 20—40 ore, după care stratul se desprinde treptat și uzura începe să crească [2].

De dată mai recentă dar cu o comportare superioară este bisulfura de molibden. Aceasta asigură ungerea chiar fără lubrifiant sau folosind în loc de lubrifiant apă. De asemenea, temperatura pînă la care se poate folosi poate ajunge la 1000°C, deși se pare că după 450°C are loc o oxidare lentă a bisulfurii în bioxid de molibden care este un abraziv foarte periculos. În plus, bisulfura de molibden prezintă dezavantajul unei slabe aderențe la suprafețe, ceea ce a făcut pe unii cercetători să recomande formarea lui ,,in situ", prin reacție chimică. În aceeași categorie de produse ar trebui incluse talcul, oxidul de zinc, dar acestea sînt foarte puțin folosite în industria motoarelor și autovehiculelor.

Ca o curiozitate, se poate arăta că recent s-au făcut încercări reușite de a aplica bisulfura de molibden cu politetrafluoretilen (el însuși un excelent material antifricțiune), melasă și rășini de resorcinol.

Metode chimice și electrochimice

a. *Metode chimice.* În unele aplicații s-a dovedit foarte avantajoasă acoperirea suprafețelor cu straturi superficiale obținute prin reacție cu metalul de bază. O primă indicație în această privință s-a dat cînd s-a menționat realizarea stratului de bisulfură de molibden prin reacție ,,in situ".

Mult mai răspîndită este însă fosfatarea suprafețelor cu fosfați de fier, zinc, mangan, calciu etc.

Pelicula de fosfat este brăzdată de nenumărate canale, de adîncime variabilă (de ordinul 0,01 mm) și cuprinde de predilecție domeniul vîrfului asperităților. Fiind friabile și insolubile în ulei, vîrfurile sînt ușor îndepărtate pînă cînd se ajunge la o suprafață netedă, cu excelentă capacitate de udare și bună comportare la uzură.

Fosfații acizi ai metalelor alcaline și ai amoniacului dau un strat amorf exclusiv de fosfat de fier, considerat foarte ușor. Cu fosfat de zinc se obține un strat de fosfat ,,ușor" bun pentru operațiile de tragere. Cu fosfați de fier și mangan se obține o fosfatare ,,grea" bună pentru rodaj.

În general, prin fosfatare se reduce foarte mult coeficientul de frecare (pînă la 0,005) de aproximativ 10 ori mai mult decît cu bisulfura de molibden [11]. Dacă însă se asociază cele două procese, adică stratul de bisulfură de molibden se aplică pe un strat de fosfat, se obține nu numai o mai bună aderență, ci și o mai bună comportare la uzură [12].

În tabela 3 se indică uzura pieselor acoperite cu bisulfură de molibden.

Tabela 3

Tipul stratului superficial	Grosimea stratului de fosfat mm	Cu liant, uzură mm/oră
0,0375 mm bisulfură de molibden	0	0,00325
Bisulfură de molibden pe un strat de fosfat	0,025	0,00125
Numai fosfat	0,042	0,212

În ultimul timp însă, se pare că fosfatarea a cedat pasul sulfizării care constă în saturarea suprafeței cu sulf (pe o adîncime mică) și cu azot (pe o adîncime mai mare).

Procesul „sulfinuz" se realizează într-o baie de cianuri și sulfuri topite la 500—600°C. După două ore de tratare sulful ajunge sub formă de sulfură de fier pînă la $\sim 25\mu$, iar azotul sub formă de nitrură albă pînă la $\sim 50\mu$ [2].

Deși prin acest tratament duritatea materialului crește puțin, eficacitatea stratului sulfizat scade cu duritatea. Este interesant de semnalat că în prezența sulfului pătrunderea azotului este de 3—4 ori mai intensă de cît în absența lui și că, din cauza stării de compresiune a sulfurii de fier formată pe suprafețe, acestea se polarizează electrostatic absorbind mai puternic uleiul [13].

Sulfizarea dă rezultate atît de bune în practică încît a fost utilizată în domeniile cele mai variate. Printre cele mai interesante aplicații menționăm sulfizarea suprafețelor active ale angrenajelor și sulfizarea arborilor. În acest ultim caz se semnalează avantajul că se pot folosi cuzineții mai duri ceea ce constituie un mare avantaj.

Principalele dezavantaje ale straturilor sulfizate sînt : fragilizarea materialului, creșterea coeficientului de frecare, lipsa de eficacitate în condiții abrazive și îngreunarea procesului de rodaj [14].

b. *Metode electrochimice.* Cînd se evită utilizarea temperaturilor ridicate sau cînd se dorește o mai bună aderență a stratului superficial la materialul de bază, se recurge de obicei la depunerea electrolitică a materialului de aport. Acesta nu trebuie să fie întotdeauna metalic ; tehnicienii sovietici au reușit chiar o sulfizare electrolitică, care, în loc de $\sim 500°C$ se realizează la numai aproximativ 97°C. În acest caz, se folosesc băi conținînd sulfură de sodiu cu sau fără acid fosforic sau sulfit de sodiu cu sulfocianură de potasiu. Cele din urmă dau suprafețe mai puțin dure și cu o comportare excelentă la uzură [15].

O oarecare aplicare a metodei de depunere electrolitică o întîlnim la placarea suprafeței interioare a cuzineților cu argint, indiu, staniu etc. Din punct de vedere economic aceste operații prezintă importanță mai mică.

De departe cea mai importantă aplicație a depunerii electrolitice este cromarea electrolitică.

Prin cromare, materialele cele mai comune, de exemplu oțelul moale și fonta, se acoperă cu un strat dur de material mai puțin susceptibil la uzură. În ceea ce privește duritatea se afirmă că este de ordinul a 1000 kg/mm^2 [16]. În plus, prin inversarea curentului în faza finală a procesului, se obțin suprafețe poroase care înmagazinează cantități importante de ulei și prin aceasta reduc foarte mult pericolul gripării. Pentru a obține cele mai bune rezultate cu straturile cromate se recomandă ca înainte de utilizare acestea să fie încălzite în ulei, la 160°C, timp de 1...1,5 ore, pentru gonirea hidrogenului și reducerea fragilității. Grosimea finală a stratului de crom trebuie să fie de 50...60μ.

Se afirmă că prin cromare, în condiții abrazive, uzura se reduce de 7...10 ori. Unii tehnicieni consideră chiar că cromarea poroasă constituie cea mai revoluționară perfecționare intervenită recent în procesul tehnologic al construcției de mașini.

Aplicațiile industriale ale straturilor superficiale

Un important aspect al problemei straturilor superficiale îl constituie criteriile după care se pot alege acestea, în diferite împrejurări.

Ca o primă orientare trebuie să se țină cont de comportarea acestor straturi sub efectul principalilor factori care intervin în exploatare și anume : sarcina, temperatura, viteza, agenții agresivi.

Sarcina. Fiecare strat superficial are o limită de rezistență la solicitări normale. Săpunurile organometalice slab reținute de suprafețe sînt primele care se lasă dislocate. Urmează oxizii friabili dacă se află pe un strat de bază moale, deoarece astfel deformarea lor este mai puternică. Grafitul este relativ rezistent la sarcină, dar dacă prin creşterea acesteia frecarea este asociată cu temperaturi mai mari de 500—600°C, grafitul dimpotrivă se comportă prost. Bisulfura de molibden se comportă cel mai bine, cu condiţia însă ca sarcina să aibă un caracter continuu, deoarece s-a constatat că sub sarcină periodică comportarea acestui material este cu totul nesatisfăcătoare.

Straturile chimice, fosfat, sulfură etc. sînt destul de bune în astfel de condiţii, ceea ce a condus la utilizarea lor în operaţiile de aşchiere, trefilare etc.

Temperatura este un obstacol de netrecut pentru multe materiale. Grafitul peste $\sim$ 250°C începe să se oxideze iar bisulfura de molibden la temperaturi peste 500°C şi foarte intens peste 800°C trece în bioxid de molibden care este un produs direct abraziv.

Săpunurile se desorb la temperaturi de $\sim$200°C, încetînd să mai exercite vreo influenţă, iar materialele cu punct de fuziune coborît dispar foarte repede din zona de frecare. În aceste cazuri se recomandă placarea cu argint, alierea cu nichel, cromarea şi eventual utilizarea (de foarte recentă dată) a unor straturi din materiale ceramice. De asemenea, se comportă destul de bine straturile de sulfuri şi de fosfaţi.

Viteza. Cînd stratul superficial se formează în mod continuu prin acţiunea unui aditiv, viteza are un rol foarte mare deoarece controlează timpul disponibil pentru producerea reacţiei. De aceea, pe acţiunea pozitivă a straturilor superficiale produse de aditivi, se poate conta numai pînă la o viteză de maximum 330 m/min [17]. În cazul straturilor friabile, cum sînt de exemplu cele de oxizi, viteza are un efect favorabil.

Asupra celorlalte tipuri de straturi superficiale trebuie contat că efectul vitezei este neînsemnat pînă la atingerea unei limite care depinde de viteza de propagare a sunetului în mediul respectiv. Depăşirea acestei viteze conduce la vaporizarea sau sublimarea spontană a materialului, incapabil să mai reacţioneze — în timp util — acţiunii forţei de frecare.

Viteza este însă foarte strîns legată de căldură şi prin asocierea practic inevitabilă a acestor doi factori se creează noi dificultăţi de utilizare pentru straturile superficiale cu proastă conductibilitate termică. Situaţia aceasta se întîlneşte îndeosebi la materialele neferoase, mai ales materiale plastice ca politetrafluoretilen, nylon, răşini furfurol fenolice etc. Acestea nu se vor folosi decît în condiţii în care se poate disipa integral căldura de frecare, în caz contrar temperatura crescînd continuu pînă la distrugerea materialului. O bună ungere reduce în mare măsură pericolul, dar în cazul unei ungeri bune natura acelor materiale nu mai prezintă mare importanţă.

Agenţi agresivi. Aceştia pot fi chimici şi fizici, respectiv, corozivi sau abrazivi.

În cazul agenţilor corozivi rezultate bune dau grafitul, masele plastice, oţelurile şi fontele aliate cu nichel şi molibden, straturile de fosfat şi sulfură şi eventual staniul.

Se atrage atenţia în mod deosebit asupra proastei comportări a straturilor superficiale din argint cînd se lucrează cu uleiuri care conţin aditivi, deoarece în marea majoritate a cazurilor aceştia au în compoziţia lor sulf, deosebit de agresiv pentru argint.

De asemenea, plumbul şi cadmiul care se comportă excelent în prezenţa uleiurilor neutre se dovedesc uşor vulnerabile la acţiunea uleiurilor devenite acide prin utilizare.

Pentru o bună comportare la uzură corosivă, trebuie alte însuşiri decît pentru o bună comportare la uzura mecanică ; multe materiale scumpe (de exemplu cromul poros) se dovedesc la fel de inferioare ca celelalte mult mai comune. Ca regulă generală trebuie să se folosească materiale cît mai apropiate din punct de vedere electrochimic, în timp ce în cazul contactului acesta constituie principala contraindicaţie.

Cu toate acestea, proprietăţile de rezistenţă mecanică nu sînt cu totul independente de comportarea chimică a metalelor. Într-adevăr, s-a constatat că la frontiera elastic-plastic există un prag energetic care determină aşa-numitul efect Russell [18] confirmat în prezent de mai mulți cercetători; efectul este asociat cu o emisie de electroni atît de puternică încît poate impresiona o placă fotografică. Totodată, s-a constatat că procesele de abraziune sînt controlate de afinitatea chimică a materialelor angajate [5].

Agenții abrazivi constituie fără îndoială cel mai insidios factor de uzură prin faptul că nu au o singură sursă și lupta pentru împiedicarea dezvoltării lui se lovește de nenumărate piedici.

Agenți abrazivi pot fi:

— nisipul încrustat în suprafața pieselor turnate și eliberat ulterior sub acțiunea erozivă a curenților fluizi;

— praful introdus o dată cu uleiul în carter, în cazul unei depozitări și manipulări neîngrijite a lubrifiantului;

— praful din atmosferă aspirat în mod continuu de motor și antrenat în carter de năvala gazelor de combustie ce scapă pe acest traseu;

— depozitul cărbunos format în canelele segmenților și în alte puncte calde, mai ales cînd combustibilul conține sulf;

— materialul metalic rezultat în însuși procesul uzurii.

De aceea, scopul principal în dezvoltarea straturilor superficiale a fost tocmai lupta împotriva agenților abrazivi.

Simplificînd la maximum problema, straturile superficiale intervin în acest caz prin două mecanisme:

— prin absorbirea sau încrustarea particulelor abrazive făcîndu-le astfel inofensive;

— prin mărirea rezistenței superficiale a materialelor de frecare.

Primul mecanism intervine la lagăre, este mai intens în zona care precede punctul de joc minim al lagărelor și se produce în prezența metalelor plastice.

Al doilea mecanism intervine la cilindru-piston sau angrenaje și este realizat de materialele dure.

În mod corespunzător la lagăre se vor folosi straturi acoperitoare moi de o grosime suficientă pentru a încorpora particulele abrazive. La segmenți, angrenaje, came etc. se vor adopta însă pelicule cît mai dure, crom poros sau crom difuzat, aliaje de bor, molibden și altele.

Eventual se poate recurge și numai la durificarea suprafețelor prin tratament termic, deoarece s-a constatat că ecruisarea nu aduce nici un avantaj [19]. În acest caz trebuie ținut cont de înrăutățirea comportării la oboseală prin friabilizarea materialului. Este esențial ca durificarea să se realizeze prin transformarea naturii cristalitelor nu prin epuizarea posibilităților de alunecare plastică în direcții convenabile.

Uneori cele două mecanisme se pot asocia obținîndu-se suprafețe dure cu insule de material moale, cele din urmă fiind constituite în principal din grafit. În acest mod se realizează nu numai o îmbunătățire a ungerii prin rolul de mici rezervoare de ulei pe care îl îndeplinesc insulele de material grafitic poros ci și o eliminare continuă a particulelor abrazive care se încrustează în suprafața plastică.

Primit la redacție la 25 iunie 1959

УЛУЧШЕНИЕ ИЗНОСОУСТОЙЧИВОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПУТЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Износ деталей машин определяется материалными и функциональными факторами.

Среди материальных факторов важнейшая роль принадлежит материалам, из которых изготовлены соответствующие детали. Строго говоря, с точки зрения

износа, под материалом понимается лишь та его часть, которая участвует непосредственно или косвенно в процессах трения; эта часть, собственно говоря, и составляет поверхностный слой. Последний, должен удовлетворять определенным условиям, касающимся его твердости, однородности, химического и электрохимического поведения, способности к образованию сплавов и т.д.

Каждый тип износа накладывает преимущественное требование на одно из свойств и для каждого свойства подходит определенный поверхностный слой.

Получение поверхностных слоев возможно физическими, химическими или механическими способами.

К физическим способам относятся: термообработка и обработка давлением, фактически осуществляющие увеличение твердости путем фазовых превращений, или же сужение упругой области путем упрочнения.

К химическим способам относятся химические реакции и диффузия, осуществляющие изменение материала при помощи внешнего элемента, причем получается новый химический материал с выгодными свойствами.

К механическим способам относятся все методы нанесения инородного материала на активную поверхность (расплавление, припаивание, трение, прессование) таким образом, чтобы в процессе трения участвовал другой материал, а не тот, из которого изготовлена соответствующая деталь.

При выборе определенного поверхностного слоя следует учитывать его поведение под влиянием основных факторов, встречающихся в эксплуатации: нагрузки температуры, скорости и агрессивных факторов.

Нагрузка затрагивает свойства приставания и хрупкость.

Температура связана с химической активностью, энергией адсорбции и свойствами механической прочности.

Скорость влияет непосредственно через время, которое она предоставляет физическому или химическому явлению для его протекания, и косвенно — через обусловленное ею возрастание температуры.

Агрессивные факторы затрагивают химическое и механическое поведение материалов.

Таким образом, задача предписания поверхностных слоев, становится задачей научного распознавания, доступного каждому техническому работнику.

IMPROVED BEHAVIOUR OF MATERIALS TO WEAR BY SURFACE MODIFICATIONS

ABSTRACT

The wear of machine parts is controlled both by material and by functional factors.

Among the material factors, the most important are the materials of which the respective parts are manufactured. From the strict standpoint of wear, only that portion of the material which takes part either directly or indirectly in the friction processes must be taken into consideration, namely that portion which constitutes the surface layer of the material; correspondingly, this layer must satisfy certain conditions of hardness, homogeneity, chemical and electrochemical affinity, susceptibility to alloying, etc.

Each type of wear requires a specific quality condition, and for each quality a given surface layer is recommended.

The surface layers can be obtained by physical, chemical or mechanical processes.

The physical processes involve heat treatments and compression, which actually realize a hardening by phase transformations, or a narrowing of the elastic range by cold work.

The chemical processes involve chemical reactions and diffusion processes, realizing a change in the material with the participation of external elements, there resulting a new chemical material with more favourable properties.

The mechanical processes involve all the methods for applying a foreign material on the active surface (melting, soldering, friction, pressing), so that a material other than the original one should participate in the friction process.

When adopting a particular layer, its behaviour under the effect of the main factors intervening in operation should be taken into account : load, temperature, speed and aggressive agents.

The *load* influences the adherence and friability.

The *temperature* influences the chemical reactivity, the adsorption energy and the properties of mechanical strength.

The *speed* acts directly by the time it gives a physical or chemical phenomenon to occur and indirectly by the temperature increase which it determines.

The *aggressive agents* involve the chemical and mechanical behaviour of the material.

Thus, the problem of prescribing the surface layers becomes a problem of scientific choice within the reach of all technicians.

BIBLIOGRAFIE

1. P. GAY, P. B. HIRSCH, *The crystalline character of abraded surfaces.* Properties of metallic surfaces. The Institute of metals, Londra, 1953, 123.
2. * * * Proceedings of the Confernnce on Lubrication and Wear, London 1—3 Oct. 1957. The Institution of Mechanical Engineers, London, 1958, 744.
3. B. JAOUL, *Structure de déformation d'un acier inoxydable 18—10.* Revue de Métallurgie, **LV**, 10, 976 (1958).
4. W. HIRST, *Mechanical Wear of Metals.* British Journal of Applied Physics, **9**, *4*, 125 (1958).
5. C. LORING JR., *Chemistry of abrasive action.* Ind. and Eng. Chem., **47**, *12*, 2493 (1955).
6. J. S. HALLIDAY, *Experimental investigation of some processes involved in fretting corrosion. 39.* Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear, London 1—3 Oct. 1957. The Institution of Mechanical Engineers, 640.
7. J. R. PARTINGTON, *An advanced treatise of physical chemistry,* **III**. *Properties of Solids.* Longmans Green, Londra, 1957, 628.
8. К. И. ЕПИФАНОВ, Н. А. ПЛЕТЕНЕВА, П. А. РЕБИНДЕР, *О механизме действия активных сред при резании металлов.* Доклады Академии Наук СССР, *97*, *2*, 277 (1954).
9. D. TABOR, F. P. BOWDEN, *Boundary Lubrication.* Science of Petroleum. **V**, *3*. Oxford University Press (1955).
10. E.E. BISSON, R. L. JOHNSON, W.J. ANDERSON, *Friction and Lubrication with solid lubricants at temperatures up to 1000°F, with particular reference to graphite.* Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear. London 1—3 Oct. 1957. The Institution of Mechanical Engineers, Comunicarea *23*, 348.
11. — *Wear Protection of Phosphated Mild Steel.* Corrosion Technology, **5**, *2*, 57 (1958).
12. J. DEMESSE, *La phosphatation des métaux ferreux.* Métaux, Corrosion, Industries, *4*, 472 (1958).
13. J. de VILLEMEUR, *Dureté et Sulfinuz.* Métaux, Corrosion, Industries, *7—8*, 324 (1958).

14. I. IU PRUJANSKI, *Sulfinizarea în construcția de mașini*. Buletinul Construcțiilor de mașini, *6*, 108 (1957).

15. V. M. LUPANDIN, N. M. GHENKIN, IU. M. PAVLOV, *Sulfinizarea la temperaturi joase a pieselor de fontă*. Buletinul Construcțiilor de mașini, *5*, 73 (1957).

16. V. N. BRUZNEȚOVA, O.V. STUPIȘINA, *Sporirea rezistenței la uzură a elementilor de la pompele de injecție*. Avtomobilnaia i Traktornaia Promișlennost, *1*, 29 (1957).

17. F. T. BARWELL, *The effect of lubrication and nature of superficial layer after prolonged periods of running. Properties of metallic surfaces*. The Institute of Metals, London, 1953, 101.

18. * * * *Properties of Metallic Surfaces*. The Institute of Metals, London, 1953.

19. M. M. HRUȘCIOV, *Resistance to wear by abrasion as related to hardness. 46*. Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear. London, 1—3 Oct. 1957, The Institute of Mech. Engr., 655.

DINAMOMETRU DE AȘCHIERE FUNCȚIONÎND CU BENZI PENTRU MĂSURAREA LUNGIRII

DE

A. KARDOS*)

La așchiere, trebuie să se dezvolte forța pentru desprinderea așchiilor ce urmează să fie îndepărtate, și pentru învingerea frecării produse la desprinderea așchiilor. Cunoașterea forței de așchiere este importantă pentru determinarea solicitării sistemului de așchiere (sculă-mașină, unealtă-piesă prelucrată) și a puterii necesare.

Forța de așchiere este în general o forță în spațiu. În practică, ea se împarte în trei componente, avînd sensul mișcărilor de așchiere. Dintre aceste componente din punct de vedere al solicitării sistemului de așchiere, al procesului de așchiere și pentru determinarea puterii absorbită, cea mai caracteristică este componenta în direcția mișcării principale (forța principală de așchiere).

Măsurarea forței de așchiere este o veche problemă a cercetărilor de laborator și din exploatare, privind așchierea. La proiectarea aparatelor de măsurat forța, constituie o dificultate caracterul dinamic al măsurării, eliminarea efectului căldurii produse prin așchiere și a frecării exterioare a instalației precum și separarea componentelor de forță ce urmează să fie măsurate.

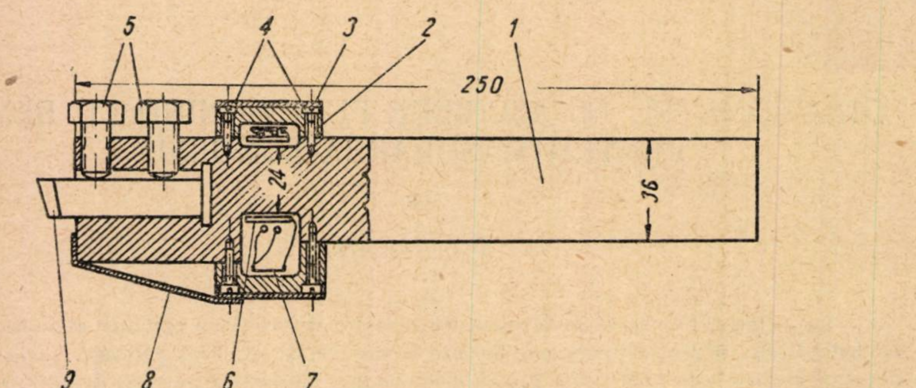
Pentru măsurarea forței de așchiere s-au elaborat foarte multe aparate, funcționînd pe principii diferite. Pentru a ilustra mulțimea principiilor de măsurare, vom aminti cîteva dintre ele.

G. Schlesinger [1], H. Schallbroch [2] au dedus mărimea forței de așchiere din încovoierea unui arc lamelar. Primul a măsurat încovoierea arcului pe cale mecanică, al doilea prin procedeu electric. A. G. Nalcean [3] a construit un dinamometru bazat pe principiul torsiunii, Schlesinger [1]. pe bază hidraulică, iar P. E. Diacenko [5] pe baza principiului deformării plastice. W. Legenstetter [6] și-a executat măsurările cu un dinamometru cu condensator, iar P. Josefy [7] prin măsurarea puterii electrice. I. F. Nejstadt [8] a tras concluzii în privința mărimii forței de așchiere din deformarea corpului dispozitivului. A. Voronov [9] recomandă pentru măsurarea forței, aparatul care funcționează prin frînarea mașinii-unelte. A. M. Danieljan [10] expune un aparat funcționînd pe baza principiului piezoelectric. O recapitulare bună privind sistemele de măsurare a forței de așchiere se găsește în cartea lui H. Schallbroch și H. Balzer [11].

---

*) Budapesti Müszaki Egyetem Gépgyártástechonologiai Tanszék.

În ultimii ani s-au făcut cercetări și cu privire la utilizarea benzilor pentru măsurarea lungirii (strain gage), pentru măsurarea forței de așchiere [12], [13]. Cercetările au dat rezultate bune. De asemenea, în R. P. U. s-au făcut încercări pentru utilizarea benzilor pentru măsurat lungirea, la măsurarea forței de așchiere [14], dar numai în scop de comparație. Un dinamometru de înaltă precizie, funcționînd cu benzi pentru măsurarea lungirii, a fost construit la catedra de tehnologia construcțiilor de mașini de la politehnica din Budapesta [15].



1. – Mînerul cuțitului
2. – Cutie montaj
3. – Capac
4. – Bulon cutie montaj
5. – Bulon fixare cuțit
6. – Marcă tensometrica
7. – Borne de ieșire
8. – Protecție contra radiațiilor calorice
9. – Cuțit de strung.

Fig. 1

Dinamometrul se compune dintr-o parte mecanică și una electrică. El servește pentru măsurarea forței principale de așchiere.

Partea mecanică (fig. 1) are forma unui corp mare de cuțit, care poate fi prins în port-cuțitul strungului. Pe corpul de cuțit poate fi prins și un cuțit aplicat. La așchiere, din cauza forței care acționează asupra cuțitului, partea subțiată a corpului cuțitului se deformează. Din această deformație se pot trage concluzii asupra mărimii forței de apăsare pe cuțit. Mărimea deformației se măsoară cu benzi electrice pentru măsurarea lungirii. Corpul de cuțit a fost dimensionat pentru un domeniu de măsurare a forțelor între 10 și 150 kg. Deplasarea vîrfului cuțitului la solicitarea maximă este de 0,05 mm.

Deformațiile se măsoară cu două elemente de măsurare. Amplasarea și schema electrică a elementelor de măsurare a trebuit să fie astfel rezolvată, încît benzile care măsoară lungirea, să nu măsoare decît deformația provocată de forța principală de așchiere. Deci rezultatul măsurării nu trebuie să fie deformat de efectul celorlalte două componente de forță de așchiere și nici de variațiile de temperatură. La așezarea și schema electrică a benzilor de măsurare a trebuit să se țină seamă de următoarele considerente :

Reglarea pentru așchierea cuțitului aplicat în port-cuțit trebuie să se facă astfel, încît vîrful cuțitului să se găsească în axa părții subțiate (blocul de măsurare) a corpului. Dar în practică, forța de așchiere acționează în general într-un punct în afara axei. Să presupunem că punctul de atac al forței de așchiere se află la distanța a respectiv b de la axă (fig. 2). Astfel în blocul de măsurare se produce tensiune de încovoiere, compresiune și torsiune, datorită momentelor ;

$$M_k = P_r \cdot l ;\ M_2 = P \cdot l ;\ M_3 = P_R \cdot a ;\ M_4 = P_R \cdot b$$

(în care l este distanța dintre punctul de atac al forței și secțiunea prinderii blocului de măsurare) ;

forței de compresiune din forța P_R ;

momentului de torsiune $M_5 = P \cdot a$; $M_6 = P_V \cdot b$.

Elementele de măsurare se află pe planul superior și inferior (orizontal) al blocului de măsurare. Figura 2 arată tensiunile pe aceste planuri.

Indicii forțelor din solicitările enumerate sînt identice cu indicii solicitărilor respective.

Scopul este ca elementele de măsurare să nu măsoare decît deformația corespunzătoare tensiunii σ_1 (deci numai forța P).

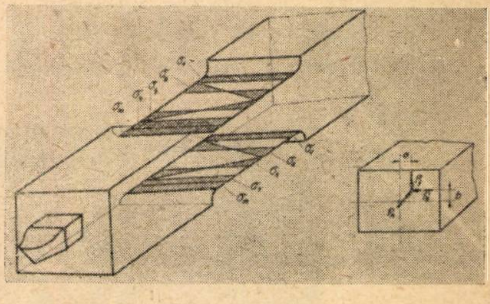


Fig. 2

Efectul perturbator al tensiunilor σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, poate fi eliminat, dacă linia mediană a elementelor de măsurare coincide cu axa blocului de măsurare (soluționarea acestei probleme este partea cea mai delicată și complicată a fabricației).

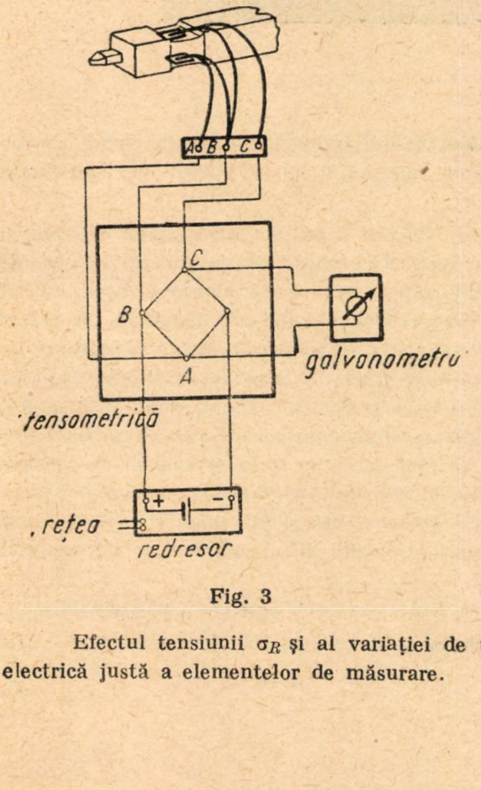


Fig. 3

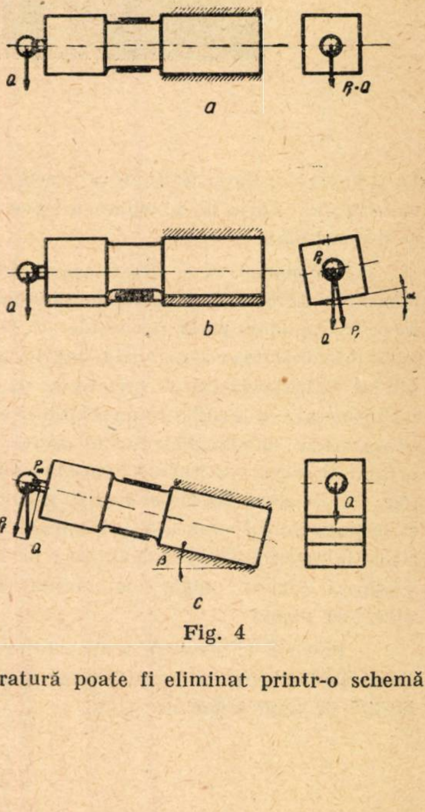


Fig. 4

Efectul tensiunii σ_R și al variației de temperatură poate fi eliminat printr-o schemă electrică justă a elementelor de măsurare.

Dacă presupunem că, temperatura planului inferior și superior al blocului de măsurare este identică (ceea ce poate fi rezolvată printr-o proiectare corectă), în acest caz prin schema electrică a elementelor de măsurare, arătată în figura 3, efectul forței de compresiune și al variațiilor temperaturii ambiante se elimină.

Măsurarea deformației elementelor de măsurare se execută prin metoda dezechilibrării cu o așa-numită punte de măsurare a lungirii (de ex : Huggenberger, Philips) și cu un microampermetru legat de puntea de măsurare.

Etalonarea dinamometrelor fabricate la catedra de tehnologie a construcțiilor de mașini s-a executat pe un aparat special construit în acest scop, prin încărcare directă cu greutăți.

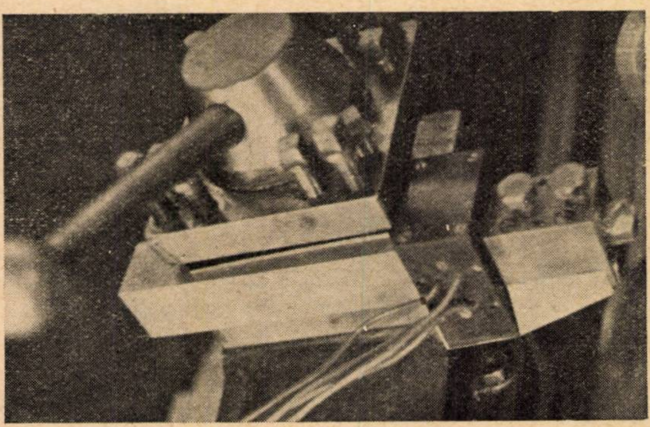


Fig. 5

La etalonare, în locul cuțitului se așază o bilă. Centrul bilei trebuie să se afle în vîrful teoretic al cuțitului. Forța de solicitare acționează asupra bilei printr-un dispozitiv de construcție corespunzătoare.

Dinamometrul se etalonează în trei poziții. La prima poziție axa corpului cuțitului și planul său de bază sînt orizontale. Sarcina de sens vertical care acționează asupra bilei (înlocuind forța de așchiere) poate fi considerată ca și cum asupra corpului cuțitului nu ar acționa decît forța principală de așchiere (fig. 4*a*). La poziția a 2-a corpul cuțitului este orizontal, iar planul său de bază formează cu orizontala un unghi α (fig. 4*b*). În acest caz sarcina verticală poate fi considerată ca rezultanta forței principale de așchiere și a forței în sensul avansului ; ea acționează asupra dinamometrului în poziție de așchiere ca și cum ar acționa simultan o sarcină orizontală și una verticală. La poziția a 3-a axa dinamometrului formează cu orizontala unghiul β (fig. 4*c*). În acest caz încărcarea cu greutate înlocuiește simultan forța principală de așchiere și forța în sensul avansului transversal. Într-o anumită poziție, mărimea componentelor forței poate fi determinată din greutatea de încărcare Q cunoscută și din unghiul α respectiv β. Reglarea într-un unghi determinat al aparatului poate fi executată cu un raportor optic cu nivelă.

Precizia de măsurare a aparatului construit a fost de $\pm 3\%$, conform măsurărilor statice. Devierile la efectul variației forțelor de avans lateral și transversal erau de asemenea în cadrul limitei de împrăștiere de $\pm 3\%$.

Dinamometrul prezintă avantajul că poate fi aplicat cu uşurinţă pe orice strung (fig. 5), şi se pot înregistra cu ajutorul unui oscilograf şi variaţiile forţei de aşchiere. Are însă dezavantajul că, din cauza echipamentului electric special, poate fi recomandat numai pentru măsurări de laborator. De asemenea, precizia ce poate fi obţinută nu este necesară la măsurările industriale.

Primit la redacţie la 31 decembrie 1958

ДИНАМОМЕТР ДЛЯ РЕЗАНИЯ, РАБОТАЮЩИЙ С ПОЛОСКАМИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для определения нагрузок режущей системы и необходимой мощности важно знать силу резания. С этой целью разработаны приборы, действующие на основании различных принципов.

В Венгерской Народной Республике сконструирован и осуществлен динамометр высокой точности, действующий по принципу полосок для измерения удлинений. Он состоит из тела резца, вставляющегося в резцедержатель токарного станка, к которому прикрепляется накладной резец.

Деформации тонкой части резца, обусловленные действующей на него силой, измеряются при помощи упругих полосок, и по ним можно судить о главной силе резания.

Преимущество этого динамометра новой конструкции состоит в возможности приспособления к любому станку, возможности записи изменений силы резания при помощи осциллографа и в его точности.

Специальная электрическая аппаратура и точность делают его подходящим только для лабораторных измерений.

BANDDYNAMOMETER FÜR DEHNUNGSMESSUNGEN BEI SPANABHEBENDER BEARBEITUNG

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Bestimmung der in spanabhebenden Vorrichtungen auftretenden Beanspruchungen und der erforderlichen Leistung ist die Kenntnis der Spanabhebungskraft von Bedeutung. Im Hinblick darauf wurden Geräte entwickelt, deren Funktion auf verschiedenen Grundsätzen beruht.

In der Ungarischen Volksrepublik wurde ein Dynamometer hoher Genauigkeit entwickelt, welches nach dem Prinzip der Dehnungsmessung mittels elastischer Bänder arbeitet.

Es besteht aus einem Messerkörper, der an den Messerhalter der Drehbank befestigt werden kann, und auf welchem ein zweckentsprechendes Messer befestigt wird. Die Verformung des verjüngten Teiles des Messers infolge der darauf wirkenden Kraft wird mittels der elastischen

Bänder gemessen, woraus Rückschlüsse auf die spanabhebende Hauptkraft gezogen werden können.

Der Vorteil dieses neuartigen Dynamometers besteht darin, daß es jeder Drehbank angepaßt werden kann und außerdem gestattet, Veränderungen der spanabhebenden Kräfte mittels eines Oszillographen genauestens einzutragen.

Die elektrische Sonderausrüstung und seine Präzision gestatten die Verwendung dieses Dynamometers lediglich für Laboratoriumsmessungen.

BIBLIOGRAFIE

1. G. SCHLESINGER, *How to measure machinability in the shep.* American Machinist, 117 (1946).
2. H. SCHALLBROCH, H. SCHAUMANN, *Schnittkraftmessung beim Drehen.* Maschinenbau, 235 (1940).
3. А. Г. НАЛЧАН, *Экспериментальное исследование точного точения.* Станки и инструмент, *8*, 18 (1950).
4. * * * *Prüfmaschine für Drehstähle.* DRP. 280, 436.
5. П. Е. ДЯЧЕНКО, *Измерение силы путем пластической деформации.* Станки и инструмент, 10 (1947).
6. W. LEGENSTETTER, *Grundlagen und Prüfverfahren der Zerspannung.* Leipzig, Teubner, 1938.
7. P. JOSEFY, *Schnittkräfte und Leistungsbedarf der Werkzeugmaschine für dieBearbeitung von Leichtmetall-Legierungen.* Werkstatt u. Betrieb, 4 (1943).
8. И. Ф. НЕИСТАДТ, *Составляющие силу резания при скоростном течении.* ЕНIМС, Москва, Машгиз, 1953.
9. А. ВОРОНОВ, *Усовершенствование ленточного тормоза, применяемого для исследований сил резания.* Вестник машиностроения, 63 (1953).
10. А. М. ДАНИЕЛЯН, *Резание металлов и инструмент.* Москва, Машгиз, 1950.
11. H. SCHALLBROCH, H. BALZER, *Schnittkraft und Drehmomentmesser für Werkzeugmaschine.* Berlin, Springer, 1943.
12. H. OPITZ, E. KÜSTERS, *Messgeräte zur Ermittlung der Schnittkraft und Schnittemperatur bei Zerspanungsvorgängen.* Werkstatt und Betrieb, *2*, 43 (1952).
13. A. B. ALBRECHT, *Forces and vibration on the-tool affect its life.* Machinist, Iuli, 1081 (1953).
14. I. SASI NAGY, F. ALEMANN, *Szerszámgépek lengés vizsgálatainak egyes kisérleti módszerei.* Kézirat, 1953.
15. A. KARDOS, *Aluminiumötvözet megmunkálhatósági vizsgálata. Kandidátusi* értekezés. Budápest, 1956.

CERCETAREA UNUI REDUCTOR PLANETAR CU DANTURĂ INTERIOARĂ ŞI RAPORT MARE DE TRANSMISIE

DE

ACAŢIU CSULAK şi D. MAROS *)

1. OBSERVAŢII GENERALE

Să considerăm schema cinematică a reductorului planetar cu $z_d = 1$ (fig. 1). Pentru calcularea raportului de transmitere aplicăm formula

$$i_{12}^{H} = \frac{n_1 - n_H}{-n_H} = \frac{Z_2}{Z_1} \dots, \qquad (1)$$

de unde rezultă că $i_{H1} = -Z_1$. Legînd asemenea reductoare în serie putem realiza rapoarte de transmitere de ordinul $10^4 - 10^6$.

Realizarea unui angrenaj interior, cu $Z_d = 1$, pe lîngă prelucrarea corectă a danturii interioare este legată de soluţionarea unor probleme de interferenţe speciale. În legătură cu acest tip de reductor au apărut deja lucrări, majoritatea de N. A. Skvorţova [1], [2], în care se dă calculul geometric al acestor angrenaje. În literatura de specialitate se indică două principii pentru calculul geometric al angrenajelor.

a) Mărimea $m\xi$ coincide totdeauna cu deplasarea cremalierei de referinţă şi

b) Mărimea $m\xi$ coincide totdeauna cu deplasarea sculei.

Aceste două mărimi coincid în cazul prelucrării cu sculă cremalieră (cuţit pieptene sau freză melcată) şi nu sînt identice în cazul prelucrării cu cuţitul roată. Spre deosebire de principiul *a*) dacă se aplică principiul *b*), în cazul prelucrării cu cuţitul roată, coeficientul ξ nu mai este o mărime caracteristică a danturii generate căci pentru un ξ dat, dar alte valori ale lui Z_U (numărul de dinţi al sculei), vom obţine diferite mărimi pentru grosimea dintelui pe cercul de divizare.

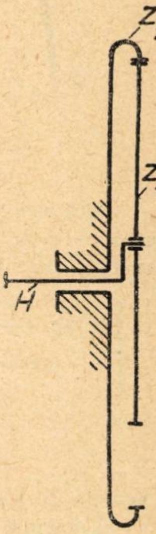


Fig. 1

În lucrarea [1] se aplică principiul *b*) pentru calculul geometric al angrenajului, expus de V. A. Gavrilenko [3]. Putem însă afirma că aproape toate cărţile de specialitate se ghidează după principiul *a*) în calcule geometrice și deci și această problemă se poate rezolva cu principiul de calcul ce s-a răspîndit în toată lumea fără să fie nevoie de aprofundarea unei metode noi, *b*), care ne conduce la aceleași rezultate. Scopul acestui articol constă tocmai în faptul ca să indice soluția calculului geometric a reductoarelor planetare cu $Z_d = 1$ pe baza principiului *a*).

---

*) Institutul de calcul, Academia R.P.R., filiala Cluj.

2. FENOMENELE DE INTERFERENȚĂ CE APAR LA FUNCȚIONARE

2.1. Interferența vîrfurilor dinților la ieșirea acestora din angrenare

În timpul angrenării interioare a danturilor evolventice poate să apară un fenomen de interferență care constă în faptul că cele două profile vin în contact (se intersectează) în afara liniei de angrenare într-un punct în apropierea cercului de bază (a_1 și a_2, fig. 2).

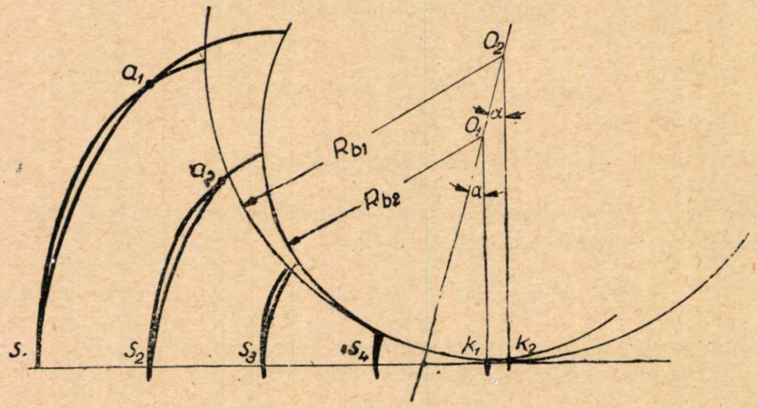


Fig. 2

Dacă vom însemna toate punctele de intersecție ale evolventelor în planul fix de referință vom primi curba *l* (fig. 3). Ecuația curbei *l* în coordonate polare a fost dedusă în [1] și se poate reconstitui după figura 3.

$$\varphi = \left[\text{arc tg}\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \dfrac{\cos\alpha_0}{2\rho\cos\alpha}} + \text{inv. arc cos}\,\frac{Z_2 - 1}{\sqrt{\dfrac{4\rho^2}{\cos^2\alpha_0} - \dfrac{4\rho\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\alpha_0} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha_0}}}\right]\frac{Z_2 - 1}{Z_2} -$$

$$- \text{inv. arc cos}\,\frac{Z_2\cos\alpha_0}{2\rho} + \frac{\text{inv.}\,\alpha}{Z_2} \ldots \tag{2}$$

În ecuația (2) s-a însemnat prin

α_0 unghiul de angrenare al sculei,

α unghiul de angrenare de funcționare,

φ și ρ coordonatele polare ale diferitelor puncte ce aparțin curbei *l*.

În [1] se indică rezultatele cercetărilor făcute în legătură cu curba *l* pe baza ecuației (2). În figura 4 s-au reprezentat curbele *l* pentru același angrenaj realizat cu unghiurile de angrenare de funcționare de 40, 55 și 65°.

Se observă că mărirea unghiului de angrenare are drept efect o mărire a unghiului φ_i deci mărirea zonei C și micșorarea zonei periculoase B (fig. 3) ce sînt despărțite prin curba l. Pentru evitarea fenomenului de interferență este necesar ca punctul de intersecție X al cercurilor exterioare cu razele R_1 și R_2 să se găsească în zona C și nu în zona B.

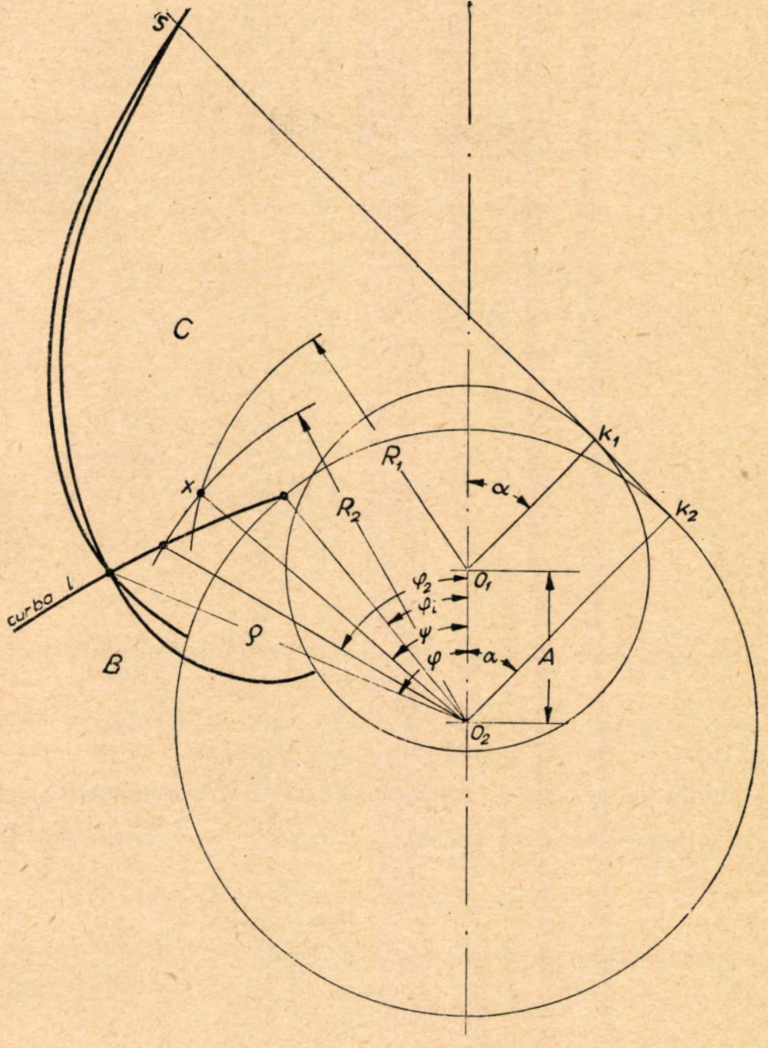


Fig. 3

Relația (2) poate fi scrisă sub forma

$$\varphi = \Phi\,(\alpha,\ \rho, Z_2). \qquad (2')$$

Esența cercetărilor din [1] în privința acestei relații este că se poate scrie cu o aproximație foarte bună

$$\varphi \cong F\left(\alpha,\ \frac{\rho}{Z_2 \cos \alpha_0}\right) = F\left(\alpha,\ \frac{\rho}{r_{b2}}\right), \qquad (3)$$

prin aceasta funcţia φ de trei variabile s-a redus la o funcţie F de două variabile. Cînd $\rho = R_2$ putem scrie

$$\varphi_2 = F\left(\alpha, \frac{R_2}{r_{b2}}\right), \tag{4}$$

ceea ce s-a reprezentat pe figura 5.

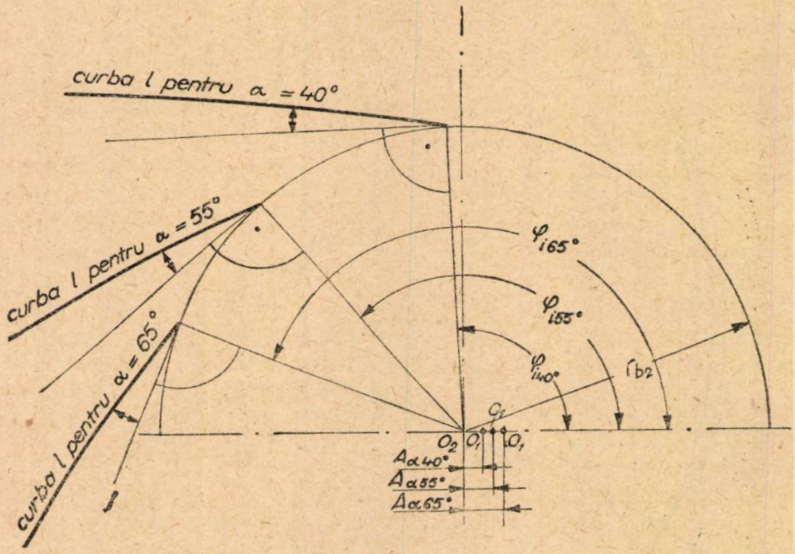

curba l pentru α = 40°
curba l pentru α = 55°
curba l pentru α = 65°
l
$\varphi_{i65°}$
$\varphi_{i55°}$
$\varphi_{i40°}$
r_{b2}
C_1
O_2
O_1
O_1
$A_{\alpha 40°}$
$A_{\alpha 55°}$
$A_{\alpha 65°}$

Fig. 4

Conform figurii 3 interferenţa nu apare dacă este satisfăcută inegalitatea

$$\varphi_2 \geqslant \psi, \tag{4'}$$

în care φ_2 reprezintă unghiul dintre linia centrelor $O_1\,O_2$ şi raza R_2 în poziţia de intersecţie cu l. ψ reprezintă unghiul dintre $O_1\,O_2$ şi raza R_2 în poziţia de intersecţie X ale cercurilor exterioare.

Determinarea lui φ_2 se face cu ajutorul raportului $\frac{R_2}{r_{b2}}$ şi a unghiului de angrenare α din nomograma reprezentată în figura 5. Valoarea unghiului ψ se calculează cu formula

$$\cos\psi = \frac{R_2^2 - R_1^2 - A^2}{2\,R_1\,A}, \tag{5}$$

în care A reprezintă distanţa axială de funcţionare. Pentru $m = 1$ luăm

$$A = 0{,}5\ \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\ \ldots, \tag{6}$$

$$\text{inv. } \alpha = \text{inv. } \alpha_0 + 2\xi_d \operatorname{tg}\alpha_0 \ldots, \tag{7}$$

$$\text{unde } \xi_d = \xi_2 - \xi_1,$$

$$R_1 = \frac{z_1}{2} + f_{01} + \xi_1$$

$$R_2 = \frac{z_2}{2} - f_{02} + \xi_2 \ldots \tag{8}$$

Din ecuațiile (8) am omis coeficientul ξ_e de egalizare al jocului radial. Aceasta simplifică mult calculul geometric și micșorează pericolul interferenței de tipul 2.1, deoarece ξ_e poate lua valori negative [3]. Faptul că $\xi_e = 0$ are și dezavantaje deoarece gradul de acoperire ε scade, (iar valorile jocului radial nu sînt egale nici între ele și nici cu jocul standardizat).

Coeficienții f_{01} și f_{02} al înălțimii capului dintelui pot lua valorile 0,8 sau 1.

ξ_2 și ξ_1 reprezintă coeficienții de deplasare specifică a cremalierei de referință.

Cercetările au arătat că valoarea lui ξ_d trebuie să fie între 0,6 și 0,9 pentru ca inegalitatea (4′) să fie satisfăcută. Deci valoarea unghiului α conform ecuației (7) să fie mai mare ca 55°.

Calculele numerice s-au extins asupra angrenajelor din tabela 1.

Tabela 1

Tipul angrenajului	I	II	III
Z_1	40	70	100
Z_2	41	71	101

Fiecare angrenaj a fost studiat în funcție de f_{01}, f_{02}, ξ_d și ξ_1 ca variabile independente cu domeniul limitat, ce rezultă din tabela 2.

Concluziile sînt următoarele:

1. Valoarea lui cos ψ practic nu variază dacă ξ_1 ia diferite valori în intervalul $-0{,}2 — +0{,}2$, restul variabilelor rămînînd constante.

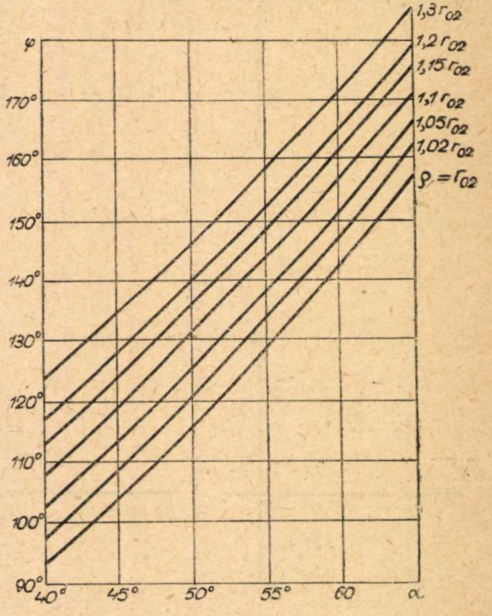


Fig. 5

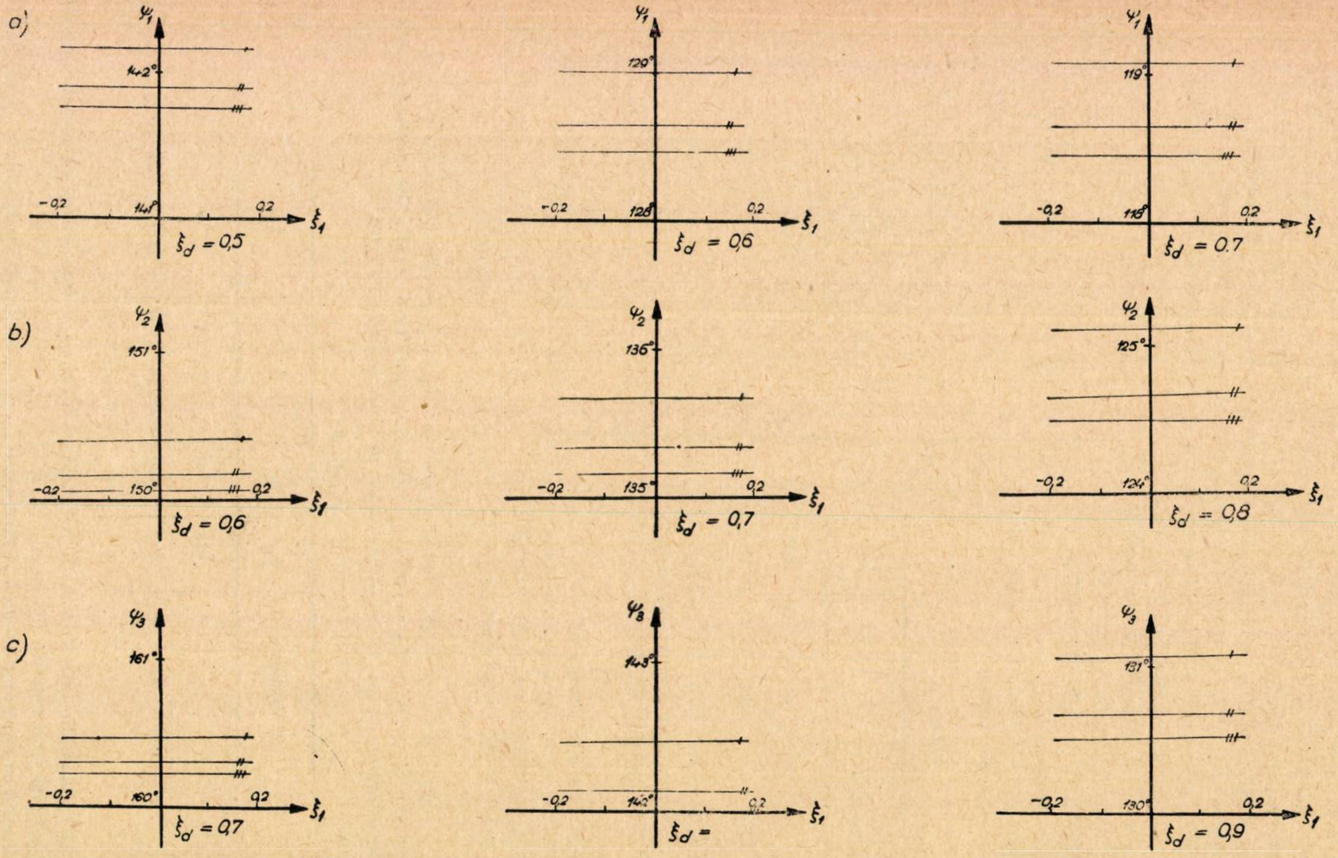
2. Valoarea lui cos ψ variază foarte puțin cînd Z_2 și Z_1 iau diferite valori între 40—100 ($Z_d = 1$) pentru $\xi_d =$ const. $f_{01} =$ const. $f_{02} =$ const. După cum rezultă din graficele anexate $\Delta\psi_{\min}$ este aproximativ de 14′ și $\Delta\psi_{\max}$ este de aproximativ 37′ (fig. 6).

Tabela 2

Varianta	f_{0_1}	f_{0_2}	ξ_d	ξ_1
a	0,8	0,8	0,5 ; 0,6 ; 0,7	−0,2, 0,0, 0,2
b	1	0,8	0,6 ; 0,7 ; 0,8	
c	1	1	0,7 ; 0,8 ; 0,9	

3. Dacă neglijăm influența lui ξ_1 și Z_1 asupra lui cos ψ putem afirma că aceasta depinde de ξ_d, f_{01}, f_{02} și prin ecuația (7) de α.

4. Luînd ca bază angrenajul I pentru cazul $\xi_1 = 0$ s-au trasat curbele $\psi_1 = \psi_1(\alpha)$ pentru varianta *a*, $\psi_2 = \psi_2(\alpha)$ pentru varianta *b* și $\psi_3 = \psi_3(\alpha)$ pentru varianta *c* (fig. 7).



Observ. Graficul : a) corespunde variantei $f_{o_1} = f_{o_2} = 0,8$; b) pentru $f_{o_1} = 1$, $f_{o_2} = 0,8$; c) pentru $f_{o_1} = f_{o_2} = 1$. S-a notat angrenajul de tip I + de tip II -||- de tip III -|||-

Fig. 6

Din suprapunerea celor două diagrame (fig. 5 şi fig. 7) rezultă figura 8 din care reiese fără nici o tatonare valoarea minimă a unghiului α şi deci prin ecuaţia (7) $\xi_{d\min}$ necesar pentru evitarea interferenţei de tipul 2.1. Valorile acestora sînt cuprinse în tabela 3.

Tabela 3

Varianta	$\alpha_{\min}$	$\xi_{d\min}$
a	54° 50′ 16″	0,615
b	56° 51′ 16″	0,720
c	57° 6′ 53″	0,835

2.2. Interferenţa dintre vîrful dintelui Z_1 — rădăcina dintelui Z_2 şi invers

2.2.1. *Interferenţa la rădăcina dintelui roţii* Z_2. Interferenţa nu apare dacă

$$R_{r2} \geqslant R_s'' , \tag{9}$$

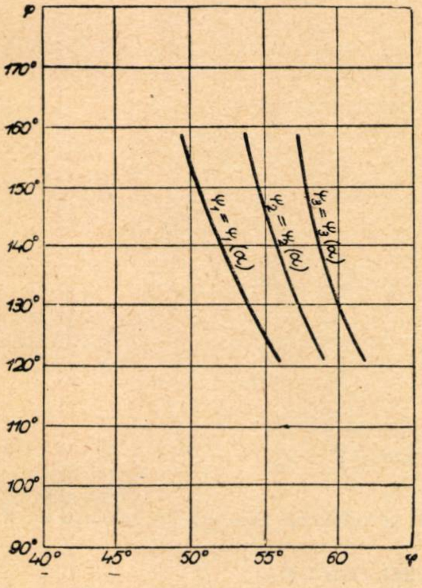


Fig. 7

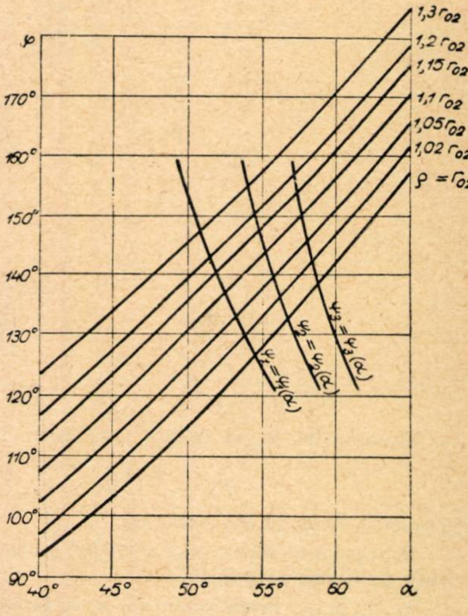


Fig. 8

unde R_{r2} reprezintă raza cercului de rădăcină (unde se sfîrşeşte evolventa roţii 2) (fig. 9), R_s'' reprezintă raza cercului roţii 2 care trece prin ultimul punct activ al liniei de angrenare (corespunzînd razei exterioare R_1).

Expresia lui R_s'' se deduce din figura 9

$$R_s'' = \sqrt{\left(\sqrt{R_1^2 - r_{b1}^2} + A \sin \alpha\right)^2 + r_{b2}^2}, \tag{10}$$

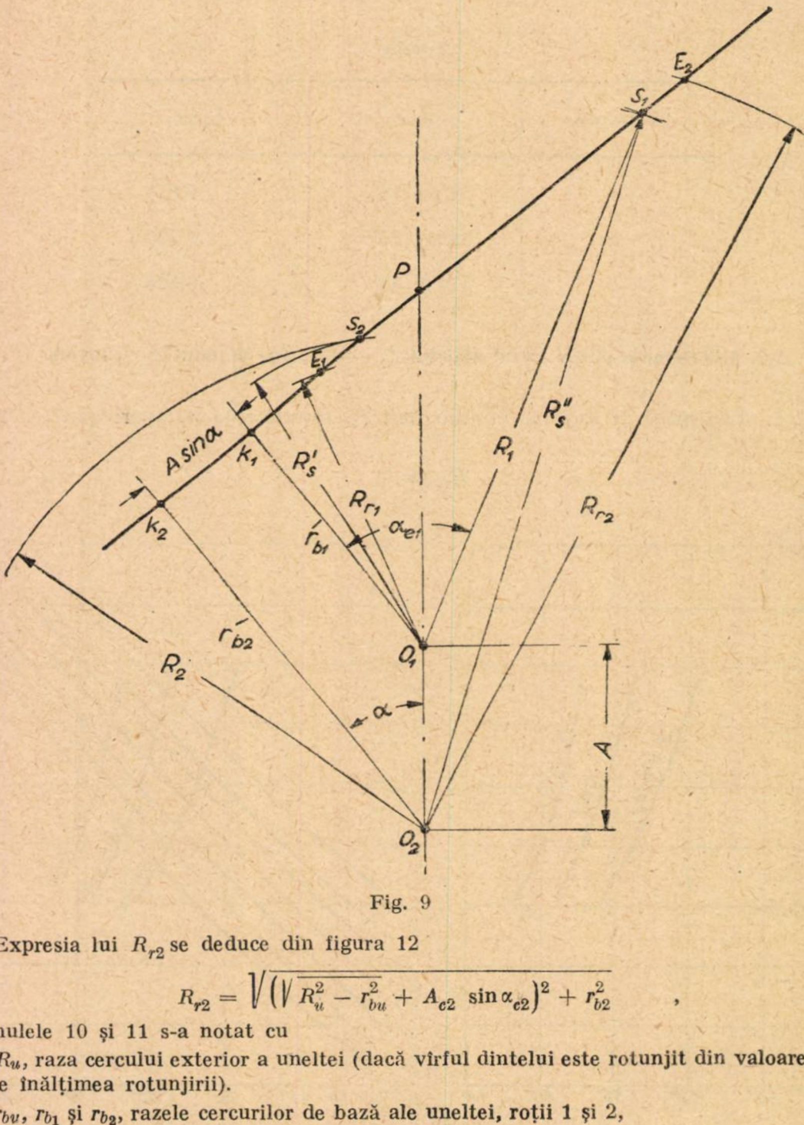


Fig. 9

Expresia lui R_{r2} se deduce din figura 12

$$R_{r2} = \sqrt{\left(\sqrt{R_u^2 - r_{bu}^2} + A_{c2} \sin \alpha_{c2}\right)^2 + r_{b2}^2}, \tag{11}$$

În formulele 10 şi 11 s-a notat cu

R_u, raza cercului exterior a uneltei (dacă vîrful dintelui este rotunjit din valoarea lui R_u se scade înălţimea rotunjirii).

r_{bv}, r_{b1} şi r_{b2}, razele cercurilor de bază ale uneltei, roţii 1 şi 2,

A_{c_2}, distanţa axială de prelucrare a roţii 2.

α_{c_2}, unghiul de angrenare de prelucrare a roţii 2.

Pentru evitarea interferenţei de tipul 2.2.1. recomandăm folosirea inegalităţii (12), ce rezultă din inegalitatea (9) folosind formulele (10) şi (11).

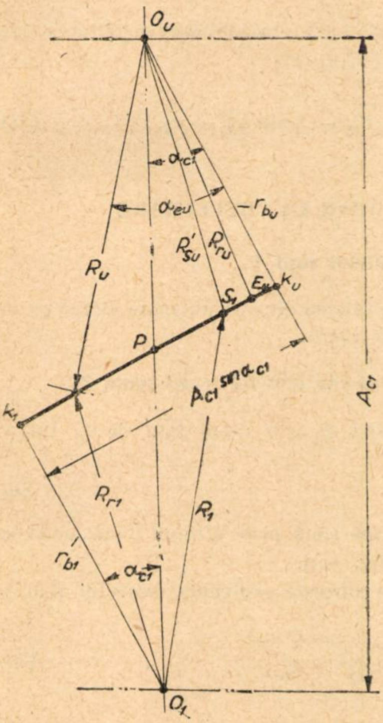
$$\sqrt{R_u^2 - r_{bu}^2} + A_{c2} \sin \alpha_{c2} \geqslant \sqrt{R_1^2 - r_{b1}^2} + A \sin \alpha. \tag{12}$$

2.2.2. *Interferență la rădăcina dintelui roţii 1.* Interferenţa nu apare dacă

$$R_{r_1} \leqslant R_s' , \qquad (13)$$

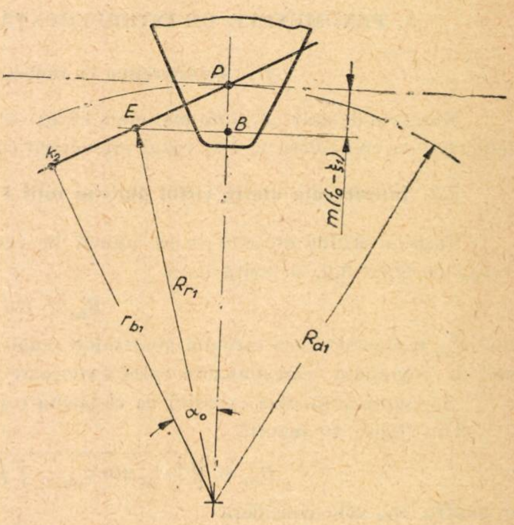
unde

R_{r1} reprezintă raza cercului de rădăcină (unde se sfîrşeşte evolventa roţii 1),



O_u
α_{c1}
α_{eu}
r_{bu}
R_u
R_{su}'
R_{ru}
S_1
E_u
K_u
P
$A_{c1} \sin\alpha_{c1}$
A_{c1}
K_1
R_{r1}
R_1
r_{b1}
α_{c1}
O_1

Fig. 10



P
E
B
K_2
$m(\xi_0 - \xi_1)$
R_{r1}
r_{b1}
R_{a1}
α_0

Fig. 11

R_s' reprezintă raza cercului roţii 1 care trece prin ultimul punct activ al liniei de angrenare (corespunzînd razei exterioare R_2).

Expresia lui R_s' se deduce din figura 9

$$R_s' = \sqrt{\left(\sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} - A \sin \alpha\right)^2 + r_{b1}^2} \quad . \qquad (14)$$

Expresia lui R_{r_1} se deduce din figura 10, dacă prelucrarea se face cu cuţit roată

$$R_{r1} = \sqrt{\left(\sqrt{A_{c1} \sin \alpha}_{\,c1} - \sqrt{R_u^2 - r_{bu}^2}\right)^2 + r_{b1}^2} , \qquad (15)$$

unde

A_{c1} reprezintă distanţa axială de prelucrare a roţii 1,

α_{c1} reprezintă unghiul de angrenare de prelucrare a roţii 1.

Pentru verificarea interferenţei de tipul 2.2.2 în cazul prelucrării cu sculă roată recomandăm folosirea inegalităţii (16) ce rezultă din inegalitatea (13) în urma înlocuirii expresiilor din formulele (14) şi (15)

$$A_{c1} \sin \alpha_{c1} - \sqrt{R_u^2 - r_{bu}^2} \leqslant \sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} - A \sin \alpha. \tag{16}$$

Dacă prelucrarea roţii 1 se efectuează cu sculă cremalieră de rază R_{r1} se calculează cu formula (17) ce rezultă din figura 11

$$R_{r1} = \sqrt{\frac{(f_0 - \xi_1)^2}{tg^2\, \alpha_0} + \left(\frac{Z_1}{2} - f_0 + \xi_1\right)^2}\quad . \tag{17}$$

În acest caz pentru verificarea interferenţei de tipul 2.2.2 recomandăm inegalitatea (18) ce rezultă din inegalitatea (13) după înlocuirea formulelor (14) şi (17)

$$\left(\frac{f_0 - \xi_1}{\operatorname{tg} \alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{2} - f_0 + \xi_1\right)^2 < \left(\sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} - A \sin \alpha\right)^2 + r_{b1}^2. \tag{18}$$

3. FENOMENELE DE INTERFERENŢĂ CE APAR LA PRELUCRARE

3.1. Interferenţa la rădăcina dintelui roţii 1

Numărul de dinţi Z_1 fiind mai mare ca 30—35, sub tăierea dinţilor nu apare nici în cazul prelucrării cu cremalieră nici în cazul prelucrării cu scula roată.

3.2. Interferenţa dintre vîrful dintelui roţii 1 şi rădăcina dintelui sculei roată Z_u

Teşirea vîrfului dintelui apare numai în cazul cînd Z_1 este mare faţă de Z_u. Interferenţa de tipul 3.2. se evită dacă

$$R'_{su} > R_{ru}, \tag{19}$$

unde R'_{su} reprezintă raza cercului aparţinînd sculei Z_u care trece prin ultimul punct activ al liniei de angrenare (corespunzînd razei exterioare R_1 (fig. 10)).

R_{ru} reprezintă raza cercului de rădăcină (unde se sfîrşeşte evolventa cuţitului roată). Din figura 10 rezultă

$$R'_{su} = \sqrt{\left(A_{c1} \sin \alpha_{c1} - \sqrt{R_1^2 - r_{b1}^2}\right)^2 + r_{bu}^2}, \tag{20}$$

iar pentru R_{ru} vom considera

$$R_{ru} = r_{bu}. \tag{21}$$

Ecuaţia (21) este valabilă în cazul cînd evolventa profilului dintelui se execută pînă la cercul de bază, adică se face o rectificare corespunzătoare. Dacă rectificarea se face după un con cu vîrful pe axa sculei roată, evolventa profilului dintelui se va executa pînă la cercul de bază numai pentru un anumit grad de uzură a sculei, iar pentru un alt grad de uzură R_{ru} va fi diferit de r_{bu}.

Pentru verificarea interferenţei de tipul 3.2. recomandăm folosirea inegalităţii (22) ce rezultă din inegalitatea (19) înlocuind expresiile (20) şi (21).

$$A_{c1} \sin \alpha_{c1} - \sqrt{R_1^2 - r_{b1}^2} > 0. \tag{22}$$

3.3. Interferenţa dintre vîrful dintelui roţii 2 şi rădăcina dintelui sculei roată Z_u

Interferenţa nu apare dacă

$$R''_{su} > R_{ru}, \tag{23}$$

unde R''_{su} reprezintă raza cercului aparţinînd sculei Z_u, care trece prin ultimul punct activ al liniei de angrenare (corespunzînd razei exterioare R_2).

Din figura 12 rezultă

$$R''_{su} = \sqrt{\left(\sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} - A_{c2} \sin \alpha_{c2}\right)^2 + r_{bu}^2} \; . \tag{24}$$

Pentru verificarea interferenței de tipul 3.3 recomandăm folosirea inegalității (25) ce rezultă din inegalitatea (23) după înlocuirea formu elor (24) și (21)

$$\sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} - A_{c2} \sin \alpha_{c2} > 0. \tag{25}$$

3.4. Interferența la avansul sculei roată între vîrfurile dinților roții 2 și a sculei roată Z_u

Fenomenul apare pentru $Z_2 - Z_u$ mic și constă din teșirea vîrfului a doi sau patru dinți. În acest sens s-au făcut cercetări de către o serie de autori străini. Rezultatele lor sînt publicate [3], [4] și [5].

Concluziile sînt următoarele :

a) pentra a ne îndepărta de zona interferenței trebuie să mărim diferența $Z_2 - Z_u$,

b) pericolul interferenței descrește cu mărirea lui ξ_2,

c) mărimea lui Z_u luată separat are o influență neglijabilă asupra acestei probleme, hotărîtor fiind diferența $Z_2 - Z_u$.

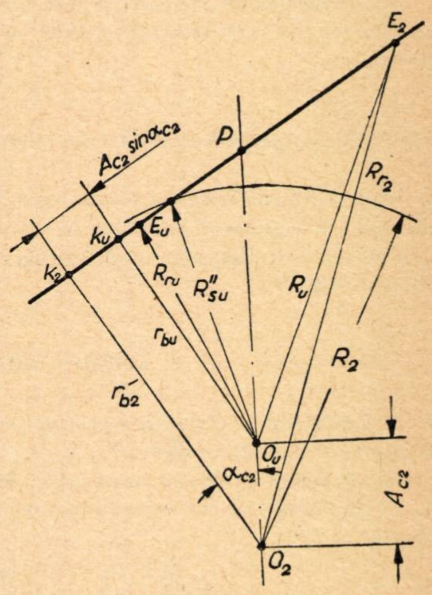


Fig. 12

Verificarea interferenței de tipul 3.4 este destul de complicată, soluția găsindu-se prin încercări. O metodă mai puțin greoaie se recomandă în [5] ce constă din următoarele calcule :

$$R_2 \sin (\theta_2 + \zeta_{ai}) - R_u \sin (\theta_u + \zeta_a) = \Delta. \tag{26}$$

Notațiile corespunzătoare sînt indicate pe figura 13. Interferența nu apare dacă pentru orice valoare a lui ζ, Δ rămîne pozitiv. Valoarea critică se calculează cu formula

$$\sin (\theta_2 + \zeta_{cr}\, ai) = \sqrt{\frac{1 - \eta^2 i^2}{\eta^2 - \eta^2 i^2}} . \tag{27}$$

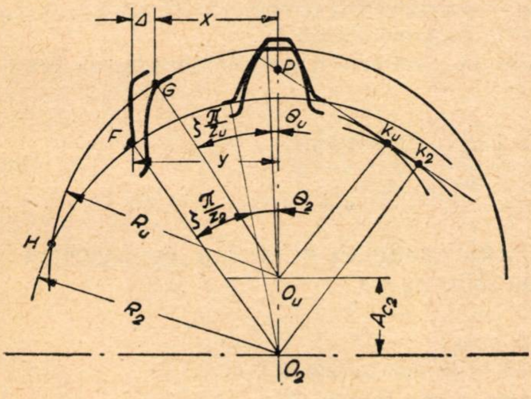


Fig. 13

În formulele (26), (27) s-au folosit următoarele notații :

$$a = \frac{\pi}{Z_u}, \quad i = \frac{Z_u}{Z_2}, \quad \eta = \frac{R_2}{R_u},$$

$$\theta_2 = \frac{Sge_2}{2R_2}, \quad \theta_u = \frac{Sde_u}{2R_u},$$

unde

Sge_2 reprezintă grosimea golului pe cercul exterior R_2,
Sde_u reprezintă grosimea dintelui pe cercul exterior R_u.

Dacă notăm prin $\delta_2 = \theta_2 + \zeta_{cr}\, ai$ rezultă

$$\zeta_{cr} = \frac{\delta_2 - \theta_2}{ai}. \tag{28}$$

Verificarea interferenţei se face prin rezolvarea succesivă a ecuaţiilor (27), (28) şi apoi cu ζ_{cr} a ecuaţiei (26). Această metodă ne asigură o precizie suficientă din punct de vedere practic.

3.5. Interferenţa la ieşirea dinţilor din angrenare, între vîrfurile dinţilor roţii 2 şi a sculei roată Z_u

Din figura 13 rezultă că acest gen de interferenţă nu apare dacă s-a evitat interferenţa de tipul 3.4, deoarece $Y > X$ fiind satisfăcută pentru tot timpul angrenării, punctul F va ajunge mai repede în H decît punctul G. Muchia cuţitului roată în consecinţă nu va intersecta vîrful dintelui roţii 2.

4. STUDIUL GRADULUI DE ACOPERIRE

Cercetarea gradului de acoperire ε, s-a efectuat în funcţie de următoarele variabile independente cu domeniu limitat : Z_1, f_{0_1}, f_{0_2} şi ξ_1. Rezultatele cercetărilor sînt redate sub formă grafică în figura 14 pentru angrenajele de tipul I şi III.

În figura 14 *a* sînt reprezentate două curbe (corespunzînd angrenajelor de tipul I şi III) pentru

$$f_{01} = f_{02} = 0{,}8,\ \xi_d = 0{,}65 \text{ şi } \xi_1 = -\,0{,}2 \div 0{,}2.$$

În figura 14 *b* s-au refăcut calculele pentru

$$f_{01} = 1,\ f_{02} = 0{,}8,\ \xi_d = 0{,}75 \text{ şi } \xi_1 = -\,0{,}2 \div 0{,}2.$$

În figura 14 *c* sînt redate grafic rezultatele calculelor pentru

$$f_{01} = f_{02} = 1,\ \xi_\alpha = 0{,}85 \text{ şi } \xi_1 = -\,0{,}2 \div 0{,}2.$$

Se observă că pentru mărirea gradului de acoperire ε este necesar să se mărească Z_1, f_{01}, f_{02} sau să se micşoreze valoarea coeficientului ξ_1 (păstrînd acelaşi ξ_d).

Pentru determinarea gradului de acoperire, cînd $m = 1$, recomandăm folosirea următoarei formule :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R_1^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} + A \sin \alpha}{\pi \cos \alpha_0}. \tag{29}$$

5. MERSUL CALCULELOR ÎN CAZUL REDUCTORULUI PLANETAR CU DANTURĂ INTERIOARĂ ŞI $Z_d = 1$

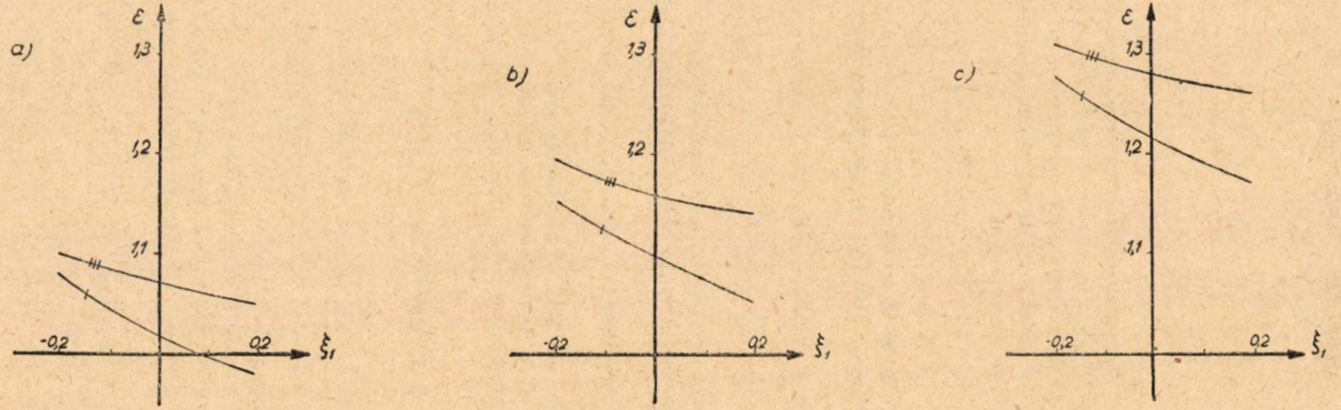
a) Se consideră date $Z_1, Z_2, f_{01}, f_{02}, m$ şi α_0 ;

b) Se alege scula roată Z_u ţinînd seama de cele tratate la 3.4 ;

c) Din figura 8 se admite ξ_d (respectiv α prin ecuaţia (7)) ;

d) Se repartizează ξ_d pe cele două roţi dinţate. În acest caz se recomandă consultarea graficelor de pe figura 14 ;

e) Se calculează razele cercurilor exterioare cu formulele (8) ;



Obs. Graficul a) corespunde variantei $f_{o_1} = f_{o_2} = 0,8$ și $\xi_d = 0,65$, graficul b) pentru $f_{o_1} = 1$ $f_{o_2} = 0,8$ și $\xi_d = 0,75$, iar graficul c) pentru $f_{o_1} = 1$ $f_{o_2} = 1$ și $\xi_d = 0,85$. Angrenajul de tip I sa notat +, iar de tip III –///–

Fig. 14

f) Se calculează razele cercurilor de divizare

$$R_{d1} = m\frac{Z_1}{2} \qquad R_{d2} = m\frac{Z_2}{2};$$

g) Se calculează razele cercurilor de bază

$$r_{b1} = m\frac{Z_1 \cos\alpha_0}{2} \qquad r_{b2} = m\frac{Z_2 \cos\alpha_0}{2};$$

h) Se determină unghiul de angrenare de funcţionare cu formula (7);

i) Distanţa axială de funcţionare se calculează cu formula (6);

j) Se calculează gradul de acoperire ε cu formula (29);

k) Raza cercului exterior al sculei roată se calculează cu formula

$$R_u = m\left(\frac{Z_u}{2} + f_{ou} + \xi_u + c\right),$$

în care

ξ_u reprezintă coeficientul de coriajare al sculei însăşi,

c reprezintă coeficientul jocului radial (nu se ia în considerare dacă scula are dinţii rotunjiţi la vîrf);

l) Raza cercului de bază al sculei se determină cu formula

$$r_{bu} = m\frac{Z_u \cos\alpha_0}{2};$$

m) Verificarea interferenţei de tipul 2.2.1 cu formula (12);

n) Verificarea interferenţei de tipul 2.2.2 cu formula (16) (cînd prelucrarea se efectuează cu sculă roată);

o) Verificarea interferenţei de tipul 2.2.2 cu formula (18) (cînd prelucrarea se efectuează cu cremalieră);

p) Verificarea interferenţei de tipul 3.2 cu formula (22);

r) Verificarea interferenţei de tipul 3.3 cu formula (25);

s) Verificarea interferenţei de tipul 3.4 cu formulele (27), (28) şi apoi (26).

6. EXEMPLU DE CALCUL

a) Se dau

$$Z_1 = 40,\ Z_2 = 41,\ f_{o1} = f_{o2} = 1,\ \alpha_0 = 20°,\ \mathrm{m} = 1.$$

b) S-a ales $Z_u = 30$, $f_{o_u} = 1$, $\xi_u = 0{,}0$, $c = 0{,}2$, scula are dinţi rotunjiţi la vîrf.

c) Conform figurii 8 admitem $\xi_d = 0{,}85$.

d) Repartizarea lui ξ_d se va face în felul următor:

$\xi_1 = 0{,}0$, $\xi_2 = 0{,}85$ deoarece în acest caz ε este mai mare decît 1,2 conform figurii 14 *c*.

e) Razele cercurilor exterioare se vor calcula cu formulele (8)

$$R_1 = \frac{Z_1}{2} + f_{o1} + \xi_1 = \frac{40}{2} + 1 + 0{,}0 = 21 \text{ mm},$$

$$R_2 = \frac{Z_2}{2} - f_{o_2} + \xi_2 = \frac{41}{2} - 1 + 0{,}85 = 20{,}35 \text{ mm}.$$

f) Razele cercurilor de divizare vor fi

$$R_{d1} = \frac{40}{2} = 20 \text{ mm}, \quad R_{d2} = \frac{41}{2} = 20{,}5 \text{ mm},$$

g) Razele cercurilor de bază sînt

$$r_{b1} = \frac{40}{2}\,0{,}9397 = 18{,}794 \text{ mm}, \quad r_{b2} = \frac{41}{2}\,0{,}9397 = 19{,}264 \text{ mm}.$$

h) Unghiul de angrenare de funcționare va avea următoarea valoare :

$$\text{inv.}\,\alpha = \text{inv.}\,\alpha_0 + 2\xi_d \operatorname{tg} \alpha_0 = 0{,}0149'0 + 2.0{,}85.0{,}36397 = 0{,}63365,$$

$$\alpha = 58°59', \ \cos\alpha = 0{,}5153.$$

i) Distanța axială de funcționare se calculează cu formula (6)

$$A = 0{,}5\,\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha} = 0{,}5\,\frac{0{,}9397}{0{,}5153} = 0{,}9118 \text{ mm}.$$

j) Pentru calcularea gradului de acoperire ε aplicăm formula (29)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R_1^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{R_2^2 - r_{b2}^2} + A\sin\alpha}{\pi\cos\alpha_0} = \frac{9{,}377 - 6{,}559 + 0{,}781}{\pi\, 0{,}9397} = 1{,}22.$$

k) Raza cercului exterior al sculei roată cu vîrful rotunjit va avea următoarea valoare :

$$R_u = \frac{Z_u}{2} + f_{o_u} + \xi_u = \frac{30}{2} + 1 = 16 \text{ mm}.$$

1) Raza cercului de bază al sculei roată va fi

$$r_{bu} = \frac{30.0{,}9397}{2} = 14{,}095 \text{ mm}.$$

m) Interferența de tipul 2.2.1 s-a verificat cu formula (12) obținînd $10{,}856 > 10{,}158$.

n) Interferența de tipul 2.2.2 se verifică cu formula (16), rezultatul este $4{,}40 < 5{,}77$.

p) Cu formula (22) s-a verificat interferența de tipul 3.2 rezultatul fiind $2{,}60 > 0$.

r) Interferența de tipul 3.3 s-a verificat cu ajutorul formulei (25) obținînd următoru rezultat : $3{,}05 > 0$.

s) Cu ajutorul formulelor (27), (28) și (26) s-a verificat interferența de tipul 3.4 obținînd de asemenea rezultat pozitiv

$$\sin(\theta_2 + \zeta_{cr}\, ai) = \sqrt{\frac{1 - \eta^2 i^2}{\eta^2 - \eta^2 i^2}} = 0{,}4599,$$

$$a = 0{,}1047, \quad i = 0{,}7317, \quad \eta = 1{,}2562,$$

$$R_2 \sin(\theta_2 + \zeta_{cr}\, ai) > R_u \sin(\theta_u + \zeta_{cr}\, a),$$

$$9{,}359 > 9{,}040.$$

Primit la redacție la 22 decembrie 1958

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА С ВНУТРЕННИМИ ЗУБЦАМИ И БОЛЬШИМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ ЧИСЛОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе приводится метод геометрического расчета планетарной зубчатой передачи с внутренними зубцами и с разностью чисел зубцов $Z_d = Z_2 - Z_1 = 1$. Принцип расчета основан на том, что величина профильного перемещения „$m\xi$" совпадает с перемещением отсчетной рейки.

Устанавливаются критерии избежания интерференционных явлений при обработке и работе зубчатой передачи. Зависимость коэффициента перекрытия ζ от различных параметров указана в виде графиков.

В конце работы приведен численный пример.

UNTERSUCHUNG EINES UMLAUF-GETRIEBES MIT INNENVERZAHNUNG UND HOHEM ÜBERSETZUNGSVERHÄLTNIS

ZUSAMMENFASSUNG

In der Abhandlung wird ein Verfahren zur geometrischen Berechnung eines Planetengetriebes mit Innenverzahnung und der Zahnzahldifferenz $Z_d = Z_2 - Z_1 = 1$ angegeben. Das Rechnungsprinzip beruht auf der Identität zwischen der Größe der Profilverschiebung „$m\xi$" und der Verschiebung der Bezugszahnstange.

Weiterhin werden Richtlinien zur Vermeidung von Interferenz-Erscheinungen bei der Bearbeitung und im Betrieb des Getriebes aufgestellt. Die Änderung des Überdeckungsgrades ε in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern wird in graphischen Darstellungen erläutert.

Als Abschluß wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. А. Скворцова, *Внутренние эвольвентные зацепления для случая, когда разности чисел зубцов равны единице.* Машгиз, Москва, 1948.
2. Н. А. Скворцова, *Внутреннее зубчатое эвольвентное зацепление при разности чисел зубцов колес равной единице.* Труды Семинара по теории машин и механизмов, **VII**, *25* (1949).
3. В. А. Гавриленко, *Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача.* Машгиз, Москва, 1956.
4. G. Henriot, *Traité théorique et pratique des engrenages.* **I.** Dunod, Paris, 1950.
5. В. Ф. Романов, *Проверка долбяков при нарезании колес внутреннего зацепления.* Станки и инструмент, *6* (1954).

APARAT PENTRU MĂSURAT TEMPERATURI

DE

GH. MARIN

În unele cercetări experimentale privind funcţionarea lagărelor, este necesară măsurarea temperaturilor, fie a părţilor metalice, fie a mediilor lubrifiante. Aparatul destinat acestui scop trebuie să îndeplinească condiţia de a urmări, în puncte diferite şi în timp scurt, evoluţia cantitativă a temperaturilor, cu o precizie suficientă.

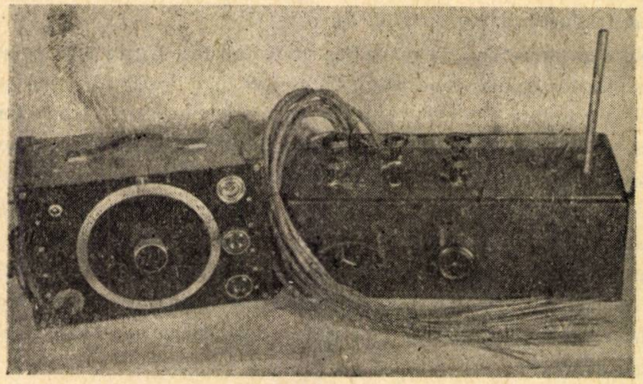


Fig. 1. — Aparat pentru măsurat temperaturi.

În acest scop, s-a construit un aparat pentru măsurarea temperaturilor (fig. 1), la care se foloseşte variaţia rezistenţei cu temperatura, a unor conductori metalici.

Pentru măsurarea propriu-zisă se foloseşte o punte şi un amplificator electronic cu indicator de nul.

Cîmpul de lucru apreciat la 130° C este acoperit de rezistenţa variabilă a punţii (un record care măsoară aproximativ 60° C) şi un sistem de rezistenţe adiţionale în trepte, care, introduse în circuit cînd rezistenţa variabilă a punţii ajunge la limita de lucru, se însumează cu aceasta, mărind fiecare cîmpul de lucru cu 35—40° C.

Deoarece măsurarea temperaturilor se face prin măsurarea variației rezistențelor traductoarelor active față de un traductor martor, trebuia să se asigure acestuia din urmă o temperatură constantă, arbitrar aleasă. A fost deci necesară construirea unei camere de temperatură constantă. Aceasta s-a realizat, folosindu-se un recipient metalic plin cu mercur, în care se montează traductorul martor. Pentru obținerea și menținerea temperaturii la valoarea determinată, se folosește un bec, ca sursă de căldură, și un sistem de comandă termometru-releu de întreruperea circuitului.

Mercurul a fost ales, pentru cufundarea traductorului martor, datorită cîtorva proprietăți caracteristice, care face utilă folosirea lui : stare lichidă, conductibilitate termică și electrică, inerție mare calorică, coeficient de dilatare ridicat.

Traductoarele sînt construite din conductori de cupru emailați cu diametru de 0,02 mm și lungimea de 1,05 m. Conductorii sînt bobinați bifilari pe un suport metalic de 0,3 mm Ø și fixați pe suport cu o masă plastică rezistentă la temperatură. Traductoarele astfel construite au rezistența de aproximativ 55 ohmi la temperatura de 30° C. Forma lor geometrică este cilindrică cu diametrul de 1,3 mm și lungimea de 1,8—2 mm, astfel că volumul, măsurat cu stratul de lac izolant, nu depășește 2 mm^3. Capetele bobinelor sînt sudate la conductori de cupru izolați, cu diametrul de 0,4 mm. Suportul bobinei este răsucit pe conductori, pentru a forma cu aceștia un corp relativ rigid.

Un comutator central de grupe și 4 comutatoare cu cîte 18 puncte de lucru asigură posibilitatea de a se măsura succesiv 72 puncte.

Puntea folosită este redusă la un minim de elemente. Ca element de reglaj s-a prevăzut un reocord simplu și un comutator ce introduce rezistențele adiționale în brațul punții în care este montat traductorul martor (fig. 2).

Problemele mai importante la realizarea punții au fost legate mai cu seamă de stabilitatea mecanică a pieselor mobile (reocordul). De asemenea, o problemă importantă a fost și alegerea tensiunii de alimentare a punții, pentru a nu provoca încălzirea traductorului, ceea ce ar fi avut ca urmare un schimb de căldură între mediul ambiant și traductor. Rezolvarea acestei probleme s-a obținut prin micșorarea valorii eficace a tensiunii semnalului sinusoidal, aceasta fiind soluția cea mai simplă. În acest scop s-a alimentat puntea cu tensiunea rețelei luată dintr-o înfășurare specială a transformatorului de rețea. Valoarea tensiunii este de aproximativ 0,2 V. S-a impus o îngrijită execuție atît din punct de vedere mecanic, cît și electric. Rezistențele și reocordul s-au executat din sîrmă de constantan, primele bobinîndu-se antiinductiv. Pentru ca tensiunea de alimentare a punții să fie simetrică, a fost necesar ca înfășurarea respectivă să fie ecranată electrostatic.

Amplificatorul și detectorul de nul au o construcție simplă, arătată în figura 3. Amplificatorul este în două etaje, iar ca detector de nul se folosește un ochi magic. Pentru alimentare se folosește un redresor bifazic, de construcție clasică, folosindu-se un tub redresor tip 6T5C și o celulă de filtraj (fig. 4).

Aparatul este capabil să lucreze și în regim dinamic, deoarece inerția termică a traductorilor este foarte mică, iar frecvența tensiunii de alimentare este suficientă pentru a se urmări oscilațiile termice de aproximativ 5—10 Hz. În acest scop se va conecta la bornele rezistenței de sarcină de 1 MΩ, a tubului 6E5, intrarea unui oscilograf catodic, astfel se va lucra în regim desechilibrat al punții. Este indicat ca pentru astfel de lucrări să se stabilizeze tensiunea de rețea.

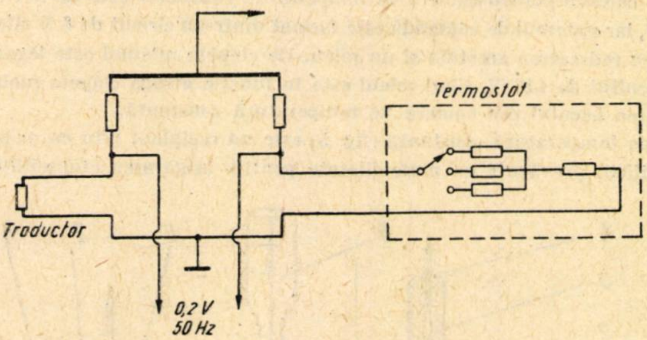

Termostat
Traductor
0,2 V
50 Hz

Fig. 2. — Schema de introducere a rezistențelor adiționale în circuitul traductorilor.

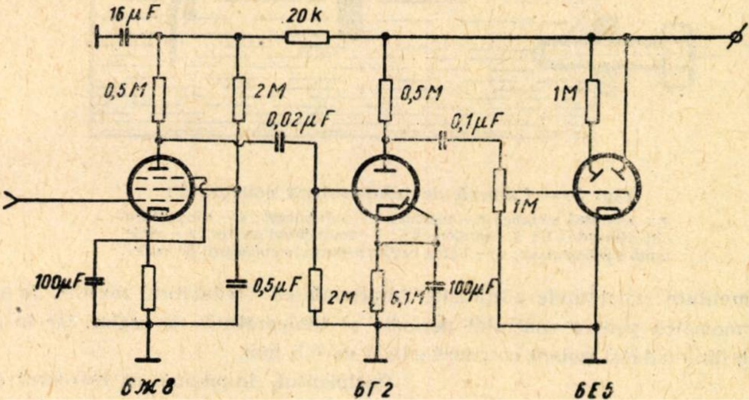

16 μF
20 k
300 V
0,5 M
2 M
0,02 μF
0,5 M
0,1 μF
1 M
1 M
100 μF
0,5 μF
2 M
5,1 M
100 μF
6Ж8
6Г2
6Е5

Fig. 3. — Amplificator și detector de zero.

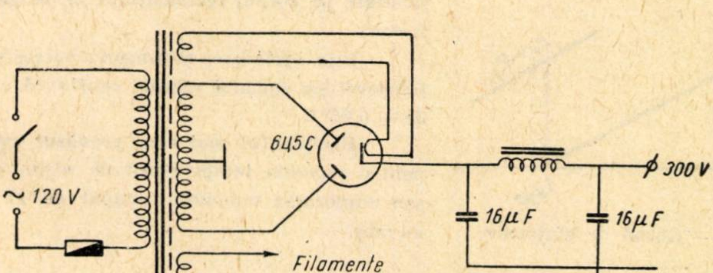

6Ц5С
~ 120 V
300 V
16 μF
16 μF
Filamente
Punte

Fig. 4. — Redresor bifazic.

Sursa de căldură pentru camera de temperatură constantă este un bec alimentat de un circuit de 110 V, iar sistemul de comandă este format dintr-un circuit de 6 V alternativ, o punte de seleniu pentru redresarea acestuia şi un releu. De clapeta releului este legat unul din firele ce formează circuitul de 110 V. Cînd releul este în funcție atrage clapeta mobilă, întrerupînd astfel alimentarea becului din camera de temperatură constantă.

Camera de temperatură constantă (fig. 5) este un recipient plin cu mercur, în care sînt practicate 3 orificii, prevăzute cu mufe filetate pentru asigurarea etanşeităţii. În unul din orificii sînt montate rezistenţele adiţionale, împreună cu traductorul martor, în cel de-al doilea un termometru pentru controlul periodic al temperaturii de regim, iar în cel de-al treilea un tub din material izolant cu gaură axială de 0,5 mm.

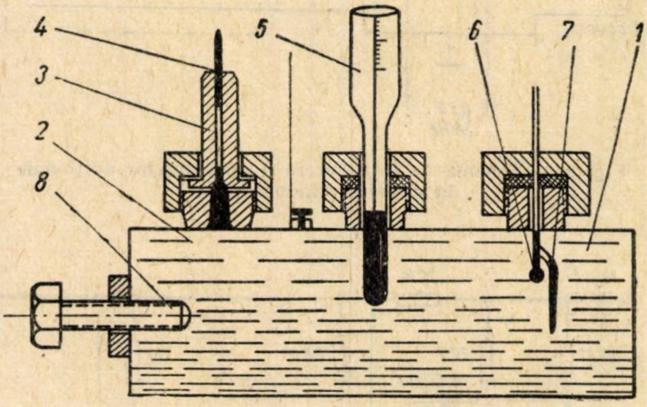


Fig. 5. — Cameră de temperatură constantă:

1 – recipient metalic; *2* – mercur; *3* – tub izolant; *4* – conductorul circuitului de 6 V; *5* – termometru; *6* – traductorul martor; *7* – rezistență suplimentară; *8* – buton pentru reglarea temperaturii de regim.

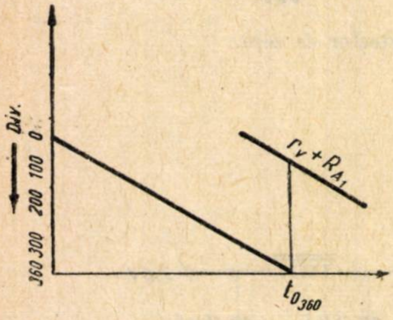


Fig. 6. — Curbă de etalonare.

Recipientul, împreună cu mercurul din interior, este folosit ca întrerupător electric datorită dilatării lui la temperatură. Pentru aceasta circuitul de 6 V este întrerupt, iar cele două capete sînt montate pe corpul recipientului şi în gaura tubului izolant.

Prin aprinderea şi stingerea succesivă a becului, temperatura camerei rămîne constantă cu o variaţie de ±0,05° C.

Recipientul mai este prevăzut cu un buton pentru reglarea temperaturii de regim, prin mărirea sau micşorarea volumului ocupat de el în masa de mercur.

Rezultatele obţinute sînt următoarele:

Intervalul de lucru cuprins între —50° C şi +150° C. Limita superioară este determinată de pericolul de distrugere a materialului izolant al traductorului.

Curbele de etalonare ale aparatului sînt liniare în intervalul de temperatură considerat, obţinîndu-se o sensibilitate de 6 div./°C, ce nu variază de la traductor la traductor. În punctele de introducere a rezistențelor adiționale, curba face un salt egal cu valoarea în diviziuni a rezistenței introduse (fig. 6).

Precizia măsurătorilor este de ±0,1° C. Aparatul a fost utilizat la o serie de lucrări experimentale privind regimul termic al lagărelor, atît pe bancuri experimentale, cît și pe motoare cu ardere internă.

Primit la redacție la 15 aprilie 1959

ПРИБОР ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Описывается прибор для измерения температур, созданный с целью применения в опытных исследованиях, касающихся вопросов смазки. Работа прибора основана на принципе температурного изменения электросопротивления проводника.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Прибор для измерения темперутур.

Рис. 2. — Схема введения добавочных сопротивлений в цепь датчиков.

Рис. 3. — Усилитель и нулевой детектор.

Рис. 4. — Двухфазный выпрямитель.

Рис. 5. — Камера постоянной температуры: *1* — металлический сосуд; *2* — ртуть; *3* — изоляционная трубка; *4* — проводники цепи 6 в; *5* — термометр; *6* — контрольный датчик; *7* — добавочные сопротивления; *8* — кнопка для регулирования температуры.

Рис. 6. — Диаграмма датчика.

APPAREIL DE MESURE DES TEMPÉRATURES

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent un appareil pour la mesure des températures, élaboré à l'usage des recherches expérimentales dans le domaine de la lubrification. Le principe de fonctionnement de l'appareil est la variation de la résistance électrique d'un conducteur, en fonction de la température.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Appareil de mesure des températures.

Fig. 2. — Schéma d'introduction des résistances additionnelles dans le circuit des transducteurs.

Fig. 3. — Amplificateur et détecteur de zéro.

Fig. 4. — Redresseur diphasé.

Fig. 5. — Chambre à température constante : *1* = récipient métallique ; *2* = mercure ; *3* = tube isolant ; *4* = conducteurs du circuit de 6 V ; *5* = thermomètre ; 6 = transducteur témoin ; *7* = résistances additionnelles ; *8* = bouton pour le réglage de la température de régime.

Fig. 6. — Courbe d'étalonnage.

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. TOPORVERH, M. I. ŞERMAN, *Aparate termotehnice de măsurat și reglat întrebuințate în uzinele metalurgice.* Ed. tehnică, București, 1954.

2. A. M. TURICIN, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. tehnică, București, 1957.

SESIUNEA ŞTIINŢIFICĂ JUBILIARĂ A INSTITUTULUI DE MECANICĂ APLICATĂ

Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. organizează în cursul lunii februarie 1960, cu ocazia împlinirii a 10 ani de activitate, o sesiune ştiinţifică jubiliară.

Lucrările sesiunii se vor desfăşura în cadrul următoarelor două secţii :

MECANICA SOLIDELOR

Mecanica teoretică şi tehnică.
Vibraţii şi stabilitate.
Cinematica şi dinamica mecanismelor.
Elasticitate, plasticitate, reologie, fluaj.
Rezistenţa materialelor.
Statica şi dinamica construcţiilor.
Mecanica pămînturilor.
Prelucrarea mediilor continue.
Metode de măsură şi tehnică experimentală.
Probleme de învăţămînt.

MECANICA FLUIDELOR

Fluide incompresibile, perfecte şi reale.
Dinamica gazelor.
Lubrificaţie.
Teoria turbulenţei şi a stratului limită.
Teoria filtraţiei.
Mecanica zborului, astronautica, teoria rachetelor.

Magneto-hidrodinamica.
Hidraulica.
Hidroaerodinamica experimentală.
Probleme de învăţămînt.

Se pot prezenta comunicări avînd caracter teoretic, experimental sau de aplicaţie în tehnică şi conferinţe. Durata unei comunicări va fi de 15 minute, iar a unei conferinţe de 45 minute.

La această sesiune sînt chemaţi să participe specialişti din unităţile de cercetare, din învăţămîntul superior şi din întreprinderile şi instituţiile tehnico-industriale.

W. RICHTER, *Flugmechanik* (Mecanica zborului). B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959,296 pag.

Flugmechanik al lui W. Richter este o carte destinată inginerilor sau viitorilor ingineri şi are un caracter pronunţat didactic. Ea defineşte noţiunile de bază din domeniul mecanicii zborului şi unele din cîteva domenii conexe, aşa cum vor fi utilizate ele în practica inginerească. Scurtele incursiuni în baza teoretică sau unele descrieri ale fenomenului fizic nu reprezintă puncte de plecare pentru explicarea noţiunilor, ci completări cu caracter informativ. Această împrejurare, evident, nu implică scăderea nivelului ştiinţific al lucrării, ci clarifică de la bun început destinaţia ei.

Lucrarea are, se pare, un dublu scop :

1. Să definească unele noţiuni de bază, necesare în practica inginerului constructor de avioane, să descrie fenomenele aerodinamice şi de mecanica zborului pentru a oferi *o introducere* ce presupune continuarea studiului, într-o formă mai adîncită, pe baza literaturii de specialitate ;

2. Să ajute pe cei ce se dedică vreunei specialităţi adiacente (inginer de exploatare a materialului volant, de fabricaţie, constructori de motoare de aviaţie, de instrumente de bord etc.) să se descurce în fenomenele aerodinamice şi de comportare în zbor a avionului, destul de complexe, la nivelul necesităţilor lor. Considerăm că lucrarea corespunde ambelor acestor scopuri.

După cîteva capitole introductive asupra noţiunilor legate de atmosferă, asupra avionului în sine (descrierea organelor principale, definirea lui ca sistem dinamic), asupra diferitelor măsurători ce se efectuează în zbor, la sol şi pe modele, precum şi asupra naturii forţelor şi momentelor ce acţionează asupra aparatului în zbor, autorul trece în continuare la tratarea ceva mai detailată (în trei capitole) a problemelor propriu-zise de mecanica (dinamica) zborului, de performanţe (Flugleistungen).

Cele trei capitole destinate problemelor de calcul aerodinamic şi performanţe reprezintă o bună exemplificare a metodelor inginereşti utilizate în acest domeniu.

Folosind ca punct de plecare pentru calculul caracteristicilor aerodinamice ale avionului în zbor cu motor (calculul performanţelor, alegerea elicii etc.) metoda clasică a puterilor, se prezintă şi o variantă adimensională a acesteia cu aplicaţii la tehnica reactivă.

Această parte se încheie cu unele chestiuni de dinamica zborului, în cîteva evoluţii nestaţionare mai importante.

Urmează trei capitole consacrate calităţilor de zbor (Flugeigenschaften) ale avionului privind stabilitatea şi maniabilitatea longitudinală şi laterală şi problema vriei. Tratarea devine iarăşi, ca în primele capitole, mai schematică, urmărind un scop informativ general. Din complexul de probleme legate de stabilitatea dinamică, spre pildă, se tratează doar un singur aspect, acela al influenței stabilității statice. Totuși din paragrafele introductive se explică locul și rolul acestui aspect izolat dar important în ansamblul problemei și în felul acesta capitolul rămîne deschis pentru cititor, pentru studierea ulterioară mai adîncită.

Plasarea la sfîrșitul lucrării a unui capitol asupra chestiunii rezistenței la înaintare și stratului limită, cu un conținut mai strîns legat de fenomenul fizic, decît al capitolelor precedente este o consecință, probabil, a dorinței autorului de a prezenta cu titlu de asemenea informativ, drept exemplu, unele aspecte mai intime ale problemelor expuse anterior pe un plan mai ingineresc. De altfel considerentele de didacticitate nu impun o anumită ordine obligatorie de expunere, iar în ceea ce privește alegerea materialului pentru o lucrare de introducere, ea este, pînă la un anumit punct, o chestiune de gust personal, și cu atît mai mult ordinea de succesiune a problemelor tratate.

În ansamblu, pentru considerentele arătate, apreciem cartea *Flugmechanik* a lui W. Richter ca binevenită în literatura aeronautică, iar munca depusă de autor pentru a prezenta aspecte tipice într-o formă condensată și în același timp clară, pentru a da noțiuni precise, bine conturate, fără amănunte, necesare doar în cazul unui studiu mai adîncit, drept un efort deosebit de util.

T. Hacker

⁂ *Deutsche Versuchsanlalt für Luftfahrt* (*D.V.L.*). *Berichte* (Institutul german de încercări pentru aviație. Rapoarte). Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1955—1956.

Institutul german de încercări pentru aviație (D.V.L.) cu sediul la Mülheim (Ruhr) publică, începînd din anul 1955, sub formă de rapoarte, studiile teoretice și experimentale executate în diferite institute de specialitate care îi aparțin, sau în institute de pe lîngă unele instituții de învățămînt superior. Se publică de asemenea și traduceri ale unor lucrări efectuate în străinătate. Vom trece în revistă, în cele ce urmează, o serie de astfel de rapoarte care conțin lucrări de aerodinamică sau de mecanica fluidelor în general.

1. Rapoartele nr. 1, 39 și 42 conțin un studiu amplu intitulat *Zur Aerodynamik des Ringflügels* (Asupra aerodinamicii aripii inelare), efectuat de prof. dr. J. Weissinger în Institutul de matematică aplicată al Politehnicii din Karlsruhe.

În primul dintre aceste rapoarte publicat în 1955, se stabilește o teorie a aripii inelare analogă cu teoria aripii portante obișnuite. Obiectivul cercetării îl constituie determinarea repartiției presiunilor pe o aripă subțire, aproape axial-simetrică, în curent subsonic. Aripa este înlocuită cu un cilindru, pe suprafața căruia se consideră o repartiție continuă de vîrtejuri inelare, cu circulație variabilă atît în lungul lor cît și de la unul la altul. În felul acesta, rezultă și un sistem de vîrtejuri libere, rectilinii și așezate pe suprafața laterală a unui cilindru, paralele cu direcția curentului. Circulația se determină cu ajutorul condiției lui Jukovski precum și printr-o condiție pusă componentei radiale a vitezei induse. Rezultă o ecuație integrală bidimensională care este redusă, prin dezvoltarea componentei normale a vitezei, precum și a circulației, în serii Fourier, la un sistem de ecuații integrale izolate unidimensionale. Acestea sînt accesibile calculului numeric, dacă se întrebuințează procedeul cunoscut din teoria profilelor subțiri a lui Birnbaum. Rezultă în felul acesta un sistem infinit de ecuații algebrice pentru determinarea coeficienților Fourier. Se calculează apoi forțele și momentele, se studiază unele cazuri limită, se dau rezultate numerice și formule aproximative. Trebuie remarcat faptul că relația între rezistența indusă și portanță este asemănătoare cu aceea de la aripile eliptice obișnuite. Teoria este stabilită în ipoteza incompresibilității aerului, dar pentru numere Mach nu prea mari pot fi aplicate metode cunoscute care permit extinderea rezultatelor şi în regimul subsonic compresibil.

Al doilea raport, apărut în 1957, are ca obiect studierea efectului aripioarelor, considerat ca o variaţie a unghiului de incidenţă. Calculul se bazează pe metoda introdusă în primul raport şi pe teorema de reciprocitate (reverse-flow theorem) aplicată soluţiilor ecuaţiei integrale a problemei. Cu ajutorul principiului suprapunerii, se calculează apoi portanţa şi momentul datorite unei aripioare cu coarda constantă.

În sfîrşit, în al treilea raport, publicat tot în 1957, se determină efectul grosimii profilului. Aceasta se obţine printr-o distribuţie adecvată de surse pe suprafaţa cilindrului circular care înlocuieşte aripa. Deoarece componenta normală a vitezei induse astfel obţinute, conţine şi un termen care este continuu la traversarea suprafeţei cilindrice, trebuie să se introducă, pentru compensarea acestuia şi o distribuţie corespunzătoare de vîrtejuri. Considerîndu-se astfel o distribuţie dată de surse, se stabileşte relaţia între aceasta şi grosime precum şi ecuaţia integrală pentru distribuţia de vîrtejuri. Cu ajutorul procedeului numeric utilizat în studiul general al problemei, se rezolvă ecuaţia integrală şi se dau valorile forţelor radiale şi ale momentelor datorite grosimii. Se calculează apoi vitezele tangenţiale suplimentare provocate de grosimea profilului şi se face o analiză amănunţită a efectului acestora.

Problema aripii inelare are şi un interes practic deoarece în ultimii ani au fost încercate diferite formule de aparate cu astfel de aripi. Studiul întreprins de prof. dr. J. Weissinger, foarte complet şi sistematic, răspunde cerinţelor de calcul pentru astfel de aripi. Trebuie remarcat însă faptul că metoda este relativ complicată şi comportă calcule destul de lungi.

2. Raportul nr. 3 cuprinde studiul *Bericht über eine Näherungstheorie der Strömung um Rotationskörper ohne Anstellung bei Machzahl Eins* (Raport asupra unei teorii aproximative a scurgerii în jurul unui corp de rotaţie fără incidenţă la numărul Mach egal cu unitatea) de F. Keune, executat în Institutul de aerodinamică al D.V.L. de la Aachen şi publicat în 1955. După ce se prezintă pe scurt rezultatele teoriei liniare în regim subsonic şi supersonic, se expune o teorie simplă a scurgerii în jurul vitezei sunetului. Printr-o aproximare adecvată a unui termen din ecuaţia teoriei neliniare pentru $M_\infty = 1$, se ajunge la o ecuaţie de tip parabolic, care se poate rezolva destul de uşor. Pentru un semicorp, rezultatele obţinute la $M_\infty = 1$ sînt comparate cu acelea din scurgerea supersonică la $M_\infty = \sqrt{2}$. Rezultatele obţinute concordă bine cu datele experimentale pentru anumite forme de corpuri. Se schiţează de asemenea aspectele teoretice care urmează a mai fi studiate în legătură cu această problemă.

3. Raportul nr. 9 apărut în 1956, conţine lucrarea *Strömung von Flüssigkeiten mit temperaturabhängiger Zähigkeit* (Kühlung von Ölen) (Scurgerea fluidelor cu vîscozitatea depinzînd de temperatură (răcirea uleiurilor)) de B. v. Schlippe. Se consideră scurgerea laminară axial-simetrică şi unidimensională a fluidelor, în special a uleiurilor reci, admiţîndu-se că temperatura şi vîscozitatea variază în secţiunea transversală. După ce se studiază variaţia vîscozităţii în funcţie de temperatură, se trece la stabilirea pe cale elementară, a ecuaţiilor problemei. Ecuaţia diferenţială şi ecuaţia integrală a problemei, în care au fost introduse mărimi adimensionale, nu pot fi rezolvate şi din acest motiv autorul utilizează un procedeu de integrare grafică. Dintre concluzii merită să fie semnalată aceea conform căreia există o limită pentru răcirea posibilă a fluidului. Dacă temperatura exterioară continuă să scadă, fluidul se încălzeşte totuşi deoarece apare o distribuţie neuniformă de viteze însoţită de o creştere a energiei disipate. Se dau apoi exemple numerice şi se schiţează tratarea problemei plane.

4. Raportul nr. 10, publicat în 1956, se intitulează *Die Strömung einer Quellstrecke in Halbraum — eine strenge Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen* (Scurgerea datorită unei distribuţii liniare de surse în semi-spaţiu — o soluţie exactă a ecuaţiilor Navier-Stokes) şi are ca autori pe C. Schmieden şi K. H. Müller de la Institutul matematic al Politehnicii din

Darmstadt. Se consideră o repartiție de surse cu debit constant în lungul axei Oz, în timp ce planul Oxy este considerat ca un perete solid. Se studiază scurgerea în semispațiul $z > 0$ și se utilizează ecuația funcției de curent în coordonate polare spațiale. Prin separarea variabilelor se ajunge la o ecuație ordinară de tip Riccati, care se integrează, soluțiile fiind serii hipergeometrice. Pentru anumite cazuri, discutate în lucrare, soluțiile au forma unui cît de două polinoame. Se tratează atît cazul surselor pozitive cît și al celor negative, scopul cercetării fiind de a se da o soluție exactă care să servească la controlul soluțiilor aproximative obținute cu ajutorul teoriei stratului limită.

5. Raportul nr. 11, apărut în 1955, cuprinde lucrarea *Strömung vor einem Überschall-Laufrad* (Scurgerea în fața unui rotor supersonic) de H. Söngen de la Institutul matematic al Politehnicii din Darmstadt. Se cercetează scurgerea în fața unui compresor axial supersonic în ipoteza că nu există un stator ci numai un rotor. Se presupune că viteza axială a curentului este subsonică însă viteza periferică a rotorului este mare, astfel că viteza relativă este supersonică. Se mai admite de asemenea că incidența este mică, așa fel încît să se poată aplica teoria liniarizată, iar scurgerea se consideră izentropică. Pe modelul simplu astfel realizat, se studiază în special reflexiunea perturbațiilor de la intrarea în rotor și modificările cauzate în felul acesta scurgerii în jurul paletelor. O concluzie interesantă de semnalat este aceea că profilele cu extradosul rectiliniu prezintă un avantaj, deoarece curbura provoacă apariția vîrtejurilor în curent.

6. Raportul nr. 12, publicat în 1956, sub titlul *Ein Verfahren zur Untersuchung des Austauschvorganges in verwirbelten Strömungen hinter Körpern mit abgelöster Strömung* (Un procedeu pentru cercetarea procesului de schimb în scurgerile cu vîrtejuri din spatele corpurilor cu scurgere dezlipită), are ca autor pe prof. dr. W. Quick. Se examinează schimbul de fluid între scurgerea exterioară și scurgerea cu vîrtejuri din spatele unui corp la care există dezlipirea curentului. Fenomenul prezintă interes îndeosebi pentru arzătoarele motoarelor cu reacție și în general pentru camerele de ardere. Se dau mai întîi unele considerații teoretice și se arată că prin măsurarea scăderii în timp a concentrației unui gaz introdus în spațiul cu vîrtejuri se poate determina cantitatea de aer schimbată între curentul exterior și spațiul cu vîrtejuri. Se prezintă apoi rezultatele unei astfel de măsurători și se arată cum pot fi determinați toți parametrii care definesc fenomenul. Se mai arată că din rezistența la înaintare a unui corp se poate determina aproximativ și cantitatea de aer schimbată în fenomenul care face obiectul studiului. Rezultatele se aplică la cazul practic al unui arzător „rece" (fără aport de căldură).

7. Raportul nr. 13, publicat în 1956, conține lucrarea *Der gewölbte und verwundene Tragflügel ohne Dicke in Schallnähe* (Aripa curbată și torsionată, fără grosime, în apropierea vitezei sunetului), de F. Keune de la Institutul de aerodinamică (D.V.L.) din Aachen. Se dă o extindere a teoriei pe care R. T. Jones a elaborat-o pentru aripile cu vîrf ascuțit de alungire mică, în cazul unei scurgeri cu o viteză apropiată de aceea a sunetului. În cadrul aproximației utilizate, rezultatele sînt independente de numărul lui Mach al curentului de la infinit, ecuația lui Laplace înlocuind deci pe aceea obișnuită a dinamicii gazelor. Se determină influența unei incidențe variabile asupra scurgerii în jurul unei aripi fără grosime. Se calculează repartiția presiunilor și coeficienții aerodinamici. Se face de asemenea și comparația cu rezultatele exacte obținute de H. Behrbohm și de G. N. Lance pentru aripa delta, găsindu-se o concordanță bună. Avantajul teoriei aproximative expuse constă în faptul că permite calcule rapide și în acela că dă indicații asupra influenței formei în plan a aripii asupra mărimilor aerodinamice, care este cunoscută exact numai pentru aripile delta.

T. Oroveanu

* * * *Grenzschichtforschung — Boundary Layer Research, Iutam Symposium Freiburg/Br. 1957, Herausgegeben von H. Görtler, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958* (Cercetări asupra stratului limită, Simpozion Iutam Freiburg/Br. 1957, editat de H. Görtler), Editura Springer Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958, *XII*, 411 pag.

La mai bine de jumătate de veac de la apariţia ei, teoria stratului limită, după ce a permis rezolvarea multor probleme deosebit de interesante, se dovedeşte încă în plină dezvoltare şi capabilă de aplicaţii din ce în ce mai numeroase. Simpozionul organizat în luna august 1957 la Freiburg/Br. (Republica Federală Germană) de către Uniunea internaţională de mecanică teoretică şi aplicată constituie o dovadă peremptorie în acest sens. Au participat 85 specialişti din 17 ţări care au prezentat comunicări cu caracter general sau special sau au luat parte la discuţii pe anumite teme din teoria stratului limită. Toate aceste comunicări precum şi contribuţiile la discuţii, din cele şapte şedinţe ale simpozionului, se găsesc publicate în volumul editat de H. Görtler.

În prima şedinţă A. A. Townsend a prezentat comunicarea *Stratul limită turbulent* în care au fost expuse două studii experimentale. Primul dintre acestea a avut ca obiect o cunoaştere mai precisă a componentelor de scară mare a mişcării turbulente, care determină forma generală a funcţiei de corelaţie a vitezelor. Cel de-al doilea studiu se referă la scurgera în imediata apropiere a vîrfului unei plăci plane finite şi la efectul acesteia asupra stratului limită în ansamblu. Au fost măsurate vitezele medii, intensitatea turbulentă şi frecarea superficială locală.

În aceeaşi şedinţă, O. Björgum a prezentat comunicarea *Asupra posibilităţii unei teorii matematice a turbulenţei în scurgerea cu forfecare*, în care se admite că ecuaţiile Navier-Stokes pot fi utilizate la descrierea fenomenelor *microscopice* de mişcare şi că există o stare staţionară. În comunicare, se indică numai în linii generale calea pe care se poate ajunge la teoria scurgerii considerate.

Tot în cadrul şedinţei, la discuţii, K. Wieghardt a vorbit despre unele rezultate experimentale referitoare la stratul limită turbulent pe anumite forme de corpuri.

A doua şedinţă a început cu comunicarea *Stratul limită în difuzoare drepte şi curbe* de J. Ackeret, în care sînt expuse rezultatele unui studiu experimental asupra comportării stratului limită într-un număr destul de mare de difuzoare de diferite forme. A urmat apoi comunicarea *Stratul limită în azotul disociat la numere Mach mari* de G. Ludwig şi J. Metzdorf. Problema este tratată cu ajutorul teoriei cinetice a gazelor şi se indică unele rezultate obţinute pentru placa plană. O altă comunicare prezentată în aceeaşi şedinţă poartă titlul *Metodă de sinteză pentru grosimea stratului limită* de B. R. Seth. Autorul consideră ecuaţiile Navier-Stokes pentru un fluid incompresibil în mişcare staţionară şi introduce funcţia de curent sub o formă adecvată cazului tratat. Condiţiile la limită sînt satisfăcute exact prin introducerea unei forţe exterioare. Această forţă se anulează pentru cazul fluidului perfect, iar pentru fluidul vîscos poate fi făcută să se anuleze asimptotic. Soluţia obţinută reprezintă astfel un caz limită. Se tratează pe baza acestor idei cazul plăcii plane, al cilindrului şi al sferei, dîndu-se de fiecare dată indicaţii asupra grosimii stratului limită şi valorii coeficientului de rezistenţă.

Despre stratul limită rotitor este titlul comunicării lui K. Stewartson. Se reia problema stratului limită pe o sferă în rotaţie, tratată anterior de Howarth şi se aduce o serie de precizări în legătură cu unele critici ale acestei soluţii. Se studiază apoi stratul limită pe un semicorp cilindric în rotaţie şi pe o sferă în repaus într-un fluid care se roteşte. Sînt prezentate şi unele rezultate numerice. În continuare, M. B. Glauert a expus comunicarea *Despre vinele laminare lîngă pereţi*. După cum arată titlul, este vorba despre studiul vinelor de fluid, care se scurg pe lîngă pereţi solizi, restul fluidului fiind în repaus. Teoria este dezvoltată

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

pe baza ecuațiilor stratului limită, indicîndu-se existența soluțiilor *asemenea*. Se mai discută și cazul vinei compresibile precum și abaterile de la condiția de constanță a profilului de viteze în lungul vînei.

La discuțiile din cadrul acestei ședințe, B. Thwaites a vorbit despre unele soluții teoretice ale ecuațiilor stratului limită, care nu își găsesc un suport experimental, iar H. Görtler a adus în discuție problema unui procedeu general de rezolvare a ecuațiilor stratului limită, prin dezvoltarea în serie a funcției de curent, pe care l-a propus de curînd pentru a înlătura inconvenientul slabei convergențe a seriei lui Blasius. Mai mulți participanți, vorbind pe marginea acestui subiect, au arătat și unele inconveniente ale metodei Kármán-Pohlhausen.

În a treia ședință, G. B. Schubauer a prezentat o amplă lucrare experimentală intitulată *Mecanismul tranziției la viteze subsonice*. Studiul asupra tranziției de la regimul laminar la cel turbulent, în domeniul vitezelor subsonice mici, a fost efectuat asupra stratului limită pe o placă plană. Ca instrument de măsură s-a utilizat cu succes anemometrul cu fir cald. Cu ajutorul unui dispozitiv special au fost generate unde de tipul Tollmien-Schlichting și s-a studiat trecerea de la acestea la turbulență. Rezultatele sînt comparate cu cele obținute de alți cercetători.

H. Görtler și H. Witting au expus apoi comunicarea intitulată *Teoria instabilității secundare a stratului limită laminar*. Este vorba despre fenomenul de instabilitate a stratului limită laminar pe lîngă pereți concavi, datorit perturbațiilor sub formă de vîrtejuri cu axele paralele cu direcția generală a curentului. Fenomenul a fost pus în evidență de H. Görtler care a prezentat în această lucrare cîteva aspecte generale. În continuare, H. Witting a expus metoda matematică de studiu, care conduce la rezolvarea unei probleme de valori proprii pentru un sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale de primul ordin.

O altă comunicare din cadrul aceleiași ședințe este aceea a lui J. A. Zaat despre *Contribuții numerice la teoria stabilității stratului limită*. Autorul a prelucrat metoda numerică propusă de R. Timman pentru stratul limită cu profilul de viteze depinzînd de un parametru. Rezultatele calculelor au fost comparate cu acelea obținute de alți autori și cu experiențele efectuate de Schubauer și Skramstad, concordanța fiind bună.

Discuțiile din cadrul ședinței au avut ca obiect diferite aspecte ale fenomenului de tranziție de la stratul limită laminar la cel turbulent.

Probleme asemănătoare au fost tratate și în a patra ședință a simpozionului. Astfel, C. C. Lin a prezentat comunicarea *Despre instabilitatea scurgerii laminare și tranziția ei la turbulență*. Autorul și-a propus să lămurească unele aspecte ale acestei probleme luînd în considerare perturbațiile de amplitudine finită. În cadrul lucrării, se examinează efectul termenilor neliniari din ecuația vîrtejurilor, în special în stratul critic. Acest strat este definit ca fiind situat în vecinătatea punctului în care viteza mișcării mediate este egală cu viteza de propagare a perturbațiilor. Concluziile servesc la dezvoltarea unei teorii matematice a oscilațiilor bidimensionale de amplitudine mică. În apendice, se dă un studiu efectuat de L. N. Howard asupra stabilității unei vine bidimensionale.

E. A. Eichelbrenner și R. Michel au expus comunicarea *Compararea ipotezelor teoretice asupra determinării tranziției laminar-turbulent în trei dimensiuni, cu încercările în sufleria O.N.E.R.A. de la Cannes*. După ce sînt trecute în revistă mai multe criterii empirice și semiempirice pentru stabilirea tranziției laminar-turbulent, criteriul indicat de Michel pentru obstacolele cu o formă apropiată de aceea a unui corp de revoluție este generalizat de autori și verificat prin cercetările experimentale efectuate asupra unui elipsoid de rotație fără incidență și cu incidență. Au fost determinate repartiția presiunilor, curbele de viteze și grosimile stratului limită și s-a făcut vizibilă linia de tranziție. Rezultatele comparației fiind numai parțial satisfăcătoare, s-a mai utilizat și un criteriu dat de Owen și Randall. Prin combinarea acestor criterii, rezultă o soluție acceptabilă a problemei.

O metodă pentru vizualizarea fenomenelor periodice din stratul limită este titlul comunicării prezentate de H. Bergh. S-a studiat stratul limită periodic de pe extradosul unei aripi, vizualizarea fiind realizată cu ajutorul fumului şi a unei surse stroboscopice de lumină.

Din discuţiile ce au avut loc în cadrul şedinţei, menţionăm contribuţia lui E. R. van Driest la problema tranziţiei.

A cincea şedinţă a început cu comunicarea *Scurgerea vîscoasă internă cu forţe de masă* de S. Ostrach. Se tratează mai multe probleme de mişcare cu transfer de căldură a unui fluid vîscos conţinut într-un rezervor, urmărindu-se în special stabilirea efectului pereţilor asupra scurgerii convective naturale şi asupra aceleia cu transfer de căldură. După o analiză generală a ecuaţiilor se studiază scurgerea într-un tub închis la un capăt şi într-un rezervor care se roteşte.

Comunicarea lui H. Schuch *Asupra determinării repartiţiei de temperatură în plăcile subţiri cu strat limită supersonic*, prezintă o metodă numerică de rezolvare a problemei, ecuaţia diferenţială fiind transformată într-o ecuaţie cu diferenţe finite. Au fost considerate mai multe exemple (placă plană, profil subţire în formă de arc de parabolă, fără sau cu radiaţie de căldură) şi rezultatele comparate cu acelea obţinute de alţi cercetători.

B. Popper şi M. Reiner au descris în comunicarea *Eforturi transversale în aer, demonstrate cu ajutorul unei pompe de vid centripetale*, un dispozitiv ingenios prin care se pune în evidenţă faptul semnalat mai de mult de M. Reiner şi anume existenţa unor componente de eforturi normale în direcţia vitezei şi în aceea a gradientului de viteză, în scurgere laminară a unui fluid vîscos.

Comunicarea *Stratul limită în gaze rarefiate* de S. A. Schaaf şi L. Talbot este dată în volum numai sub forma unui scurt rezumat din care rezultă că autorii au făcut investigaţii teoretice şi experimentale asupra stratului limită în domeniul scurgerii cu alunecare („slip flow").

Ultima comunicare prezentată în şedinţă şi anume *Analiza teoretică a cîmpului aerodinamic în vecinătatea imediată a unui plan nelimitat, bazată pe teoria cinetică a gazelor* de M. Lunc şi N. J. Lubonski, are ca obiectiv determinarea unei valori apropiate a funcţiei de distribuţie a vitezelor moleculare, fără a se recurge la rezolvarea ecuaţiei lui Bolzmann, de altfel irezolvabilă pînă în prezent. În acest scop autorii utilizează o metodă *demografică* al cărei principiu constă în clasarea moleculelor, prezente simultan în interiorul unui element de volum, după originea lor (după locul în care au suferit ultima lor ciocnire).

În cadrul discuţiilor din această şedinţă, H. J. Kaeppeler şi A. Zaddach au vorbit despre stratul limită în gaze rarefiate, iar M. G. Scherberg despre stratul limită termic.

Şedinţa a şasea a început cu lucrarea intitulată *Interacţiuni între undele de şoc şi stratul limită* de G. E. Gadd, care reprezintă un studiu interpretativ al diferitelor cercetări experimentale întreprinse asupra acestei complexe probleme. A urmat apoi comunicarea amplă a lui C. Ferrari *Influenţa stratului limită asupra presiunii pe aripă, la viteze supersonice*. Problema se tratează analitic, luîndu-se ca punct de plecare ecuaţiile de mişcare, ecuaţia de continuitate şi integrala energiei. Se introduce apoi funcţia de curent şi se utilizează transformarea lui Stewartson. Prin separarea soluţiilor, se ajunge la două ecuaţii cu derivate parţiale, dintre care una este supusă unui procedeu de liniarizare. După ce se indică metoda de rezolvare, se calculează condiţiile în punctul de desprindere şi grosimea de deplasare a stratului limită. În continuare, se studiază scurgerea după desprindere, presupunîndu-se că aceasta are caracterul unei vine fluide. Repartiţia vitezelor este soluţia unei ecuaţii integrale care este rezolvată în comunicare. Se fac apoi calcule numerice pentru cazul unui profil în formă de placă plană şi se compară rezultatele cu datele experimentale existente pentru profile subţiri.

Ultima comunicare din această ședință și anume *Stratul limită de lîngă un perete în spatele unei unde de șoc plane*, prezentată de H. Mirels, conține un studiu teoretic al stratului limită format în spatele unei unde de șoc ce înaintează în lungul unui perete plan. Problema prezintă interes îndeosebi pentru condițiile de funcționare ale tuburilor de șoc. Se tratează cazul stratului limită laminar și a celui turbulent și se determină apoi variația temperaturii în lungul peretelui.

În cadrul discuțiilor din ședință, D. Massignon a vorbit despre valabilitatea ecuațiilor Navier-Stokes în regiuni ale fluidului în mișcare în care există fluctuații mari ale densității, iar A. Iberall a dat o formă adimensională a ecuațiilor hidrodinamicii pentru acustică și pentru scurgerea laminară și turbulentă, bazîndu-se pe ipotezele că mediul este continuu și elastic, iar gradienții cîmpului sînt mici.

În a șaptea ședință, F. K. Moore a prezentat comunicarea *Despre desprinderea stratului limită nestaționar*. Autorul și-a restrîns considerațiile asupra regiunii din vecinătatea punctului de desprindere. Stratul limită fiind considerat laminar și incompresibil, apar două probleme și anume aceea a unui punct de desprindere staționar într-un strat limită nestaționar și aceea a unui punct de desprindere mobil într-un strat limită staționar. Cea de-a doua problemă ridică unele întrebări asupra modului în care trebuie definită desprinderea și autorul discută pe larg condițiile în care se produce fenomenul, pentru a degaja concluziile necesare. Trebuie menționat faptul că această comunicare a stîrnit o întinsă discuție între participanții la simpozion asupra noțiunii de desprindere în scurgerile nestaționare.

Comunicarea următoare *Soluții pentru scurgerile nestaționare în stratul limită cu ajutorul transformărilor integrale* de L. N. Persen, conține două exemple de aplicare a transformării lui Laplace și a transformării lui Fourier, la probleme destul de simple pentru care ecuația de mișcare este de tipul ecuației căldurii.

Comunicarea prezentată de W. Wuest cu titlul *Straturi limită periodice cu aspirație* tratează problema stratului limită în lungul unui perete indefinit pe care este repartizată o viteză de aspirație periodică. Se arată că în acest caz scurgerea în stratul limită este, de asemenea, periodică și se distinge cazul unei viteze de aspirație periodică normal pe direcția vitezei de scurgere și cazul unei viteze de aspirație periodică în direcția scurgerii. Se consideră și cazul dublei periodicități.

În comunicarea sa, intitulată *Unele scurgeri ale fluidelor ideale în care apare desprinderea și considerarea lor din punctul de vedere al teoriei stratului limită*, A. A. Nikolski studiază scurgerea unui fluid în jurul unui vîrf ascuțit, în care pot să apară și să se dezvolte suprafețe spiraliforme de vîrtejuri, așa cum a semnalat mai de mult Prandtl. Rezultatele obținute în mai multe cazuri sînt apoi extinse la mișcarea fluidelor vîscoase, obținîndu-se o imagine de scurgeri în jurul unei plăci plane.

Ultima comunicare din ședință și anume *Teoria stratului limită într-un fluid omogen și cu două componente, cu două viteze* de H. A. Rahmatulin are ca obiect extinderea metodelor teoriei stratului limită la așa-numita hidrodinamică și dinamică a gazelor cu două viteze. Aplicațiile indicate se referă la problema scurgerii unui fluid pe lîngă o suprafață poroasă, la aspirația stratului limită și la mișcarea fluidelor saturate cu particule macroscopice mici. Se dă deducerea ecuațiilor diferențiale și se efetuează integrarea acestora pentru cazul mișcării plane într-un tub divergent.

Discuțiile din această ședință s-au purtat pe tema aspirației stratului limită, cu contribuțiile aduse de W. Pfenninger și F. X. Wortmann. De asemenea, I. Tani a prezentat considerații asupra unui caz de strat limită nestaționar.

Ultima ședință a simpozionului a început cu comunicarea *Probleme din teoria stratului limită tridimensional* de R. Timman. Autorul dă o deducere tensorială a ecuațiilor impulsului pentru stratul limită tridimensional, studiază comportarea din punctul de impact, în vederea stabilirii condițiilor la limită și indică apoi procedeele de aproximare utilizabile pentru rezolvarea diferitelor probleme.

În comunicarea următoare *Condiția de desprindere a stratului limită* K. Oswatitsch face o analiză amănunțită a fenomenului de desprindere în scurgerea plană, în scurgerea spațială axial-simetrică și în aceea asimetrică, scoțînd în evidență deosebirile dintre aceste cazuri.

A. Walz prezintă în comunicarea sa intitulată *Noi aplicații ale principiului condițiilor mediate ale stratului limită după v. Kármán și Pohlhausen* ideea unei metode în care se renunță la prescrierea profilului de viteze și schița unei extinderi a acestei metode la ecuațiile Navier—Stokes sub forma nesimplificată.

Cercetarea experimentală a desprinderii curentului deasupra unui prag de I. Tani conține o serie de rezultate referitoare la măsurătorile de presiune din zona de desprindere, în diferite condiții, pentru stratul limită laminar și cel turbulent. Au fost efectuate, de asemenea, măsurători ale vitezei medii longitudinale cu ajutorul anemometrului cu fir cald și vizualizări ale fenomenului, în apă cu pulbere de aluminiu.

Ultima comunicare a simpozionului *Contribuții la fenomenologia tranziției laminar-turbulent în vîna liberă la numere Reynolds mici* de O. Wehrmann și R. Wille, are ca obiect cercetarea condițiilor de scurgere în apropierea orificiului de ieșire, la o vînă liberă înecată axial simetrică. Vitezele au fost determinate cu ajutorul anemometrului cu fir cald, în special în stratul limită al vînei, în care s-a urmărit și studiul vîrtejurilor inelare care apar, determinîndu-se și frecvența de formare a acestora.

La discuțiile din cadrul ședinței K. Nickel a vorbit despre proprietățile generale ale scurgerii în stratul limită laminar, iar N. Frössling despre stratul limită laminar termic.

Această scurtă trecere în revistă a conținutului volumului la care ne referim indică ceea ce spuneam de altfel și la început și anume faptul că teoria stratului limită continuă să progreseze și să-și găsească noi căi de aplicare. Volumul este interesant atît prin faptul că dă o imagine asupra preocupărilor actuale ale teoriei stratului limită cît și prin conținutul său bogat în rezultate noi și sugestii pentru cercetări viitoare.

T. Oroveanu

H. LÜPKE, *Gasturbinen und Strahlantriebe für Hubschrauber* (*Stand Juni 1956*) (Turbinele cu gaze și sistemele utilizate pentru antrenarea rotoarelor de elicopter prin reacție), (Stadiul problemei în iunie 1956). D.V.L. Bericht Nr. 46, ianuarie, Westdeutscher Verlag, Köln și Opladen, 1958, 108 pag.

Lucrarea cuprinde rezultatele unor studii executate în cadrul Institutului de cercetări pentru problemele de aviație (D.V.L.) din Mülheim (Ruhr—Germania Federală).

În ultimii zece ani, elicopterele au fost continuu perfecționate pentru a putea face față complexelor și variatelor cerințe impuse de multiplele lor utilizări, în transporturile civile sau militare în munți, pe mare, la poli sau la ecuator. De aceea, constructorii au urmărit continuu îmbunătățirea stabilității elicopterelor, mărirea capacității lor de transport, ridicarea performanțelor (viteza de croazieră, plafon, rază de acțiune) și mai ales, continua perfecționare a instalației de forță.

Succesele obținute în domeniul turbinelor cu gaze, a motoarelor pulsoreactoare, statoreactoare, turboreactoare și a motoarelor rachetă după 1950, au permis constructorilor să imagineze antrenarea rotorului de elicopter prin reacție.

Ing. H. Lüpke se ocupă în lucrarea sa tocmai de această problemă complexă, deosebit de interesantă.

Într-o scurtă introducere autorul face o clasificare sistematică a diverselor metode utilizate pentru antrenarea rotorului de elicopter, remarcînd :

I. *Rotoare acționate mecanic.*

1) utilizînd motoare cu pistoane (OTTO),

2) utilizînd turbine cu gaze.

II. *Rotoare acționate prin reacție.*

1) cu ajutorul unor statoreactoare, pulsoreactoare, turboreactoare sau motoare rachetă, montate la extremitățile palelor ;

2) cu ajutorul unor ajutaje speciale montate la extremitățile palelor, prin care se ejectează aer comprimat sau gaze rare, furnizate de către o instalație centrală.

Urmărind această cuprinzătoare clasificare H. Lüpke face un studiu critic, comparativ, asupra modului de funcționare pentru toate sistemele de antrenare.

Mai întîi scoate în evidență dezavantajele antrenării mecanice din punct de vedere constructiv : motorul greu și reductoarele voluminoase ; axe de transmisie lungi, expuse la vibrații, necesitatea elicii anti-cuplu la elicopterele monorotoare. Apoi analizează avantajele antrenării mecanice cu ajutorul turbinelor cu gaze, pentru elicopterele grele.

În concluzie, H. Lüpke este de părere că, principial, antrenarea mecanică nu este o soluție de viitor, neputîndu-i-se aduce îmbunătățiri esențiale.

Referindu-se la antrenarea prin reacție, autorul menționează de la început marile simplificări constructive care o caracterizează : eliminarea momentului reactiv al rotorului deci dispariția elicii anti-cuplu la elicopterele monorotoare cu reacție, înlocuirea motorului, reductoarelor și a complicatelor sisteme de transmisie, prin instalații mai simple și mult mai ușoare.

Trecînd apoi în revistă toate sistemele de antrenare prin reacție, H. Lüpke arată că la stadiul de dezvoltare al tehnicii în iunie 1956, instalațiile generatoare de gaze, compresoarele speciale, pulsoreactoarele, statoreactoarele și motoarele rachetă destinate elicopterelor nu erau bine puse la punct. Totuși, încă din 1953, mai ales în Franța, au fost construite elicoptere cu rotoarele antrenate prin reacție, care prin performanțele lor au confirmat așteptările.

Pentru argumentări au fost utilizate rezultatele încercărilor în zbor efectuate în diverse țări, cu foarte multe tipuri de elicoptere.

Lucrarea cuprinde tabela completă a elicopterelor construite pînă în 1956, menționîndu-se pentru fiecare anul construcției, tipul antrenării, numărul, și puterea motoarelor, dimensiunile principale de gabarit, greutatea totală și raza de acțiune.

Bibliografia cuprinde 62 articole din revistele tehnice de specialitate.

În lucrare sînt menționate și primele 49 monografii ale Institutului german pentru problemele de aviație (D.V.L.).

C. S. Ioan

* * * *Recommandations pour les essais des ventilateurs*, 1re partie. *Essais sur circuits normalisés* (Recomandări pentru încercarea ventilatoarelor, Partea I. Încercări pe circuite normalizate). SBMA 508. Société Belge des Mécaniciens, Bruxelles, 1958, 65 pag.

Redactate sub egida Societății Belgiene a mecanicilor, recomandările se referă la încercările ventilatoarelor pe circuite normalizate și, așa cum anunță autorii în introducere, au ca scop următoarele obiective :

1. Să definească cu precizie termenii care apar în contracte ;

2. Să clasifice ventilatoarele din punctul de vedere al specificațiilor, al garanțiilor și al încercărilor;

3. Să descrie organizarea generală a încercărilor utilizabile pentru verificarea caracteristicilor ventilatoarelor.

4. Să descrie regulile de încercare a ventilatoarelor pe circuite normalizate, indicînd limitele lor de aplicație.

Desfășurată pe cinci capitole, lucrarea își atinge scopul propus și constituie un prețios îndreptar pentru cei interesați în încercarea ventilatoarelor în sensul celor enunțate mai sus.

În primele două capitole se definesc și se clasifică, în mod judicios, parametrii (fundamentali și derivați), regimul de funcționare și caracteristicile ventilatoarelor, făcîndu-se totodată o serie de considerații asupra încercării prin similitudine.

Capitolul III conține recomandări cu caracter tehnico-juridic (specificații contractuale) referitoare la condițiile generale, pregătirea și desfășurarea lucrărilor de încercare.

Capitolul IV este consacrat tehnicii de măsurare a temperaturii, presiunii, vitezei, turației, puterii și zgomotului. Se dau aici indicații practice pentru obținerea unor măsurători corecte.

Ultimul capitol descrie detaliat, principial și practic, instalațiile și metodele de măsurare a debitului și presiunii pentru ventilatoarele aspirante, refulante și murale. Se fac recomandări precise în legătură cu condițiile pe care trebuie să le îndeplinească instalația experimentală pentru a garanta încercări reușite. Se dau în anexă 4 modele de buletine de experiență în scopul evitării erorilor și omisiunilor în cursul experimentării.

M. Ionescu

* * * *Сборник трудов лабораторий гидравлических машин.* Выпуск. (Culegere de lucrări a laboratorului de mașini hidraulice) Академия Наук Украинской ССР, Киев, 1958, 224 pag.

În această culegere sînt strînse o serie de lucrări recente ale colaboratorilor Laboratorului de mașini hidraulice de pe lîngă Academia de Științe din R.S.S. Ucraineană.

Tematica acestor lucrări este foarte variată; astfel sînt tratate probleme de hidraulică și hidrodinamică a turbinelor, pompelor și a altor mașini, probleme de automatizare a mașinilor hidraulice, precum și de problema statică a unor organe de mașini.

Tomul începe cu articolul *Caracteristici generalizate ale rotorilor turbinelor hidraulice* al prof. Proskura, nume binecunoscut specialiștilor în domeniul hidrodinamicii. Este vorba de obținerea unor relații generale între coeficientul de cavitație al rotorului și o serie de parametri, ca turația, coeficientul de rapiditate, coeficienții de viteze. Prin transformări relativ simple ale ecuațiilor mișcării și ale triunghiurilor de viteze la intrare și ieșire, se obțin relații distincte pentru turbinele radial-axiale (Francis) și pentru cele axiale. Afară de aceasta, se indică și condițiile limită de apariție a cavitățiii la cele două categorii de turbine și se dă o metodă de proiectare a conturului median al paletelor, pe baza criteriului apariției cavitățiii.

Una din problemele cele mai actuale în domeniul construcției turbinelor hidraulice este extinderea domeniului de utilizare a turbinelor tip Kaplan, la căderi de peste 25 m, păstrînd turația specifică mare. Acestei tendințe i se opune pericolul decolării stratului limită de palete și apariția cavitățiii. Pentru a evita acest fenomen este necesar să se micșoreze sarcina unitară pe suprafața paletelor și să se distribuie cît mai uniform această sarcină. În general, pentru rezolvarea problemei este necesar să se cunoască structura curentului în camera de lucru și influența separată a diverșilor factori. G. A. Svinarev analizează *Influența structurii cinematice a curentului asupra parametrilor energetici și cavitaționali ai turbinei axiale.* Analiza teoretică făcută a arătat că repartiția componentelor V_z și V_u, precum și valoarea raportului δ_1 (diametrul butucului/diametrul caracteristic D_1), influențează simțitor parametrii indicați. Se dă și caracterul relației funcționale între acești parametri. Pentru alegerea practică a parametrilor, autorul consideră necesare experiențe care să scoată la iveală influența desimii rețelei paletelor.

Acestei teme îi este consacrat articolul lui V. G. Revkovski, *Influența desimii rețelei asupra profilului median al paletelor*. S-a calculat profilul median. După o metodă cunoscută propusă de Lesohin, profilul dîndu-se în coordonate curbilinii s, s_0. S-a calculat variația profilului pentru diferite valori l/t.

V. I. Decev publică rezultatele unor experiențe asupra rețelelor de profile în articolul *Studiul rețelelor în tunel hidrodinamic, cu pereți mobili la capete*. Metodica permite eliminarea influenței pereților asupra curentului, în zona de ieșire.

O problemă din aceeași clasă a studiat și B. V. Karasev în *Cercetarea rețelelor de profile puternic curbate*. De data aceasta, este vorba însă de profile pentru paletele altei categorii de mașini și anume, compresoare axiale. În ultimul timp aceste mașini au căpătat o aplicație foarte mare în domenii diferite : turboreactoare, turbine cu gaz, ventilatoare de mînă etc. Un defect al modelelor curente este gradul redus de compresie la un etaj. Pentru a-l mări s-au studiat profile avînd un unghi $\Theta = 69°$. Sînt date rezultatele comparative ale experiențelor și calculelor teoretice, care confirmă că metoda propusă de Proskura pentru rețele plane în curenți cu vîscozitate, se poate extinde la cazul studiat.

O altă problemă care preocupă astăzi pe constructorii de mașini hidraulice este realizarea unei pompe-turbine, de tip axial. O astfel de mașină este așteptată pentru echiparea uzinelor electrice cu hidroacumulare, care s-au dovedit extrem de economice în sistemele electromagnetice complexe. Astăzi, aceste uzine sînt încă echipate cu agregate din trei mașini : pompă, turbină și motor-generator, agregate complicate în exploatare și avînd randamente totale relativ reduse.

La Institutul politehnic din Harkov a fost realizată o pompă-turbină axială a cărei încercare pe model a dovedit că are parametri energetici superiori și a confirmat ipotezele de calcul a formei și proporțiilor rotorului. Aceste încercări sînt descrise în articolul lui Anikin. *Asupra elaborării unui tip de pompă turbină de tip axial.*

A. E. Dolnikov prezintă rezultatele unor experiențe inedite în articolul *Intensificarea cavitații în apropierea unei plăci, datorită vibrației acesteia.* După cum se știe caracterul cavitații în apropierea unui corp este strîns legat cu repartiția presiunilor hidrodinamice. Vibrația proprie a corpului modifică, evident, această repartiție și deci și caracterul cavitații (este de presupus că o intensifică). Or, vibrații apar în genere în funcționarea tuturor mașinilor hidraulice, în primul rînd la palete. Autorul a studiat fenomenul schematic, în cazul unei plăci încastrate la un capăt și libere la celălalt, plasată într-un canal hidrodinamic. Vibrația lamei este produsă de însuși curentul datorit vîrtejurilor care se desprind la bordurile ei. Momentul apariției cavitații a fost detectat cu ajutorul ultrasunetelor iar vibrațiile lamei au fost înregistrate pe un oscilograf. După aceste indicații la o vibrație proprie a lamei cu o frecvență de 200 Hz și o amplitudine de 1 mm, cavitația este mult mai intensă decît în cazul lamei rigide.

O altă problemă ridicată de practica exploatării uzinelor hidroelectrice este automatizarea comenzii agregatelor. Funcțiile operatorilor automați ar fi numeroase : anclanșarea și oprirea automată a agregatelor în regim optim (adică astfel ca randamentul să fie maxim pentru puterea și căderea respectivă), menținerea automată a rezervei în rotație, automatizarea ordinei de intrare în rețea, semnalizarea automată etc.

Primei, și de fapt celei mai importante probleme, îi sînt consacrate două articole semnate respectiv de Bogomolov și Benin, *Regularizarea automată a puterii hidrocentralei după cursul de apă* și *Operatorul automat la uzina hidroelectrică.* Bogomolov descrie un dispozitiv brevetat de el care menţine automat agregatele în regim de randament maxim. Se indică schema-bloc şi schema de principiu a dispozitivului.

După cum s-a semnalat, în volum mai sînt cuprinse cîteva articole tratînd teme din domenii conexe cu maşinile hidraulice, dar ceva mai depărtate ca, de exemplu, *Problema plană a teoriei hidrodinamice a evacuării cilindrilor motoarelor în doi timpi* sau *Calculul schemei reversibile a motorului asincron scurtcircuitat în sistemele de reglaj automat.*

De asemenea, sînt prezentate rezultatele unor studii asupra stării de tensiune în organele maşinilor hidraulice, determinate experimental, în articolele : *Unele date asupra coeficientului de concentrare a tensiunilor la orificii* de Sumţov şi *Determinarea experimentală a tensiunilor într-o piesă toroidă în rotaţie rapidă* de Bulgakov.

În ansamblu, culegerea de lucrări, datorită seriozităţii tratării problemelor şi prezentării unor rezultate şi metodici de cercetare inedite apare ca un material documentar foarte util.

E. Răzvan

* * * *Техническая гидромеханика.* Труды ЛПИ Nr. 198 (Hidrodinamica tehnică. Lucrările L.P.I. nr. 198), Машгиз, Москва, 1958, 220 pag.

În publicaţia *Lucrările L. P. I.* sînt prezentate rezultatele obţinute în munca ştiinţifică a diverselor catedre din Institutul politehnic din Leningrad.

Acest tom cuprinde articole tratînd probleme foarte diferite de hidrodinamică tehnică. După tematica lor articolele sînt grupate în patru părţi :

Partea întîi : *Studiul turbinelor hidraulice*
Partea a doua : *Procese hidrodinamice în canale şi stratul limită*
Partea a treia : *Hidrodinamica aplicată*
Partea a patra : *Metodica măsurătorilor în curenţi de aer.*

Studiul turbinelor hidraulice constituie o preocupare de bază a membrilor catedrelor de aerodinamică şi mecanică din L.P.I. În afară de partea întîi, acestor probleme le sînt consacrate mare parte din materialele publicate în partea a patra. În volumul recenzat sînt prezentate studii efectuate în curenţii de aer.

I. L. Povh prezintă unele rezultate ale cercetărilor pe modele de hidroturbine în curenţi de aer.

Tematica studiilor în curenţi de aer este foarte variată : s-au încercat noi tipuri de rotori de turbine ; monobloc, cu bulb amonte, cu bulb aval şi turbine elicoidale cu contrarotor.

S-au verificat rotori radial axiali destinaţi celor mai mari hidrocentrale (Bratk pe Angara şi Krasnoiarsk pe Enisei) precum şi spiralele şi aspiratorii lor. Se ştie însă că modelarea cu aer a maşinilor hidraulice prezintă unele puncte delicate, ca de exemplu : precizia redusă a determinării randamentelor, din cauza dificultăţii de apreciere a pierderilor mecanice, precizia insuficientă a aprecierii coeficientului Coriolis la ieşirea din aspirator ş.a.

Pentru punerea la punct a unor metode de măsură mai precise s-au făcut studii speciale şi s-au găsit cîteva soluţii ingenioase.

Studii asupra agregatelor monobloc au început la L.P.I. în 1948 şi au arătat marile avantaje ale acestor maşini : ele au un randament mai mare şi o capacitate de înghiţire sporită în comparaţie cu turbinele obişnuite de acelaşi diametru caracteristic D_1. Însă, dificultăţile tehnologice de realizare a unui generator al cărui rotor să facă corp comun cu rotorul turbinei. (În particular problemele speciale de etanşare care apar), au făcut ca agregatele monobloc cu rotor comun să capete o răspîndire redusă. S-au preconizat agregate monobloc cu bulb : generatorul este montat pe un ax comun cu turbina, este plasat însă fie în amonte, fie în aval de rotorul acesteia, în aşa numitul bulb. Existenţa bulbului provoacă perturbaţii însemnate în curent. S-a constatat că aparatul director contribuie în mod hotărîtor la uniformizarea vitezelor la acces. Însă, în cazul agregatelor cu bulb amonte această uniformizare este însoţită de pierderi de 5—12%, în timp ce la turbinele cu camere spirale obişnuite pierderile nu depăşesc 4%.

Acestor din urmă probleme, le este închinat un articol special *Formarea curentului înaintea rotorului turbinei* de Bogdanova şi Sinocikina. În afară de turbina monobloc cu bulb amonte, în acest articol sînt date şi rezultatele unor cercetări asupra camerelor spirale obişnuite (în speţă a influenţei înălţimii aparatului director şi al diametrului butucului asupra structurii curentului).

Tot pe standul de încercări cu aer, au fost studiate diverse tipuri de rotori-axiali (Francis), destinaţi unor agregate deosebit de puternice. Experienţele şi rezultatele obişnuite sînt prezentate în articolul *Studiul scurgerii prin rotorii turbinelor radial-axiale,* de Bogdanova. În cursul încercărilor s-au măsurat cîmpurile de viteze la acces şi la ieşire şi presiunile pe paletele rotorului, pentru 24 regimuri de funcţionare.

În urma prelucrării materialului experimental, s-a constatat că existenţa rotorului reduce debitul înghiţit (căderea rămînînd constantă), cu 25—50%. Pe de altă parte, curentul este omogenizat de prezenţa rotorului. În orice caz, o concluzie a lucrării este că nu se poate studia hidraulica spiralei şi a aparatului director (ca şi aspiratorul de altfel), decît în prezenţa rotorului. În sfîrşit, s-a constatat că regimul de funcţionare nu influenţează structura scurgerii a acces, ci doar pe rotor.

În general, rezultatele şi concluziile obţinute nu contrazic pe cele cunoscute pentru turbinele Francis.

Structura curentului în aspirator a fost studiată pe un model al turbinei Braţk. Rezultatele respective sînt prezentate în articolul *Cercetarea tubului aspirator pe modelul turbinei hidrocentralei Braţk* de T. P. Salila.

După cum se ştie, în cazul turbinelor Francis, aspiratorul are un rol mai redus în balanţa pierderilor de sarcină. Funcţionarea sa influenţează însă, într-o anumită măsură, stabilitatea scurgerii.

Partea experimentală a studiului a constat din măsurarea vitezelor şi presiunilor în diferite secţiuni, a unui aspirator de tipul 15. Prin prelucrarea datelor experimentale s-au obţinut : energia cinetică specifică, viteza medie precum şi coeficienţii de restabilire a energiei cinetice pe diferite tronsoane.

S-a constatat că funcţionarea aspiratorului studiat este determinată în primul rînd de calităţile primului difuzor. Cotul aspiratorului înrăutăţeşte funcţionarea numai în regimul optim şi aceasta nu în mod sensibil.

Este de presupus că aceste concluzii nu se extind la aspiratori de alte tipuri şi în particular la cei de tipul 4.

După cum s-a arătat mai sus, în tomul 198 sînt tratate şi cîteva probleme importante de metodică a studiilor experimentale. Din aceasta, amintim *Excluderea pierderilor mecanice în lagăre la modelele turbinelor hidraulice* de N. P. Ivanov, *Măsurarea presiunilor variabile pe paletele unei elice* de G. V. Smirnov. În primul articol este prezentat un dispozitiv ingenios şi eficace pentru eliminarea pierderilor în lagăre la modele şi mărirea, în acest mod, a preciziei determinării randamentului hidraulic. În principiu, dispozitivul constă dintr-o serie de armături montate la lagărele cu rulmenţi, armături care se rotesc cu o viteză egală cu cea a arborelui modelului ; în acest mod, rulmenţii sînt imobili faţă de arbore şi pierderile prin frecare sînt nule. Dispozitivul a fost verificat experimental.

Dispozitivul lui G. P. Smirnov permite măsurarea presiunilor variabile de pe palete în rotaţie, cu ajutorul unui sistem fără inerţie, care transmite pulsaţiile la un oscilograf.

În sfîrşit, tot în problemele hidrodinamicii maşinilor, G. P. Tauşkamov analizează *Scurgerea printr-o rețea circulară compusă din profile oarecare.* Problema este rezolvată cu ajutorul unei transformări conforme, analogă cu cele utilizate la calculul rețelei rectilinii. Soluția se generalizează pentru cazul în care rețeaua se roteşte uniform.

În partea de hidrodinamică a canalelor, prof. Loițianski, cunoscut specialist în problemele mecanicii fluidelor, semnează împreună cu L. G. Stepanianț, o mică dar foarte interesantă lucrare, intitulată *Teoria hidrodinamică a suspensiilor sferice.* Se ştie că deosebirea suspensiilor cu fluid, în particular cu aer comprimat, față de alte reazeme, este prezența în lăcaşul de reazem a unor orificii prin care se introduce fluidul sub presiune. În articol, se prezintă o metodă de calcul avînd la bază înlocuirea orificiilor cu un sistem de surse. Pentru concretizarea calculului s-a ales cazul suspensiei sferice. Soluția este dată pentru cazul unui fluid incompresibil, dar considerarea compresibilității nu introduce dificultăți principiale, ci doar de calcul.

Tot L. Stepanianț publică un articol despre *Considerarea termenilor inerțiali în teoria hidrodinamică a ungerii.*

În altă lucrare, este atacată o problemă de bază a hidrodinamicii şi anume : *Studiul stratului limită turbulent sub sarcină pozitivă* de N. Konstantinov.

Scopul lucrării este verificarea experimentală a unor ipoteze a metodei de calcul a stratului limită propus de prof. Loițianski. În mod particular s-au studiat proprietățile parametrilor de formă a stratului Γ şi $\bar{\Gamma}$ existența caracteristicilor de un singur parametru,

$$H = f(\Gamma) \text{ şi } \bar{H} = F(\bar{\Gamma}),$$

precum şi conținutul *legii de rezistență hidraulică*

$$\frac{\tau_0}{\rho h^2} = \frac{\xi}{G(\mathcal{R}e^{**})},$$

unde funcția $G(\mathcal{R}e) = 153{,}2\ \mathcal{R}e^{**1/6}$, iar $\mathcal{R}e^{**} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}$ a fost determinată de Loițianski, pentru numere $\mathcal{R}e$ mari. O mare atenție se acordă în lucrare, problemelor compatibilității ipotezelor de similitudine.

Tot unor probleme ale stratului limită, le este consacrată o lucrare de Golovina, *Studiul experimental al stratului limită spațial în zona de racordare a două corpuri.* Este vorba de o problemă teoretică pusă de calculul practic al rezistenței la înaintare într-un mediu fluid, a unor corpuri cum sînt avioanele sau submarinele.

În sfîrşit, sînt demne de semnalat două lucrări de hidrodinamică aplicată de R. Z. Aliev, *Teoria hidrodinamică a rețelei reflectoare a antenei* şi *Asupra modelării mişcării plasei maritime de pescuit.*

În ansamblu, volumul 198 al *Lucrărilor L. P. I.* consacrat problemelor de hidrodinamică, este deosebit de interesant atît prin varietatea temelor şi bogăția materialului cît şi printr-o serie de soluții noi şi contribuții originale.

E. Răzvan

ROMUALD CEBERTOWICZ, *Budowle Hydrotechniczne w swietle doswiadczen na modelach.* (Încercările pe modele pentru construcțiile hidrotehnice). Panstwowe wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958, 330 pag.

Lucrarea cuprinde rezultatele cele mai semnificative şi mai interesante obținute cu prilejul încercărilor pe modele hidraulice efectuate între anii 1947—1957 la laboratorul hidraulic al catedrei de hidraulică şi hidrologie a Şcolii politehnice din Gdansk. Prezentarea este făcută pe categorii de probleme şi nu cronologic.

Capitolul 1, introductiv, conține descrierea vechiului laborator hidraulic al Școlii politehnice din Gdansk, precum și a noilor pavilioane construite în 1952. Capitolul 2 cuprinde o expunere rezumativă a principiilor similitudinii mecanice, în special a celei hidraulice, cu aplicații la modelarea albiilor cu fund fix și mobil, la infiltrații și la modelarea în aer.

Capitolul 3 prezintă rezultatele încercărilor asupra unor disipatori de energie. Influența pilelor și culeelor asupra regimului ghețurilor și aluviunilor este examinată în capitolul 4. Aceste cercetări se referă la anumite elemente ale unor construcții hidrotehnice. Posibilitatea cercetării unui nod hidrotehnic în ansamblul său este exemplificată în capitolul 5. Capitolul 6 cuprinde unele probleme speciale de eroziune în albii, iar capitolul 7 — unele experiențe privind propagarea hulei în canale și în porturile de așteptare ale ecluzelor. Tot cu fenomenele hidraulice care apar la alimentarea unei ecluze se ocupă capitolul 8, în care se cercetează în special dispozitivele hidraulice urmînd a fi adoptate pentru reducerea timpului de ecluzare. Se dau comparații, între rezultatele încercărilor de laborator și măsurătorile din natură.

Capitolul 9 cuprinde rezultatele unor cercetări de albii cu fond mobil, folosind curenții de aer ; experiențele se referă atît la albiile naturale, cît și la influența unor epiuri de fund, precum și la eroziunile în jurul unei pile de pod.

Problema infiltrațiilor pe sub construcțiile hidrotehnice, folosind metoda electrohidrodinamică (aparatul EGDA), este studiată în capitolul 10 ; aceste cercetări urmăresc îndeosebi studiul eficacității unor ecrane de etanșare. Capitolul 11 prezintă rezultatele încercărilor privind capacitatea de transport în suspensie a unor materiale, cu aplicație la transportul hidraulic al cărbunelui, iar capitolul 12 prezintă o serie de probleme variate care nu au putut fi încadrate anterior, precum : probleme de deversare, prize de apă, precum și aplicare a izotopilor radioactivi în hidraulică.

Cartea prof. Cebertowicz ne dă o imagine asupra preocupărilor experimentale ale hidraulicienilor polonezi ; ea conține o seamă de cercetări interesante, capabile să intereseze pe specialiștii în acest domeniu din țara noastră.

Dan Gh. Ionescu

W. G. GREEN, *Theory of machines* (Teoria mașinilor) Blackie & Son, Londra 1956, XXII+1034 pag. 608 fig.

Lucrarea profesorului W. G. Green este prezentată ca un curs destinat studenților ce se pregătesc pentru obținerea unor grade universitare superioare.

Primele două capitole ale cărții sînt consacrate revederii chestiunilor de cinematică și dinamica punctului și a solidului rigid, tratate analitic, socotite de autor absolut necesare pentru înțelegerea și urmărirea problemelor tratate în capitolele următoare.

Capitolul al treilea studiază reprezentarea geometrică a mișcării și definește noțiunile de bază ale cinematicei și structurii mecanismelor.

Următoarele două capitole cuprind cinematica și cinetostatica mecanismelor tratate atît prin metodele analitice cît și prin cele grafice. În cadrul acestor capitole se studiază și o serie de mecanisme uzuale cu bare articulate (mecanismul patrulater, mecanismul cu culisă și derivatele sale, mecanismele directoare etc.) precum și mecanismele de direcție ale autovehiculelor și navelor.

În capitolul al șaselea este studiată cinematica și dinamica mecanismului axial cu bielă și manivelă. Se expun astfel metodele analitice exacte și aproximative pentru calculul vitezelor și accelerațiilor pistonului și bielei, metodele de determinare a forțelor care acționează asupra mecanismului și metodele de construire a diagramei cuplului motor pentru mașinile cu aburi și motoarele cu ardere internă cu unul sau mai mulţi cilindri. Se trece apoi la ecuaţiile mişcării mecanismului în cazul general, care sînt apoi aplicate la determinarea gradului de neregularitate şi acceleraţiei unghiulare a volantului. Ultima parte a capitolului este consacrată metodelor grafice pentru aflarea vitezelor şi acceleraţiilor pistonului şi bielei.

Capitolul al şaptelea tratează problema echilibrării statice şi dinamice a maselor în mişcare de rotaţie sau translaţie, studiindu-se amănunţit echilibrarea motoarelor în doi şi patru timpi, cu mai mulţi cilindri în linie, precum şi a motoarelor în stea.

Capitolul al optulea este consacrat regulatorilor. După o scurtă introducere privind principiile pe baza cărora se face reglarea puterii maşinilor, se studiază diferite tipuri şi construcţii de regulatori.

Capitolul al nouălea tratează despre supape şi distribuţii la maşinile cu aburi cu piston.

Următoarele două capitole, al 10-lea şi al 11-lea, se ocupă de frecarea în mecanisme şi de problemele legate de ungere. Se expun şi elementele teoriei hidrodinamice a ungerii, cu aplicaţii la lagărele segmentale.

În capitolul al 12-lea se studiază transmisiile prin curele late, rotunde şi trapezoidale. În capitolul al 13-lea se expune teoria diferitelor tipuri de frîne şi dinamometre. În ultima parte a acestui capitol sînt tratate şi problemele de bază ale dinamicii vehiculelor : aderenţa, forţa de tracţiune, frînarea.

În capitolele 14 şi 15, se intră în studiul mecanismelor cu cuple superioare : roţile dinţate şi mecanismele cu came. Se studiază întîi cinematica angrenării şi apoi roţile dinţate cilindrice cu dinţii drepţi şi înclinaţi, roţile elicoidale, angrenajul cu melc şi se dau cîteva exemple de roţi epicicloidale.

În ceea ce priveşte mecanismele cu came, tratarea problemelor legate de determinarea traiectoriilor, vitezelor şi acceleraţiilor se face prin metode analitice.

În capitolul al 16-lea se dau elemente din teoria vibraţiilor sistemelor mecanice, studiindu-se cazurile mai des întîlnite în practica inginerească.

Ultimul capitol, al 18-lea, prezintă fundamentele teoriei giroscopului şi principalele sale aplicaţii.

Lucrarea este scrisă concis, consideraţiile teoretice fiind imediat exemplificate prin aplicaţii numerice. Planul adoptat de autor de a trata în acelaşi capitol şi cinematica şi dinamica unei anumite grupe de mecanisme are avantajul unei prezentări unitare şi complete a problemelor.

Marele număr de aplicaţii complet rezolvate, precum şi exemplele numerice care însoţesc fiecare capitol ridică mult valoarea didactică a cărţii.

Socotim însă că extinderea dată studiului supapelor şi distribuţiilor pentru maşinile cu aburi cu piston nu este justificată de importanţa pe care o au aceste maşini în tehnica actuală. Din contră, capitolul privind roţile dinţate nu este suficient dezvoltat, omiţîndu-se unele probleme de bază, ca, de exemplu, studiul angrenajelor conice.

De asemenea, după părerea noastră, partea privind structura mecanismelor nu este nici ea îndeajuns tratată.

C. Petrescu

Н. Н. ИВАЩЕНКО, *Автоматическое регулирование,. Теория и элементы систем.* Машгиз, Москва, 1958, 531 pag.

Printre alte lucrări în domeniul reglajului automat apărute în ultimul timp în U.R.S.S., cartea lui N. N. Ivaşcenko reprezintă o nouă contribuţie în domeniul sistematizării diferitelor capitole ale teoriei şi descrierii sistemelor de reglaj.

Respectînd o succesiune logică a unui material amplu prezentat sub o formă ușor accesibilă, autorul a grupat conținutul cărții în două părți, prima corespunzînd studiului elementelor de reglaj, iar a doua dinamicii sistemelor de reglaj.

Într-un prim capitol se definesc și se clasifică tipurile de reglaj automat din punct de vedere funcțional și al modului de transmitere a comenzilor de la și la elementul regulator. De asemenea, se analizează mărimile caracteristice ale reglajului. Numeroase scheme contribuie la o nemijlocită însușire a materialului prezentat.

În al doilea capitol redactat sub titlul *Proprietățile ansamblelor supuse reglajului automat* se dă o sumară expunere a modului de reglaj pentru ansamble necesitînd reglajul volumului și a procedeelor de autoreglaj.

Un alt capitol este destinat prezentării unor scheme de principiu ale elementelor sensibile și traductorilor ce se utilizează (înregistratori de nivele, presiuni, debite, temperaturi, viteze, foto-elemente și traductori electrici).

În continuare, urmărind procesul automat de reglaj se prezintă cîteva date asupra unor tipuri de amplificatori și servomotoare.

Sistemele de transmitere a comenzilor de reglaj sînt studiate într-un capitol cuprinzînd scheme ale sistemelor de transmitere rigide (cu pîrghii pneumatice, cu came și șablon, electromecanice și electrice) precum și sisteme de transmitere elastice (la care impulsul transmis este totodată amplificat liniar iar reglajul este dependent și de prima sa variație în timp). În cazul elementelor diferențiale, la care comanda transmisă prin impulsul dat de elementul sensibil depinde și de variația de ordinul doi a acesteia, sînt de asemenea schițate unele elemente.

În ultimul capitol al primei părți se completează noțiunile introduse cu prezentarea unor scheme ale ansamblelor de reglaj.

Partea a doua conține capitole privind ecuațiile mișcării sistemelor de reglaj, metodele de calcul, clasificare și analiza diferitelor soluții particulare, stabilitatea și analiza calitativă a acestora.

Se mai tratează și sistemele neliniare și intermitente de reglaj (prin procedee de analiză în spațiul fazelor, prin reprezentări punctuale și balans armonic).

Un ultim capitol conține o serie de date privind reglajul optimal și procesele aleatorii.

Expunerea teoretică a lucrării are un caracter ilustrativ și introductiv. Numeroasele exemple permit o aplicare practică imediată a celor expuse. Astfel diferitele criterii de stabilitate enunțate nu sînt demonstrate sau înțelegerea lor este ușurată de exemplificări.

Sub acest aspect, cartea are meritul de a acoperi într-un singur volum principalele aspecte ale teoriei sistemelor de reglaj automat de la care se poate porni pentru o ulterioară aprofundare a unor probleme cu caracter mai tehnic sau mai teoretic.

Bibliografia conține titlurile a 31 publicații sovietice și 4 publicații ale unor autori străini.

M. Mișicu

E. H. W. BANNER, *Instruments Éléctroniques de Mesure* (Instrumente electronice de măsură). Dunod, Paris, 1959, XIII + 480 pag.

Sub titlul *Instrumente electronice de măsură* E. H. W. Banner a înglobat o gamă de aparate și anexe destinate măsurării mărimilor electrice, neelectrice și radiațiilor. Sînt cuprinse sisteme electrice ce comportă unul sau mai multe dispozitive electronice, indicatori electronici, sau numai instrumente de măsură electrice.

Lucrarea se adresează inginerilor și tehnicienilor din laboratoarele de măsurători ; nu s-a urmărit realizarea unei opere complete de înalt nivel științific ci a unei lucrări tehnice folositoare celor ce manipulează aparate electrice şi electronice şi posedă un minim de cunoştinţe electronice.

Se prezintă o trcere în revistă — în multe cazuri şi cu scurte introduceri teoretice — a diferitelor aparate folosite curent în prezent de laboratoarele de cercetări şi măsurători ce au ca obiectiv mărimi ce se pot traduce electric.

Din acest punct de vedere lucrarea este utilă şi interesantă, prezentînd însă nivelul tehnic atins cu cîţiva ani în urmă.

Astfel, considerăm că scopul pe care şi-l propune autorul în prefaţa ediţiei engleze a fost atins, lucrarea avînd un caracter de punere în problemă, la un anumit nivel şi stadiu.

Materialul este prezentat în 4 părţi cuprinzînd 16 capitole.

În prima parte (un capitol) sînt arătate în linii esenţiale caracteristicile aparatelor indicatoare (electrodinamice, electrostatice şi instrumente de înregistrare grafică, ce sînt folosite în sistemele electronice de măsură.

În partea a 2-a (5 capitole) sînt prezentate diferite tuburi electronice, catodice, celule fotoelectrice, redresori, tranzistori şi detectori de radiaţii şi particule.

Partea a 3-a (6 capitole) cuprinde o gamă uzuală de aparate electronice şi electrice de măsură ce folosesc elementele descrise în partea a 2-a a lucrării.

Capitolul IX conţine aparate de măsură foto-electronice şi capitolele XI—XII aparate de măsură a radiaţiilor.

Partea a 4-a (4 capitole) este rezervată diferitelor aparate şi anexe *cvasi-electronice* : măsurători mecanici şi electronici, diferite feluri de captori, aparate de măsură a unor mărimi fizice şi aparate electrice de măsură şi înregistrare.

Lucrarea conţine şi o bibliografie restrînsă, pentru fiecare capitol ; se bazează exclusiv pe lucrări publicate în S.U.A. şi Anglia, în majoritatea cazurilor anterior anului 1955. Nu conţine tabele.

Dan Pavelescu

L. J. LIBOIS, *Faisceaux hertziens et systèmes de modulation* (Radiorelee şi sisteme de modulaţie). Editions Chiron, Paris, 1958, 509 pag.

Lucrarea prof. L. J. Libois reprezintă o vastă trecere în revistă a bazelor teoretice şi tehnice ale sistemelor de radiorelee.

Alături de informaţii interesante cu privire la realizările moderne în acest domeniu al comunicaţiilor radioelectrice, cartea cuprinde o expunere largă şi sistematică a fundamentelor teoriei modulaţiei însoţită de o introducere în elementele teoriei informaţiei. Prin aceasta lucrarea devine interesantă nu numai pentru specialiştii în radiorelee sau în radiotehnică în general, dar şi pentru cei care doresc să se iniţieze în teoria modulaţiei din punct de vedere al sistemelor de telemetrie, telecomandă, înregistrare automată de date experimentale etc.

În această parte teoretică, care cuprinde mai mult de jumătate din volumul cărţii, sînt tratate pe rînd toate procedeele de modulaţie cunoscute ca : modulaţia de amplitudine, de frecvenţă (fază), procedeele clasice de modulaţie de impulsuri — în amplitudine, durată şi poziţie — precum şi cele recente – modulaţia de impulsuri codate şi modulaţia *in delta*. În fiecare caz se analizează caracteristicile tehnice cele mai importante : banda ocupată, gradul de stabilitate la perturbaţii, distorsiunile, zgomotul de fond. Este tratată deosebit de larg problema distorsiunilor la modulaţia de frecvenţă, problemă căreia i se consacră un întreg capitol.

Se examinează, de asemenea, sistemele cu mai multe căi, cu selecție de frecvență și selecție temporală.

Lucrarea este bogat ilustrată și insoțită de aproape 300 indicații bibliografice pe probleme.

I. Jakab

*

* * * *Manual pentru calculul construcțiilor*. Ed. tehnică, București, 1959, 1964 pag.

Această lucrare a fost elaborată de un colectiv format din : prof. C. Avram, prof. A. Caracostea, prof. M. Mihailescu, ing. G. Niță, ing. M. Soare, conf. I. Stănculescu, prof. Al. Steopoe, sub redactarea prof. A. Caracostea. Lipsa unei asemenea lucrări era mult resimțită în literatura noastră de specialitate, fiind adesea folosite manuale străine care nu corespundeau totdeauna cerințelor din țara noastră. Manualul de față corespunde necesităților construcțiilor în țara noastră, cuprinzînd și cele mai noi cuceriri științifice în domeniul calculului, atît de la noi cît și din alte țări.

Lucrarea cuprinde XIII secțiuni. Primele două secțiuni dau tabele și rezultate din domeniul științelor matematice, precum și date cu privire la sarcinile și greutățile tehnice în construcții. Secțiunea a III-a prezintă date tehnologice cu privire la lianți, mortare și betoane.

În secțiunea a IV-a (194 pag) se prezintă cele mai importante rezultate din domeniul rezistenței materialelor, rezultate obținute pe baza unor ipoteze suplimentare în ceea ce privește deformarea corpurilor. Menționăm rezultatele moderne din domeniul grinzilor pe mediu elastic și al grinzilor cu pereți subțiri (teoria lui V. Z. Vlasov).

Secțiunea a V-a (124 pag.) se ocupă de problema plană a elasticității, dîndu-se rezultate în special pentru grinzile pereți de formă dreptunghiulară (avînd eventual una sau mai multe laturi aruncate la infinit) și pentru cele cu contur circular. Se dau diferite metode de calcul (pentru sarcini periodice și locale), studiindu-se în special grinzile continue și cele cu o singură deschidere.

Problema plăcilor plane este tratată în secțiunea a VI-a (118 pag.). Aici se studiază pe larg plăcile cu contur dreptunghiular și circular și se dau cele mai importante rezultate cu privire la plăcile oblice și triunghiulare. Pe lîngă aceasta, este cuprinsă și voalarea plăcilor plane, problemă deosebit de importantă pentru construcții metalice.

Secțiunea a VII-a (219 pag.) cuprinde cele mai importante rezultate din domeniul învelitorilor subțiri. După un studiu general al rezistenței învelitorilor subțiri (teoria de membrană și teoria de încovoiere) se trece la problema stabilității lor. Rezultatele obținute se aplică la acoperișuri pentru hale industriale, la rezervoare și turnuri de răcire, în special. Menționăm studiile privind învelitorile de tip eliptic. La sfîrșit se prezintă învelitorile poligonale.

Secțiunea a VIII-a (514 pag.) tratează problemele staticii construcțiilor. Sînt prezentate cele mai importante chestiuni privind sistemele static determinate (grinzi drepte cu secțiune plină, grinzi cu zăbrele, arce) și sistemele static nedeterminate (grinzi curbe, cadre, arce). Menționăm unele studii speciale : grinzile Vierendeel, grinzile cu zăbrele static nedeterminate, problema eforturilor suprimentare la grinzile cu zăbrele.

Secțiunea a IX-a (64 pag.) cuprinde succint problemele împingerii, stabilității, și rezistenței pămînturilor.

Secțiunile X, XI, XII și XIII se ocupă de calculul elementelor de construcție, după materialul din care sînt alcătuite : lemn, metal, zidărie și beton armat.

Alcătuirea unui manual original în acest domeniu este deosebit de dificilă. Prezentarea materialului trebuie făcută într-o formă cît mai concisă și sintetică. Aceste cerințe au fost respectate de către autori. S-a dat o dezvoltare deosebită problemelor de calcul; rezultatele prezentate sînt, în general, însoțite de studii teoretice suficient de dezvoltate.

Putem spune de pe acum că lucrarea prezintă interes stît pentru inginerii practicanți și proiectanți, cît și pentru cercetătorii științifici, reprezentînd o contribuție valoroasă la literatura tehnică.

P. P. Teodorescu

Y. GUYON, *Béton précontraint. Etude théorique et expérimentale.* Tome II *Constructions hyperstatiques* (Betonul precomprimat. Studiu teoretic și experimental). Collection de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Eyrolles Editeur, Paris, 1958, 817 pag.

În acest volum, Y. Guyon prezintă un material vast teoretic și experimental privind aplicațiile betonului precomprimat la construcțiile static nedeterminate.

La fel ca în volumul I, problemele sînt expuse inductiv, demonstrațiile reușind astfel pe lîngă valoarea teoretică să convingă în mod natural pe tehnicieni.

Așa cum se afirmă în introducere, obiectul de studiu îl constituie cadrele și anumite tipuri de planșee. Elementele studiate au secțiunea transversală constantă sau puțin variabilă, fiind caracterizate printr-o fibră medie sau o suprafață mediană și prin faptul că solicitarea lor principală este încovoierea.

Volumul se împarte în două părți.

În prima parte se studiază sistemele static nedeterminate în faza elastică expunîndu-se teoretic problemele care apar în cazul elementelor din beton precomprimat.

Se insistă mult, și aceasta reprezintă contribuția foarte valoroasă a lui Guyon, asupra metodelor care permit să se așeze cablurile în coincidență cu linia de presiune (așa-numitul cablu concordant). Metoda cablurilor concordante se aplică cînd armarea este uniformă sau cu mici variații de la un capăt la celălalt al construcției; traseul acestor cabluri este cu ușoare modulații. Aceste dispoziții apar indicate din punct de vedere economic la grinzi pentru construcții civile și poduri de deschidere mică și medie.

Pentru construcții importante, clădiri mari sau poduri de deschidere mare, din motive economice se ajunge la soluția de a face să varieze secțiunea și poziția cablurilor astfel încît condițiile de rezistență să fie satisfăcute fără depășiri prea mari, obținînd construcții de egală rezistență atît pentru beton cît și pentru oțel.

Tot în această parte se studiază precomprimarea arcelor și cadrelor. În cazul arcelor precomprimarea este interesantă numai cînd raportul dintre sarcina utilă și mobilă este mare. La cadre trebuie să se aducă linia de presiune în interiorul secțiunii de beton, examinînd funcție de ipotezele de încărcare condițiile optime de precomprimare. Într-un capitol special se studiază precomprimarea sistemelor etajate.

O atenție specială se dă metodelor de îmbinare în cazul construcțiilor din elemente prefabricate; sînt examinate situațiile de rezemare a nervurilor pe grinzi și a grinzilor pe stîlpi, folosind mai ales procedeul cablurilor preîntinse așezate în formă de călăreți peste stîlpi.

Într-un capitol destinat aspectului economic se arată că continuitatea apare indicată la grinzi în cazul deschiderilor inegale aranjînd de preferință o succesiune în care raportul deschiderilor este 2 : 1 : 2. În cazul deschiderilor egale asigurarea continuității poate să apară mai costisitoare decît la elemente simplu rezemate.

În partea a doua a volumului se studiază comportarea structurilor static nedeterminate reale pentru a compara rezultatele practice cu datele teoretice încercînd să se pună în evidență o metodă de calcul la rupere.

Pentru faza normală de utilizare, stadiul admis la beton este situația de fisurare, față de care trebuie păstrat un coeficient suficient de siguranță.

În continuare se dau exemple de încercări efectuate pe elemente din beton precomprimat la care studii remarcabil de minuțioase au condus la punerea în evidență a comportării pînă la rupere a betonului.

La sfîrşit se prezintă un procedeu de calcul pentru stabilirea capacității de rezistență la rupere.

Acest volum face parte din lucrarea de mare amploare destinată de Y. Guyon problemelor betonului precomprimat.

Lucrarea *Béton Précontraint* reprezintă un studiu interesant pentru cei ce vor să lucreze în acest domeniu.

Mircea Mihailescu

J. N. GOODIER, P. G. HODGE, JR., *Elasticity and Plasticity* (Elasticitate şi plasticitate). New York, John Wiley & Sons, Inc., 1958, 152 pag.

Office of Naval Research şi Applied Mechanics Reviews au luat inițiativa publicării unor volume care să cuprindă cele mai noi cercetări în domeniul matematicilor aplicate (Surveys in Applied Mathematics). Primul volum din această serie cuprinde studii din domeniul teoriei matematice a elasticității (redactate de J. N. Goodier) şi din domeniul teoriei matematice a plasticității (redactate de P. G. Hodge, Jr.). Trebuie remarcat faptul că acest volum (ca şi celelalte volume din această serie) caută să prezinte cititorilor din Statele Unite, în special, realizările ştiințifice din Uniunea Sovietică şi din țările de democrație populară, mai puțin cunoscute din cauza dificultăților de limbă.

În prima parte, după o scurtă trecere în revistă a principalelor cărți din domeniul teoriei elasticității, se tratează cele mai importante rezultate obținute în problema plană, în special cele bazate pe metoda funcțiilor de variabilă complexă a lui Kolosov, metodă mult dezvoltată apoi de N. I. Musheli̇şvili; după primele două probleme fundamentale ale elasticității, găsim rezultatele obținute în cea de a treia problemă (problema mixtă). Influența golurilor sau rigidizărilor în corpuri plane, metoda transformării conforme sînt, de asemenea, cuprinse. În domeniul corpurilor anizotrope găsim în special studiile lui S. G. Lehnițki. În ceea ce priveşte termoelasticitatea sînt menționate în special lucrările lui Melan şi Parkus, precum şi ale autorului (Goodier). O altă problemă importantă, în care s-au făcut multe cercetări în ultimul timp este problema de contact (local sau pe suprafețe mai mari — grinzi, plăci pe mediu elastic). Problemele dinamice şi de propagări de unde, de asemenea, nu sînt neglijate.

În a doua parte a lucrării se dau rezultate din domeniul teoriei matematice a plasticității. După o trecere în revistă a principalelor rezultate din teoria solidelor perfect plastice, se prezintă problema consolidării. Se dau unele rezultate importante pentru cazul teoriei plasticității liniară pe porțiuni. Un capitol special este consacrat principiilor de minimum ale plasticității. Dintre problemele practice mai importante s-a considerat pe larg încovoierea plăcii circulare. Succint sînt prezentate învelitorile subțiri cilindrice, cazul stării de tensiune şi al stării de deformație plană, precum şi alte probleme. Un capitol special este consacrat contribuțiilor sovietice.

Volumul de mai sus prezintă, într-un număr restrîns de pagini, foarte multe rezultate interesante pentru cei ce lucrează în cercetarea ştiințifică.

Bibliografia deosebit de bogată (peste 500 de titluri), care însoțeşte lucrarea, îi măreşte şi mai mult utilitatea.

P. P. Teodorescu

PEDRO B. J. GRAVINA, *Teoria e Cálculo das Cascas. Cascas de Revolução* (Teoria şi calculul plăcilor curbe subţiri. Plăci subţiri de rotaţie). Sao Paulo, 1957, 335 pag.

În cadrul teoriei moderne a plăcilor curbe subţiri, care şi-a găsit o atît de largă aplicare, în special în domeniul construcţiilor, capitolul relativ la suprafeţele de rotaţie se prezintă ca cel mai studiat şi mai bine conturat. Aceasta se explică, în special, prin simplificările de ordin matematic care se pot face, datorită formei circulare a secţiunilor transversale.

Memoriilor izolate din secolul trecut le-a urmat un număr impresionant de studii în ultimii patruzeci de ani, atît în problemele statice (teoria de membrană şi teoria încovoierii), cît şi cele de stabilitate, vibraţii şi comportare în domeniul plastic.

Pentru forme mai complicate ale curbei meridiane, calculul analitic necesită încă un aparat matematic foarte complex şi deci greoi pentru practică, fapt care a orientat pe mulţi cercetători spre elaborarea unor metode aproximative de calcul.

În sfîrşit, complexitatea structurilor din care fac parte plăcile curbe subţiri, precum şi aspectul economic tind să facă să se ia în considerare conlucarea diferitelor elemente în contact, fenomen absolut analog celui din statica sistemelor continue de bare.

Cu tot numărul mare de studii existente şi al problemelor pe care le-am amintit mai sus, există puţine lucrări care să prezinte un ansamblu al problemelor, cum ar fi cărţile lui Flügge (1934), Timoshenko (1940), Girkmann (1946), Novojilov (1951), Belluzzi (1954), L'Hermite (1954).

Chiar şi aceste excelente lucrări nu sînt concepute ca lucrări de sinteză pentru un singur capitol şi în consecinţă nu tratează toate aspectele şi nu ajung pînă la detaliile atît de necesare calculatorului.

Autorul brazilian Pedro B. J. Gravina şi-a propus tocmai un asemenea scop în cartea sa asupra plăcilor subţiri de rotaţie.

Cartea cuprinde trei părţi (20 capitole) şi o anexă foarte utilă de tabele matematice.

Prima parte este intitulată *Elemente de bază din teoria structurilor elastice în formă de suprafeţe.*

Primul capitol cuprinde elemente de geometrie diferenţială (curburi, suprafeţe, suprafeţe de rotaţie, coordonate curbilinii în spaţiul tridimensional).

Capitolul al doilea cuprinde definiţii, ipotezele fundamentale şi însumarea eforturilor unitare pe grosimea plăcii.

Ecuaţiile de echilibru în coordonate curbilinii ortogonale şi componentele deformaţiilor sînt expuse în capitolele 3 şi 4.

Ecuaţiile fundamentale ale suprafeţelor de rotaţie sînt deduse în capitolul 5. Suprafaţa cilindrică circulară, sarcinile simetrice în raport cu axa de rotaţie sînt tratate drept cazuri particulare.

După această parte introductivă, urmează partea a doua intitulată *Teoria de membrană a suprafeţelor de rotaţie supuse acţiunii sarcinilor simetrice.*

În capitolul 6 se prezintă ipotezele simplificatoare care stau la baza teoriei de membrană ; în continuare, în capitolul 7 se dau expresiile generale ale eforturilor şi deplasărilor, iar în capitolul 8 se prezintă detaliat formulele şi diagramele de variaţie ale eforturilor şi deformaţiilor în cazul sferei, conului şi cilindrului, închise sau deschise la creştet.

Trebuie să facem o menţiune specială asupra acestor diagrame relative la cele mai curente cazuri de încărcare, pe care le apreciem ca deosebit de utile pentru birourile de proiectare.

Partea a treia şi cea mai dezvoltată cuprinde *Teoria încovoierii suprafeţelor de rotaţie încărcate simetric* ; primele 6 capitole (11—16) se referă la teoria exactă, iar celelalte 4 (17—20) la teoria aproximativă.

Capitolele 11 şi 12 prezintă ecuaţiile lui Meissner şi elemente de teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea integrabile prin serii.

Calculul cupolelor sferice prin serii hipergeometrice, al cupolelor conice cu ajutorul funcţiilor Bessel şi al cilindrilor circulari cu ajutorul funcţiilor exponenţiale amortizate fac obiectul capitolelor 13, 14 şi 15.

Sistemele static nedeterminate complexe sînt tratate prin metoda forţelor şi a deformaţiilor în capitolul 16.

În continuare, sînt studiate metodele aproximative pentru calculul cupolelor sferice: metoda lui Blumenthal (cap. 17), o metodă asimptotică – derivată din cea precedentă prin limitarea la cîţiva termeni ai seriei asimptotice (cap. 18) şi metoda lui Geckeler — care asimilează marginea cupolei cu o zonă cilindrică (cap. 19).

Tot în capitolul 19 se extinde aplicarea metodei lui Geckeler la calculul cupolelor avînd coeficientul de amortizare variabil şi la calculul cupolelor conice.

Ultimul capitol, al 20-lea, tratează despre calculul cupolelor sferice pleoştite preconizat tot de Geckeler.

Lucrarea se încheie cu un număr de 12 tabele conţinînd valorile funcţiilor exponenţiale amortizate, ale funcţiilor lui Schleicher şi ale unor funcţii derivate din funcţiile lui Schleicher, utile la calculul cupolelor sferice pleoştite.

Teoria este bogat ilustrată prin exemple de calcul bine alese şi detaliate, astfel încît să poată fi urmărite uşor.

Credem că simpla prezentare a conţinutului cărţii este suficientă pentru a da o imagine asupra valorii şi utilităţii ei.

Mircea Soare

GUSTAV DOETSCH, *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace Transformation* (Introducere în teoria şi aplicaţia transformării Laplace). Birkhäuser Verlag, Basel, 1958, p. 302.

Autor şi a altor volume sau articole privind acelaşi subiect, G. Doetsch prezintă într-o redactare unitară şi amplă elementele teoriei şi aplicaţiilor transformatei Laplace.

Precizînd sensul fizic şi matematic al transformatei Laplace, în lucrare sînt studiate elementele fundamentale ale teoriei (convergenţa, proprietăţile de inversiune, analiticitate, formulele de transformare în cazul substituţiilor liniare, diferenţiabilitate şi asociativitate).

Elementele introduse sînt aplicate la rezolvarea ecuaţiilor liniare şi ale sistemelor de ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi, sau cu diferenţe finite.

În continuare, sînt studiate o altă serie de proprietăţi (comportarea la infinit, formule de inversare, reprezentarea funcţiilor prin transformare Laplace, dezvoltări în serii de transformate, funcţia lui Parseval etc.).

Studiul se extinde şi asupra ecuaţiilor diferenţiale ordinare cu coeficienţi polinomiali. Se dau sumare exemplificări din teoria căldurii şi electricitate binecunoscute din literatură.

Ecuaţiile integrale beneficiază de o foarte succintă prezentare.

Lucrarea nu conţine date bibliografice.

În studiul unor probleme actuale ale fizicii şi mecanicii, acest volum reprezintă un fundament teoretic util, care se poate completa cu lucrări aplicative deja existente (de ex. Jan Sneddon — Fourier transforms N. 4 1951 şi Izdat. Inostr. Lit. Moscova 1955).

M. Mişicu

H. G. GARNIR, *Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction á leur étude générale* (Problemele la limită ale fizicii matematice. Introducere în studiul lor general). Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1958, 234 pag.

Cartea reprezintă o concretizare a unui curs ținut de autor între anii 1954—1955 și 1955—1956 la Facultatea de matematică a Universității din Liège.

Ea are ca scop studiul general al problemelor la limită pentru operatorii liniari. Formularea problemelor este foarte generală, iar studiul se face în cadrul analizei funcționale.

După o expunere succintă a teoriei spațiilor funcționale hilbertiene se trece la studiul problemelor la limită de tip Dirichlet-Neumann pentru operatorul meta-armonic $Z-\Delta$, dîndu-se soluția problemei cu ajutorul funcțiilor Green.

Apoi, cu ajutorul unei transformate Laplace inverse generalizate (operația de tip J) în raport cu timpul, se reduc operatorii liniari ai undelor și difuziei la studiul operatorului meta-armonic.

În ultimul capitol, se analizează problemele referitoare la existența, unicitatea și forma integrală a soluției pentru operatorii undelor și difuziei.

În concluzie, cartea este utilă cercetătorilor, aspiranților și studenților care lucrează în domeniul matematicii pure sau aplicate și care sînt la curent cu teoria funcțiilor de variabilă complexă și de variabilă reală.

Adriana Năstase

CĂRŢI ŞI BROŞURI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

* * * *Повышение прочности элементов конструкций и деталей машин* (под редакцией проф. др. И. В. Кудрявцева, Машгиз, Москва, 209 стр.), 1959.

Х. М. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек*. Таткнигоиздат, 1957, 431 стр.

М. Х. КАМЕЛОВ, *Распределение квадратичных форм*. Издательство Академии Узбекской ССР, 1958.

* * * *Труды Сектора математики и механики*. Том I, Академия Наук Казахской ССР, 1958.

* * * *Труды Энергетического института Тбилиси*. Том III—XI, 1945—1957.

* * * *Труды Таллинского Политехнического института*, № 119, 145, 154, 158 (Серия А), 1957, 58, 59.

A. N. KOLMOGOROV ş. a., *Sammelband zur statischen Theorie der Turbulenz* (traducere din limba rusă). Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 226 p.

E. GÜNTHER, *Herstellung warmgewalzter Feinbleche*. VEB Verlag Technik, Berlin, 1958.

* * * *Godişnik na Maşino-Elektrotehniceskaia Institut*. Tom. II, Sofia 1955.

Editura Slovenska Akademia Vied, Bratislava

L. KNEPPO, *Striedave Prudy*. 1954, 351 p.

L. KNEPPO, *Zaklady teorie transduktorov*. 1954, 147 p.

N. P. BOGORODICKY ş.a., *Elektrotechnicke hmoty*. 1953 (traducere din limba rusă), 337 p.

* * * *Teoreticeske zaklady elektrotechniky*. II, 1954, 397 p.

J. BURTON, *Pratique de la Mesure et du Contrôle dans l'Industrie*. 2 volume. Dunod, Paris, 1959, 792 p.

H. Hasselgruber, *Temperaturberechnungen für mechanische Reibkupplungen*. Fr. Vieweg, Braunschweig, 1959.

* * * *Proceedings of the 1st Japan Congress on Testing Materials*. Science Council of Japan, 1958, Tokio. 147 p.

Din lucrările de la ,,Hidro-Electrica do Douro'', Porto

* * * *Principais aproveitamentos hidroelectricos em Portugal*. 1955.

* * * *Escalão de Miranda*. 1958, 35 p.

* * * *Escalão de Picote*. 1958, 46 p.

* * * *Annuaire Hydrologique de la France*. 1957. Société Hydrotechnique de France, Paris.

Disertaţii de la Universitatea din Liège

P. MIRGUET, *Sur la détermination exacte des petits angles de perte des isolants aux fréquences électrotechniques*, 1953, 114 p.

CH. VITAL DUNSKI, *Nouvelle méthode de calcul de divers rotors à effet pelliculaire*, 1956, 100 p.

A. CALVAER, *Théorie des réseaux en quadrature antisymétrique couplés et applications à l'électronique*, 1956, 146 p.

N. ROUCHE, *Etude du régime de synchronisation*, 1955, 89 p.

R. DEBOT, *La mesure de la granularité des images photographiques*, 1950, 258 p.

K. GAMSKI, *Relation entre la déformation permanente dans un essai de traction simple et le fluage des aciers à la température ordinaire*, 114 pag., 1956.

J. BELLIÈRE, *Contribution à l'étude pétrognétique des schistes cristallins du massif des Aiguilles Rouges* (Haute-Savoie), 1958, 198 pag.

L. HABRAKEN, *Sur la métallographie électronique*. 1953, 163 p. + 46 planşe.

A. DECKER, *La désulfuration de la surtension de l'hydrogène*. 1954, 67 p.

R. COLLÉE, *Un aspect nouveau de la surtension de l'hydrogène*. 1954, 130 p.

Disertaţii de la Technische Hochschule Stuttgart

H. L. HALL, *Untersuchungen über die Beeinflussung der Zerspanbarkeit von Stahl durch kühlschmiermittel*. 1958, 66 pag.

F. ROSTASY, *Theoretische und experimentelle Beiträge zur Erforschung des Schwindens und der Schwindspannungen des Betons*. 1958, 185 pag.

H. SCOBEL., *Untersuchungen an Gleitringdichtungen für Werkzeugmaschinen*. 1958, 148 pag.

A. ORDONEZ, *Näherungsverfahren zur Berechnung des räumlichen Spannungszustandes in Bogenstaumauern unter besonderer Berücksichtigung trapezförmiger Querschnitte*. 1957, 108 pag.

R. BARTH, *Windkanalmessungen an Fahrzeugmodellen und rechteckigen Körpern mit verschiedenem Seitenverhältnis bei unsymmetrischer Anströmung*. 1958, 120 pag.

K. HAGEN, *Volumenverhältnisse, Wirkungsgrade und Druckschwankungen in Zahnradpumpen*. 1958, 118 pag.

K. ROSKE, *Dimensionslose Grössen in der Hydrodynamik der offenen Gerinne*. 1957, 141 pag.

B. FAHR, *Untersuchungen über Leistungssteigerung durch Nebenzeitverkurzung an Einspindel-Drehautomaten*. 1957, 117 pag.

H. SCHIER, *Die Automatisierung der Sichtprüfung*. 1957, 19 pag.

Disertaţii de la Technische Hochschule Darmstadt

H. SCHILLING, *Planmässige Anlagenpflege und Anlagenerhaltung in der chemischen Industrie*. 1958, 185 pag.

KL. MARENBACH, *Elektrodynamisches Modell zur Nachbindung des dynamischen Verhaltens von Turbogeneratoren*. 1958, 60 pag.

E. KNOLL, *Beitrag zur Berechnung signalgesteuerter Strassenknoten*. 1959, 124 pag.

MEYER zur HEYDE, *Über die Messung der Druckwirkung von Kurzschlusslichtbögen*. 1958, 81 pag.

W. HÄNDLER, *Ein Minimalisierungsverfahren zur Synthese von Schaltkreisen*. 1958.

H. STAHL, *Das Messpiel für den aus Ablesungen in Zeitintervallen berechneten Mittelwert bei regellos schwankenden Messgrössen*. 1958, 141 pag.

Cărți primite de la Technische Hochschule Graz

J. WEISSBACH, *Die Statik der Bauwerke*. Braunschweig, 1882, 613 pag.

J. WEISSBACH-HERMANN, *Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*. 6 volume, 1875, total 7283 pag.

G. BRESSE, *Cours de mécanique appliquée*. 3 volume, 1 album, 1865—1880, total 1642 pag. + 27 planșe.

B. GRASHOF, *Theorie des Elastizität und Festigkeit*, 1878, 408 pag.

I. KECK, *Elastizitätslehre*, 1908, 418 pag.

A. FRANCKE, *Die elastische Linie des Balkens*, 1895, 33 pag.

G. HAMEL, *Elementare Mechanik*. 1922, 634 pag.

PH. FORCHHEIMER, *Hydraulik*, 1914, 566 pag.

A. RÜHLMANN, *Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper*, 1880, 760 pag.

V. KRAFT, *Mathematik, Logik und Erfahrung*. 1947, 129 pag.

H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*. 1899. II. Band, 855 pag.

K. WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*. 1866, 262 pag.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul X 1959

INDEX ALFABETIC

STUDII	Nr.	Pag.
* * * Cercetări de mecanică aplicată în anii regimului democrat-popular	3	649
AEROMECANICĂ		
ANDREI ŞT., Antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter în zborul la punct fix	2	393
ANDREI ŞT., Nomograme pentru calculul pierderilor interne în palele rotorului de elicopter antrenat pneumatic	3	663
BRĂDEANU P., Calculul rezistenţei de frecare şi al transferului de căldură în straturi limită laminar din apropierea punctului critic al unui profil diedric.	4	1021
CARAFOLI E. şi SĂNDULESCU Ş., Caracteristicile aerodinamice ale aripioarelor avînd o mişcare oscilatorie armonică în regim supersonic	1	7
CARAFOLI E. şi MATEESCU D., Scurgerea supersonică în jurul sistemului portant aripă-fuselaj conic	2	335
CARAFOLI E. şi NĂSTASE ADRIANA, Determinarea suprafeţei unei aripi cu muchie de separaţie a distribuţiei de presiuni, în curent supersonic	4	995
DUMITRESCU L., Asupra transferului de căldură în scurgerile liber-moleculare	2	379
HACKER T., Despre stabilitatea longitudinală a avionului în cazul perturbaţiilor repetate	1	69
HACKER T., Stabilitatea avionului cu un număr redus de grade de libertate	3	655
IONESCU M. şi DARIE GH., Caracteristicile aerodinamice ale unei clase de aripi subţiri în scurgere omogenă de ordin superior	2	367
IONESCU M. şi DARIE GH., Asupra rezistenţei de undă şi momentului de ruliu ale aripilor cu borduri de atac supersonice	3	683
MARINESCU AL., Asupra vibraţiilor consolei anticuplu la elicopterele cu un singur rotor	1	77
MARINESCU AL. şi SILVEANU E., Încovoierea dinamică a fuselajelor de elicopter	2	415
MARINESCU AL., Asupra vitezei unghiulare de rezonanţă a palelor articulate ale rotoarelor de elicopter	4	1051
PATRAULEA N. N., Elice tandem antagoniste	1	41
PATRAULEA N. N., O metodă simplificată pentru calculul aripei cu volet fluid	2	351
PATRAULEA N. N. şi CĂMĂRĂŞESCU N., Asupra hipersustentaţiei datorită aşezării elicelor pe extradosul aripii	4	1013
PETRE A., Divergenţa aeroelastică la suprafeţe portante în rotaţie şi rototranslaţie	4	1041
SĂNDULESCU Ş., Caracteristicele aerodinamice ale aripilor triunghiulare în mişcare oscilatorie armonică în regim supersonic	3	711
SĂVULESCU ŞT. N., Comportarea unor soluţii ale stratului limită tridimensional în ipoteza profilelor tip de viteze şi temperaturi	3	695

HIDROMECANICĂ

	Nr.	Pag.
HÎNCU S., Determinarea lungimii de stabilizare a mişcării fluidelor cu suprafaţă liberă în canale largi cu fund orizontal	1	109
HÎNCU S., Pierderi de energie minime la amestecul a doi curenţi sub presiune	3	723
OROVEANU T., O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii spre sonde în medii poroase neomogene	1	87
OROVEANU T. şi SILVEANU ELEONORA, Asupra creşterii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia	4	1059
PASCAL H., O metodă pentru determinarea permeabilităţii unui mediu poros	4	1073

TEORIA MECANISMELOR

	Nr.	Pag.
BĂRĂNESCU G., O teorie a echilibrajului forţelor de inerţie la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate	4	1125
BOGDAN R. şi PELECUDI CHR., Sinteza mecanismelor cu patru elemente pe baza analizei armonice	1	141
BOGDAN R., PELECUDI CHR., CALMACIUC L. şi ANTONESCU GR., Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor	3	771
BOGDAN R. şi PELECUDI CHR., Contribuţii la cinematica diadei Cebîşev	4	1113
PÎRVULESCU N. S., Influenţa lungimii balansierului asupra echilibrării unităţii de pompare	3	785
PÎRVULESCU N., Echilibrarea de frecvenţă multiplă a unităţilor de pompare de la adîncime	4	1155
VOLMER J., Cazurile particulare ale curbei centrelor Burmester, cu punct dublu şi importanţa lor pentru teoria mecanismelor	2	425

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

	Nr.	Pag.
CONSTANTINESCU V. N., Asupra stabilităţii mişcării lagărelor circulare lubrificate cu gaze	1	117
CONSTANTINESCU V. N., Calculul lagărelor compuse din suprafeţe plane, lubrificate în regim turbulent	3	755
CONSTANTINESCU V. N., Consideraţii asupra lubrificaţiei tridimensionale în regim turbulent	4	1093
NICA AL., Consideraţii asupra cinematicei lagărelor de rostogolire cu role în cazul ungerii hidrodinamice	2	449
TIPEI N. şi NICA AL., Cercetări asupra regimurilor de funcţionare a lagărelor I. Influenţa variaţiei viscozităţii	3	737
TIPEI N. şi NICA AL., Cercetări asupra regimurilor de funcţionare a lagărelor II. Caracteristicile globale în cazul viscozităţii variabile	4	1079

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENŢA MATERIALELOR

	Nr.	Pag.
BĂLAN ŞT., RĂUTU S., ARCAN M. şi PETCU V., Studiul comportării construcţiilor prin încercări pe modele din masă plastică	1	151
BĂLAN ŞT., RĂUTU S. şi PETCU V., În legătură cu calculul de ordinul doi, al capacităţii portante a cadrelor	2	457
DINCĂ FL. şi MANEA V., Asupra unor probleme de stabilitate a barelor elastice în mişcare plană	2	511
HANGAN M., O metodă de calcul prin aproximaţii succesive a structurilor multiplu nedeterminate, în domeniul plastic	3	795
LIBRESCU L., Cîteva probleme ale teoriei unei clase de învelitori elastice, subţiri, neomogene	1	187

	Nr.	Pag.
LIBRESCU L., În legătură cu teoria structurilor elastice, subţiri, alcătuite din straturi ortotrope, simetric dispuse pe grosime în raport cu suprafaţa mediană	3	837
LIBRESCU L., Structuri subţiri de formă cilindrică circulară, construite din straturi elastice, izotrope	4	1235
MAGER V., Asupra echilibrului elastic al învelitorilor subţiri de rotaţie, cu aplicaţie la catenoidul drept de rotaţie	3	867
MANEA V. şi PROCOPOVICI E., O extindere a rezolvării problemei torsiunii unor palete de turbină	1	203
MIHĂILESCU M. şi MIHĂILESCU Y., Aplicarea metodei relaxării la calculul învelitorilor subţiri	3	819
MIŞICU M., Asupra problemelor dinamice ale lui Boussinesq şi Hertz	2	467
MIŞICU M., Torsiunea dinamică a barelor elastice cu secţiune constantă	4	1171
PETCU V., Asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii de echilibru elastic cu matrice de tip Jacobi	3	855
PÎRVULESCU N., Influenţa lungimii bielei asupra echilibrării unităţilor de pompare	1	173
PÎRVULESCU N. S., Formule de flambaj pentru bare grele	2	497
PONOMAREV K. K., Folosirea teoriei matricelor la calculul sistemelor cu bare	4	1209
PRIŞCU R., Nouă contribuţie la problema repartizării presiunii hidrostatice la barajele arcuite	4	1221
SOARE M., Asupra determinării stării de eforturi de membrană în plăcile curbe subţiri de rotaţie	2	521
STĂNESCU CR. şi VISARION V., Extinderea analogiei statico-geometrice pentru învelitorile elastice subţiri cu anizotropie de material	3	829

VIBRAŢII

	Nr.	Pag.
IFRIM M., Calculul direct a frecvenţelor proprii la clădirile acţionate de cutremure	1	211

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

	Nr.	Pag.
FLORESCU C. şi colab., Vizualizarea unor fenomene fizico-mecanice ce au loc la penetrarea solului	4	1253
KARDOS A., Măsurarea asperităţilor şi a rotunjirii tăişului la sculele aşchietoare	3	917
LĂZĂRESCU I. şi BOGDAN A., Contribuţii în legătură cu geometria cuţitelor pentru prelucrarea roţilor dinţate conice cu dantură circulară	3	887
MARCU V. şi FREUND P., Cercetări asupra metalizării prin pulverizare a suprafeţelor concave	2	565
POPOV M., MITRICĂ I. şi DECIU E., Asupra regimurilor optime de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe mineralo-ceramice şi din carburi metalice	1	219
POPOV M., MITRICĂ I. şi DECIU E., Studii asupra perametrilor aşchierii cu cuţite de strung din oţel rapid romînesc	2	539

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

	Nr.	Pag.
PAVELESCU D. şi PANTELIMON TH., Înregistrare magnetică simultană a două mărimi mecanice	2	575

NOTE

	Nr.	Pag.
DINCĂ FL. şi BOICU N., Asupra torsiunii unor bare cilindrice neomogene	1	265
IONESCU GH. D., Sursa continuu repartizată situată într-o conductă circulară	1	249

	Nr.	Pag.
IONESCU P., Asupra exploatării simultane a unui sistem de strate printr-o singură sondă în regim elastic	1	253
IONESCU M. și DARIE GH., Asupra suprafeței aripii corespunzătoare unei distribuții de presiuni dată	4	1263
NĂSTASE A., Asupra unor formule de recurență referitoare la calculul coeficienților vitezei axiale de perturbație pentru mișcările omogene de ordin superior	1	241
PELECUDI CHRISTIAN și BOGDAN RADU, Considerații asupra metodei analitice de cercetare a mecanismelor plane pe baza variabilelor complexe	2	603
SOARE M., Asupra posibilității stabilirii unor formule de dimensionare la flambaj	1	257
VASILESCU-KARPEN N., Energetica lansării sateliților. Randamentul motoarelor ejectoare	2	587

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

	Nr.	Pag.
CSULAK ACAȚIU și MAROȘ D., Cercetarea unui reductor planetar cu dantură interioară și raport mare de transmisie	4	1289
DUMITRESCU L., Tubul de șoc pentru cercetări de aerodinamică	1	271
KARDOS A., Dinamometru de așchiere funcționînd cu benzi pentru măsurarea lungimii	4	1283
IONESCU MIHAI, Determinarea eforturilor în cupole sferice din sarcini nesimetrice	1	303
MARIN GH., Aparat pentru măsurat temperaturi	4	1311
MARINESCU M., Îmbunătățirea comportării la uzură a materialelor prin modificări superficiale	4	1269
NEDELESCU ION, Asupra unei suflerii supersonice cu funcționare continuă în circuit deschis	1	287
POPOV M., MITRICĂ I. și DECIU E., Instalație centralizatoare de sisteme de măsură pentru studiul mașinilor și sculelor așchietoare	3	923
RAȘEEV D., Studiul unor cupluri optime cămașă piston la pompele de extracție	3	927

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

	Nr.	Pag.
MANGERON D., BOGDAN R., A doua Conferință Unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor și mașinilor, Moscova, 24—28 martie 1958	2	615
* * * Festival Internațional al filmului științific și tehnic. Budapesta, 1959	2	625

RECENZII

	Nr.	Pag.
BANNER E. H. W., *Instruments Électroniques de Mesure* (Instrumente electronice de măsură). Dunod, Paris, 1959. XIII + 480 p., trad. în l. franceză de M. Bouvier și A. Maître, după Electronic Measuring Instruments, Chapman-Hall Ltd. Londra, de *D. Pavelescu*	4	1330
БЕЗВЕСЕЛНЫЙ Е. С., *Сборник задач и заданий по теории механизмов и машин* (Culegere de probleme și teme de teoria mecanismelor și mașinilor). Издательство Харьковского университета, Харьков, 1958, 361 p., de *E. Bugaievski*	2	629
BRILLA J., *Anizotropické steny* (Grinzi-pereți anizotrope). Vyd slovenskej Akad. Vied. Bratislava, 1958, 290 p., de *P. P. Teodorescu*	3	958
BROÏDA V., *Automatisme. Régulation automatique. Servomécanismes* (Automatică. Regulatoare automate. Servomecanisme). Paris, Ed. Dunod, 1957, 308 p., de *Chr. Pelecudi*	2	630
BRONSTEIN I. N., SEMENDYAYEW K. A., *Taschenbuch der Mathematik* (Agendă matematică). Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1958, 548 p. și 427 fig., de *A. Năstase*	3	962

Nr. Pag.

BURTON RALPH, *Vibration and impact* (Vibrații și impact). Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, 1958, 310 p. 1 319

CEBERTOWICZ R., *Budowle Hydrotechniczne w swieth claswiadczen na modelach*, Warszawa, 1958, 330 p., de *D. Ionescu* 4 1327

* * * *Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt (D.V.L.)*: *Berichte* (Institutul german de încercări pentru aviație. Rapoarte). Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, de *T. Oroveanu* 4 1314

ДЬЯЧЕНКО П. С., *Применение радиоактивных изотопов в технике* (Folosirea izotopilor radioactivi în tehnică). Машгиз, Москва, 1958, 215 p., de *D. Pavelescu* 3 948

DOETSCH G., *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace Transformation* (Introducere în teoria și aplicația transformării Laplace). 1958, Birkhäuser Verlag Basel, 302 p., de *M. Mișicu* 4 1336

DONEL MANFRED, *Zur Bestimmung der Grenzen bei Poreninjektionen mit Zement und Chemikalien bei Verfestigungs- und Abdichtungsarbeiten im Bergbau und Baugewerbe* (Cu privire la determinarea limitelor de aplicabilitate a injecțiilor cu ciment și substanțe chimice pentru întărire și impermeabilizarea rocilor în lucrările miniere și de construcții). Freiburger Forschungshefte A 105, Bergbau. Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 64 p.+24 fig., *R. J. Bally* 3 956

GARNIER H. G., *Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale* (Problemele la limită ale fizicii matematice. Introducere în studiul lor general). Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1958, 234 p. + 5 fig. de *A. Năstase* 4 1337

GOODIER J. N., HODGE P. G., Jr. *Elasticity and Plasticity* (Elasticitate și plasticitate). New York, John Wiley & Sons Inc., 1958, 152 p. de *P. P. Teodorescu* 4 1334

GRAVINA P. B. J., *Teoria e calculo das cascas. Cascas di Revoluçāo* (Teoria și calculul plăcilor curbe subțiri. Plăci subțiri de rotație). Sao Paulo, 1957, 335 p., de *M. Soare* 4 1335

GREEN W. G., *Theory of machines* (Teoria mașinilor). Blackie & Son, Londra, 1956, XXII + 1034 p., 608 fig., de *C. Petrescu* 4 1328

* * * *Grenzschichtforschung-Boundary Layer Research, Iutam Symposium, Freiburg/Br.*, 1957 (Cercetări asupra stratului limită Simpozion Iutam, Freiburg/Br., 1957). Herausgegeben von H. Gärtler, Springer Verlag, Berlin Göttingen—Heidelberg, 1958, de *T. Oroveanu* 4 1317

GUYON J., *Béton précontraint. Étude théorique et expérimentale. Tome II. Constructions hyperstatiques* (Betonul precomprimat. Studiu teoretic și experimental. Vol. II, Construcții hiperstatice). Collection de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics — Eyrolles Éditeur Paris 1958, 817 p., de *M. Mihailescu* 4 1333

HANGAN M., *Betonul armat*. Ed. tehnică, București, 1957, 651 p. + anexe, 16 p. + XXX planșe, de *P. P. Teodorescu* 3 947

HART H., KARSTENS E., *Radioaktive Isotopen in der Dickenmessung* (Izotopii radioactivi în măsurarea grosimilor). VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 301 p., de *I. Iliuc* 2 633

ИВАШЧЕНКО Н. Н., *Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем* (Reglarea automată. Teoria și elementele sistemelor) Машгиз, 1958, 531 p., de *M. Mișicu* 4 1329

KOZESNIK J., *Dynamika stroju* (*Vybrané stati*) Dinamica mașinilor (Lucrări alese). Státni Nakadatelstvi Technike Literatury, Praga, 1958, 334, p. de *Chr. Pelecudi* 3 949

	Nr.	Pag.
LEIST K., WEBER J., *Spannungsoptische Untersuchungen von rotierenden Scheiben mit exzentrischen Bohrungen* (Cercetări fotoelastice asupra şaibelor în rotaţie prevăzute cu goluri excentrice). Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen, 1958, 60 p., de *M. Arcan*	2	632
ЛЕВИ И. И., *Движение речных потоков в нижних биефах гидротехнических сооружений* (Mişcarea curenţilor fluviali în bieful aval al construcţiilor hidrotehnice). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1955, 256 p., de *E. Răzvan*	2	949
LIBOIS L. J., *Faisceaux hertziens et systèmes de modulation* (Radiorelee şi sisteme de modulaţie). Éditions Chiron, Paris, 1958, 509, p., de *I. Iakab*	4	1331
ЛИТВИН Ф. И., *Некруглые зубчатые колеса* (Roţi dinţate circulare). . Машгиз, Москва-Ленинград, 1956, 310 p.,de *V. Nisipeanu*	1	315
ЛОМИЗЕ Г. М., НЕТУСИЛ А. В., *Электроосмотическое водопонижение* (Coborîrea electroosmotică a nivelului apei subterane). Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1958, 176 p., 69 fig., de *R. J. Bally*	3	951
LÜPKE M., *Gasturbinen und Strahlantriebe für Hubschrauber* (*Stand Juni 1956*). (Turbinele cu gaze şi sistemele utilizate pentru antrenarea rotoarelor de elicopter prin reacţie. Stadiul problemei în 1956). D. V. L. Bericht nr. 46, ianuarie Westdeutscher Verlag, Köln şi Opladen, 1958, 108 p., 70 fig. şi tabele, de *C. S. Ioan*	4	1321
Manual pentru calculul construcţiilor. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959, 1964 p., de *P. P. Teodorescu*	4	1332
ОНИАШВИЛИ О. Д., *Некоторые динамические задачи теории оболочек* (Cîteva probleme dinamice ale teoriei plăcilor curbe subţiri) Издательство Академии Наук, СССР, Москва, 1957, 196 p., de *M. Soare*	2	627
* * * *Основания и фундаменты* (Fundaţii şi terenuri de fundaţii). Buletin tehnico-ştiinţific, nr. 21, Moscova 1958. Editat de Academia de Construcţii şi Arhitectură U.R.S.S. Institutul de cercetări ştiinţifice pentru terenuri de fundaţii şi construcţii subterane, de *R. J. Bally*	3	954
ПРИГОРОВСКИЙ Н. И., ПРЕЙСС А. К., *Исследование напряжений и жесткости деталей машин на тензометрических моделях* (Cercetarea tensiunilor şi rigidităţii organelor de maşini pe modele prin tensometrie). Ed. Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., 1958, 232 p., de *M. Arcan*	3	957
* * * *Prudeni v lopatkovych strojich. Sbornik ustavu pro vyzkum strom.* (Problemele maşinilor cu palete. Culegere a Institutului pentru cercetarea maşinilor). Editura Academiei de ştiinţe cehoslovace, Praga, 1958, 453 p., de *T. Oroveanu*	1	312
* * * *Recommandations pour les essais des ventilateurs*, 1re partie. *Essais sur circuits normalisés* (Recomandări pentru încercarea ventilatoarelor. Partea 1-a. Încercări pe circuite normalizate). SBMA 508. Société Belge des Mécaniciens. Bruxelles 1958, 65 p., de *M. Ionescu*	4	1330
RICHTER W., *Flugmechanik* (Mecanica zborului). B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959, 296 p., de *T. Hacker*	4	1313
* * * *Сборник трудов лабораторий гидравлических машин. Выпуск VII* (Culegere de lucrări a laboratorului de maşini hidraulice). Академия Наук Украинской ССР Киев, 1958, 224 p., de *E. Răzvan*	4	1325
SCORER R. S., *Natural Aerodynamics* (Aerodinamica naturală). Pergamon Press London 1958, 312 p., de *S. Săndulescu*	2	628
СЕДОВ Л., *Методы подобия и размерности в механике* (Metodele similitudinii şi a dimensiunilor în mecanică). Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957, 367 p., de *M. Cazacu*	1	311
СИМВУЛИДИ Я. А., *Расчет балок на сплошном упругом основании* (Calculul grinzilor aşezate pe un mediu elastic continuu). Изд. Советская Наука, Москва, 1958, 304 p., 100 fig., de *R. J. Bally*	3	959

Nr. Pag.

* * * *Техническая гидромеханика. Труды ЛПИ, № 198* (Hidromecanica tehnică. Lucrările L. P. I., nr. 198). Машгиз, 1958, 220 p., de *E. Răzvan* 4 1325

THIELEMANN W., *Über die Beulung anisotroper Plattenstreifen* (Asupra voalării benzilor plane anizotrope). Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V. Bericht, no. 16, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1956, 70 p., de *P. P. Teodorescu* 1 318

THIELEMANN W., DREYER H. J., *Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger axial gedrückter Kreiszylinder* (Contribuţii la problema voalării cilindrilor circulari cu pereţi subţiri la compresiune axială). Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V. Bericht, no. 17, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen, 1956, 30 p., de *P. P. Teodorescu* 1 318

* * * *Труды Куйбышевского инженерно-строительного института* (Lucrările Institutului de construcţii din Kuibîşev). Куйбышевское книжное издательство, Том III, 1956 и том IV 1957, 528 p., de *E. Răzvan* . . 2 315

WEBER C, GÜNTHER W., *Torsionstheorie* (Teoria torsiunii), Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 306 p., de *M. Mişicu* 2 631

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ”

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том X 1959

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	№	Стр.
* * * Исследования по прикладной механике за годы народно-демократического режима	3	649

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

	№	Стр.
АНДРЕЙ Ш., Пневматический привод несущих винтов вертолета при висении	2	393
АНДРЕЙ Ш., Номограммы для расчета внутренних потерь в лонастях несущего винта вертолета с пневматическим приводом	3	663
БРЭДЯНУ П., Расчет сопротивления трения и теплопередачи в ламинарном пограничном слое вблизи критической точки двухгранного профиля	4	1021
ДУМИТРЕСКУ Л., О переносе тепла при течении разреженных газов	2	379
ИОНЕСКУ М. и ДАРИЕ Г., Аэродинамические характеристики одного класса тонких крыльев при однородном обтекании высшего порядка	2	367
ИОНЕСКУ М. и ДАРИЕ Г., О волновом сопротивлении и кренящем моменте крыльев с сверхзвуковыми передними кромками	3	683
КАРАФОЛИ Э. и СЭНДУЛЕСКУ ШЕРБАН, Аэродинамические характеристики гармонического колебательного движения элеронов в сверхзвуковом режиме	1	7
КАРАФОЛИ Э. и МАТЕЕСКУ Д., Сверхзвуковое обтекание несущей системы крыло — конический фюзеляж	2	335
КАРАФОЛИ Э. и НЭСТАСЕ АДРИАНА, Определение поверхности крыла с ребром раздела распределения давлений в сверхзвуковом потоке	4	995
МАРИНЕСКУ АЛЕКСЕ, О колебаниях противовращательной консоли у вертолетов с одним несущим винтом	1	77
МАРИНЕСКУ А. и СИЛЬВЯНУ Е., Динамический изгиб фюзеляжа вертолета	2	415
МАРИНЕСКУ А., О резонансной угловой скорости шарнирных лопастей вертолетных несущих крыльев	4	1051
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Антагонистические винты тэндем	1	41
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Упрощенный метод расчета крыла с жидким закрылком	2	351
ПАТРАУЛЯ Н. Н. и КЭМЭРЭШЕСКУ Н., Об увеличении подъемной силы благодаря расположению винтов на верхней поверхности крыла	4	1013

№ Стр.

ПЕТРЕ А., Аэроупругая дивергенция у вращающихся несущих поверхностей . . . 4 1041

СЭВУЛЕСКУ Ш., Поведение решений трехмерного пограничного слоя при типовых профилях скоростей и температур . . . 3 695

СЭНДУЛЕСКУ Ш., Аэродинамические характеристики треугольных крыльев при гармоническом колебательном движении в сверхзвуковом режиме . . . 3 711

ХАКЕР ТИБЕРИУ, О продольной устойчивости самолета в случае повторных возмущений . . . 1 69

ХАКЕР Т., Устойчивость самолета при уменьшенном числе степеней свободы . . . 3 655

ГИДРОМЕХАНИКА

ОРОВЯНУ ТЕОДОР, Приближенный метод исследования притока к скважинам в неоднородных пористых средах . . . 1 87

ОРОВЯНУ Т. и СИЛЬВЯНУ ЭЛЕОНОРА, О возрастании давления в скважине после ее закрытия . . . 4 1059

ПАСКАЛЬ Х., Метод определения проницаемости пористой среды . . . 4 1073

ХЫНКУ СИМИОН, Определение длины стабилизации течения жидкостей со свободной поверхностью в широких каналах с горизонтальным дном . . . 1 109

ХЫНКУ С., Минимальные потери энергии при смешении двух напорных потоков . . . 3 723

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

БОГДАН РАДУ и ПЕЛЕКУДИ КРИСТИАН, Синтез четырехзвенных механизмов на основе гармонического анализа . . . 1 141

БОГДАН Р., ПЕЛЕКУДИ К., КАЛМАЧУК Л. и АНТОНЕСКУ Г., О полюсном датчике для исследования механизмов . . . 3 771

БОГДАН Р. и ПЕЛЕКУДИ К., К кинематике диады Чебышева . . . 4 1113

БЭРЭНЕСКУ Г., Теория уравновешивания инерционных сил в рядных двухтактных многоцилиндровых двигателях с четным числом цилиндров и с равномерно распределенными зажиганиями . . . 4 1125

ВОЛЬМЕР Ж., Частные случаи кривой центров Бурместера с двойной точкой и их значение в теории механизмов . . . 2 425

ПЫРВУЛЕСКУ Н., Влияние длины ложной качалки на балансировку приводной качалки . . . 3 785

ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Уравновешивание на кратной частоте насосных агрегатов глубинной откачки . . . 4 1155

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Об устойчивости движения круглого подшипника с газовой смазкой . . . 1 117

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Расчет подшипников, состоящих из плоских поверхностей при турбулентном режиме смазки . . . 3 755

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Соображения о трехмерной смазке в турбулентном режиме . . . 4 1093

НИКА А., О кинематике роликоподшипников в случае гидродинамической смазки . . . 2 449

ТИПЕЙ Н. и НИКА А., Исследование рабочего режима подшипников. I. Влияние изменения вязкости . . . 3 737

ТИПЕЙ Н. и НИКА А., Исследования по режиму работы подшипников. II. Сумарные характеристики при переменной вязкости . . . 4 1079

УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

	№	Стр.
БЭЛАН Ш., РЭУТУ С., АРКАН М. и ПЕТКУ В., Исследование поведения конструкций путем испытаний на пластмассовых моделях . .	1	151
БЭЛАН Ш., РЭУТУ С. и ПЕТКУ В., В связи с расчетом второго порядка несущей способности рам	2	457
ДИНКЭ Ф. и МАНЯ В., О некоторых задачах устойчивости упругих стержней в плоском движении	2	511
ЛИБРЕСКУ ЛИВИУ, Несколько задач теории класса тонких неоднородных упругих оболочек	1	187
ЛИБРЕСКУ Л., К теории тонких упругих оболочек, составленных из ортотропных слоев, расположенных симметрично по толщине относительно срединной поверхности	3	837
ЛИБРЕСКУ Л., Тонкие конструкции кругловой цилиндрической формы, состоящие из изотропных упругих слоев	4	1235
МАДЖЕР В., Об упругом равновесии тонкостенных оболочек вращения применительно к прямому катеноиду вращения	3	867
МАНЯ ВАСИЛЕ и ПРОКОПОВИЧ ЕУДОКСИЕ, Расширенное решение задачи кручения турбинных лопаток	1	203
МИХЭЙЛЕСКУ МИРЧА и МИХЭЙЛЕСКУ ИВОН, Применение метода релаксации к расчету тонких оболочек	3	819
МИШИКУ М., О динамических задачах Буссинеска и Герца	2	467
МИШИКУ М., Динамическое кручение упругих стержней постоянного сечения	4	1171
СОАРЕ М., Об определении состояния мембранных напряжений в тонких криволинейных оболочках вращения	2	521
СТЭНЕСКУ Х. и ВИСАРИОН В., Распространение статико-геометрической аналогии на тонкие упругие оболочки с анизотропией материала	3	829
ПЕТКУ В., О решении систем уравнений упругого равновесия с матрицей типа Якоби	3	855
ПОНОМАРЕВ К. К., Использование теории матриц для расчета стержневых систем	4	1209
ПРИШКУ Р., Новые соображения о распределении гидростатического давления в арочных плотинах	4	1221
ПЫРВУЛЕСКУ НИКОЛАЕ С., Влияние длины шатуна на уравновешивание агрегатов	1	173
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Формулы продольного изгиба тяжелых стержней	2	497
ХАНГАН М., Метод расчета гиперстатических неопределимых конструкций в пластической области путем последовательных приближений	3	795

ВИБРАЦИИ

	№	Стр.
ИФРИМ МИХАИЛ, Прямой расчет собственных частот, подверженных землетрясениям зданий	1	211

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

	№	Стр.
ПАВЕЛЕСКУ Д. и ПАНТЕЛИМОН Т., Одновременная магнитная запись двух механических величин	2	575

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

	№	Стр.
КАРДОШ А., Измерение зазубренности и округления режущей кромки металлорежущего инструмента	3	917
ЛЭЗЭРЕСКУ И. и БОГДАН А., Геометрия резцов для обработки конических шестерен с закругленными зубьями	3	887
МАРКУ В. и ФРЕЙНД П., Исследование металлизации вогнутых поверхностей распылением	2	565
ПОПОВ М., МИТРИКЭ И. и ДЕЧИУ Е., Об оптимальных режимах резания металлов резцами, оснащенными минерало-керамическими пластинками или пластинками из твердых сплавов	1	219
ПОПОВ М., МИТРИКЭ М. и ДЕЧИУ Е., Исследование параметров резания металлов токарным резцом из быстрорежущей стали отечественного производства	2	539
ФЛОРЕСКУ К. и сотрудники, Визуализация некоторых физико-механических явлений, происходящих при проникании в грунт	4	1253

ЗАМЕТКИ

	№	Стр.
ВАСИЛЕСКУ-КАРПЕН Н., Энергетика запуска спутников. Коэффициент полезного действия реактивных двигателей	2	587
ДИНКЭ ФЛОРЯ и БОЙКУ НИКОЛАЕ, О кручении неоднородного цилиндрического стержня	1	265
ИОНЕСКУ ДАН Г., Непрерывно распределенный источник в круглом трубопроводе	1	249
ИОНЕСКУ ПАУЛ, Об одновременной эксплуатации нескольких пластов одной скважиной при упругом режиме	1	253
ИОНЕСКУ М. и ДАРИЕ Г., О поверхности крыла, соответствующей заданному распределению давлений	4	1263
НЭСТАСЕ АДРИАНА, О некоторых рекуррентных формулах расчета коэффициентов осевой скорости возмущения для однородного движения высшего порядка	1	241
ПЕЛЕКУДИ К. и БОГДАН Р., По поводу аналитического метода исследования плоских механизмов на основе комплексных переменных	2	603
СОАРЕ МИРЧА, О возможности установления некоторых формул расчета на продольный изгиб	1	257

РЕФЕРАТЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

	№	Стр.
ДУМИТРЕСКУ ЛУЧИАН, Ударная труба для аэродинамических исследований	1	271
ИОНЕСКУ МИХАЙ, Определение усилий от несимметричных нагрузок в сферических куполах	1	303
КАРДОШ А., Динамометр для резания, работающий с полосками для измерения длины	4	1283
МАРИНЕСКУ М., Улучшение износоустойчивости материалов путем поверхностных изменений	4	1269
НЕДЕЛЕСКУ ИОН, Сверхзвуковая труба при непрерывной работе в незамкнутой цепи	1	287
ПОПОВ М., МИТРИКЭ И. и ДЕЧИУ Е., Установка для централизации измерительных систем при исследовании металлорежущих станков и инструментов	3	923
МАРИН Г., Прибор для измерения температур	4	1311
РАШЕЕВ Д., Исследование оптимальных пар гильза-поршень нефтенасосов	3	927
ЧУЛАК АКАЦИУ, Исследование планетарного редуктора с внутренними зубцами и большим передаточным коэффициентом	4	1289

УЧАСТИЕ В НАУЧНОЙ ЖИЗНИ ЗА РУБЕЖОМ

	№	Стр.
МАНЖЕРОН Д. и БОГДАН Р., II Всесоюзное совещание по основным проблемам теории механизмов и машин, Москва, 24 — 28 марта 1958 г.	2	615
* * * Международный фестиваль научно-технического кинофильма — Будапешт, 1959	2	625

РЕЦЕНЗИИ

	№	Стр.
BANNER E. H. W., *Instruments Électroniques de Mesure.* Dunod, Paris, 1959, XIII + 480 p.. trad. en français par M. Bouvier et A. Maître, d'après Electronic Measuring Instruments, Chapman-Hall Ltd. London (*D. Pavelescu*)	4	1330
БЕЗВЕСЕЛНЫЙ Е. С., *Сборник задач и заданий по теории механизмов и машин.* Издательство Харьковского университета, Харьков, 1958, 361 стр.	2	629
BRILLA J., *Anizotropicke steny.* Vyd slovenskej Akad. Vied. Bratislava, 1958, 290 p. (*P. P. Teodorescu*)	3	958
BROÏDA V., *Automatisme. Régulation automatique. Servomécanismes.* Paris, Ed. Dunod, 1957, 308 p. (*Chr. Pelecudi*)	2	630
BRONSTEIN I. N. şi SEMENDYAYFW K. A., *Taschenbuch der Mathematik.* Leipzig, Taubner Verlagsgesellschaft 1958, 548 p., 427 fig. (*A. Năstase*)	3	962
BURTON RALPH, *Vibration and impact.* Addison-Wesley Publishing Co. INC, Reading, Massachusetts, 1958, 310 p.	2	319
CEBERTOWICZ R., *Budowle Hydrotechniczne w swieth claswiadczen na modelach* Panstwowe wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958, 330 p. (*D. Ionescu*)	4	1327
* * * *Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt* (D.V.L.): *Berichte.* Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1955—1956 (*T. Oroveanu*)	4	1314
ДЬЯЧЕНКО П. С., *Применение радиоактивных изотопов в технике.* Машгиз, Москва, 1958, 215 стр. (*D. Pavelescu*)	3	948
DOETSCH G., *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.* Birkhäuser-Verlag Basel, 1958, 302 p. (*M. Mişicu*)	4	1336
DONEL MANFRED, *Zur Bestimmung der Grenzen bei Poreninjektionen mit Zement und Chemikalien bei Verfestigungs- und Abdichtungsarbeiten im Bergbau und Baugewerbe.* Freiburger Forschungshefte A 105, Bergbau. Akademie-Verlag Berlin, 1958, 64 p., 24 fig. (*R. I. Bally*)	3	956
GARNIER H. G., *Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1958, 234 p., 5 fig. (*A. Năstase*)	4	1337
GOODIER J. N. şi HODGE P. G. JR., *Elasticity and Plasticity.* New York. John Wiley & Sons, Inc. 1958, 152 p. (*P. P. Teodorescu*)	4	1334
GRAVINA P. B. J., *Teoria e calculo das cascas. Cascas de Revolução.* Sao Paulo, 1957, 335 p. (*M. Soare*)	4	1335
GREEN W. G., *Theory of machines.* Blackie & Son, London, 1956, XXII + 1034 p. 608, f. (*C. Petrescu*)	4	1328
* * * *Grenzschichtforschung— Boundary Layer Research, Iutam Symposium Freiburg/Br.*, 1957. Herausgegeben von H. Görtler, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958 (*T. Oroveanu*)	4	1317
GUYON J., *Béton précontraint. Étude théorique et expérimentale. Tome II, Constructions hyperstatiques.* Collection de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Eyrolles Éditeur, Paris, 1958, 817 p. (*M. Mihailescu*)	4	1333
HANGAN M., *Betonul armat, Construcţii industriale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1958 651 + 16 p. + XXX planşe	3	947

	№	Стр.
HART H. şi KARSTENS E., *Radioaktive Isotopen in der Dickenmessung.* VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 301 p. (*I. Iliuc*)	2	633
ИВАШЧЕНКО М. Н., *Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем.* Машгиз, 1958, 531 стр. (*M. Mişicu*)	4	1329
KOZESTNIK J., *Dynamica stroju (vybrand stati)* statni Nakadatelstvi Technike Literatury, Praga, 1958, 334 p. (*Chr. Pelecudi*)	3	949
LEIST K. şi WEBER J., *Spannungsoptische Untersuchungen von rotierenden Scheiben mit exzentrischen Bohrungen.* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Westdeutscher Verlag Köln- Opladen, 1958, 60 p. (*M. Arcan*)	2	632
ЛЕВИ И. И., *Движение речных потоков в нижних бьефах гидротехнических сооружений.* Госэнергоиздат. Москва-Ленинград, 1955, (*E. Răzvan*)	3	949
LIBOIS L. J., *Faisceaux hertziens et systèmes de modulation.* Éditions Chiron, Paris, 1958, 509 p. (*I. Iakab*)	4	1331
ЛИТВИН Ф. И., *Некруглые зубчатые колеса.* Машгиз, Москва-Ленинград, 1956, 310 стр. (*V. Nisipeanu*)	1	315
ЛОМИЗЕ Г. М. и НЕТУШИЛ А. В., *Электроосмотическое водопонижение.* Госэнергоиздат. Москва-Ленинград, 1958, 176 стр., 69 рис. (*R. J. Bally*)	3	951
LÜPKE M., *Gasturbinen und Strahlantriebe für Hubschrauber (Stand Juni 1956).* D.V.L. Bericht Nr. 46, ianuarie, *Westdeutscher Verlag, Köln - Opladen,* 1958, 108 p., 70 fig. şi tabele. (*C. S. Ioan*)	4	1321
* * * *Manual pentru calculul construcţiilor.* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1959, 1964 (*P. P. Teodorescu*)	4	1332
ОНИАШВИЛИ О. Д., *Некоторые динамические задачи теорий оболочек* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1957, 196 стр. (*M. Soare*)	2	627
* * * *Основания и фундаменты.* Научно-технический бюллетень № 21, Москва, 1958. Научно исследовательский Институт оснований и подземных сооружений (*R. J. Bally*)	3	954
ПРИГОРОВСКИЙ Н. И. и ПРАЙСС А. К., *Исследование напряжений и жесткости деталей машин на тензометрических моделях.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1958, 232 стр. (*M. Arcan*).	3	957
* * * *Prodeni v lopatkovyc strojich.* Sbornik ustavu pro vyzkum stroiu. Praga, 1958, 453 p. (*T. Oroveanu*)	1	312
* * * *Recommandations pour les essais des ventilateurs, Ire partie. Essais sur circuits normalisés.* SBMA 508. Société Belge des Mécaniciens. Bruxelles, 1958, 65 p. (*M. Ionescu*)	4	1330
RICHTER W., *Flugmechanik.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959 296 p. (*T. Hacker*)	4	1313
* * * *Сборник трудов лабораторий гидравлических машин. Выпуск.* Академия Наук Украинской ССР, Киев, 1958, 224 стр. (*E. Răzvan*)	4	1325
SCORER R. S., *Natural Aerodynamics.* Pergamon Press London 1958, 312 p. (*S. Săndulescu*)	2	628
СЕДОВ Л., *Методы подобия и размерности в механике.* Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957, 367 стр. (*M. Cazacu*)	1	311
СИМВУЛИДИ И. А., *Расчет балок на сплошном упругом основании.* Изд. Советская Наука, Москва, 1958, 304 стр., 100 рис. (*R. J. Bally*)	3	959
* * * *Техническая гидромеханика.* Труды ЛПИ, № 198, Машгиз, 1958, 220 стр. (*E. Răzvan*)	4	1325

	№	Стр.
THIELEMANN W., *Über die Beulung anisotroper Plattenstreifen.* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt. E. V. Bericht No. 16, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1956, 70 p. (*P. P. Teodorescu*)	1	318
THIELEMANN W. şi DREYER H. J., *Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger axial gedrückter Kreiszylinder.* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt. E. V. Bericht No. 17, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen, 1956, 30 p. (*P. P. Teodorescu*)	1	318
. * . *Труды Куйбышевского инженерно-строительного института.* Куйбышевское книжное издательство, том III, 1956 и том IV, 1957, 528 стр. (*E. Răzvan*)	1	315
WEBER C. şi GÜNTHER W., *Torsionstheorie.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 306 p. (*M. Mişicu*)	2	631

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE »TRAIAN VUIA«

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome X 1959

INDEX ALPHABÉTIQUE

	N°	Page
Recherches de mécanique appliquée sous le régime de démocratie populaire	3	649

ÉTUDES

AÉROMÉCANIQUE

	N°	Page
ANDREI ȘT., Entraînement pneumatique des rotors d'hélicoptère en vol à point fixe	2	393
ANDREI ȘT., Nomographic charts for calculating internal losses in the blades of a pneumatically driven helicopter rotor	3	663
BRADEANU P., Calcul de la résistance de frottement et du transfert de chaleur dans la couche limite laminaire à proximité du point critique d'un profil diédrique	4	1021
CARAFOLI E., SĂNDULESCU Ș., Caractéristiques aérodynamiques des ailerons ayant un mouvement oscillatoire harmonique en régime supersonique	1	7
CARAFOLI E., MATEESCU D., Écoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique	3	335
CARAFOLI E., NĂSTASE ADRIANA, Détermination de la surface d'une aile à arête de séparation de la distribution des pressions, en courant supersonique	4	995
DUMITRESCU L., Sur le transfert de chaleur dans l'écoulement en régime de molécules libres	2	379
HACKER T., Sur la stabilité longitudinale de l'avion lors des perturbations répétées	2	69
HACKER T., Aircraft stability with a reduced number of freedom degrees.	3	655
IONESCU M., DARIE GH., Les caractéristiques aérodynamiques d'une certaine classe d'ailes minces en écoulement homogène d'ordre supérieur	2	367
IONESCU M., DARIE GH. Sur la résistance d'onde et le moment de roulis des ailes à bords d'attaque supersoniques	3	683
MARINESCU AL., Sur les vibrations de la console anticouple dans les hélicoptères à rotor unique	1	77
MARINESCU AL., SILVEANU E., Flexion dynamique des fuselages d'hélicoptère	2	415
MARINESCU AL., Sur la vitesse angulaire de résonance des pales articulées des rotors d'helicoptère	4	1051
PATRAULEA N. N., Hélices en tandem antagonistes	1	41
PATRAULEA N. N., Une méthode simplifiée pour le calcul de l'aile à volet fluide	2	351
PATRAULEA N. N., CĂMĂRĂȘESCU N., On the increased lift obtained by placing the propellers on the upper side of the wing	4	1013
PETRE A., Aeroelastic divergence of rotating lifting-surfaces in rotation and rototranslation	4	1041

	N°	Page
SĂNDULESCU Ș., Caractéristiques aérodynamiques des ailes triangulaires, en mouvement oscillatoire, harmonique, en régime supersonique	3	711
SĂVULESCU ȘT., Résultats fournis par certaines solutions de la couche-limite tridimensionnelle, dans l'hypothèse des profils-type de vitesse et de température	3	695
HYDROMÉCANIQUE		
HÎNCU S., Détermination de la longueur de stabilisation du mouvement des fluides à surface libre dans des canaux larges, au fond horizontal	1	109
HÎNCU S., Pertes minima d'énergie lors du mélange de deux courants sous pression	3	723
OROVEANU T., Méthode d'approximation pour l'étude de l'écoulement vers les puits de pétrole, à travers des milieux poreux non homogènes	1	87
OROVEANU T., SILVEANU E., Sur la remontée de pression dans un puits après sa fermeture	4	1059
PASCAL H., Une méthode de détermination de la perméabilité d'un milieu poreux	4	1073
THÉORIE DES MÉCANISMES		
BĂRĂNESCU G., A theory of the balancing of inertia forces for in-line multicylinder two-stroke engines with even number of cylinders and uniformly distributed ignition	4	1125
BOGDAN R., PELECUDI CHR., Synthesis of four bar mechanisms on the basis of harmonic analysis	1	141
BOGDAN R., PELECUDI CHR., CALMACIUC L., ANTONESCU GR., On the polar transducer for the investigation of mechanisms	3	771
BOGDAN R., PELECUDI CHR., Contributions to the kinematics of Chebychev's dyad	4	1113
PÎRVULESCU N., Influence de la longueur du balancier sur l'équilibrage de l'unité de pompage	3	785
PÎRVULESCU N., L'équilibrage de fréquence multiple des installations profondes de pompage	4	1155
VOLMER J., Les cas particuliers de la courbe des centres de Burmester, à point double, et leur importance pour la théorie des mécanismes	2	425
LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE		
CONSTANTINESCU V. N., Sur la stabilité des paliers circulaires lubrifiés aux gaz	1	117
CONSTANTINESCU V. N., Le calcul des paliers composés de surfaces planes, lubrifiés en régime turbulent	3	755
CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur la lubrification tridimensionnelle en régime turbulent	4	1093
NICA AL., Considérations sur la cinématique des paliers à rouleaux dans le cas de la lubrification hydrodynamique	2	449
TIPEI N., NICA AL., Recherches sur les régimes de fonctionnement des paliers. I. Influence de la variation de la viscosité	3	737
TIPEI N., NICA AL., Investigations on the operating conditions of journal bearings. II. Global characteristics in case of variable viscosity	4	1079
ÉLASTICITÉ – PLASTICITÉ – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX		
BĂLAN ȘT., RĂUTU S., ARCAN M., PETCU V., Étude du comportement des constructions par des essais sur maquettes en matières plastiques	1	151

	N°	Page
BĂLAN ŞT., RĂUTU S., PETCU V., Sur le calcul du second ordre de la capacité portante des cadres	2	457
DINCĂ F., MANEA V., Quelques problèmes de stabilité des barres élastiques en mouvement plan	2	511
HANGAN M., Une méthode de calcul des structures hyperstatiques dans le domaine élasto-plastique	3	795
LIBRESCU L., Quelques problèmes de la théorie d'une classe de coques élastiques minces, non homogènes	1	187
LIBRESCU L., A propos de la théorie des structures élastiques minces, constituées de couches orthotropes, symétriquement disposées sur l'épaisseur par rapport à la surface médiane	3	837
LIBRESCU L., Structures minces de forme cylindrique circulaire, constituées de couches élastiques isotropes	4	1235
MAGER V., Sur l'équilibre élastique des voûtes minces de rotation, avec application au caténoïde droit de rotation	3	86
MANEA V., PROCOPOVICI E., Extension de la solution du problème de la torsion des aubes de turbine	1	203
MIHAILESCU M., MIHAILESCU Y., Application of the relaxation method to the calculation of thin shells	3	819
MIŞICU M., Des problèmes dynamiques de Boussinesq et Hertz	2	467
MIŞICU M., Torsion dynamique des barres élastiques à section constante	4	1171
PETCU V., Solution des systèmes d'équations d'équilibre élastique à matrices du type de Jacobi	3	855
PÎRVULESCU N., Influence de la bielle de longueur finie sur l'équilibrage de l'unité de pompage	1	173
PÎRVULESCU N. S., Formules de flambage pour les barres lourdes	2	497
PONOMAREV K. K., Use of the matrix theory to the computation of bar systems	4	1209
PRIŞCU R., Nouvelle contribution au problème de la répartition de la pression hydrostatique dans les barrages-voûtes	4	1221
SOARE M., Considération sur le calcul des contraintes de membrane dans les coques de révolution	2	521
STĂNESCU CR., VISARION V., Extension de l'analogie statico-géométrique aux coques élastiques minces, à anisotropie du matériel	3	829

VIBRATIONS

	N°	Page
IFRIM M., Calcul direct des fréquences propres des bâtiments soumis à l'action des séismes	1	211

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

	N°	Page
FLORESCU C. und Mitarb., Sichtbarmachung einiger physikalisch-mechanischer Erscheinungen bei der Bodendurchdringung	4	1253
KARDOS A., Mesure des aspérités et du rayon de la pointe des outils de tour	3	917
LĂZĂRESCU I., BOGDAN A., Beiträge zur Geometrie der Werkzeuge zur Bearbeitung konischer Zahnräder mit kreisförmiger Zahnung	3	887
MARCU V., FREUND P., Recherches sur la métallisation des surfaces concaves par projection	2	565
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Les régimes optimes de coupe des métaux avec des outils de coupe en céramique ou carbures métalliques	1	219
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Étude sur les paramètres de coupe à l'aide d'outils de tour en acier rapide roumain	2	539

N° Page

TECHNIQUE DES MESURES

PAVELESCU D., PANTELIMON TH., Simultaneous recording of two mechanical quantities 2 575

NOTES

DINCĂ F., BOICU N., De la torsion des barres cylindriques non homogènes 1 265
IONESCU GH. D., Source à répartition continue située dans une conduite circulaire 1 249
IONESCU P., Sur l'exploitation simultanée d'un système de couches, par une seule sonde, en régime élastique 1 253
IONESCU M., DARIE GH., Sur la surface de l'aile correspondant à une distribution de pression donnée 4 1263
NĂSTASE ADRIANA, Sur certaines formules de récurrence pour le calcul des coefficients de la vitesse axiale de perturbation, lors des mouvements homogènes d'ordre supérieur 1 241
PELECUDI CHR., BOGDAN R., On the analytical method for investigating plane mechanisms on the basis of complex variables 2 603
SOARE M., De la possibilité d'établir des formules pour déterminer les dimensions de résistance au flambage 1 257
VASILESCU-KARPEN N., Some energy considerations on the launching of artificial satellites. Efficiency of rocket engines 2 587

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

CSULAK ACAŢIU, MAROŞ D., Untersuchung eines Umlauf-Getriebes mit Innenverzahnung und hohem Übersetzungsverhältnis 4 1289
DUMITRESCU L., A shock-tube for aerodynamic research. 1 271
KARDOS A., Banddynamometer für Dehnungsmessungen bei spanabhebender Bearbeitung 4 1283
IONESCU M., Détermination des efforts dans les coupoles sphériques sous l'action de charges asymétriques 1 303
MARINESCU M., Improved behaviour of materials to wear by surface modifications 4 1269
NEDELESCU I., Au sujet d'une soufflerie supersonique à fonctionnement continu en circuit ouvert 1 287
POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., Banc centralisé de système de mesure pour l'étude des machines et outils de coupe 3 923
MARIN GH., Appareil de mesure des températures 4 1311
RAŞEEV D., Études de quelques couples optima chemise-piston dans les pompes d'extraction 3 927

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

MANGERON D., BOGDAN R., 2ᵉ Conférence unionale sur les problèmes fondamentaux de la théorie des mécanismes et des machines — Moscou, 24—28 mars 1958 . . . . 2 615
* * * Festival international du film scientifique et technique — Budapest, 1959 2 625

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

BANNER E.H.W., *Instruments Électroniques de Mesure*. Dunod, Paris, 1959. XIII + 480 p., trad. en français par M. Bouvier et A. Maître d'après Electronic Measuring Instruments, Chapman-Hall Ltd., London (*D. Pavelescu*) 4 1330

	N°	Page
БЕЗВЕСЕЛНЫЙ Е. С., *Сборник задач и заданий по теории механизмов и машин.* Издательство Харьковского университета, Харьков, 1958, 361 стр. (*E. Bugaevski*)	2	629
BRILLA J., *Anizotropické steny.* Vyd. slovenskej Akad. Vied., Bratislava, 1958, 290 p. (*P. P. Teodorescu*)	3	958
BROÏDA V., *Automatisme. Régulation automatique. Servomécanismes.* Paris, Ed. Dunod, 1957, 308 p. (*Chr. Pelecudi*)	2	630
BRONSTEIN I. N., SEMENDYAYEW K. A., *Taschenbuch der Mathematik.* Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1958, 548 p., 427 fig. (*A. Năstase*)	3	962
BURTON RALPH, *Vibration and impact.* Addison-Wesley Publishing Co. INC, Reading, Massachusetts, 1958, 310 p.	1	319
GEBERTOWICZ R., *Budowle Hydrotechniczne w swieth classwiadczen na modelach.* Panstwowe wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958, 330 p. (*D. Ionescu*)	4	1327
* * * *Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt* (D.V.L.): *Berichte,* Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen (*T. Oroveanu*)	4	1314
ДЬЯЧЕНКО П. Е., *Применение радиоактивных изотопов в технике.* Машгиз, Москва, 1958, 215 стр. (*Dan Pavelescu*)	3	948
DOETSCH G., *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace Transformation.* 1958, Birkhäuser Verlag, Basel, 302 p. (*M. Mișicu*)	4	1336
DONEL MANFRED, *Zur Bestimmung der Grenzen bei Poreninjektion mit Zement und Chemikalien bei Verfestigungs- und Abdichtungsarbeiten im Bergbau und Baugewerbe.* Freiburger Forschungshefte A 105, Bergbau, Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 64 p. + 24 fig. (*R. J. Bally*)	3	956
GARNIER H. G., *Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1958, 234 p., 5 fig. (*A. Năstase*)	4	1337
GOODIER J. N., HODGE P. G. JR., *Elasticity and Plasticity.* New York, John Wiley Sons, Inc. 1958, 152 p. (*P. P. Teodorescu*)	4	1334
GRAVINA P.B.J., *Teoria e calculo das cascas. Cascas de Revolução.* Sao Paulo, 1957, 335 p. (*M. Soare*)	4	1335
GREEN W. G., *Theory of machines.* Blackie and Son, London, 1956, XXII + 1034 p., 608 fig. (*C. Petrescu*)	4	1328
* * * *Grenzschichtforschung-Baundary Layer Research. Iutam Symposium Freiburg/Br.,* 1957. Herausgegeben von H. Görtler. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958 (*T. Oroveanu*)	4	1317
GUYON J., *Béton précontraint. Étude théorique et expérimentale. Tome II: Constructions hyperstatiques.* Collection de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Eyrolles Editeur, Paris, 1958, 817 p. (*M. Mihailescu*)	4	1333
HANGAN M., *Betonul armat. Construcţii industriale* (Le béton armé. Constructions industrielles). Ed. Tehnică, Bucarest, 1957, 651 p. + annexe 16 p. + XXX planches. (*P. P. Teodorescu*)	3	947
HART H., KARSTENS E., *Radioaktive Isotopen in der Dickenmessung.* VEB Verlag Technik, Berlin, 1958, 301 p. (*I. Iliuc*)	2	633
ИВАШЧЕНКО М. Н., *Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем.* Машгиз, 1958, 531 стр. (*N. Mișicu*)	4	1329
KOZESNIK J., *Dynamica stroju* (*vybraneé stati*). Státni Nakadatelstvi Technike Literatury, Prague, 1958, 334 p. (*Chr. Pelecudi*)	3	949
LEIST K., WEBER J., *Spannungsoptische Untersuchungen von rotierenden Scheiben mit exzentrischen Bohrungen.* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen, 1958, 60 p. (*M. Arcan*)	2	632

	No.	Page
ЛЕВИ И. И., *Движение речных потоков в нижних биефах гидротехнических сооружений.* Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1955, 256 стр. (*E. Răzvan*)	3	949
LIBOIS L. J., *Faisceaux hertziens et systèmes de modulation.* Editions Chiron, Paris, 1958, 509 p. (*I. Iakab*)	4	1331
ЛИТВИН Ф. И., *Некруглые зубчатые колеса.* Машгиз, Москва-Ленинград, 1956, 310 стр. (*V. Nisipeanu*)	1	315
ЛОМИЗЕ Г. М. и НЕТУШИЛ А. В., *Электроосмотическое водопонижение.* Госэнергоиздат. Москва-Ленинград, 1958, 176 стр., 69 рис. (*R. J. Bally*)	3	951
LÜPKE M., *Gasturbinen und Strahlantrieb für Hubschrauber. Stand Juni 1956.* D.V.L. Bericht Nr. 46, ianuarie, Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen, 1958, 108 p., 70 fig. und Tabellen, (*C. S. Ioan*)	4	1321
* * * *Manual pentru calculul construcțiilor* (Manuel pour le calcul des constructions). Ed. Tehnică, Bucarest, 1959, 1964 p. (*P. P. Teodorescu*)	4	1332
ОНИАШВИЛИ О. Д., *Некоторые динамические задачи теории оболочек.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1957, 196 стр. (*M. Soare*)	2	627
* * * *Основания и фундаменты.* Научно-технический бюллетень № 21, Москва, 1958. Научно-исследовательский Институт Оснований и подземных сооружений (*R. J. Bally*)	3	954
ПРИГОРОВСКИЙ Н. И. и ПРЕЙСС А. К., *Исследование напряжений и жесткости деталей машин на тензометрических моделях.* Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1958, 232 стр. (*M. Arcan*)	3	957
* * * Prudeni v lapatkovych strojich-Sbornik ustavu pro vyzkum Strom, Editions de l'Académie des Sciences Tchecoslovaque, Prague, 1958, 453 pag. (*T. Oroveanu*)	1	312
* * * *Recommandations pour les essais des ventilateurs,* 1re partie : *Essais sur circuits normalisés.* SBMA 508. Société Belge des Mécaniciens. Bruxelles, 1958, 65 pag. (*M. Ionescu*)	4	1330
RICHTER W., *Flugmechanik,* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959 (*T. Hacker*)	4	1313
* * * *Сборник трудов лаборатории гидравлических машин.* Выпуск VII, Академия Наук Украинской ССР, Киев, 1958, 224 р. (*E. Răzvan*)	4	1325
SCORER R. S., Natural Aerodynamics, Pergamon Press London, 1958, 312 pag. (*S. Săndulescu*)	2	628
СЕДОВ Л., *Методы подобия и размерности в механике.* Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва. 1957, 367 р. (*M. Cazacu*)	1	311
СИМВУЛИДИ И. А., *Расчет балок на сплошном упругом основании.* Изд. Советская Наука, Москва, 1958, 304 стр., 100 рис. (*R. J. Bally*)	3	959
* * * *Техническая гидромеханика.* Труды ЛПИ, № 198, Машгиз, 1958, 220 стр. (*E. Răzvan*)	4	1325
THIELEMANN W., *Über die Beulung anisotroper Plattenstreifen.* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt. e. V., Bericht Nr. 16, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1956, 70 p. (*P. P. Teodorescu*)	1	318
THIELEMANN W., DREYER H. J., *Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger axial gedrückter Kreiszylinder.* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., Bericht Nr. 17, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1956, 30 p. (*P. P. Teodorescu*)	1	318
* * * *Труды Куйбышевского инженерно-строительного института.* Куйбышевское книжное издательство, том III, 1956 и том IV, 1957, 528 стр. (*E. Răzvan*)	1	315
WEBER C., GÜNTHER W., *Torsionstheorie,* Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig; Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 306 p. (*M. Mișicu*)	2	631

I. P. 2, c. 3739